|  |  |
| --- | --- |
| SỞ GD – ĐT TỈNH BÀ RỊA – VŨNG TÀU  **TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN** | **KỲ THI OLYMPIC TRUYỀN THỐNG 30 THÁNG 4**  **LẦN THỨ XXVIII – NĂM 2024** |

**ĐÁP ÁN CHÍNH THỨC**

MÔN : **TOÁN** – KHỐI : **10**

**Câu 1 (4,0 điểm).** Cho hai đa thức và  Gọi  là một nghiệm thực của đa thức .

1. Chứng minh 
2. Chứng minh 

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Điểm** |
| a) Do  là nghiệm của  suy ra  Ta có . | **2,0** |
| b) Khi đó | **1,0** |
| Mà . | **1,0** |

**Câu 2 (3,0 điểm).** Kí hiệu  là tập hợp các số nguyên. Tìm tất cả hàm số  sao cho  và với mọi số nguyên  thì 

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Điểm** |
| Kí hiệu  là phép thế cặp số  vào mệnh đề | **0,5** |
| Trường hợp 1 : vô lý. | **0,5** |
| Trường hợp 2 :  là hàm chẵn. | **0,5** |
| Ta chứng minh  bằng quy nạp.  Thật vậy  mệnh đề đúng. | **0,5** |
| Giả sử  và  Khi đó :  mệnh  đề được chứng minh. | **0,5** |
| Từ đây ta được  Thử lại thấy đúng. | **0,5** |

**Câu 3 (4,0 điểm).** Xét hai số nguyên tố *p*, *q* thay đổi sao cho tồn tại số nguyên dương  thỏa mãn đẳng thức  Tìm tập hợp giá trị của biểu thức .

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Điểm** |
| **Cách 1.** | **1,0** |
| Có  và , . | **1,0** |
| Vế trái là phân số tối giản nên . Do đó . | **1,0** |
| Các bộ  thỏa mãn là | **1,0** |

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Điểm** |
| **Cách 2.** Ta có | **1,0** |
| Suy ra  và | **1,0** |
| Suy ra  do  Do đó . | **1,0** |
| Các bộ  thỏa mãn là | **1,0** |

**Câu 4 (5,0 điểm).** Cho tam giác  nhọn  có  là trung điểm  Giả sử đường tròn  cắt các đường thẳng  lần lượt tại  (khác 

1. Chứng minh 
2. Đường thẳng qua  song song với  cắt  tại  (khác ). Chứng minh các đường thẳng  và tiếp tuyến tại  của  đồng quy.
3. Gọi  là giao điểm của các đường thẳng  và  là điểm đối xứng của  qua  Chứng minh 

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Điểm** |
|  |  |
| a) Ta có | **1,0** |
| b) Do  và  nên | **0,5** |
| Kẻ đường kính  của  Ta có tứ giác  điều hòa. | **0,5** |
| Gọi  là giao điểm các tiếp tuyến tại  của  Suy ra  đi qua | **0,5** |
| Ta có  nên  là đường trung trực của  Suy ra  đi qua  Vậy  và tiếp tuyến tại  của  đồng quy tại | **0,5** |
| c) Gọi  là trung điểm của  thì  là đường trung bình của tam giác  nên | **0,5** |
| Ta có  đi qua trung điểm  (đường thẳng Gauss) nên  Suy ra | **1,0** |
| Suy ra | **0,5** |

**Câu 5 (4,0 điểm).** Trên bảng có viết các số  gồm  số nguyên dương đầu tiên. Người ta thực hiện liên tiếp thao tác sau : mỗi lần chọn tùy ý hai số  ở trên bảng sao cho  rồi xóa hai số này đi và thay bởi hai số  Nếu từ các số trên bảng mà không thể thực hiện được thao tác như trên, ta gọi đó là trạng thái dừng.

1. Chứng minh dù có thực hiện như thế nào theo quy luật trên thì sau hữu hạn thao tác cũng sẽ đạt được trạng thái dừng.
2. Gọi  là số thao tác thực hiện để đạt trạng thái dừng. Tìm giá trị nhỏ nhất của 

|  |  |
| --- | --- |
| **Nội dung** | **Điểm** |
| a) Ở thời điểm thứ  ta kí hiệu  là tổng bình phương các số trên bảng. Giả sử ta chọn hai số  với  Khi đó | **1,0** |
| Giả sử quá trình thực hiện được vô hạn lần, sau mỗi lần đại lượng  giảm ít nhất  đơn vị. Như vậy đến lúc nào đó đại lượng này sẽ nhận giá trị âm. Tuy nhiên đại lượng tổng bình phương luôn không âm  vô lý. Vậy đến lúc nào đó sẽ đạt trạng thái dừng. | **1,0** |
| b) Ở trạng thái dừng, các số trên bảng hơn kém nhau không quá  đơn vị. Giả sử lúc đó có  số  và  số  với  Do tính bất biến của tổng các số trên bảng nên ta được : | **0,5** |
| Dễ thấy  Như vậy trạng thái dừng bao gồm  số  và  số | **0,5** |
| Để đạt trạng thái dừng thì số  phải chịu “tác động” ít nhất  lần (để đến được số ), tương tự số  chịu “tác động” ít nhất  lần, ..., số  chịu “tác động” ít nhất  lần, số  chịu “tác động” ít nhất  lần (để đến được số ), ..., số chịu “tác động” ít nhất  lần.  Do đó số sự “tác động” ít nhất là  Tuy nhiên mỗi bước thực hiện thao tác thì “tác động” vào hai số. Do đó số thao tác thực hiện ít nhất là | **0,5** |
| Ta chỉ ra một cách thực hiện thao tác mà  như sau :  Chọn hai số  và thực hiện liên tiếp  bước để đưa đến bộ  Chọn hai số  và thực hiện liên tiếp  bước để đưa đến bộ  ...  Chọn hai số  và thực hiện  bước để đưa đến bộ  Khi đó số thao tác thực hiện là  Vậy giá trị nhỏ nhất của  là | **0,5** |

**-------------------HẾT-------------------**