|  |  |
| --- | --- |
| **SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ TĨNH**    **ĐỀ THI CHÍNH THỨC** | **KỲ THI TUYỂN VÀO LỚP 10**  **TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÀ TĨNH**  **NĂM HỌC: 2021 – 2022**  **MÔN: TOÁN CHUYÊN**  **Thời gian làm bài: 150 phút** |

**Câu 1. (1, 5 điểm)**

Cho  lả các số thực đôi một phân biệt, rút gọn biểu thức:



**Câu 2. (2, 5 điểm)**

a) Giai phương trinh: .

b) Giải hệ phương trình: .

**Câu 3. (2, 5 điểm)**

a) Tìm các số nguyên  thỏa mãn .

b) Cho  là các số thực dương thỏa mãn . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:



**Câu 4. (2, 5 điểm).**

Cho nửa đường tròn tâm  đường kính . Gọi  là điểm chính giữa cung . Trên cung lớn  của đường tròn tâm  bán kính  lấy điểm  sao cho tam giác  nhọn. Gọi  lần lượt là giao điểm của  với nửa đường tròn đường kính  khác  khác  ):  là giao điểm của  với .

a) Chứng minh  và  là các tam giác cân.

b) Chứng minh  là trực tâm của tam giác .

c) Gọi  là trung điểm của , tính tỉ số .

**Câu 5. (1, 0 điểm)**

Cho tập hợp , chia tập hơp  thành hai tập hợp khác rỗng và không có phần tử chung. Chứng minh rằng với mọi cách chia thì luôn tồn tại 3 số  trong một tập hợp thỏa mãn .

**---------------------HẾT---------------------**

*Họ và tên thí sinh:................................................Số báo danh: ............................*

**HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI CHUYÊN TOÁN HÀ TĨNH**

**Câu 1. (1, 5 điểm)**

Cho  lả các số thực đôi một phân biệt, rút gọn biểu thức:



**Lời giải**

Ta biết rẳng nểu  thi  do đó: 

Ta có:



Đặt  khi đó ta có:



Vậy .

**Câu 2. (2, 5 điểm)**

a) Giai phương trinh: .

b) Giải hệ phương trình: .

**Lời giải**

a) Điều kiện: . Phương trình tương đương:





Do  vô nghiệm.

Vây phương trình đã cho có nghiệm .

b) Điều kiện: 

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương:



Với , thay vào phương trình thứ hai ta được: .

Nếu 

Với , ta thấy phương trinh vô nghiệm và phương trình nhận một nghiệm là .

Do đó xét , phương trinh tương đương:



Ta có:



Do đó trong trường hợp này hệ có ba nghiệm: .

Với (loại)

Vây hệ đã cho có ba nghiệm: .

**Câu 3. (2, 5 điểm)**

a) Tìm các số nguyên  thỏa mãn .

b) Cho  là các số thực dương thỏa mãn . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:



**Lời giải**

a) Do  nên suy ra , suy ra . Ta xét các trường hợp sau.

- Trường hợp 1. Xét  hoặc  hoặc , khi đó tồn tại  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Trường hợp 2. Xét  không thuộc tập hợp . Khi đó . Ta có các khả năng sau:

+ Nếu  là số lẻ thì . Do đó để tích là số chính phương thì  là ba số chính phương. Nhưng  là hai số nguyên liên tiếp nên không thể cùng là số chính phương.

+ Nếu  là số chẵn thì . Do đó để tích trên là số chính phương thì  với  là các số nguyên dương và . Suy ra 

Không thỏa mãn do a, b, c nguyên dương

Các cặp số nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán là 

b) Đặt





Theo bất đẳng thức AM-GM





Tương tự





 

Dấu “=” xảy ra khi a = 2 hay x = y =1

**Câu 4. (2, 5 điểm).**

Cho nửa đường tròn tâm  đường kính . Gọi  là điểm chính giữa cung . Trên cung lớn  của đường tròn tâm  bán kính  lấy điểm  sao cho tam giác  nhọn. Gọi  lần lượt là giao điểm của  với nửa đường tròn đường kính  khác  khác  ):  là giao điểm của  với .

a) Chứng minh  và  là các tam giác cân.

b) Chứng minh  là trực tâm của tam giác .

c) Gọi  là trung điểm của , tính tỉ số .



**Lời giải**

a) Vì  là điểm chính giữa cung  nên tam giác  vuông cân tại .

Khi đó: , hay 

Mặt khác .

 vuông tại  có  nên  vuông cân tại .

Chứng minh tương tự ta cũng có:  và  vuông tại  nên  vuông cân tại .

Từ đây suy ra điều phải chứng minh.

b) Ta có:  do cùng phụ với .

Mà  do đó  hay  là phân giác của tam giác vuông cân . Do đó  hay .

Chứng minh tương tự ta cũng có .

Do đó  là trực tâm của tam giác .

c) Do  nên dễ dàng suy ra  là trực tâm tam giác .

Khi đó ta có  do cùng vuông góc với  và  do cùng vuông góc với .

Tứ giác MINJ là hình bình hành, suy ra  cũng là trung điểm của , dẫn đến .

Gọi  là điểm đối xứng của  qua , khi đó  nội tiếp đường tròn đường kính  có  là trực tâm của  nên theo bổ để quen thuộc thì tứ giác  là hình bình hành, suy ra  thẳng hàng.

Từ đó  là đường trung bình của . Mặt khác  đồng dạng với  nên: .

 có  nên  vuông cân tại .

Do đó 

Vậy  chung.

**Câu 5. (1, 0 điểm)**

Cho tập hợp , chia tập hơp  thành hai tập hợp khác rỗng và không có phần tử chung. Chứng minh rằng với mọi cách chia thì luôn tồn tại 3 số  trong một tập hợp thỏa mãn .

**Lời giải**

Ta chứng minh bẳng phương pháp phản chứng. Giả sử không tồn tại tại 3 số  trong hai tập hợp thỏa mãn . Đặt hai tập hợp đó lần lượt là  và .

Vì trong mỗi tập hợp không tồn tại ba số  thỏa mãn  nên bộ số  đều không thể cùng thuộc  hoặc .

Không mất tính tổng quát giả sử .

Ta xét hai trường hợp:

TH1: . Suy ra .

Nếu  và , mâu thuẫn do  đều thuộc .

Nếu . Ta xét tiếp hai trường hợp:

, mâu thuẫn do  đều thuộc .

, mâu thuẩn do  đều thuộc .

TH2: . Suy ra  và  mâu thuẫn do  đều thuộc .

Vây trong mọi trường hợp đều tồn tại bộ ba số  trong một tập họp thỏa mãn .