

ĐS6.CHUYÊN ĐỀ 6-SỐ CHÍNH PHƯƠNG

CHỦ ĐỀ 2: DÙNG CÁC TÍNH CHẤT CHIA HẾT VÀ SỐ DƯ ĐỂ CHỨNG MINH MỘT SỐ KHÔNG PHẢI LÀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Số chính phương chia hết cho 2^2 thì chia hết cho 4 .
2. Số chính phương chia hết cho 3^2 thì chia hết cho 9 .
3. Số chính phương chia hết cho 5^2 thì chia hết cho 25 .
4. Số chính phương chia hết cho 8^2 thì chia hết cho 16 .

➤ Tổng quát: Số chính phương chia hết cho P^{2n+1} thì chia hết cho P^{2n+2} (P là số nguyên tố, $n \in \mathbb{N}$)

*** Phương pháp chứng minh một số không là số nguyên tố bằng quan hệ chia hết:**

Ta có: $A:p$ và p là số nguyên tố mà $A \nmid p^2 \Rightarrow A$ không phải là số chính phương.

*** Để chứng minh N không phải một số chính phương ta có thể:**

- Chứng minh N có tận cùng $2;3;7;8$ hoặc N tận cùng là $2k+1$ chữ số 0 .
- Chứng minh N chứa số nguyên tố với số mũ lẻ.
- Xét số dư khi N chia cho 3 hoặc 4 hoặc 5 hoặc 8 , ... Chẳng hạn N chia 3 dư 2 hoặc chia 4 dư 2 ; hoặc chia 5 dư 3 thì N không là số chính phương.
- Chứng minh N nằm giữa hai số chính phương liên tiếp.

PHẦN II. CÁC BÀI TẬP

Các dạng bài chứng minh một số không phải là số chính phương

DẠNG 1: A chia hết cho số nguyên tố P nhưng A không chia hết P^2

Bài 1: Chứng minh rằng nếu một số có tổng các chữ số là 2004 thì số đó không là số chính phương?

Lời giải

Số có tổng các chữ số là 2004 thì số đó chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9 , do đó số có tổng các chữ số là 2004 không thể là số chính phương.

Bài 2: Tổng các chữ số của một số chính phương có thể là 1983 không?

Lời giải

Tổng các chữ số của một số là 1983 thì số đó chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9 , nên không tồn tại số chính phương có tổng các chữ số là 1983 .

Bài 3: Cho các số tự nhiên: $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Lập được tất cả các số tự nhiên có 6 chữ số bao gồm tất cả các chữ số trên. Trong các số đã lập có số nào là số chính phương không?

Lời giải

Tổng các chữ số của các số là 21 chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9 .

Bài 4: Cho một số tự nhiên gồm 21 chữ số 4 . Có cách nào viết thêm các chữ số 0 vào vị trí tùy ý để số mới tạo thành là một số chính phương hay không?

Lời giải

$S(N) = 21 \cdot 4 = 84$ nhưng không chia hết cho 9 .

Bài 5: Chứng minh rằng số 1234567890 không phải là số chính phương.

Lời giải

Cách 1: Ta thấy số 1234567890 chia hết cho 5 (vì chữ số tận cùng là 0) nhưng không chia hết cho 25 (vì hai chữ số tận cùng là 90).

Do đó: số 1234567890 không là số chính phương.

Cách 2: Ta thấy số 1234567890 chia hết cho 2 (vì chữ số tận cùng là 0) nhưng không chia hết cho 4 (vì hai chữ số tận cùng là 90).

Do đó: số 1234567890 không là số chính phương.

Cách 3: Số 1234567890 tận cùng có lẻ chữ số 0 .

Bài 6: Các tổng sau có phải là số chính phương không?

a) $10^{10} + 5$

b) $10^{100} + 10^{50} + 1$

Lời giải

a, Ta có: $10^{10} + 5$ chia hết cho 5 nhưng không chia hết cho 25 nên không là số chính phương.

b, Ta có: $10^{100} + 10^{50} + 1$ có tổng các chữ số là 3 nên chia hết cho 3 mà không chia hết cho 9 nên không là số chính phương.

Bài 7: Cho $S = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2020}$. Chứng minh S không phải là số chính phương.

Lời giải

Ta có: $S = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2020}$

Với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ thì $3^n \div 9$

Suy ra: $3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2020} \div 9$

Do đó: $3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2020}$ chia 9 dư 3

Hay $S \not\div 9$

Mặt khác $S \div 3$

Vậy S không là số chính phương.

Bài 8: Chứng minh tổng của bốn số tự nhiên liên tiếp không là số chính phương.

Lời giải

Gọi bốn số tự nhiên liên tiếp lần lượt là $a; a+1; a+2; a+3 (a \in \mathbb{N})$

Khi đó ta xét: $S = a + a+1 + a+2 + a+3$

$$= 4a + 6$$

Ta có: $\left. \begin{array}{l} 4a \div 2 \\ 6 \div 2 \end{array} \right\} \Rightarrow S \div 2$ (1)

$\left. \begin{array}{l} 4a \not\div 4 \\ 6 \not\div 4 \end{array} \right\} \Rightarrow S \not\div 4$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ S không là số chính phương

Vậy tổng của bốn số tự nhiên liên tiếp không là số chính phương.

Bài 9: Viết liên tiếp các số tự nhiên từ 1 đến 101 thành một số A . Chứng minh A không là số chính phương.

Lời giải

Ta có: $A = 1234 \dots 100101$

Ta có tổng các chữ số của A là: $1+2+3+4+\dots+100+101 = (1+101) \cdot 101 : 2 = 5151$

Ta thấy: $5151 \div 3 \Rightarrow A \div 3$

$5151 \not\div 9 \Rightarrow A \not\div 9$

Do đó A không là số chính phương.

Bài 10: Số $A = 11 + 11^2 + 11^3$ có phải là số chính phương không?

Lời giải:

$$A = 1 + 11^2 + 11^3$$

Ta có:

$$A \cdot 11 = (11 \cdot 11) + (11^2 \cdot 11) + (11^3 \cdot 11) = 11^2 + 11^3 + 11^4$$

Suy ra:

$$A \cdot 11 - A = (11^2 + 11^3 + 11^4) - (11 + 11^2 + 11^3)$$

$$A = (11^2 - 11^2) + (11^3 - 11^3) + (11^4 - 11)$$

$$= 0 + 0 + 11^4 - 11$$

$$= 11^4 - 11$$

$$\left. \begin{array}{l} A : 11 \\ A = 11^2(1 + 11) + 11 \cancel{11^2} \end{array} \right\} \Rightarrow A$$

Ta thấy:

không là số chính phương

Bài 11: Viết liên tiếp từ ¹ đến ¹² được số $H = 1234 \dots 1112$. Số H có thể có ⁸¹ ước được không?

Lời giải

Giả sử số H có ⁸¹ ước.

Vì số lượng các ước của H là ⁸¹ (là số lẻ) nên H là số chính phương ⁽¹⁾

mặt khác, tổng của các chữ số của H là: $1 + 2 + 3 + \dots + 9 + (1 + 0) + (1 + 1) + (1 + 2) = 51$. Vì $51 \div 3 = 17$; $51 \nmid 9$;

nên H chia hết cho ³ nhưng không chia hết cho ⁹, do đó H không là số chính phương

⁽¹⁾

mâu thuẫn với .

Vậy H không thể có ⁸¹ ước.

Bài 12: Một số tự nhiên gồm một chữ số ⁰ và sáu chữ số 6 có thể là một số chính phương không?

Lời giải

Gọi A là số gồm một chữ số ⁰ và sáu chữ số ⁶.

- Nếu A có chữ số tận cùng là ⁰ thì A có hai chữ số tận cùng là ⁶⁰.

$\Rightarrow A$ chia hết cho 5 nhưng A không chia hết cho ²⁵ (vì $60 \nmid 25$)

$\Rightarrow A$ không là số chính phương.

- Nếu A có chữ số tận cùng là ⁶ $\Rightarrow A$ có hai chữ số tận cùng là 06 hoặc ⁶⁶

$\Rightarrow A$ chia hết cho ² nhưng không chia hết cho ⁴.

$\Rightarrow A$ không là số chính phương.

Vậy A không phải là số chính phương.

DẠNG 2: Chứa thừa số nguyên tố với số mũ lẻ

Bài 1: Chứng minh rằng 2001^{2001} không là số chính phương.

Lời giải

Ta có: $2001^{2001} = (3 \cdot 23 \cdot 29)^{2001} = 3^{2001} \cdot 23^{2001} \cdot 29^{2001}$ chứa thừa số nguyên tố có số mũ lẻ

Do đó: 2001^{2001} không là số chính phương

Bài 2: Chứng minh rằng số $A = 29^{29} + 58^{58} + 87^{84}$ không là số chính phương.

Lời giải

$$A = 29^{29} (1 + \underbrace{2^{58}}_{\substack{\square \square \square \square \square \square \square \square \square \square \\ \vdots 29}} 29^{29} + \underbrace{3^{87}}_{\substack{\square \square \square \square \square \square \square \square \square \square \\ \vdots 29}} 29^{58})$$

Ta có $A : 29^{29}$ nhưng A không chia hết cho 29^{30} mà 29 là số nguyên tố từ đó suy ra A không là số chính phương.

DẠNG 3: $A = p \cdot N$ và $N \not\vdots p$ (p : nguyên tố) A không là số chính phương

Bài 1: Chứng minh rằng $A = \overline{ababa}$ không là số chính phương.

Lời giải

Ta có: $n^2 = \overline{abab} = \overline{ab} \cdot 101$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{abab} = 101 \cdot \overline{ab} \\ \overline{abab} : 101 \Rightarrow \overline{abab} : 101^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{ab} : 101$$

(Vô lý)

Do đó $A = \overline{ababa}$ không là số chính phương.

Bài 2: Chứng minh rằng $\overline{abcabc}$ không là số chính phương.

Lời giải

Ta có: $n^2 = \overline{abcabc} = \overline{abc} \cdot 1001 = \overline{abc} \cdot 11 \cdot 91$

Vì $\overline{abc} : 11$ đồng thời $\overline{abc} : 91$ mà $11, 91$ là số nguyên tố.

Do đó $\overline{abcabc}$ không là số chính phương.

Bài 3: Chứng minh rằng $\overline{ababab}$ không là số chính phương.

Lời giải

Ta có: $n^2 = \overline{ababab} = \overline{ab.10101} = \overline{ab.3.7.13.37}$

Vì $3, 7, 13, 37$ là số nguyên tố nên $\Rightarrow \overline{ab} : 10101$ (Vô lý).

Do đó $\overline{ababab}$ không là số chính phương.

DẠNG 4: Chứng minh A chia 3 dư 2, chia 4 dư 2; 3; chia 5 dư 2, 3; chia 8 dư 2; 3; 5; 6

Bài 1:

a. Chứng minh rằng với $\forall n \in \mathbb{N}$ thì $2n^2 + 2n + 3$ không là số chính phương

b. Chứng minh rằng với $\forall n \in \mathbb{N}$ thì $3^n + 1002$ không là số chính phương

Lời giải

$$2n^2 + 2n + 3 = 2n(n+1) + 3 \Rightarrow$$

a. $\frac{2n(n+1)}{4}$ chia 4 dư 3 nên không là số chính phương

b. - $n = 0 \rightarrow 3^n + 1002 = 1003 \Rightarrow$ không là số chính phương

- $n = 1 \rightarrow 3^n + 1002 = 1005 : 3, !9 \Rightarrow$ không là số chính phương

- $n \geq 2 \rightarrow 3^n + 1002 : 3, !9 \Rightarrow$ không là số chính phương

Bài 2: Chứng minh rằng một số có tổng các chữ số của nó là 2006 không phải là một số chính phương

Lời giải

Số chính phương khi chia cho 3 chỉ có thể dư 0 hoặc 1 .

Số trên có tổng các chữ số là 2006 nên chia 3 dư 2 , vậy không phải là số chính phương.

Bài 3: Một số tự nhiên có tổng các chữ số bằng 2018 thì có thể là số chính phương được không? Tại sao?

Lời giải

Gọi số tự nhiên có tổng các chữ số bằng 2018 là n .

Ta có: $2018 = 3m + 2, m \in \mathbb{N}$ nên số tự nhiên n chia 3 dư 2 , do đó số n có dạng $3k + 2$ với k là số tự nhiên. Mặt khác số chính phương không có dạng $3k + 2$ suy ra số tự nhiên n không là số chính phương.

Bài 4: Chứng minh rằng $A = 2012^{4n} + 2013^{4n} + 2014^{4n} + 2015^{4n}$ không phải là số chính phương với mọi số nguyên dương n .

Lời giải

Ta có: $2012^{4n} \equiv 0 \pmod{2}; 2013^{4n} \equiv 1 \pmod{2}; \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$2014^{4^n} \equiv 0 \pmod{2} \quad 2015^{4^n} \equiv 1 \pmod{2}$$

;

$$A \equiv 2 \equiv 0 \pmod{2}$$

Do đó:

$$2012 \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow 2012^{4^n} \equiv 0 \pmod{4}$$

Ta lại có:

$$2014 \equiv 2 \pmod{4} \Rightarrow 2014^2 \equiv 2^2 \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow (2014^2)^{2^n} \equiv (2014^2)^{2^n} \equiv 0 \pmod{4}$$

$$2013 \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow 2013^{4^n} \equiv 1 \pmod{4}$$

Do

$$2015 \equiv -1 \pmod{4} \Rightarrow 2015^{4^n} \equiv (-1)^{4^n} \equiv 1 \pmod{4}$$

Do

Do đó $A \equiv 2 \pmod{4}$ nghĩa là A chia cho 4 dư 2.

Ta có $A \not\equiv 2; A \not\equiv 2^2; 2$ là số nguyên tố. Vậy A không là số chính phương.

Bài 5: Cho $N = 1.3.5.7 \dots 2015$. Chứng minh rằng $N-1$; $N+3$ không là số chính phương.

Lời giải

+) Ta có: $N \vdots 3$

Suy ra: $N-1$ chia cho 3 dư 2

Do đó: $N-1$ không là số chính phương.

+) Ta có: $N \vdots 3$ và $N \vdots 9$

Suy ra: $N+3 \vdots 3$ nhưng $N+3 \not\vdots 9$

Do đó: $N+3$ không là số chính phương.

Bài 6: Gọi $N = 2.3.5 \dots p_n$ là tích của n số nguyên tố đầu tiên ($n > 1$). Chứng minh rằng các số $N-1$; $N+1$ không là số chính phương.

Lời giải

+) Ta thấy: $N \vdots 2$ nhưng $N \not\vdots 4$

$\Rightarrow N$ không là số chính phương.

+) Giả sử $N+1 = a^2$ hay $N = a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$

Ta có: $N+1$ lẻ suy ra a lẻ nên $N = (a-1)(a+1) \vdots 4$ (mâu thuẫn)

Do đó điều giả sử là sai.

Vậy $N+1$ không là số chính phương.

+) Ta có: $N \div 3$

$$\Rightarrow N - 1 \equiv 2 \pmod{3}$$

Vậy $N - 1$ không là số chính phương.

Bài 7: Giả sử $N = 1.3.5.7 \dots 2007.2011$. Chứng minh rằng trong ba số tự nhiên liên tiếp $2N - 1$; $2N$; $2N + 1$ không có số nào là số chính phương.

Lời giải

+) Ta có: $2N - 1 = 2.1.3.5.7 \dots 2011 - 1$

Ta thấy: $2N \div 3 \Rightarrow 2N - 1 = 3k + 2 \ (k \in \mathbb{N})$

Do đó: $2N - 1$ không là số chính phương.

+) Ta có: $2N = 2.1.3.5.7 \dots 2011 \Rightarrow 2N$ chẵn

Do đó: N lẻ $\Rightarrow N \not\div 2$ và $2N \div 2$ nhưng $2N \not\div 4$

Ta thấy $2N$ chẵn nên $2N$ không chia cho 4 dư 1 hoặc dư 3

Vậy $2N$ không là số chính phương

+) Ta có: $2N + 1 = 2.1.3.5.7 \dots 2011 + 1$

Ta thấy $2N + 1$ lẻ nên $2N + 1 \not\div 4$

$2N \not\div 4$ nên $2N + 1$ không chia cho 4 dư 1

Do đó: $2N + 1$ không là số chính phương.

Bài 8: Chứng minh số $A = 23^5 + 23^{12} + 23^{2003}$ không là số chính phương.

Lời giải

Ta có: 23 chia 3 dư 2 nên 23^5 chia 3 dư 2

23^{12} chia 3 dư 1

23^{2003} chia 3 dư 2

Suy ra: $A = 23^5 + 23^{12} + 23^{2003}$ chia 3 dư 2

Vậy A không là số chính phương.

Bài 9: Chứng minh $C = 4^4 + 44^{44} + 444^{444} + 4444^{4444} + 15$ không là số chính phương.

Lời giải

Ta có: 4 chia hết cho 4 nên 4^4 chia hết cho 4

44 chia hết cho 4 nên 44^{44} chia hết cho 4

444 chia hết cho 4 nên 444^{444} chia hết cho 4

4444 chia hết cho 4 nên 4444^{4444} chia hết cho 4

Suy ra: $4^4 + 44^{44} + 444^{444} + 4444^{4444}$ chia hết cho 4

Mà: 15 chia 4 dư 3

Do đó: $C = 4^4 + 44^{44} + 444^{444} + 4444^{4444} + 15$ chia 4 dư 3

Vậy C không là số chính phương.

Bài 10: Chứng minh $D = 2004^4 + 2004^3 + 2004^2 + 23$ không là số chính phương.

Lời giải

Ta thấy: $2004 : 3$

$$\Rightarrow 2004^4 : 3$$

Tương tự $2004^3 : 3$, $2004^2 : 3$

Mà 23 chia 3 dư 2 nên $D = 3k + 2 \quad (k \in \mathbb{N})$

Mà ta biết số chính phương không có dạng $3k + 2$

Do đó D không là số chính phương.

Bài 11: Chứng minh rằng tổng bình phương của hai số lẻ bất kì không phải là một số chính phương.

Lời giải

Gọi a và b là số lẻ.

Giả sử: $a = 2m + 1$, $b = 2n + 1$ với $m, n \in \mathbb{N}$

$$a^2 + b^2 = (2m+1)^2 + (2n+1)^2 = 4(m^2 + m + n^2 + n) + 2 = 4k + 2 \quad k \in \mathbb{N}$$

Ta có:

với

Không có số chính phương nào có dạng $4k+2$ vì vậy $a^2 + b^2$ không phải là một số chính phương.

Bài 12: Chứng minh rằng tổng các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 2005 không phải là số chính phương.

Lời giải

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2005$$

Ta có:

$$= (2005+1).2005:2$$

$$= 1003.2005 \equiv 1.3 \equiv 3 \pmod{4}$$

$$\Rightarrow S \text{ có dạng } 4k+3 \ (k \in \mathbb{N})$$

Do đó S không là số chính phương.

Bài 13: Cho A là tổng các bình phương của 111 số tự nhiên liên tiếp nào đó. Chứng minh rằng A không phải là số chính phương.

Lời giải

Xét tổng các bình phương của 3 số tự nhiên liên tiếp:

$$(a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2 = 3a^2 + 2 \equiv 2 \pmod{3} \quad \forall a \in \mathbb{N}$$

Chia A thành 37 nhóm, mỗi nhóm là tổng các bình phương của 3 số tự nhiên liên tiếp

$$\Rightarrow A \equiv 37.2 \equiv 1.2 \equiv 2 \pmod{3}$$

Do đó A không là số chính phương.

Bài 14: Cho A là tổng các bình phương của 108 số tự nhiên liên tiếp nào đó. Chứng minh rằng A không là số chính phương.

Lời giải

Xét tổng các bình phương của 4 số tự nhiên liên tiếp:

$$a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + (a+3)^2 = 4a^2 + 12a + 14 \equiv 2 \pmod{4}; \quad \forall a \in \mathbb{N}$$

Chia A thành 27 nhóm, mỗi nhóm gồm 4 số tự nhiên liên tiếp.

$$A \equiv 27.2 \equiv 54 \equiv 2 \pmod{4}$$

Suy ra:

Do đó A không là số chính phương.

Bài 15: Chứng minh $3^n + 63$ không phải là số chính phương với $n \in \mathbb{N}; n \neq 0; 4$

Lời giải:

Xét n lẻ. Đặt $n = 2k + 1; (k \in \mathbb{N})$

Ta có: $3^{2k+1} \equiv (-1)^{2k+1} \pmod{4} \equiv -1 \pmod{4}$

$$63 \equiv 3 \pmod{4}$$

$$\Rightarrow 3^{2k+1} + 63 \equiv 2 \pmod{4}$$

$\Rightarrow 3^{2k+1} + 63$ không là số chính phương

Xét n chẵn. Đặt $n = 2k; (k \neq 0)$

Vì $y \vdots 3$ nên ta đặt $y = 3t (t \in \mathbb{N})$

Khi đó, ta có: $3^{2k} + 63 = 9t^2$

$$3^{2k-2} + 7 = t^2$$

$$\Rightarrow t^2 - (3^{k-1})^2 = 7$$

$$\Rightarrow (t - 3^{k-1})(t + 3^{k-1}) = 7$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t - 3^{k-1} = 1 \\ t + 3^{k-1} = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 3^{k-1} = 6$$

$$\Rightarrow 3^{k-1} = 3$$

$$\Rightarrow k = 2$$

$$\Rightarrow n = 4 \quad (\text{trái với giả thiết đề bài})$$

Vậy: $3^n + 63$ không phải là số chính phương với $n \neq 0; 4$

Bài 16: Chứng minh $n^7 + 34n + 5$ không là số chính phương.

Lời giải:

Bổ đề: $x^2 \equiv i \pmod{7}; i \in \{0; 1; 2; 4\}$

$$n^7 \equiv n \pmod{7}$$

Theo định lí Fermat, ta có:

$$\Rightarrow n^7 + 34n + 5 \equiv 35n + 5 \pmod{7}$$

$$\Rightarrow n^7 + 34n + 5 \equiv 6 \pmod{7}$$

$$n^7 + 34n + 5 = x^2, x \in \mathbb{N}$$

Giả sử

$$x^2 \equiv 5 \pmod{7} \quad (\text{vô lý})$$

Suy ra:

Do đó: $n^7 + 34n + 5$ không là số chính phương.

Bài 17: Chứng minh rằng với mọi số $k \in \mathbb{N}$ thì số $A = 1 + 9^{2k} + 77^{2k} + 1977^{2k}$ không là số chính phương.

Lời giải:

Bất kì số chính phương nào cũng có dạng $3t$ hoặc $3t+1$, với $t \in \mathbb{N}$

Ta có: $A = 1 + 9^{2k} + 77^{2k} + 1977^{2k}$ có dạng $3l+2; l \in \mathbb{N}$

Do đó A không là số chính phương.

DẠNG 5: Chứng minh A có chữ số tận cùng là $2; 3; 7$ hoặc 8

Bài 1: Chứng minh rằng các tổng sau có phải là số chính phương không?

a) $A = 1 + 11^2 + 11^3$

b) $B = 10^{10} + 8$

Lời giải:

b) Tổng A có chữ số tận cùng là 3 nên không là số chính phương

c) Ta có: 10^{10} có chữ số tận cùng là 0 .

Nên $10^{10} + 8$ có chữ số tận cùng là 8

Vậy B không là số chính phương.

Bài 2: Cho $A = 10^{2012} + 10^{2011} + 10^{2010} + 10^{2009} + 8$. Chứng minh rằng A không phải là số chính phương.

Lời giải:

Ta có các số $10^{2012}; 10^{2011}; 10^{2010}; 10^{2009}$ đều có chữ số tận cùng là 0 .

Nên $A = 10^{2012} + 10^{2011} + 10^{2010} + 10^{2009} + 8$ có chữ số tận cùng là 8 .

Vậy A không là số chính phương vì số chính phương là những số có tận cùng là $0; 1; 4; 5; 6; 9$.

Bài 3: Chứng minh rằng tổng các bình phương của năm số tự nhiên liên tiếp không thể là một số chính phương.

Lời giải

Gọi 5 số tự nhiên liên tiếp là: $n-2, n-1, n, n+1, n+2$ trong đó $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 2$

$$A = (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5(n^2 + 2)$$

Xét tổng bình phương:

Vì n^2 không thể có tận cùng là 3 hoặc 8, nên $n^2 + 2$ không thể có tận cùng là 5 hoặc 0,

$\Rightarrow n^2 + 2$ không thể chia hết cho 5

$\Rightarrow 5(n^2 + 2)$ không thể chia hết cho 25

Vậy A không là số chính phương

DẠNG 6: Chứng minh A kẹp giữa hai số chính phương liên tiếp $n^2 < A < (n+1)^2$

Bài tập: Chứng minh rằng số 4014025 không là số chính phương.

Nhận xét:

Số này có hai chữ số tận cùng là 25 nên chia cho 3 dư 1 và chia cho 4 cũng dư 1, nên không thể áp dụng bằng cách trên.

Lời giải:

Cách 1:

Ta thấy: $2003^2 = 401209$; $2004^2 = 4016016$. Nên $2003^2 < 4014025 < 2004^2$. Chứng tỏ số 4014025 không phải là số chính phương.

Cách 2:

Ta có: $4014025 = 25 \cdot 160561$

Muốn 4014025 là số chính phương thì 160561 phải là số chính phương

Ta lại có: $400^2 = 160000$

$$401^2 = 160801$$

Mà: $160000 < 160561 < 160801$

$\Rightarrow 160561$ không là số chính phương.

Do đó số 4014025 không là số chính phương

PHẦN III. CÁC BÀI TẬP TỰ LUYỆN:

Bài 1: Chứng minh rằng với mọi số $m \in \mathbb{N}$ thì số $A = 1 + 9^{2m} + 80^{2m} + 1980^{2m}$ không là số chính phương.

Lời giải

Bất kì số chính phương nào cũng có dạng $4n$ hoặc $4n+1$, $n \in \mathbb{N}$.

Ta có: $A = 1 + 9^{2m} + 80^{2m} + 1980^{2m}$ có dạng $4q+2$, $q \in \mathbb{N}$,

Suy ra: A không là số chính phương.

Bài 2: Chứng minh rằng bình phương của hai số lẻ bất kì không phải là số chính phương.

Lời giải

Gọi hai số lẻ bất kì là a và b .

Vì a và b lẻ nên $a = 2k + 1$; $b = 2m + 1$; $k, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra: } a^2 + b^2 &= (2k+1)^2 + (2m+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 + 4m^2 + 4m + 1 \\ &= 4(k^2 + k + m^2 + m) + 2 \\ &= 4t + 2; (t \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

Do đó: $a^2 + b^2$ không là số chính phương.

Bài 3: Chứng minh rằng $A = n^5 + 1999n + 2017$; ($n \in \mathbb{N}$) không là số chính phương.

Lời giải

Ta có: $A = n^5 + 1999n + 2017 = n^5 - n + 2000n + 2015 + 2$

Ta thấy: A chia cho 5 dư 2

Do đó: A không là số chính phương.

Bài 4: Chứng minh rằng $n^3 - n + 2$; ($n \in \mathbb{N}$) không là số chính phương.

Lời giải

Ta có: $n^3 - n + 2 = n(n-1)(n+1) + 2$

Vì: $n(n-1)(n+1) \equiv 0 \pmod{3}$

$$\Rightarrow n(n-1)(n+1) + 2 \equiv 2 \pmod{3}$$

Mà một số chính phương chia 3 dư 0 hoặc 1

Do đó: $n^3 - n + 2$ không là số chính phương.

$$A = 19n^6 + 5n^5 + 1890n^3 - 19n^2 - 5n + 1993; (n \in \mathbb{N})$$

Bài 5: Chứng minh rằng không là số chính phương.

Lời giải

$$A = 19n^6 + 5n^5 + 1890n^3 - 19n^2 - 5n + 1993$$

Ta có:

$$= 20n^6 + 5n^5 + 1890n^3 - 20n^2 - 5n + 1990 - n^6 + n^2 + 3$$

$$= 5(4n^6 + n^5 + 378n^3 - 4n^2 - n + 398) - n^6 + n^2 + 3$$

Ta có số chính phương chia 5 có thể dư $0; 1$ hoặc 4

$n \in \mathbb{N}$
nên có 5 trường hợp xảy ra

* TH1: Nếu $n \div 5$ thì $n^6 \div 5$; $n^2 \div 5$ mà 3 chia 5 dư 3

$$\Rightarrow -n^6 + n^2 + 3 \text{ chia } 5 \text{ dư } 3$$

$$\Rightarrow A \text{ chia } 5 \text{ dư } 3$$

$\Rightarrow A$ không là số chính phương

* TH2: Nếu n chia 5 dư 1 thì n^6 chia 5 dư 1 , n^2 chia 5 dư 1 mà 3 chia 5 dư 3

$$\Rightarrow -n^6 + n^2 + 3 \text{ chia } 5 \text{ dư } (-1 + 1 + 3) = 3$$

$$\Rightarrow A \text{ chia } 5 \text{ dư } 3$$

$\Rightarrow A$ không là số chính phương

* TH3: Nếu n chia 5 dư 2 thì n^6 chia 5 dư 2^6 ; $2^6 = 64$ chia 5 dư $4 \Rightarrow n^6$ chia 5 dư 4 ,

$$n^2 \text{ chia } 5 \text{ dư } 2^2 = 4$$

$$\Rightarrow -n^6 + n^2 + 3 \text{ chia } 5 \text{ dư } (-4 + 4 + 3) = 3$$

$$\Rightarrow A \text{ chia } 5 \text{ dư } 3$$

$\Rightarrow A$ không là số chính phương

* TH4: Nếu n chia 5 dư 3 thì n^6 chia 5 dư 3^6 ; $3^6 = 729$ chia 5 dư $4 \Rightarrow n^6$ chia 5 dư 4 ,

$$n^2 \text{ chia } 5 \text{ dư } 3^2; 3^2 = 9 \text{ chia } 5 \text{ dư } 4 \Rightarrow n^2 \text{ chia } 5 \text{ dư } 4$$

$$\Rightarrow -n^6 + n^2 + 3 \text{ chia } 5 \text{ dư } (-4 + 4 + 3) = 3$$

$$\Rightarrow A \text{ chia } 5 \text{ dư } 3$$

$\Rightarrow$ A không là số chính phương

* TH5: Nếu n chia 5 dư 4 thì n^6 chia 5 dư 4^6 ; $4^6 = 4096$ chia 5 dư 1 $\Rightarrow n^6$ chia 5 dư 1,

$$n^2 \text{ chia } 5 \text{ dư } 4^2; 4^2 = 16 \text{ chia } 5 \text{ dư } 1 \Rightarrow n^2 \text{ chia } 5 \text{ dư } 1$$

$$\Rightarrow -n^6 + n^2 + 3 \text{ chia } 5 \text{ dư } (-1 + 1 + 3) = 3$$

$$\Rightarrow A \text{ chia } 5 \text{ dư } 3$$

$\Rightarrow$ A không là số chính phương

Vậy A không là số chính phương với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Bài 6: Cho P là tích của 2016 số nguyên tố đầu tiên. Chứng minh rằng P^{-1} và $P+1$ không là số nguyên tố. (Đề HSG Hương Sơn năm học 2015 - 2016)

Lời giải:

Vì P là tích của n số nguyên tố đầu tiên nên P chia hết cho 2 và không chia hết cho 4

Ta chứng minh $P+1$ là số chính phương

Giả sử $P+1$ là số chính phương.

Đặt $P+1 = m^2$. Vì P chẵn nên $P+1$ lẻ

$$\Rightarrow m \text{ lẻ} \Rightarrow m^2 \text{ lẻ}$$

Đặt $m = 2k + 1$. Ta có: $m^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$$\Rightarrow P+1 = 4k^2 + 4k + 1$$

$$\Rightarrow P = 4k^2 + 4k = 4k(k+1) \text{ chia hết cho } 4$$

Ta chứng minh P^{-1} là số chính phương

Ta có: $P = 2.3.5 \dots$ chia hết cho 3

$$\Rightarrow P^{-1} = 3k + 2$$

Vì không có số chính phương nào có dạng $3k+2$ nên P^{-1} không phải số chính phương

Vậy nếu P là tích của 2016 số nguyên tố đầu tiên thì $P-1$ và $P+1$ không phải số chính phương.

Bài 7: Cho $B = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$. Chứng minh B không là số chính phương. (Đề HSG Vĩnh Tường năm học 2019 - 2020)

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{aligned}
 B &= \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} \\
 &= 100a + 10b + c + 100b + 10c + a + 100c + 10a + b \\
 &= (100a + 10a + a) + (100b + 10b + b) + (100c + 10c + c) \\
 &= \overline{aaa} + \overline{bbb} + \overline{ccc} \\
 &= 111.(a + b + c) \\
 &= 3.37.(a + b + c)
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} 1 \leq a \leq 9 \\ 1 \leq b \leq 9 \\ 1 \leq c \leq 9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3 \leq a + b + c \leq 27$$

Ta thấy:

$$a + b + c \nmid 37$$

Suy ra:

$$(3; 37) = 1 \Rightarrow 3.(a + b + c) \nmid 37$$

Mà:

$$3.37.(a + b + c) \nmid 37^2$$

Do đó:

$$B \nmid 37^2$$

Hay:

Vậy B không là số chính phương.

Bài 8: Cho biểu thức $M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{80}$. Chứng minh M không phải là số chính phương. (Đề HSG Quỳnh Lưu năm học 2018 - 2019)

Lời giải

Ta thấy: $M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{80} : 5$

Mặt khác: $5^2 + 5^3 + \dots + 5^{80} : 5^2$ (vì tất cả các số đều chia hết cho 5^2)

$$\Rightarrow M = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{80} \nmid 5^2 \quad (do \quad 5 \nmid 5^2)$$

Do đó M chia hết cho 5 nhưng không chia hết cho 5^2

Vậy M không là số chính phương. Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>

Hướng dẫn tìm và tải các tài liệu ở đây

<https://forms.gle/LzVNwfMpYB9qH4JU6>