ĐỀ 03

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO YÊN THÀNH

ĐỀ THI HSG TOÁN 9

Câu 1. (4 điểm)
a) Chứng minh rằng: n^3+6n^2+8n chia hết cho 48 với n là số nguyên chẵn.
b) Cho 2 số tự nhiên a và b. Chứng minh rằng nếu tích a.b là số chẵn thì luôn luôn tìm được số nguyên c sao cho $a^2+b^2+c^2$ là số chính phương.
Câu 2. (6 điểm)
a) Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn a + b + c = 1. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{ab}{ab+c}+\text{¿}\sqrt{\frac{bc}{bc+a}}+\text{¿}\sqrt{\frac{ac}{ac+b}}\le\frac{3}{2}\text{¿¿}}$$

b) Giải phương trình: $\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}+x+1=5\sqrt{x-2}$
c) Tìm các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn $x^3+y^3+1=5xy$
Câu 3. (2 điểm)
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: P = $\left(3+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(3+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(3+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)$
Trong đó các số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện a + b + c $\le\frac{3}{2}$
Câu 4. (7 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn. Các đường cao AD; BE; CF cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm của HC; N là trung điểm của AC. AM cắt HN tại G. Đường thẳng qua M vuông góc với HC và đường thẳng qua N vuông góc với AC cắt nhau tại K. Chứng minh rằng:
a) Tam giác AEF đồng dạng với tam giác ABC.
Từ đó hãy suy ra $S_{AEF}=S_{ABC}.\cos^2\widehat{BAC}$.
b) BH.KM = BA.KN
c) $\sqrt{\frac{GA^5+GB^5+GH^5}{GM^5+GK^5+GN^5}}=4\sqrt{2}$
Câu 5. (1 điểm)

Cho bảng ô vuông kích thước 10cm x 10cm gồm 100 ô vuông đơn vị. Điền vào mỗi ô vuông của bảng này một số nguyên dương không vượt quá 10 sao cho hai số ở hai ô vuông chung cạnh hoặc chung đỉnh nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng trong bảng ô vuông đã cho có một số xuất hiện ít nhất 17 lần.

--- Hết ---

LỜI GIẢI

Câu 1. (4 điểm)

a) Ta có:

A = n^3+6n^2+8n

= n(n^2+6n+8)

= $n(n^2+4n+2n+8)$

= $n[n(n+1)+2(n+4)]$

= n(n + 2)(n + 4)

Thay n = 2k

Ta có: A = n(n + 2)(n + 4) = 8k(k + 1)(k + 2)

Vì 8 $\vdots$ 8 và k(k + 1)(k + 2) .6

Nên A = 8k(k + 1)(k + 2) $\vdots$ 48

b) Đặt A = $a^2+b^2+c^2$. Do tích a.b chẵn nên ta xét các trường hợp sau: TH1: Trong 2 số a, b có 1 số chẵn và 1 số lẻ.

Không mất tính tổng quát, giả sử a chẵn, b lẻ.

=> $a^2 \vdots 4$; $b^2 \vdots 4$ dư 1 => $a^2+b^2 \vdots 4$ dư 1

=> a^2+b^2 = $4m+1$ (m $\in N$)

Chọn c = 2m => $a^2+b^2+c^2$ = $4m^2+4m+1$ = $(2m+1)^2$ (tm) (1)

TH2: Cả 2 số a, b cùng chẵn.

=> $a^2+b^2 \vdots 4$ => a^2+b^2 = 4n (n $\in N$)

Chọn c = n - 1 => $a^2+b^2+c^2 = n^2+2n+1$ = $(n+1)^2$ (tm) (2)

Từ (1) và (2) ta luôn tìm c ∈ Z thỏa mãn bài toán.

Câu 2. (6 điểm)

a)

$\sqrt{\frac{ab}{ab+c}}+\sqrt{\frac{bc}{bc+a}}+\sqrt{\frac{acb}{ac+b}} \le \frac{3}{2}$

Ta thấy $\sqrt{\frac{ab}{ab+c}}=\sqrt{\frac{ab}{ab+c(a+b+c)}}=\sqrt{\frac{ab}{(b+c)(a+c)}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+c}\right)$

Tương tự $\sqrt{\frac{bc}{bc+a}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{c}{a+c}+\frac{b}{b+a}\right)$; $\sqrt{\frac{acb}{ac+b}} \le \frac{1}{2}\left(\frac{c}{b+c}+\frac{a}{b+a}\right)$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$\sqrt{\frac{ab}{ab+c}}+\sqrt{\frac{bc}{bc+a}}+\sqrt{\frac{acb}{ac+b}} \le \frac{3}{2}$$

b) Phương trình: $\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}+x+1=5\sqrt{x-2}$. Điều kiện x ≥ 2

Ta có:

$\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}+x+1=5\sqrt{x-2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-2+2\sqrt{x-2}+1}+x+1=5\sqrt{x-2}$

$\Longleftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-2}+1)^2}+x+1-5\sqrt{x-2}$ = 0

$\Longleftrightarrow$ $\sqrt{x-2}+1$ $+x+1$ $-5\sqrt{x-2}$ = 0

$\Longleftrightarrow$ x.2 - $4\sqrt{x-2}$ +4 = 0

$\Longleftrightarrow \left(\sqrt{x-2}-2\right)^2=0 \Longleftrightarrow$ x = 6 (tmđk)

Vậy nghiệm của PT là: x = 6

c) $x^3+y^3+1=5xy$

$\Longleftrightarrow (x+y)^3-3xy(x+y)+1=5xy$

Đặt x + y = a, xy = b ta được $a^3-3ab+1=5b \Longleftrightarrow a^3+1=b(3a+5)$

Vì 3a + b $\neq 0$ $với$ $\forall$ a $\in Z$ suy ra b = $\dfrac{a^3+1}{3a+5}$

Ta có $a^2-4b=(x-y)^2 \geq$ 0 $\forall x, y$.

Suy ra $a^2-\dfrac{4a^3+4}{3a+5} \geq 0 = ¿ \dfrac{-a^3+5a^2-4}{3a+5} \geq$ 0

Nếu a ≥ 5 => $-a^3+5a^3-4=a^2(5-a)-4<0; 3a+5>0$

Suy ra: $\dfrac{-a^3+5a^2-4}{3a+5}$ < 0 (loại)

Nếu a ≤ -2 => $a^2(5-a) \geq 28$ => $-a^3+5a^2-4>0; 3a+5<0$

Suy ra: $\dfrac{-a^3+5a^2-4}{3a+5}$ < 0 (loại)

Nếu -2 < a < 5 mà a nguyên nên a nhận các giá trị: -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5

Do b nguyên và b = $\dfrac{a^3+1}{3a+5}$ nên tìm được các cặp số (a; b) thỏa mãn: (-1;0); (3;2)

Với a = -1; b = 0, tìm được các cặp (x;y) thỏa mãn: (0; -1); (-1; 0)

Với a = 3; b = 2, tìm được các cặp (x;y) thỏa mãn: (1;2); (2;1)

Vậy các cặp số (x;y) thỏa mãn: (0; -1); (-1; 0); (1;2); (2;1)

Câu 3. (2 điểm)

Đặt $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ = x; $\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ = y; $\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}$ = z => (x, y, z > 0)

=> P = (3 + x)(3 + y)(3 + z)

=

$\geq 27+9\sqrt[3]{(xyz)^2}+27\sqrt[3]{xyz}+xyz$ (*)

Lại có: xyz = $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right) \geq \dfrac{8}{abc}$ (vì a, b, c > 0)

Mà $\dfrac{3}{2} \geq$ a + b + c $\geq 3\sqrt[3]{abc}$ => $\dfrac{1}{2} \geq \sqrt[3]{abc}$

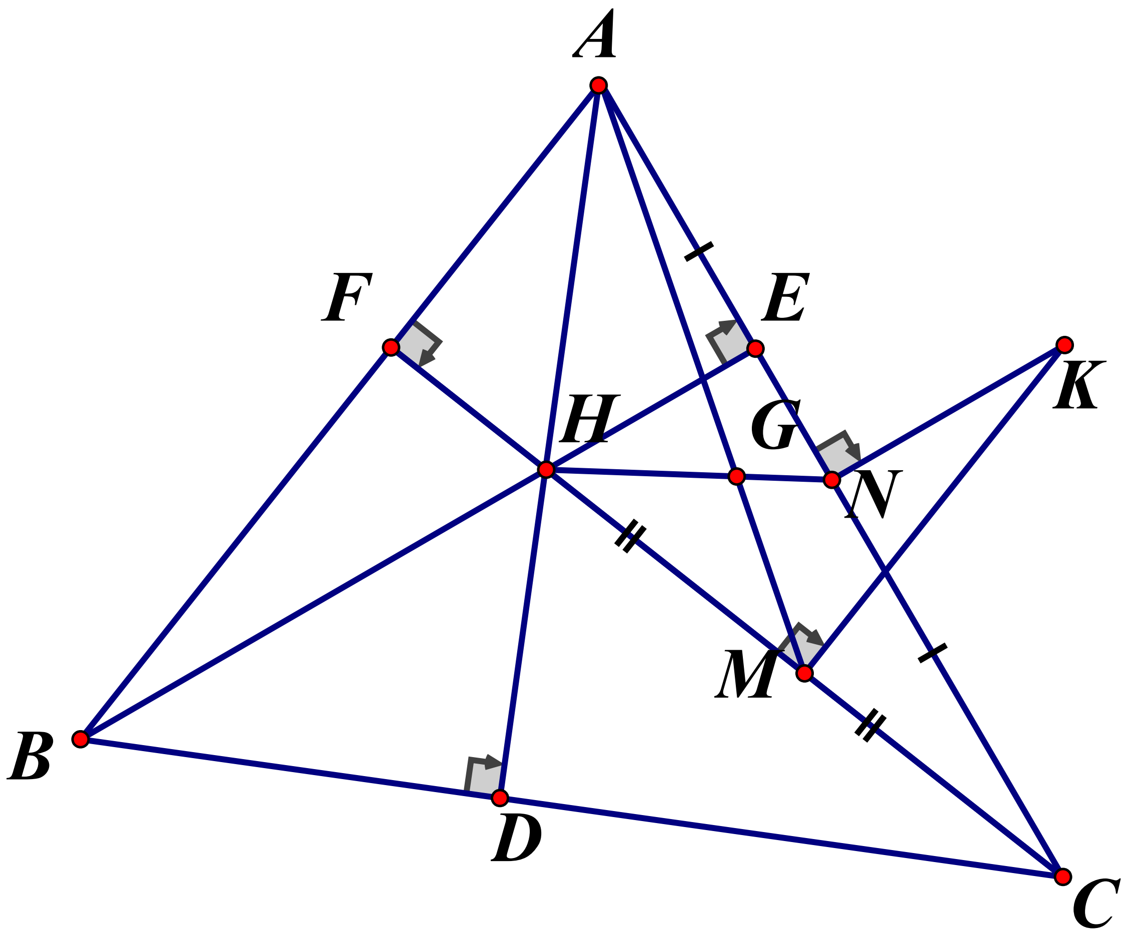
=> abc $\leq \dfrac{1}{8}$ => $\dfrac{8}{abc} \geq 64$ => xyz $\geq \dfrac{8}{abc} \geq 64$

Thay vào (*) ta được: P $\geq 27+9\sqrt[3]{64^2}+27\sqrt[3]{64}+64$

= 27 + 144 + 108 + 64 = 343

Dấu "=" có khi a = b = c = $\dfrac{1}{2} = ¿ P_{min} = 343$ khi a = b = c = $\dfrac{1}{2}$

Câu 4. (7 điểm)



a) $\Delta\, AEB\, vuông\, tại\, E\, nên \cos\widehat{BAE}=\frac{AE}{AB}$

$\Delta\, ACF\, vuông\, tại\, E\, nên \cos\widehat{CAF}\ =\frac{AF}{AC}$

Từ đó chứng minh được tam giác AEF đồng dạng với tam giác ABC (c.g.c)

Vì tam giác AEF đồng dạng với tam giác ABC nên:

$\frac{S_{AEF}}{S_{ACF}}=\frac{AE^2}{AB^2}=¿\cos^2\widehat{BAC}$ => $S_{AEF}=S_{ABC}.\cos^2\widehat{BAC}$.

b) $\Delta\, ABH\, và\, \Delta\, MNK$ có $\widehat{BAH}=\widehat{NMK}\,;\widehat{ABH}=\widehat{MKN}$ (góc có cạnh tương ứng song song)

Suy ra $\Delta\, ABH$ đồng dạng với $\Delta\, MNK$ (g.g)

Suy ra:

$\frac{BA}{KM}=\frac{BH}{KN}$ => BA.KN = BH.KM

c) $\Delta\, ABH$ đồng dạng với $\Delta\, MNK$ nên $\frac{AB}{MK}=\frac{AH}{MN}$ = 2 (Vì MN là đường TB của tam giác AHC);

Lại có: $\frac{AG}{MG}=2;\frac{HG}{NG}=2$ (G là trọng tâm của tam giác AHC)

=> $\frac{AB}{MK}=\frac{AG}{MG}=2$. Mặt khác $\widehat{BAG}=\widehat{GMK}\,(so\le trong)$

=> ΔABG đồng dạng với tam giác ΔMKG (c.g.c)

=> $\frac{GB}{GK}=\frac{GA}{GM}=\frac{GH}{GN}=2=¿\frac{GB^5}{GK^5}=\frac{GA^5}{GM^5}=\frac{GH^5}{GN^5}=\frac{GB^5+GA^5+GH^5}{GK^5+GM^5+GN^5}=32$

=> $\sqrt{\frac{GB^5+GA^5+GH^5}{GK^5+GM^5+GN^5}}=4\sqrt{2}$

Câu 5. (1 điểm)

Xét hình vuông cạnh 2x2, do hình vuông này có mỗi hình vuông nhỏ luôn chung cạnh hoặc chung đỉnh nên tồn tại nhiều nhất 1 số chẵn, nhiều nhất 1 số chia hết cho 3 do đó có ít nhất 2 số lẻ không chia hết cho 3. Bảng 10x10 được chia thành 25 hình vuông có cạnh 2x2 nên có ít nhất 50 số lẻ không chia hết cho 3. Từ 1 đến 10 có 3 số lẻ không chia hết cho 3 là 1, 5, 7. Áp dụng nguyên lí Dirichlet ta được một trong ba số trên xuất hiện ít nhất $\left[\frac{50}{3}\right]+1=17$ lần.