

DẠNG 7**Tích phân đặc biệt kết hợp với tích phân hàm ẩn**

Câu 1: Hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có $f(0) = 2$ và $f(4x) - f(x) = 4x^3 + 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tích phân

$$I = \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

- A. $\frac{148}{63}$. B. $\frac{146}{63}$. C. $\frac{149}{63}$. D. $\frac{145}{63}$

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(6) = 1$ và $\int_0^6 (x^2 \cdot f'(x) + 6f(x)) dx = 10$;

khi đó: $\int_{-3}^3 xf(x+3) dx$ bằng:

- A. -13 . B. 26 . C. -26 . D. 13 .

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 4x \int_0^1 |f(x)| dx$ và $f(1) > 0$. Khi đó $f(4)$ bằng

- A. 64 . B. 60 . C. 62 . D. 63 .

Câu 4: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên tập số thực $\mathbb{R}$ và thỏa mãn: $f(e^x + x + 1) = \frac{x^9}{e^x + 1}$. Tính

$$I = \int_2^{e+2} f(x) dx.$$

- A. $\frac{1}{8}$. B. $\frac{1}{9}$. C. $\frac{1}{10}$. D. $\frac{1}{11}$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $f(1) = -2$, $f(x) \neq -\frac{1}{x}$ và

$$x^2 f^2(x) + (2x - 1)f(x) = xf'(x) - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \text{ Tính } \int_1^4 f(x) dx.$$

- A. $-2 \ln 2 - \frac{3}{4}$. B. $-2 \ln 2 - \frac{1}{4}$. C. $-\ln 2 - \frac{3}{4}$. D. $-\ln 2 - \frac{1}{4}$.

Câu 6: Cho hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^1 f(x) dx = 6$. Tính $\int_0^1 [xf(x^2) - x^2 f(x^3)] dx$.

- A. 0 B. -1 C. 1 D. $\frac{1}{6}$

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0; 1]$ thỏa mãn

$$f^2(x) - xf(x)f'(x) = 2x + 4, \quad \forall x \in [0; 1]. \text{ Biết } f(1) = 3. \text{ Tích phân } I = \int_0^1 f^2(x) dx \text{ bằng}$$

- A. $\frac{19}{3}$. B. 19 . C. 13 . D. $\frac{13}{3}$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ đồng biến, biết $f(x) > 0, \forall x \in [1; 4]$ và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 4]$,

$$\text{thỏa mãn } f(1) = 1 \text{ và } [2f(x) + xf'(x)]^2 = \frac{f(x)}{x} \text{ với mọi } x \in [1; 4]. \text{ Khi đó } \int_1^4 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. 1. B. $2\ln 2$. C. $2\ln 2 - 2$. D. -2 .

Câu 9: Cho a, b, c là các số thực và $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ thỏa mãn $f'(t) = f'(t+5) = 2$ với t là hằng số. Giá trị $\int_t^{t+5} f'(x) dx$ bằng

A. $-\frac{105}{2}$. B. $\frac{134}{3}$. C. $-\frac{1}{2}$. D. $\frac{19}{4}$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(x^2 + 4x) = -2x^2 - 7x + 1, \forall x \in [0; +\infty)$. Biết $f(5) = -8$, tính $I = \int_0^5 x \cdot f'(x) dx$?

A. $I = -\frac{68}{3}$. B. $I = -\frac{35}{3}$. C. $I = -\frac{52}{3}$. D. $I = -\frac{62}{3}$.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $xf'(x) = e^{x^2} - 1, \forall x \in \mathbb{R}, f(1) = 0$. Giá trị $\int_0^1 xf(x) dx$ bằng

A. $-\frac{1}{4}(e-2)$. B. $\frac{1}{4}(e-2)$. C. $-\frac{1}{2}(e-2)$. D. $\frac{1}{2}(e-2)$.

Câu 12: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục có đạo hàm $f'(x)$ trên $[0; 1]$, $f(1) = 0$. Biết $\int_0^1 (f'(x))^2 dx = \frac{1}{3}, \int_0^1 f(x) dx = -\frac{1}{3}$. Khi đó $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$ bằng

A. $-\frac{11}{48}$. B. 0. C. $-\frac{1}{6}$. D. $\frac{6}{23}$.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ với $f(0) = f(1) = 1$. Tính $\int_0^1 e^x [f(x) + f'(x)] dx$

A. $I = 0$. B. $I = e + 1$. C. $I = e - 1$. D. e .

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-1; 1]$, thỏa mãn $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f'(x) + 2f(x) = 0$. Biết $f(1) = 1$. Tính $f(-1)$

A. e^{-2} . B. e^{-4} . C. e^2 . D. e^4 .

Câu 15: Cho hàm số $f(x) = x\sqrt{x} + \int_0^1 xf(x) dx$. Tích phân $\int_0^4 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{528}{35}$. B. $\frac{438}{35}$. C. $\frac{408}{35}$. D. $\frac{368}{35}$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ thỏa $f(2) = 0$ và $f'(x) = \frac{x+7}{\sqrt{2x-3}}, \forall x \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. Biết $\int_4^7 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = \frac{a}{b}$,

với $a, b \in \mathbb{Z}, b > 0$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a + b$.

A. 250. B. 251. C. 133. D. 221.

Câu 17: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{khi } x > 3 \\ ax-3a+7 & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$ (a là tham số thực). Nếu $\int_0^1 f(e^x+1)e^x dx = e^2$ thì a bằng

A. $\frac{3e^2+4e-6}{e-1}$. B. $6e-6$ C. $6e+6$ D. $-6e+6$

Câu 18: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{khi } x > 3 \\ ax-3a+7 & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$ (a là tham số thực). Nếu $\int_0^1 f(e^x+1)e^x dx = e^2$ thì a bằng

A. $\frac{3e^2+4e-6}{e-1}$. B. $6e-6$. C. $6e+6$. D. $-6e+6$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{khi } x > 3 \\ ax-3a+7 & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$ (a là tham số thực). Nếu $\int_0^1 f(e^x+1)e^x dx = e^2$ thì a bằng

A. $\frac{3e^2+4e-6}{e-1}$. B. $6e-6$. C. $6e+6$. D. $-6e+6$.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2) = 3$, $\int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2$, $\int_0^2 xf'(x) dx = 3$.
 Tính $\int_0^1 f(x) dx$.

A. 5. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x^3+3x+1) = 3x+2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
 Tích phân $\int_1^5 x.f'(x) dx$ bằng

A. $-\frac{31}{4}$. B. $\frac{33}{4}$. C. $\frac{17}{4}$. D. $\frac{49}{4}$.

Câu 22: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $2f(x) + xf\left(\frac{1}{x}\right) = x$ với mọi $x > 0$. Tính $\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x) dx$.

A. $\frac{7}{12}$. B. $\frac{7}{4}$. C. $\frac{9}{4}$. D. $\frac{3}{4}$.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có một nguyên hàm là hàm số $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$. Khi đó $\int_1^2 f(x^2) dx$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. B. $-\frac{4}{3}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $-\frac{2}{3}$.

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^1 f(x) dx = 6$. Tính $\int_0^1 [xf(x^2) - x^2 f(x^3)] dx$.

- A. 0. B. -1. C. 1. D. $\frac{1}{6}$.

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^1 f(x) dx = 6$. Tính $\int_0^1 [xf(x^2) - x^2 f(x^3)] dx$.

- A. 0. B. -1. C. 1. D. $\frac{1}{6}$.

Câu 26: Cho hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(x) + g(x) = x$; $g'(x) + f(x) = -x$, với $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết $f(0) = g(0) = 1$. Tính $f(1)$.

- A. $\frac{2}{e} - 2$. B. $e + \frac{1}{e} - 2$. C. $\frac{e^2 + 2}{2e}$. D. $\frac{e^2 - 2}{2e}$.

Câu 27: Cho hàm số $f(x) = x^{2021} + \sin x + 2021$. Biết rằng có duy nhất giá trị của

$$m = -\frac{a}{b} \text{ (với } a, b \in \mathbb{N}^* \text{ và } (a, b) = 1) \text{ để } \int_0^m (x \cdot f'(m-x) - f(x)) dx = 1. \text{ Tìm } a + b.$$

- A. $a + b = 2021$. B. $a + b = 2023$. C. $a + b = 2020$. D. $a + b = 2022$.

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai $f''(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $f(0) = f(1) = 1; f'(0) = 2021$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\int_0^1 (1-x) f''(x) dx = -2021$. B. $\int_0^1 (1-x) f''(x) dx = 2021$.
C. $\int_0^1 (1-x) f''(x) dx = 1$. D. $\int_0^1 (1-x) f''(x) dx = -1$.

Câu 29: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(x) + f(1-x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x+1}, \forall x \in [0;1]$. Tính

$$\int_0^1 f(x) dx$$

- A. $\frac{3}{4} + 2 \ln 2$ B. $\frac{3}{2} + 2 \ln 2$. C. $\frac{3}{4} + \ln 2$. D. $3 + \ln 2$.

Câu 30: Biết $\int_0^8 f(x) dx = 10, \int_0^4 f(x) dx = -4$. Tính $\int_{-1}^3 f(|3x-1|) dx$.

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 4.

Câu 31: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình

x	$-\infty$	-2	-1	4	$+\infty$	
y'	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	2021	8	$+\infty$	

Giá trị $I = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f'(2x)dx + \int_0^3 \frac{f'(x+1)}{2}dx$ bằng

- A. 3. B. 2021. C. 5. D. 10.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) = f(5-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết $\int_2^3 f(x)dx = 2$.

Tính $I = \int_2^3 xf(x)dx$.

- A. $I = 20$. B. $I = 10$. C. $I = 15$. D. $I = 5$.

Câu 33: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn các điều kiện sau: $f(0) = -2$ và

$(x^2 + 1)f'(x) + xf(x) = -x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tính tích phân $I = \int_0^{\sqrt{3}} xf(x)dx$.

- A. $I = \frac{5}{2}$. B. $I = -\frac{3}{2}$. C. $I = \frac{3}{2}$. D. $I = -\frac{5}{2}$.

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2021f(x) - f(-x) = x \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị

của tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ bằng

- A. $I = \frac{3}{2022}$. B. $\frac{1}{1010}$. C. $\frac{2}{2019}$. D. $\frac{1}{2020}$.

Câu 35: Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục và luôn dương trên đoạn $[0; e]$ thỏa mãn $f(x) \cdot f(e-x) = 1$. Tính

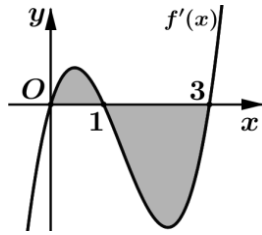
tích phân $I = \int_0^e \frac{1}{1+f(x)}dx$

- A. $I = e$. B. $I = \frac{e}{2}$. C. $I = \frac{2e}{3}$. D. $I = \frac{e}{3}$.

Câu 36: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn

$f(x^3 + 2x + 3) = x^6 + 4x^4 + 3x^3 + 6x + 2$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính tích phân $I = \int_0^6 f(x)dx$.

- A. $\frac{206}{35}$. B. $\frac{1976232}{5}$. C. $\frac{125}{24}$. D. $\frac{125}{48}$.

- Câu 37:** $\int_{-1}^1 (3x^2 + 2) f(x^3 + 2x + 3) dx = \int_{-1}^1 (3x^2 + 2)(x^6 + 4x^4 + 3x^3 + 6x + 2) dx \Leftrightarrow \int_0^6 f(t) dt = \frac{298}{15}$. (SGD VĨNH PHÚC - LẦN 2 - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cdot \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $f(0) = 0$, tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf'(x) dx$.
- A. $I = -\frac{1}{4}$. B. $I = \frac{1}{4}$. C. $I = \frac{\pi}{4}$. D. $I = -\frac{\pi}{4}$.
- Câu 38:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x^3 + 2x) = 4x - 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $\int_0^3 f(x) dx$ bằng
- A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.
- Câu 39:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2-x) + 2f(x) = 3x^2 + 2$. Giá trị của tích phân $I = \int_0^1 xf(x^2) dx + \int_0^1 \frac{3f(\sqrt{3x+1})}{4\sqrt{3x+1}} dx$
- A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.
- Câu 40:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(x^2 + 1) + \frac{f(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}} = \frac{\ln x}{x}$. Biết $\int_1^{17} f(x) dx = a \ln 4 - b$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Giá trị của $a + 2b$ bằng
- A. 20. B. 16. C. 12. D. 8.
- Câu 41:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Miền hình phẳng trong hình vẽ được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và trục hoành đồng thời có diện tích $S = a$. Biết rằng $\int_0^1 (x+1) f'(x) dx = b$ và $f(3) = c$. Giá trị của $\int_0^1 f(x) dx$ bằng
- 
- A. $a - b - c$. B. $-a + b + c$. C. $-a + b - c$. D. $a - b + c$.
- Câu 42:** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn $\frac{f(x)}{x} = f(x) + f'(x) - e^{-x}$ đồng thời $f(1) = \frac{1}{e}$. Tính giá trị của $f(2)$.
- A. $f(2) = e^{-2}(1 + 2 \ln 2)$. B. $f(2) = e^{-2}(3 + 2 \ln 2)$.
C. $f(2) = e^{-2}(2 + \ln 3)$. D. $f(2) = 2e^{-2}(1 + \ln 2)$.

Câu 43: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;1]$ thỏa mãn $f(x)-1=\int_{-1}^1(x+e^t)f(t)dt$. Tích phân

$$\int_{-1}^1 e^x f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $I = \frac{e+3}{-e^2+e-3}$. B. $I = \frac{e^2+3}{e^2-e+3}$. C. $I = \frac{e^2+3}{-e^2+e-3}$. D. $I = \frac{-2e}{e^2-e+3}$.

Câu 44: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[-2;2]$ thỏa mãn

$$\int_{-2}^2 [f^2(x) - 2f(x)(x+2)] dx = -\frac{64}{3}. \text{ Tính } I = \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1} dx.$$

A. $I = \frac{\pi - 2\ln 2}{2}$. B. $I = \frac{\pi - \ln 2}{2}$. C. $I = \frac{\pi + \ln 2}{2}$. D. $I = \frac{\pi + 2\ln 2}{2}$.

Câu 45: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục có đạo hàm $f'(x)$ trên $[0;1]$, $f(0)=0$. Biết $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{1}{3}$,

$$\int_0^1 f(x) dx = -\frac{1}{3}. \text{ Khi đó } \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx \text{ bằng:}$$

A. $-\frac{5}{48}$. B. 0. C. $-\frac{1}{6}$. D. $\frac{6}{23}$.

Câu 46: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(1)=0$,

$$f'(x) \cdot f(x) = 2x\sqrt{f^2(x)+1}, \forall x \in [1; +\infty). \text{ Tính } f^2(2).$$

A. 1. B. 15. C. 3. D. 24.

Câu 47: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(x^2+1) + \frac{f(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}} = \frac{\ln x}{x}$. Biết

$$\int_1^{17} f(x) dx = a \ln 4 - b \text{ với } a, b \in \mathbb{R}. \text{ Giá trị của } a+2b \text{ bằng}$$

A. 16. B. 12. C. 8. D. 20.

Câu 48: Cho $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $3f'(x) \cdot e^{f^3(x)-x^2-1} - \frac{2x}{f^2(x)} = 0$, với $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết

$$f(0)=1, \text{ tính tích phân } I = \int_0^{\sqrt{7}} x \cdot f(x) dx.$$

A. $\frac{9}{2}$. B. $\frac{45}{8}$. C. $\frac{11}{2}$. D. $\frac{15}{4}$.

Câu 49: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+1} & \text{khi } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2x-1 & \text{khi } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f'(\sin x) dx$ bằng

A. $\frac{3}{2} - 4\ln 3 + 4\ln 2$. B. $\frac{3}{2} + 4\ln 3 + 4\ln 2$.

C. $-\frac{3}{2} + 4\ln 3 + 4\ln 2$. D. $\frac{3}{2} + 4\ln 3 - 4\ln 2$.

Câu 50: Cho hàm số $f(x), f(-x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f(x) + 3f(-x) = \frac{1}{4+x^2}$. Tính

$$I = \int_{-2}^2 f(x) dx$$

A. $\frac{\pi}{20}$. B. $-\frac{\pi}{20}$. C. $-\frac{\pi}{10}$. D. $\frac{\pi}{10}$.

Câu 51: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, $f(1) = e^3$. Biết

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2x + 1, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tìm tất cả giá trị của tham số } m \text{ để phương trình } f(x) = m \text{ có hai}$$

nghiệm thực phân biệt.

A. $m \geq e^{\frac{3}{4}}$. B. $0 < m < e^{\frac{3}{4}}$. C. $1 < m < e^{\frac{3}{4}}$. D. $m > e^{\frac{3}{4}}$.

Câu 52: Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $3f(-x) + 2f(x) = x^{10}, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_0^1 f(x) dx$.

A. $I = \frac{1}{55}$. B. $I = \frac{1}{11}$. C. $I = 55$. D. $I = 11$.

Câu 53: Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ thỏa $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [f^2(x) - 2f(x)(3-x)] dx = -\frac{109}{12}$

. Khi đó $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x^2 - 1} dx$ bằng

A. $\ln \frac{7}{9}$. B. $\ln \frac{5}{9}$. C. $\ln \frac{2}{9}$. D. $\ln \frac{8}{9}$.

Câu 54: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn

$$f^2(x) - xf(x)f'(x) = 2x + 4, \forall x \in [0;1].$$

Biết $f(1) = 3$. Tích phân $\int_0^1 f^2(x) dx$ bằng

A. 19. B. 13. C. $\frac{19}{3}$. D. $\frac{13}{3}$.

Câu 55: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = 2021$. Tính $I = \int_0^{\pi} xf(\sin x) dx$

A. $I = 2021$. B. $I = 1010\pi$. C. $I = \frac{2021\pi}{2}$. D. $I = 2021\pi$.

Câu 56: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(4) = \frac{4}{3}$ và $f(x) = x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} - f'(x) \right)$, $\forall x > 0$. Khi đó

$$\int_1^4 xf(x)dx \text{ bằng}$$

- A. $\frac{1283}{30}$. B. $-\frac{157}{30}$. C. $\frac{157}{30}$. D. $-\frac{1283}{30}$.

Câu 57: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định trên $\mathbb{R}$. Biết $f(1) = 2$ và

$$\int_0^1 x^2 f'(x) dx = \int_1^4 \frac{1+3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} f(2-\sqrt{x}) dx = 4. \text{ Giá trị của } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

- A. 1. B. $\frac{5}{7}$. C. $\frac{3}{7}$. D. $\frac{1}{7}$.

Câu 58: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^3 [2x \ln x + 1 + xf'(x)] dx = 0$ và $f(3) = 1$. Biết

$$\int_0^3 f(x) dx = \frac{a+b \ln 2}{2} \text{ với } a, b \text{ là các số nguyên dương. Giá trị của } a+b \text{ là}$$

- A. 35. B. 7. C. 11. D. 29.

Câu 59: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 4-x & \text{khi } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_0^2 f(x) dx$.

- A. $\frac{7}{2}$. B. 1. C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 60: Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[1;3]$ và $f(x) \neq 0$ với mọi

$$x \in [1;3], \text{ đồng thời } f'(x)(1+f(x))^2 = \left[(f(x))^2 (x-1) \right]^2 \text{ và } f(1) = -1. \text{ Khi đó } \int_1^3 f(x) dx \text{ là:}$$

- A. $-\ln 3$. B. $\ln 3$. C. $\ln 2$. D. $-\ln 2$.

Câu 61: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} e^x + m & \text{khi } x \geq 0 \\ 2x\sqrt{3+x^2} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{-1}^1 f(x) dx = ae + b\sqrt{3} + c$,

$(a, b, c \in \mathbb{Q})$. Tổng $a+b+3c$ bằng

- A. 15. B. -10. C. -19. D. -17.

Câu 62: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \cdot f(\cos^2 x) dx = \int_1^8 \frac{f(\sqrt[3]{x})}{x} dx = 6$. Tính

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} \frac{f(x^2)}{x} dx$$

- A. 4. B. 6. C. 7. D. 10.

Câu 63: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ và thỏa mãn $f(1) = -\frac{1}{2}$ và

$f(x) + xf'(x) = (2x^3 + x^2)f^2(x), \forall x \in [1; 2]$. Giá trị của tích phân $\int_1^2 xf(x)dx$ bằng

A. $\ln \frac{4}{3}$.

B. $\ln \frac{3}{4}$.

C. $\ln 3$.

D. 0.

Câu 64: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi } x \geq 2 \\ x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\sin x + 1)\cos x dx$ bằng

A. $\frac{23}{3}$.

B. $\frac{23}{6}$.

C. $\frac{17}{6}$.

D. $\frac{17}{3}$.

Câu 65: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x^2 - x - 2) = x + 3$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tích phân $I = \int_{-2}^0 xf'(x)dx$ có giá trị là

A. $\frac{4}{3}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $-\frac{10}{3}$.

D. $-\frac{46}{3}$.

Câu 66: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 6x & \text{khi } x \geq 2 \\ \frac{2}{2x-5} & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Tính phân $I = \int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x} dx$ bằng

A. $15 + \frac{1}{2} \ln 6$.

B. $15 - \frac{1}{5} \ln 6$.

C. $15 + \frac{1}{5} \ln 6$.

D. $15 - \frac{1}{2} \ln 6$.

Câu 67: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(4) = \frac{4}{3}$ và $f(x) = x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} - f'(x) \right), \forall x > 0$. Khi đó $\int_1^4 xf(x)dx$ bằng

A. $\frac{1283}{30}$.

B. $-\frac{157}{30}$.

C. $\frac{157}{30}$.

D. $-\frac{1283}{30}$.

Câu 68: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn các điều kiện $f(1) = 3$ và

$$\frac{2f^2(x)}{x^2} - \left(\frac{1}{x} + \frac{8}{x^3} \right) f(x) + \frac{8}{x^4} = f'(x), \forall x > 0. \text{ Tính } \int_2^4 f(x)dx$$

A. $6 - 2\ln 2$.

B. $6 + 4\ln 2$.

C. $6 + 2\ln 2$.

D. $8 + 4\ln 2$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có $f(0) = 2$ và $f(4x) - f(x) = 4x^3 + 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tích phân $I = \int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{148}{63}$.

B. $\frac{146}{63}$.

C. $\frac{149}{63}$.

D. $\frac{145}{63}$.

Lời giải**Chọn A**

Ta có

$$\begin{cases} f(4x) - f(x) = 4x^3 + 2x, \forall x \in \mathbb{R} \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 64a - a = 4 \\ 16b - b = 0 \\ 4c - c = 2 \\ d = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{63} \\ b = 0 \\ c = \frac{2}{3} \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{4}{63}x^3 + \frac{2}{3}x + 2$$

$$\text{Vậy } I = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{4}{63}x^3 + \frac{2}{3}x + 2 \right) dx = \frac{148}{63}.$$

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(6) = 1$ và $\int_0^6 (x^2 \cdot f'(x) + 6f(x))dx = 10$; khi đó: $\int_{-3}^3 xf(x+3)dx$ bằng:

A. -13 .

B. 26 .

C. -26 .

D. 13 .

Lời giải**Chọn D**Đặt $t = x + 3$ khi đó ta có:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-3}^3 xf(x+3)dx = \int_0^6 (t-3)f(t)dt \\ &= \int_0^6 t \cdot f(t)dt - 3 \int_0^6 f(t)dt = \int_0^6 x \cdot f(x)dx - 3 \int_0^6 f(x)dx = I_1 - 3 \int_0^6 f(x)dx \end{aligned}$$

$$\text{Xét } I_1 = \int_0^6 t \cdot f(t)dt = \int_0^6 x \cdot f(x)dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = xdx \end{cases} \text{ ta có: } \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

Khi

đó:

$$I_1 = \int_0^6 x \cdot f(x)dx = \frac{x^2}{2} \cdot f(x) \Big|_0^6 - \int_0^6 \frac{x^2}{2} \cdot f'(x)dx = 18 \cdot f(6) - \int_0^6 \frac{x^2}{2} \cdot f'(x)dx = 18 - \int_0^6 \frac{x^2}{2} \cdot f'(x)dx$$

$$\text{Vậy: } I = 18 - \frac{1}{2} \left(\int_0^6 x^2 f'(x)dx + \int_0^6 6f(x)dx \right) = 18 - 5 = 13$$

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 4x \int_0^1 |f(x)|dx$ và $f(1) > 0$. Khi đó $f(4)$ bằng

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } m = \int_0^1 |f(x)| dx, (m \geq 0) \Rightarrow f(x) = x^3 - 4mx.$$

$$\text{Do } f(1) > 0 \Rightarrow 1 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{4} \Rightarrow m \in \left[0; \frac{1}{4}\right).$$

$$\text{Khi đó } m = \int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 |x^3 - 4mx| dx = \int_0^{2\sqrt{m}} |x^3 - 4mx| dx + \int_{2\sqrt{m}}^1 |x^3 - 4mx| dx$$

$$\Leftrightarrow m = - \int_0^{2\sqrt{m}} (x^3 - 4mx) dx + \int_{2\sqrt{m}}^1 (x^3 - 4mx) dx$$

$$\Leftrightarrow m = - \left(\frac{1}{4} x^4 - 2mx^2 \right) \Big|_0^{2\sqrt{m}} + \left(\frac{1}{4} x^4 - 2mx^2 \right) \Big|_{2\sqrt{m}}^1$$

$$\Leftrightarrow m = - \left(\frac{1}{4} x^4 - 2mx^2 \right) \Big|_0^{2\sqrt{m}} + \left(\frac{1}{4} x^4 - 2mx^2 \right) \Big|_{2\sqrt{m}}^1$$

$$\Leftrightarrow 8m^2 - 3m + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{4} \\ m = \frac{1}{8} \end{cases}$$

$$\text{Vì } m \in \left[0; \frac{1}{4}\right) \text{ nên } m = \frac{1}{8}.$$

$$\text{Khi đó } f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x \Rightarrow f(4) = 62..$$

Câu 4: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên tập số thực R và thỏa mãn: $f(e^x + x + 1) = \frac{x^9}{e^x + 1}$. Tính

$$I = \int_2^{e+2} f(x) dx.$$

A. $\frac{1}{8}$.

B. $\frac{1}{9}$.

C. $\frac{1}{10}$.

D. $\frac{1}{11}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } f(e^x + x + 1) = \frac{x^9}{e^x + 1} \Leftrightarrow (e^x + 1) \cdot f(e^x + x + 1) = x^9. \text{ Lấy tích phân hai vế:}$$

$$\int_0^1 (e^x + 1) \cdot f(e^x + x + 1) dx = \int_0^1 x^9 dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 (e^x + 1) \cdot f(e^x + x + 1) dx = \frac{1}{10} (1)$$

$$\text{Đặt: } u = e^x + x + 1 \Rightarrow du = (e^x + 1) dx$$

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow u=2; x=1 \Rightarrow u=e+2$. Khi đó: $(1) \Leftrightarrow \int_2^{e+2} f(u)du = \frac{1}{10}$. Vậy

$$(1) \Leftrightarrow \int_2^{e+2} f(x)dx = \frac{1}{10}$$

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $f(1) = -2$, $f(x) \neq -\frac{1}{x}$ và

$$x^2 f^2(x) + (2x-1)f(x) = xf'(x) - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \text{ Tính } \int_1^4 f(x)dx.$$

A. $-2\ln 2 - \frac{3}{4}$. **B.** $-2\ln 2 - \frac{1}{4}$. **C.** $-\ln 2 - \frac{3}{4}$. **D.** $-\ln 2 - \frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} x^2 f^2(x) + (2x-1)f(x) &= xf'(x) - 1 \\ \Leftrightarrow x^2 f^2(x) + 2xf(x) - f(x) &= xf'(x) - 1 \\ \Leftrightarrow x^2 f^2(x) + 2xf(x) + 1 &= xf'(x) + f(x) \\ \Leftrightarrow [xf(x) + 1]^2 &= (xf(x))' \Leftrightarrow [xf(x) + 1]^2 = (xf(x) + 1)'. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \frac{(xf(x) + 1)'}{[xf(x) + 1]^2} = 1 \Rightarrow \int \frac{(xf(x) + 1)'}{[xf(x) + 1]^2} dx = \int dx \Rightarrow -\frac{1}{xf(x) + 1} = x + C.$$

$$\text{Mà } f(1) = -2 \Rightarrow -\frac{1}{f(1) + 1} = 1 + C \Rightarrow -\frac{1}{-2 + 1} = 1 + C \Rightarrow C = 0.$$

$$\text{Nên } -\frac{1}{xf(x) + 1} = x \Rightarrow xf(x) + 1 = -\frac{1}{x} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}.$$

$$\text{Suy ra } \int_1^4 f(x)dx = \int_1^4 \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)dx = \left(\frac{1}{x} - \ln x\right)\Big|_1^4 = \frac{1}{4} - \ln 4 - 1 + \ln 1 = -2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

Câu 6: Cho hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^1 f(x)dx = 6$. Tính $\int_0^1 [xf(x^2) - x^2 f(x^3)]dx$.

A. 0 **B.** -1 **C.** 1 **D.** $\frac{1}{6}$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } I = \int_0^1 [xf(x^2) - x^2 f(x^3)]dx = \int_0^1 xf(x^2)dx - \int_0^1 x^2 f(x^3)dx = I_1 - I_2$$

$$+ \text{ Tính } I_1 = \int_0^1 xf(x^2)dx$$

$$\text{Đặt } t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx \Rightarrow xdx = \frac{1}{2}dt; x=0 \Rightarrow t=0; x=1 \Rightarrow t=1$$

$$\text{Ta có: } I_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx$$

$$+ \text{ Tính } I_2 = \int_0^1 x^2 f(x^3) dx.$$

$$\text{Đặt } t = x^3 \Rightarrow dt = 3x^2 dx \Rightarrow x^2 dx = \frac{1}{3} dt; x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow t = 1$$

$$\text{Ta có: } I_2 = \frac{1}{3} \int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{3} \int_0^1 f(x) dx$$

$$\text{Vậy } I = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{3} \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{6} \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{6} \cdot 6 = 1$$

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f^2(x) - xf(x)f'(x) = 2x + 4, \forall x \in [0;1]$. Biết $f(1) = 3$. Tích phân $I = \int_0^1 f^2(x) dx$ bằng

A. $\frac{19}{3}$.

B. 19.

C. 13.

D. $\frac{13}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Tính } I = \int_0^1 f^2(x) dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f^2(x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2f(x)f'(x)dx \\ v = x \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } I = \left(xf^2(x) \right) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 xf(x)f'(x) dx = f^2(1) - 2 \int_0^1 xf(x)f'(x) dx = 9 - 2 \int_0^1 xf(x)f'(x) dx.$$

Từ $f^2(x) - xf(x)f'(x) = 2x + 4$, lấy tích phân hai vế ta được

$$\int_0^1 [f^2(x) - xf(x)f'(x)] dx = \int_0^1 (2x + 4) dx \Leftrightarrow \int_0^1 f^2(x) dx - \int_0^1 xf(x)f'(x) dx = \int_0^1 (2x + 4) dx$$

$$\Leftrightarrow I + \frac{I - 9}{2} = 5 \Leftrightarrow I = \frac{19}{3}.$$

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ đồng biến, biết $f(x) > 0, \forall x \in [1;4]$ và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;4]$, thỏa mãn $f(1) = 1$ và $[2f(x) + xf'(x)]^2 = \frac{f(x)}{x}$ với mọi $x \in [1;4]$. Khi đó $\int_1^4 f(x) dx$ bằng

A. 1.

B. $2 \ln 2$.

C. $2 \ln 2 - 2$.

D. -2.

Lời giải

Chọn B

$$\bullet \text{ Ta có } [2f(x) + xf'(x)]^2 = \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow 2f(x) + xf'(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{f(x)} + \frac{x \cdot f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow [2x \cdot \sqrt{f(x)}]' = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

♦ Suy ra $\int \left[2x \cdot \sqrt{f(x)} \right]' dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx \Leftrightarrow 2x \cdot \sqrt{f(x)} = 2\sqrt{x} + C.$

♦ Thế $x=1$, ta được $2 \cdot \sqrt{f(1)} = 2\sqrt{1} + C \Leftrightarrow C = 0.$

Suy ra $2x \cdot \sqrt{f(x)} = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow x^2 \cdot f(x) = x \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x}.$

♦ Ta có $\int_1^4 f(x) dx = \int_1^4 \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_1^4 = 2\ln 2.$

Câu 9: Cho a, b, c là các số thực và $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ thỏa mãn $f'(t) = f'(t+5) = 2$ với t là hằng số. Giá trị $\int_t^{t+5} f'(x) dx$ bằng

A. $-\frac{105}{2}.$

B. $\frac{134}{3}.$

C. $-\frac{1}{2}.$

D. $\frac{19}{4}.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$. Vì $f'(t) = f'(t+5) = 2$ nên t và $t+5$ là hai nghiệm của phương trình $f'(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2ax + b - 2 = 0.$

Theo Viet ta có $\begin{cases} t+t+5 = -\frac{2a}{3} \\ t(t+5) = \frac{b-2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{2}(2t+5) \\ b = 3(t^2+5t)+2 \end{cases}.$

Do đó

$$\begin{aligned} I &= \int_t^{t+5} f'(x) dx = f(t+5) - f(t) = \left[(t+5)^3 - t^3 \right] + a \left[(t+5)^2 - t^2 \right] + b \left[(t+5) - t \right] \\ &= \left[(t+5-t)^3 + 3t(t+5)(t+5-t) \right] + a \cdot 5 \cdot (2t+5) + 5b \\ &= 125 + 15(t^2+5t) - \frac{15}{2}(2t+5)^2 + 5 \left[3(t^2+5t) + 2 \right] \\ &= 135 + 30(t^2+5t) - \frac{15}{2}(4t^2+20t+25) = -\frac{105}{2}. \end{aligned}$$

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $0; +\infty$ và thỏa mãn

$f(x^2 + 4x) = -2x^2 - 7x + 1, \forall x \in 0; +\infty$. Biết $f(5) = -8$, tính $I = \int_0^5 x \cdot f'(x) dx$?

A. $I = -\frac{68}{3}.$

B. $I = -\frac{35}{3}.$

C. $I = -\frac{52}{3}.$

D. $I = -\frac{62}{3}.$

Lời giải

Chọn A

Đặt $x^2 + 4x = t$, với $x \in 0; +\infty$ thì $t \geq 0$.

Suy ra $x + 2^2 = t + 4 \Rightarrow x = \sqrt{t+4} - 2.$

Do đó $-2x^2 - 7x + 1 = -2x^2 + 4x + x + 1 = -2t + \sqrt{t+4} - 1.$

Khi đó $f(x^2 + 4x) = -2x^2 - 7x + 1 \Rightarrow f(t) = -2t + \sqrt{t+4} - 1$: $f(t)$ liên tục trên $[0; +\infty)$.

Tính $I = \int_0^5 x \cdot f'(x) dx$:

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$

$$\begin{aligned} I &= xf(x) \Big|_0^5 - \int_0^5 f(x) dx = 5 \cdot f(5) - \int_0^5 f(t) dt \\ &= 5 \cdot (-8) - \int_0^5 (-2t + \sqrt{t+4} - 1) dt = -40 - \left(-t^2 + \frac{2}{3}\sqrt{t+4}^3 - t \right) \Big|_0^5 = -\frac{68}{3}. \end{aligned}$$

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $xf'(x) = e^{x^2} - 1, \forall x \in \mathbb{R}, f(1) = 0$. Giá trị $\int_0^1 xf(x) dx$ bằng

- A. $-\frac{1}{4}(e-2)$. B. $\frac{1}{4}(e-2)$. C. $-\frac{1}{2}(e-2)$. D. $\frac{1}{2}(e-2)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $xf'(x) = e^{x^2} - 1 \Rightarrow x^2 f'(x) = x(e^{x^2} - 1)$.

Xét $I = \int_0^1 xf(x) dx$. Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$.

$$\text{Suy ra } I = \frac{x^2}{2} f(x) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 f'(x) dx = \frac{1}{2} f(1) - \frac{1}{2} \int_0^1 x(e^{x^2} - 1) dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 x(e^{x^2} - 1) dx.$$

$$\text{Xét } J = \int_0^1 x(e^{x^2} - 1) dx = \int_0^1 xe^{x^2} dx - \int_0^1 x dx. \quad \text{Đặt}$$

$$t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx \Rightarrow J = \frac{1}{2} \int_0^1 e^t dt - \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} e^t \Big|_0^1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} e - 1 = \frac{1}{2}(e - 2).$$

$$\text{Vậy } I = -\frac{1}{2} J = -\frac{1}{4}(e - 2).$$

Câu 12: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục có đạo hàm $f'(x)$ trên $[0;1]$, $f(1) = 0$. Biết

$$\int_0^1 (f'(x))^2 dx = \frac{1}{3}, \int_0^1 f(x) dx = -\frac{1}{3}. \text{ Khi đó } \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx \text{ bằng}$$

- A. $-\frac{11}{48}$. B. 0. C. $-\frac{1}{6}$. D. $\frac{6}{23}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

Từ $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{1}{3}$, ta đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ v = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = x \end{cases}$;

Do đó: $-\frac{1}{3} = x \cdot f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 x \cdot f'(x) dx \Rightarrow \int_0^1 x \cdot f'(x) dx = \frac{1}{3}$.

Từ đó ta suy ra $\int_0^1 (f'(x) - x)^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = x \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{2} + C$

Lại có $f(1) = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$; suy ra $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$.

Vậy $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \right) dx = -\frac{11}{48}$.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ với $f(0) = f(1) = 1$. Tính $\int_0^1 e^x [f(x) + f'(x)] dx$

A. $I = 0$.

B. $I = e + 1$.

C. $I = e - 1$.

D. e .

Lời giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = e^x \end{cases}$.

$\int_0^1 e^x [f(x) + f'(x)] dx = e^x f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x f'(x) dx + \int_0^1 e^x f'(x) dx = ef(1) - f(0) = e - 1$.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-1; 1]$, thỏa mãn $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f'(x) + 2f(x) = 0$. Biết $f(1) = 1$. Tính $f(-1)$

A. e^{-2} .

B. e^{-4} .

C. e^2 .

D. e^4 .

Lời giải

Chọn D

+ Ta có: Vì $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên

$f'(x) + 2f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -2 \Rightarrow \int_{-1}^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = -2 \int_{-1}^1 dx \Leftrightarrow \ln(f(x)) \Big|_{-1}^1 = -2x \Big|_{-1}^1$

$\Leftrightarrow \ln \frac{f(1)}{f(-1)} = -4 \Leftrightarrow f(-1) = e^4$.

Vậy $f(-1) = e^4$

Câu 15: Cho hàm số $f(x) = x\sqrt{x} + \int_0^1 xf(x) dx$. Tích phân $\int_0^4 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{528}{35}$.

B. $\frac{438}{35}$.

C. $\frac{408}{35}$.

D. $\frac{368}{35}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\int_0^1 xf(x)dx = a$. Suy ra

$$f(x) = x\sqrt{x} + a \Rightarrow xf(x) = x^2\sqrt{x} + ax \Rightarrow \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 (x^2\sqrt{x} + ax)dx$$

$$a = \int_0^1 x^2\sqrt{x}dx + a \int_0^1 xdx = \frac{2}{7} + \frac{a}{2} \Rightarrow a = \frac{4}{7}.$$

$$\text{Vậy } f(x) = x\sqrt{x} + \frac{4}{7}. \text{ Suy ra } \int_0^4 \left(x\sqrt{x} + \frac{4}{7}\right)dx = \left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{7}x\right)\Big|_0^4 = \frac{528}{35}.$$

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ thỏa $f(2) = 0$ và $f'(x) = \frac{x+7}{\sqrt{2x-3}}, \forall x \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. Biết $\int_4^7 f\left(\frac{x}{2}\right)dx = \frac{a}{b}$,

với $a, b \in \mathbb{Z}, b > 0$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a + b$.

A. 250.

B. 251.

C. 133.

D. 221.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2t \Rightarrow dx = 2dt.$$

$$\text{Khi đó } I = \int_4^7 f\left(\frac{x}{2}\right)dx = \int_2^{\frac{7}{2}} f(t) \cdot 2dt.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(t) \\ dv = 2dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(t) dt \\ v = 2\left(t - \frac{7}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = 2\left(t - \frac{7}{2}\right)f(t)\Big|_2^{\frac{7}{2}} - \int_2^{\frac{7}{2}} 2\left(t - \frac{7}{2}\right)f'(t) dt = 0 - \int_2^{\frac{7}{2}} 2\left(t - \frac{7}{2}\right) \cdot \frac{t+7}{\sqrt{2t-3}} dt = \frac{236}{15}$$

$$\Rightarrow a = 236; b = 15 \Rightarrow a + b = 251.$$

Câu 17: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{khi } x > 3 \\ ax-3a+7 & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$ (a là tham số thực). Nếu $\int_0^1 f(e^x + 1)e^x dx = e^2$ thì

a bằng

A. $\frac{3e^2 + 4e - 6}{e - 1}$.

B. $6e - 6$

C. $6e + 6$

D. $-6e + 6$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } t = e^x + 1 \Rightarrow dt = e^x dx. \text{ Nếu } x = 0 \Rightarrow t = 2, \text{ Nếu } x = 1 \Rightarrow t = e + 1$$

Suy ra:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(e^x + 1)e^x dx &= \int_2^{e+1} f(t)dt = \int_2^3 f(t)dt + \int_3^{e+1} f(t)dt = \int_2^3 (at - 3a + 7)dt + \int_3^{e+1} (2t + 1)dt \\
&= \left(\frac{at^2}{2} - 3at + 7t \right) \Big|_2^3 + (t^2 + t) \Big|_3^{e+1} = \\
&= \left(\frac{a \cdot 3^2}{2} - 3a \cdot 3 + 7 \cdot 3 \right) - \left(\frac{a \cdot 2^2}{2} - 3a \cdot 2 + 7 \cdot 2 \right) + ((e+1)^2 + e+1) - (3^2 + 3) \\
&= \frac{-a}{2} + e^2 + 3e - 3
\end{aligned}$$

Theo giả thiết: $\int_0^1 f(e^x + 1)e^x dx = e^2$ nên ta có phương trình:

$$\frac{-a}{2} + e^2 + 3e - 3 = e^2 \Leftrightarrow \frac{a}{2} = 3e - 3 \Leftrightarrow a = 6e - 6$$

Câu 18: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{khi } x > 3 \\ ax-3a+7 & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$ (a là tham số thực). Nếu $\int_0^1 f(e^x + 1)e^x dx = e^2$ thì a bằng

- A. $\frac{3e^2 + 4e - 6}{e - 1}$. B. $6e - 6$. C. $6e + 6$. D. $-6e + 6$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 7 = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

$\Rightarrow$ hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 3$.

Đặt $t = e^x + 1 \Rightarrow dt = e^x dx$

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 2$; $x = 1 \Rightarrow t = e + 1$

Khi đó $\int_2^{e+1} f(t)dt = e^2 \Leftrightarrow \int_2^3 (at - 3a + 7)dt + \int_3^{e+1} (2t + 1)dt = e^2$.

$$\Leftrightarrow \left(\frac{at^2}{2} - 3at + 7t \right) \Big|_2^3 + (t^2 + t) \Big|_3^{e+1} = e^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{9}{2}a - 9a + 21 \right) - (2a - 6a + 14) + [(e+1)^2 + (e+1)] - (3^2 + 3) = e^2$$

$$\Leftrightarrow a = 6e - 6.$$

Câu 19: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{khi } x > 3 \\ ax-3a+7 & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$ (a là tham số thực). Nếu $\int_0^1 f(e^x + 1)e^x dx = e^2$ thì a bằng

- A. $\frac{3e^2 + 4e - 6}{e - 1}$. B. $6e - 6$. C. $6e + 6$. D. $-6e + 6$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 7 = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \Rightarrow$ hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 3$.

$$\text{Đặt } t = e^x + 1 \Rightarrow dt = e^x dx.$$

$$\text{Đổi cận: } x = 0 \Rightarrow t = 2; x = 1 \Rightarrow t = e + 1$$

$$\text{Khi đó } \int_2^{e+1} f(t)dt = e^2 \Leftrightarrow \int_2^3 (at - 3a + 7)dt + \int_3^{e+1} (2t + 1)dt = e^2.$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{at^2}{2} - 3at + 7t \right) \Big|_2^3 + (t^2 + t) \Big|_3^{e+1} = e^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{9}{2}a - 9a + 21 \right) - (2a - 6a + 14) + [(e+1)^2 + (e+1)] - (3^2 + 3) = e^2$$

$$\Leftrightarrow a = 6e - 6.$$

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2) = 3$, $\int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2$, $\int_0^2 xf'(x) dx = 3$.

$$\text{Tính } \int_0^1 f(x) dx.$$

A. 5.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

$$\bullet \text{ Gọi } A = \int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx.$$

$$\text{Đặt } \sqrt{x} = t \Rightarrow \frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt \Rightarrow dx = 2\sqrt{x}dt.$$

$$x = 1 \Rightarrow t = 1; x = 4 \Rightarrow t = 2 \Rightarrow A = \int_1^2 \frac{f(t) \cdot 2\sqrt{x}dt}{\sqrt{x}} = 2 \int_1^2 f(t)dt.$$

$$\text{Mà } A = 2 \Rightarrow \int_1^2 f(x)dx = 1.$$

$$\bullet \text{ Gọi } B = \int_0^2 xf'(x)dx.$$

$$\text{Ta có: } B = \int_0^2 xf'(x)dx = \int_0^2 x d(f(x)) = xf(x) \Big|_0^2 - \int_0^2 f(x)dx = 2f(2) - \int_0^2 f(x)dx.$$

$$\text{Mà } f(2) = 3 \text{ và } B = 3 \Rightarrow 6 - \int_0^2 f(x)dx = 3 \Rightarrow \int_0^2 f(x)dx = 3.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx = 3 - 1 = 2.$$

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x^3 + 3x + 1) = 3x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Tích phân } \int_1^5 x \cdot f'(x) dx \text{ bằng}$$

A. $-\frac{31}{4}$.

B. $\frac{33}{4}$.

C. $\frac{17}{4}$.

D. $\frac{49}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Từ $f(x^3 + 3x + 1) = 3x + 2$ và $3x^2 + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ta có $f(1) = 2, f(5) = 5$

và $(3x^2 + 3)f(x^3 + 3x + 1) = (3x^2 + 3)(3x + 2), \forall x \in \mathbb{R}.$

Do đó $\int_0^1 (3x^2 + 3)f(x^3 + 3x + 1)dx = \int_0^1 (3x^2 + 3)(3x + 2)dx$ hay $\int_1^5 f(u)du = \frac{59}{4}.$

Ta có: $\int_1^5 x.f'(x)dx = 5.f(5) - f(1) - \int_1^5 f(x)dx = \frac{33}{4}.$

Câu 22: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $2f(x) + xf\left(\frac{1}{x}\right) = x$ với mọi $x > 0$. Tính

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x)dx.$$

A. $\frac{7}{12}.$

B. $\frac{7}{4}.$

C. $\frac{9}{4}.$

D. $\frac{3}{4}.$

Lời giải**Chọn D**

Xét trên $(0; +\infty)$:

Thay x bởi $\frac{1}{x}$ ta có: $2f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}f(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow f(x) + 2xf\left(\frac{1}{x}\right) = 1.$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} 2f(x) + xf\left(\frac{1}{x}\right) = x \\ f(x) + 2xf\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{2x-1}{3} \\ f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2-x}{3x} = \frac{\frac{2}{x}-1}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } \int_{\frac{1}{2}}^2 f(x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{2x-1}{3}dx = \frac{3}{4}.$$

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có một nguyên hàm là hàm số $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$. Khi đó

$$\int_1^2 f(x^2)dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{2}{3}.$

B. $-\frac{4}{3}.$

C. $\frac{4}{3}.$

D. $-\frac{2}{3}.$

Lời giải**Chọn C**

Ta có $f(x) = [g(x)]' = x - 1 \Rightarrow f(x^2) = x^2 - 1.$

$$\text{Khi đó } \int_1^2 f(x^2)dx = \int_1^2 (x^2 - 1)dx = \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\Bigg|_1^2 = \frac{4}{3}.$$

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^1 f(x)dx = 6$. Tính $\int_0^1 [xf(x^2) - x^2f(x^3)]dx$.

A. 0.

B. -1.

C. 1.

D. $\frac{1}{6}$.

Lời giải

Chọn C

♦ Ta có $I = \int_0^1 xf(x^2)dx - \int_0^1 x^2f(x^3)dx = A - B$.

♦ Tính $A = \int_0^1 xf(x^2)dx$

Đặt $t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx$.

Đổi cận: Khi $x = 0 \Rightarrow t = 0$; Khi $x = 1 \Rightarrow t = 1$.

Ta có $A = \frac{1}{2} \int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x)dx = 3$.

♦ Tính $B = \int_0^1 x^2f(x^3)dx$.

Đặt $t = x^3 \Rightarrow dt = 3x^2dx$.

Đổi cận: Khi $x = 0 \Rightarrow t = 0$; Khi $x = 1 \Rightarrow t = 1$.

Suy ra $B = \frac{1}{3} \int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{3} \int_0^1 f(x)dx = 2$.

Vậy $I = A - B = 3 - 2 = 1$.

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^1 f(x)dx = 6$. Tính $\int_0^1 [xf(x^2) - x^2f(x^3)]dx$.

A. 0.

B. -1.

C. 1.

D. $\frac{1}{6}$.

Lời giải

Chọn C

♦ Ta có $I = \int_0^1 xf(x^2)dx - \int_0^1 x^2f(x^3)dx = A - B$.

♦ Tính $A = \int_0^1 xf(x^2)dx$

Đặt $t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx$.

Đổi cận: Khi $x = 0 \Rightarrow t = 0$; Khi $x = 1 \Rightarrow t = 1$.

Ta có $A = \frac{1}{2} \int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x)dx = 3$.

♦ Tính $B = \int_0^1 x^2f(x^3)dx$.

Đặt $t = x^3 \Rightarrow dt = 3x^2dx$.

Đổi cận: Khi $x = 0 \Rightarrow t = 0$; Khi $x = 1 \Rightarrow t = 1$.

$$\text{Suy ra } B = \frac{1}{3} \int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{3} \int_0^1 f(x) dx = 2.$$

$$\text{Vậy } I = A - B = 3 - 2 = 1.$$

Câu 26: Cho hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(x) + g(x) = x$; $g'(x) + f(x) = -x$, với $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết $f(0) = g(0) = 1$. Tính $f(1)$.

A. $\frac{2}{e} - 2$.

B. $e + \frac{1}{e} - 2$.

C. $\frac{e^2 + 2}{2e}$.

D. $\frac{e^2 - 2}{2e}$.

Lời giải

Chọn B

$$* \text{ Ta có: } \begin{cases} f'(x) + g(x) = x \\ g'(x) + f(x) = -x \end{cases} \Rightarrow f'(x) + g'(x) = -f(x) - g(x)$$

$$\Leftrightarrow f'(x) + f(x) = -g'(x) - g(x)$$

$$\Leftrightarrow f'(x)e^x + f(x)e^x = -g'(x)e^x - g(x)e^x$$

$$\Leftrightarrow [f(x)e^x]' = -[g(x)e^x]'$$

$$\Leftrightarrow f(x).e^x = -g(x)e^x + C.$$

$$\Rightarrow f(x) = -g(x) + c \Leftrightarrow c = 2.$$

$$\text{Vậy } g(x) = \frac{2 - f(x)e^x}{e^x} = \frac{2}{e^x} - f(x).$$

$$* \text{ Ta có: } f'(x) + g(x) = x$$

$$\Leftrightarrow f'(x) + \frac{2}{e^x} - f(x) = x$$

$$\Leftrightarrow f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = xe^{-x} - 2e^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow [f(x)e^{-x}]' = xe^{-x} - 2e^{-2x}.$$

Vì hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ nên ta có:

$$\int_0^1 [f(x)e^{-x}]' dx = \int_0^1 [xe^{-x} - 2e^{-2x}] dx \Leftrightarrow f(x)e^{-x} \Big|_0^1 = (-xe^{-x} - e^{-x} + e^{-2x}) \Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow f(1)e^{-1} = \frac{1}{e^2} - \frac{2}{e} + 1 \Leftrightarrow f(1) = \frac{1}{e} + e - 2$$

$$\text{Vậy } f(1) = \frac{1}{e} + e - 2.$$

Câu 27: Cho hàm số $f(x) = x^{2021} + \sin x + 2021$. Biết rằng có duy nhất giá trị của

$$m = -\frac{a}{b} \text{ (với } a, b \in \mathbb{N}^* \text{ và } (a, b) = 1 \text{) để } \int_0^m (x.f'(m-x) - f(x)) dx = 1. \text{ Tìm } a + b.$$

A. $a + b = 2021$.

B. $a + b = 2023$.

C. $a + b = 2020$.

D. $a + b = 2022$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có } \int_0^m (x \cdot f'(m-x) - f(x)) dx &= 1 \Leftrightarrow \int_0^m x \cdot f'(m-x) dx - \int_0^m f(x) dx = 1 \\
 &\Leftrightarrow \left[-x \cdot f(m-x) \right]_0^m + \int_0^m f(m-x) dx - \int_0^m f(x) dx = 1 \\
 &\Leftrightarrow -mf(0) - \int_m^0 f(t) dt - \int_0^m f(x) dx = 1 \\
 &\Leftrightarrow -2021m + \int_0^m f(t) dt - \int_0^m f(x) dx = 1 \\
 &\Leftrightarrow m = -\frac{1}{2021}. \text{ Vậy } a=1; b=2021 \Rightarrow a+b=2022.
 \end{aligned}$$

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai $f''(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $f(0) = f(1) = 1; f'(0) = 2021$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int_0^1 (1-x) f''(x) dx = -2021.$
B. $\int_0^1 (1-x) f''(x) dx = 2021.$

C. $\int_0^1 (1-x) f''(x) dx = 1.$
D. $\int_0^1 (1-x) f''(x) dx = -1.$

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có } \int_0^1 (1-x) f''(x) dx &= \int_0^1 (1-x) df'(x) \\
 &= (1-x) f'(x) \Big|_0^1 + \int_0^1 f'(x) dx \\
 &= -f'(0) + f(1) - f(0) = -2021. \\
 \text{Vậy } \int_0^1 (1-x) f''(x) dx &= -2021.
 \end{aligned}$$

Câu 29: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(x) + f(1-x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x+1}, \forall x \in [0;1]$. Tính

$$\int_0^1 f(x) dx$$

A. $\frac{3}{4} + 2 \ln 2$
B. $\frac{3}{2} + 2 \ln 2.$
C. $\frac{3}{4} + \ln 2.$
D. $3 + \ln 2.$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta luôn có } f(x) \text{ liên tục trên đoạn } [0;1] \text{ thì } \int_0^1 f(1-x) dx = \int_0^1 f(x) dx$$

Lấy tích phân từ 0 đến 1 hai vế của đẳng thức $f(x) + f(1-x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x+1}$ ta được:

$$2 \cdot \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{x^2 + 2x + 3}{x+1} dx = \frac{3}{2} + 2 \ln 2 \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{3}{4} + \ln 2.$$

Câu 30: Biết $\int_0^8 f(x)dx = 10, \int_0^4 f(x)dx = -4$. Tính $\int_{-1}^3 f(|3x-1|)dx$.

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 4.

Lời giải**Chọn A**

$$I = \int_{-1}^3 f(|3x-1|)dx = \int_{-1}^{\frac{1}{3}} f(1-3x)dx + \int_{\frac{1}{3}}^3 f(3x-1)dx = A + B$$

$$\text{Đặt } u = 1-3x \Rightarrow du = -3dx$$

$$x = -1 \Rightarrow u = 4$$

$$x = \frac{1}{3} \Rightarrow u = 0$$

$$\text{Khi đó } A = \frac{1}{3} \int_0^4 f(u)du = \frac{1}{3} \int_0^4 f(x)dx = \frac{-4}{3}$$

$$\text{Đặt } t = 3x-1 \Rightarrow dt = 3dx$$

$$x = \frac{1}{3} \Rightarrow t = 0$$

$$x = 3 \Rightarrow t = 8$$

$$\text{Khi đó } B = \frac{1}{3} \int_0^8 f(u)du = \frac{1}{3} \int_0^8 f(x)dx = \frac{10}{3}$$

$$\text{Vậy } I = \frac{10}{3} + \left(\frac{-4}{3}\right) = 2.$$

Câu 31: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình

x	$-\infty$	-2	-1	4	$+\infty$		
y'	$+$	$\vdots$	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	2021	8	$+\infty$		

$$\text{Giá trị } I = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f'(2x)dx + \int_0^3 \frac{f'(x+1)}{2}dx \text{ bằng}$$

A. 3.

B. 2021.

C. 5.

D. 10.

Lời giải**Chọn A**

$$\text{Xét } I_1 = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f'(2x)dx$$

$$\text{Đặt } 2x = t \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$$

$$\text{Khi } x = -1 \Rightarrow t = -2; x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = 1$$

$$\text{Ta có } I_1 = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f'(2x) dx = \int_{-2}^1 f'(t) \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int_{-2}^1 f'(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-2}^1 f'(x) dx$$

$$\text{Xét } I_2 = \int_0^3 \frac{f'(x+1)}{2} dx$$

$$\text{Đặt } x+1 = u \Rightarrow dx = du$$

$$\text{Khi } x = 0 \Rightarrow u = 1; x = 3 \Rightarrow u = 4$$

$$\text{Ta có } I_2 = \int_0^3 \frac{f'(x+1)}{2} dx = \int_1^4 \frac{f'(u)}{2} du = \frac{1}{2} \int_1^4 f'(u) du = \frac{1}{2} \int_1^4 f'(x) dx$$

$$\text{Có } I = I_1 + I_2$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^1 f'(x) dx + \frac{1}{2} \int_1^4 f'(x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^4 f'(x) dx = \frac{1}{2} f(x) \Big|_{-2}^4 = \frac{f(4) - f(-2)}{2} = \frac{8 - 2}{2} = 3$$

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) = f(5-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết $\int_2^3 f(x) dx = 2$.

$$\text{Tính } I = \int_2^3 xf(x) dx.$$

A. $I = 20$.

B. $I = 10$.

C. $I = 15$.

D. $I = 5$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } t = 5 - x \Rightarrow dx = -dt.$$

$$\text{Cho } x = 2 \Rightarrow t = 3; x = 3 \Rightarrow t = 2.$$

$$I = \int_2^3 xf(x) dx = \int_3^2 (5-t) f(5-t) (-dt) = \int_2^3 (5-t) f(5-t) dt$$

$$= \int_2^3 (5-x) f(5-x) dx$$

$$= \int_2^3 5f(5-x) dx - \int_2^3 xf(5-x) dx$$

$$= \int_2^3 5f(x) dx - \int_2^3 xf(x) dx$$

$$\Leftrightarrow 2 \int_2^3 xf(x) dx = \int_2^3 5f(x) dx = 5 \cdot 2 = 10$$

$$\Leftrightarrow \int_2^3 xf(x) dx = 5.$$

Câu 33: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn các điều kiện sau: $f(0) = -2$ và

$$(x^2 + 1)f'(x) + xf(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^{\sqrt{3}} xf(x)dx.$$

A. $I = \frac{5}{2}.$

B. $I = -\frac{3}{2}.$

C. $I = \frac{3}{2}.$

D. $I = -\frac{5}{2}.$

Lời giải

Chọn D

$$\bullet (x^2 + 1)f'(x) + xf(x) = -x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} \cdot f'(x) + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot f(x) = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\sqrt{x^2 + 1} \cdot f(x) \right]' = \left(-\sqrt{x^2 + 1} \right)'$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} \cdot f(x) = -\sqrt{x^2 + 1} + C.$$

$$\bullet f(0) = -2 \Rightarrow \sqrt{1} \cdot f(0) = -\sqrt{1} + C \Rightarrow C = -1.$$

$$\bullet \sqrt{x^2 + 1} \cdot f(x) = -\sqrt{x^2 + 1} - 1 \Rightarrow f(x) = -1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Khi đó:

$$I = \int_0^{\sqrt{3}} xf(x)dx = \int_0^{\sqrt{3}} \left[-x - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right] dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 - \sqrt{x^2 + 1} \right]_0^{\sqrt{3}} = \left(-\frac{3}{2} - \sqrt{3+1} \right) - (-0-1) = -\frac{5}{2}.$$

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2021f(x) - f(-x) = x \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị

của tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ bằng

A. $I = \frac{3}{2022}.$

B. $\frac{1}{1010}.$

C. $\frac{2}{2019}.$

D. $\frac{1}{2020}.$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Bổ đề: } \int_a^b f(x)dx = \int_a^b (a+b-x)dx$$

$$\Rightarrow I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{-\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - x\right)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)dx$$

$$\text{Ta có: } 2021f(x) - f(-x) = x \sin x$$

Lấy tích phân 2 vế, cận từ $-\frac{\pi}{2}$ đến $\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow 2021 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$$

$$\Leftrightarrow 2021 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$$

$$\Leftrightarrow 2020 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$$

$$\Leftrightarrow 2020 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 2$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{2}{2020} = \frac{1}{1010}.$$

Câu 35: Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục và luôn dương trên đoạn $[0; e]$ thỏa mãn $f(x) \cdot f(e-x) = 1$. Tính

tích phân $I = \int_0^e \frac{1}{1+f(x)} dx$

- A. $I = e$. B. $I = \frac{e}{2}$. C. $I = \frac{2e}{3}$. D. $I = \frac{e}{3}$.

Lời giải

Chọn B

♦ Ta có: $f(x) \cdot f(e-x) = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{f(e-x)} \Rightarrow 1 + f(x) = 1 + \frac{1}{f(e-x)} = \frac{f(e-x) + 1}{f(e-x)}$

Khi đó: $\frac{1}{1+f(x)} = \frac{f(e-x)}{1+f(e-x)} = 1 - \frac{1}{1+f(e-x)}$.

Do đó: $\int_0^e \frac{1}{1+f(x)} dx = \int_0^e 1 dx - \int_0^e \frac{1}{1+f(e-x)} dx$.

$\Rightarrow \int_0^e \frac{1}{1+f(x)} dx = e - \int_0^e \frac{1}{1+f(e-x)} dx$.

$\Rightarrow \int_0^e \frac{1}{1+f(x)} dx + \int_0^e \frac{1}{1+f(e-x)} dx = e \quad (1).$

♦ Xét: $I = \int_0^e \frac{1}{1+f(x)} dx$

Đặt $x = e - t \Rightarrow dx = -dt$.

Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = e \\ x = e \Rightarrow t = 0 \end{cases}$.

$I = \int_0^e \frac{1}{1+f(x)} dx = \int_e^0 \frac{-dt}{1+f(e-t)} = \int_0^e \frac{dt}{1+f(e-t)} = \int_0^e \frac{dx}{1+f(e-x)} \quad (2).$

♦ Từ (1) và (2) ta được: $2I = e \Rightarrow I = \frac{e}{2}$.

Cách 2. Chọn hàm $f(x) = 1 \Rightarrow f(e-x) = 1 \Rightarrow I = \int_0^e \frac{1}{1+f(x)} dx = \int_0^e \frac{1}{2} dx = \frac{e}{2}$.

Câu 36: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn

$$f(x^3 + 2x + 3) = x^6 + 4x^4 + 3x^3 + 6x + 2, \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^6 f(x) dx.$$

A. $\frac{206}{35}$.

B. $\frac{1976232}{5}$.

C. $\frac{125}{24}$.

D. $\frac{125}{48}$.

Lời giải

Chọn D

Lấy tích phân hai vế, ta được:

Câu 37: $\int_{-1}^1 (3x^2 + 2) f(x^3 + 2x + 3) dx = \int_{-1}^1 (3x^2 + 2)(x^6 + 4x^4 + 3x^3 + 6x + 2) dx \Leftrightarrow \int_0^6 f(t) dt = \frac{298}{15}$. (SGD

VĨNH PHÚC - LẦN 2 - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cdot \cos x, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Biết } f(0) = 0, \text{ tính } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x f'(x) dx.$$

A. $I = -\frac{1}{4}$.

B. $I = \frac{1}{4}$.

C. $I = \frac{\pi}{4}$.

D. $I = -\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Do } f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cdot \cos x \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f(0) = 0 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\text{Ta có } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) d\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx.$$

$$\text{Do } f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \cdot \cos x \Rightarrow 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = -\frac{1}{4} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Khi đó } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Vậy } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x f'(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d(f(x)) = x \cdot f(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{\pi}{2} f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}.$$

Câu 38: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x^3 + 2x) = 4x - 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị

của tích phân $\int_0^3 f(x) dx$ bằng

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } f(x^3 + 2x) = 4x - 1 \Rightarrow (3x^2 + 2) \cdot f(x^3 + 2x) = (4x - 1)(3x^2 + 2)$$

$$\Leftrightarrow (3x^2 + 2) \cdot f(x^3 + 2x) = 12x^3 + 8x - 3x^2 - 2$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (3x^2 + 2) \cdot f(x^3 + 2x) dx = \int_0^1 (12x^3 + 8x - 3x^2 - 2) dx = 4 \Leftrightarrow \int_0^1 (3x^2 + 2) \cdot f(x^3 + 2x) dx = 4$$

$$\text{Đặt } x^3 + 2x = t \Rightarrow (3x^2 + 2) dx = dt$$

Đổi cận:

x	0	1
t	0	3

$$\Rightarrow 4 = \int_0^1 (3x^2 + 2) \cdot f(x^3 + 2x) dx = \int_0^3 f(t) dt = \int_0^3 f(x) dx.$$

Câu 39: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2-x) + 2f(x) = 3x^2 + 2$. Giá trị

$$\text{của tích phân } I = \int_0^1 xf(x^2) dx + \int_0^1 \frac{3f(\sqrt{3x+1})}{4\sqrt{3x+1}} dx$$

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

$$+) \text{ Xét } A = \int_0^1 xf(x^2) dx$$

$$\text{Đặt } t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx$$

$$x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow t = 1$$

$$\text{Suy ra } A = \frac{1}{2} \int_0^1 f(t) dt.$$

$$+) \text{ Xét } B = \int_0^1 \frac{3f(\sqrt{3x+1})}{4\sqrt{3x+1}} dx$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{3x+1} \Rightarrow dt = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} dx \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{3x+1}} = \frac{2}{3} dt$$

$$x = 0 \Rightarrow t = 1; x = 1 \Rightarrow t = 2$$

$$\text{Suy ra } B = \int_1^2 \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} f(t) dt = \frac{1}{2} \int_1^2 f(t) dt.$$

$$+) I = \frac{1}{2} \left[\int_0^1 f(t) dt + \int_1^2 f(t) dt \right] = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t) dt.$$

$$+) \text{ Theo đề } f(2-x) + 2f(x) = 3x^2 + 2$$

$$\Rightarrow \int_0^2 f(2-x) dx + \int_0^2 2f(x) dx = \int_0^2 (3x^2 + 2) dx \quad (1)$$

$$\text{Xét } \int_0^2 f(2-x)dx$$

$$\text{Đặt } t = 2 - x \Rightarrow dt = -dx$$

$$x = 0 \Rightarrow t = 2; \quad x = 2 \Rightarrow t = 0$$

$$(1) \Leftrightarrow \int_0^2 f(t)dt + 2 \int_0^2 f(x)dx = 12$$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx + 2 \int_0^2 f(x)dx = 12$$

$$\Leftrightarrow 3 \int_0^2 f(x)dx = 12 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx = 4.$$

$$\text{Vậy } I = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t)dt = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x)dx = 2.$$

Câu 40: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(x^2 + 1) + \frac{f(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}} = \frac{\ln x}{x}$. Biết

$$\int_1^{17} f(x)dx = a \ln 4 - b \text{ với } a, b \in \mathbb{Z}. \text{ Giá trị của } a + 2b \text{ bằng}$$

A. 20.

B. 16.

C. 12.

D. 8.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } f(x^2 + 1) + \frac{f(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}} = \frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow 2xf(x^2 + 1) + \frac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} = 2\ln x. \quad (1)$$

Lấy tích phân từ 1 đến 4 cả hai vế của (1) ta được

$$\int_1^4 2xf(x^2 + 1)dx + \int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}dx = \int_1^4 2\ln x dx \quad (1)$$

$$\text{Ta có } \int_1^4 2\ln x dx = 2 \left[x \ln x \Big|_1^4 - \int_1^4 x d(\ln x) \right] = 2 \left(4 \ln 4 - \int_1^4 1 dx \right) = 2 \left(4 \ln 4 - x \Big|_1^4 \right) = 8 \ln 4 - 6.$$

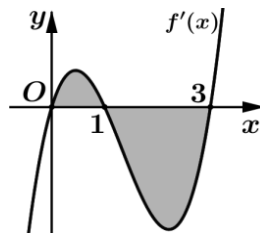
$$\text{Ta có } \int_1^4 2xf(x^2 + 1)dx = \int_1^4 f(x^2 + 1)d(x^2 + 1) = \int_2^{17} f(t)dt = \int_2^{17} f(x)dx \text{ (ở đây ta đặt } t = x^2 + 1).$$

$$\text{Lại có } \int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}dx = \int_1^4 f(\sqrt{x})d(\sqrt{x}) = \int_1^2 f(t)dt = \int_1^2 f(x)dx. \text{ (ở đây ta đặt } t = \sqrt{x}).$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow \int_2^{17} f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = 8 \ln 4 - 6 \Leftrightarrow \int_1^{17} f(x)dx = 8 \ln 4 - 6.$$

$$\text{Suy ra } a = 8; \quad b = 6 \Rightarrow a + 2b = 8 + 2.6 = 20.$$

Câu 41: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Miền hình phẳng trong hình vẽ được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và trục hoành đồng thời có diện tích $S = a$. Biết rằng $\int_0^1 (x+1) f'(x) dx = b$ và $f(3) = c$. Giá trị của $\int_0^1 f(x) dx$ bằng



A. $a - b - c$.

B. $-a + b + c$.

C. $-a + b - c$.

D. $a - b + c$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$a = S = \int_0^1 f'(x) dx - \int_1^3 f'(x) dx \Leftrightarrow 2f(1) - f(0) - f(3) = a \Leftrightarrow 2f(1) - f(0) = a + c \quad (1)$$

Xét $b = \int_0^1 (x+1) f'(x) dx$. Đặt $\begin{cases} u = x+1 \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$, ta có:

$$b = (x+1)f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = 2f(1) - f(0) - \int_0^1 f(x) dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = 2f(1) - f(0) - b \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra được: $\int_0^1 f(x) dx = a + c - b$.

Câu 42: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn $\frac{f(x)}{x} = f(x) + f'(x) - e^{-x}$ đồng thời $f(1) = \frac{1}{e}$. Tính giá trị của $f(2)$.

A. $f(2) = e^{-2}(1 + 2\ln 2)$.

B. $f(2) = e^{-2}(3 + 2\ln 2)$.

C. $f(2) = e^{-2}(2 + \ln 3)$. D. $f(2) = 2e^{-2}(1 + \ln 2)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} = f(x) + f'(x) - e^{-x} &\Leftrightarrow f(x) \left(1 - \frac{1}{x}\right) + f'(x) = e^{-x} \Leftrightarrow f(x) \left(\frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2}\right) + \frac{e^x}{x} f'(x) = \frac{1}{x} \\ &\Leftrightarrow \left(f(x) \cdot \frac{e^x}{x}\right)' = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Lấy tích phân hai vế:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left(f(x) \cdot \frac{e^x}{x}\right)' dx &= \int_1^2 \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow \left[f(x) \cdot \frac{e^x}{x}\right]_1^2 = \ln x \Big|_1^2 \Leftrightarrow f(2) \cdot \frac{e^2}{2} - e \cdot f(1) = \ln 2 \\ &\Leftrightarrow f(2) = \frac{2\ln 2}{e^2} + \frac{2}{e^2} \Leftrightarrow f(2) = 2e^{-2}(1 + \ln 2). \end{aligned}$$

Câu 43: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;1]$ thỏa mãn $f(x)-1=\int_{-1}^1(x+e^t)f(t)dt$. Tích phân

$$\int_{-1}^1 e^x f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $I = \frac{e+3}{-e^2+e-3}$. B. $I = \frac{e^2+3}{e^2-e+3}$. C. $I = \frac{e^2+3}{-e^2+e-3}$. D. $I = \frac{-2e}{e^2-e+3}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } f(x)-1=\int_{-1}^1(x+e^t)f(t)dt=x\int_{-1}^1 f(t)dt+\int_{-1}^1 e^t f(t)dt$$

$$f(x)=x\int_{-1}^1 f(t)dt+\int_{-1}^1 e^t f(t)dt+1$$

$$\text{Đặt } a=\int_{-1}^1 f(t)dt, b=\int_{-1}^1 e^t f(t)dt+1, \text{ khi đó } f(x)=ax+b$$

$$f(x)=x\int_{-1}^1 (at+b)dt+\int_{-1}^1 e^t (at+b)dt+1$$

$$=x\left(\frac{at^2}{2}+bt\right)\Bigg|_{-1}^1+\int_{-1}^1 (at+b)de^t+1$$

$$=2bx+\left[\left((at+b)e^t\right)\Bigg|_{-1}^1-\int_{-1}^1 a.e^t dt\right]+1$$

$$=2bx+\left[(a+b)e-(-a+b)e^{-1}-a(e-e^{-1})\right]+1=2bx+\frac{be^2-b+2a+e}{e}$$

$$\text{Mà } f(x)=ax+b \Rightarrow \begin{cases} a=2b \\ b=\frac{be^2-b+2a+e}{e} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{-2e}{e^2-e+3} \\ b=\frac{-e}{e^2-e+3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{-2e}{e^2-e+3}x+\frac{-e}{e^2-e+3}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^1 \left(\frac{-2e}{e^2-e+3}x+\frac{-e}{e^2-e+3}\right)dx=\left(\frac{-e}{e^2-e+3}x^2+\frac{-e}{e^2-e+3}x\right)\Bigg|_{-1}^1=\frac{-2e}{e^2-e+3}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^1 e^x f(x)dx=f(x)-1-x\int_{-1}^1 f(t)dt=\frac{-2e}{e^2-e+3}x+\frac{-e}{e^2-e+3}-1-\frac{-2e}{e^2-e+3}x=\frac{-e^2-3}{e^2-e+3}.$$

Câu 44: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[-2;2]$ thỏa mãn

$$\int_{-2}^2 [f^2(x)-2f(x)(x+2)]dx=-\frac{64}{3}. \text{ Tính } I=\int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}dx.$$

A. $I = \frac{\pi-2\ln 2}{2}$. B. $I = \frac{\pi-\ln 2}{2}$. C. $I = \frac{\pi+\ln 2}{2}$. D. $I = \frac{\pi+2\ln 2}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$\int_{-2}^2 [f^2(x) - 2f(x)(x+2)] dx = -\frac{64}{3} \Leftrightarrow \int_{-2}^2 [f(x) - (x+2)]^2 dx - \int_{-2}^2 (x+2)^2 dx = -\frac{64}{3}.$$

$$\Leftrightarrow \int_{-2}^2 [f(x) - (x+2)]^2 dx = 0$$

$$\text{Suy ra } f(x) = x+2.$$

$$\text{Suy ra } I = \int_0^1 \frac{x+2}{x^2+1} dx.$$

$$\text{Đặt } x = \tan t \left(t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right) \right) \Rightarrow dx = (1 + \tan^2 t) dt.$$

$$\text{Suy ra } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan t + 2}{\tan^2 t + 1} \cdot (1 + \tan^2 t) dt = (-\ln|\cos t| + 2t) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\ln 2 + \pi}{2}.$$

Câu 45: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục có đạo hàm $f'(x)$ trên $[0;1]$, $f(0) = 0$. Biết $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{1}{3}$,

$$\int_0^1 f(x) dx = -\frac{1}{3}. \text{ Khi đó } \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx \text{ bằng:}$$

A. $-\frac{5}{48}.$

B. $0.$

C. $-\frac{1}{6}.$

D. $\frac{6}{23}.$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Xét } \int_0^1 f(x) dx = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[xf(x) \right] \Big|_0^1 - \int_0^1 xf'(x) dx = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad f(1) - \int_0^1 xf'(x) dx = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow$$

$$f(1) - f(0) - \int_0^1 xf'(x) dx = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f'(x) dx - \int_0^1 xf'(x) dx = -\frac{1}{3} \Rightarrow \int_0^1 (x-1) f'(x) dx = \frac{1}{3}$$

$$\text{Ta có: } \int_0^1 [f'(x)]^2 dx - 2 \int_0^1 (x-1) f'(x) dx + \int_0^1 (x-1)^2 dx = \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} (x-1)^3 \Big|_0^1 = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 [f'(x) - (x-1)]^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = x-1 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{2} - x + C$$

$$\text{Do } f(0) = 0 \text{ nên } C = 0. \text{ Do đó } f(x) = \frac{x^2}{2} - x$$

$$\text{Vậy } \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x^2}{2} - x \right) dx = \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{5}{48}$$

Câu 46: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(1) = 0$,
 $f'(x) \cdot f(x) = 2x\sqrt{f^2(x)+1}$, $\forall x \in [1; +\infty)$. Tính $f^2(2)$.

A. 1.

B. 15.

C. 3.

D. 24.

Lời giải**Chọn B**

$$\text{Ta có } f'(x) \cdot f(x) = 2x\sqrt{f^2(x)+1} \Leftrightarrow \frac{f'(x) \cdot f(x)}{\sqrt{f^2(x)+1}} = 2x \Leftrightarrow \left(\sqrt{f^2(x)+1}\right)' = 2x.$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{f^2(x)+1} = \int 2x dx = x^2 + C \quad (C \in \mathbb{R}).$$

$$\text{Thay } x=1 \text{ vào ta được } \sqrt{f^2(1)+1} = 1^2 + C \Rightarrow C = 0.$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{f^2(x)+1} = x^2, \text{ hay } f^2(x) = x^4 - 1.$$

$$\text{Vậy } f^2(2) = 2^4 - 1 = 15.$$

Câu 47: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(x^2+1) + \frac{f(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}} = \frac{\ln x}{x}$. Biết

$$\int_1^{17} f(x) dx = a \ln 4 - b \text{ với } a, b \in \mathbb{R}. \text{ Giá trị của } a + 2b \text{ bằng}$$

A. 16.

B. 12.

C. 8.

D. 20.

Lời giải**Chọn D**

$$\text{Ta có: } f(x^2+1) + \frac{f(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}} = \frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow 2xf(x^2+1) + \frac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} = 2\ln x$$

$$\Leftrightarrow \int_1^4 2xf(x^2+1)dx + \int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}dx = 2 \int_1^4 \ln x dx \quad \Leftrightarrow \int_2^{17} f(u)du + \int_1^2 f(v)dv = 2(x \ln x - x) \Big|_1^4$$

$$\Leftrightarrow \int_1^{17} f(x)dx = 8 \ln 4 - 6.$$

$$\text{Vậy } a + 2b = 8 + 2 \cdot 6 = 20.$$

Câu 48: Cho $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $3f'(x) \cdot e^{f^3(x)-x^2-1} - \frac{2x}{f^2(x)} = 0$, với $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết

$$f(0) = 1, \text{ tính tích phân } I = \int_0^{\sqrt{e}} x \cdot f(x) dx.$$

A. $\frac{9}{2}$.B. $\frac{45}{8}$.C. $\frac{11}{2}$.D. $\frac{15}{4}$.**Lời giải****Chọn B**

$$\text{Ta có: } 3f'(x) \cdot e^{f^3(x)-x^2-1} - \frac{2x}{f^2(x)} = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot f'(x) \cdot e^{f^3(x)-x^2-1} = \frac{2x}{f^2(x)}$$

$$\Rightarrow 3 \cdot f'(x) \cdot f^2(x) \cdot e^{f^3(x)} = e^{x^2+1} \cdot 2x \Leftrightarrow \left[e^{f^3(x)}\right]' = \left(e^{x^2+1}\right)' \Leftrightarrow e^{f^3(x)} = e^{x^2+1} + C.$$

Do $f(0) = 1 \Leftrightarrow C = 0$.

Suy ra: $e^{f^3(x)} = e^{x^2+1} \Leftrightarrow f^3(x) = x^2 + 1 \Leftrightarrow f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$.

Khi đó: $I = \int_0^{\sqrt{7}} x \cdot f(x) dx = \int_0^{\sqrt{7}} x \cdot \sqrt[3]{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\sqrt{7}} (x^2 + 1)^{\frac{1}{3}} d(x^2 + 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot (x^2 + 1)^{\frac{4}{3}} \Big|_0^{\sqrt{7}} = \frac{45}{8}$.

Câu 49: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+1} & \text{khi } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2x-1 & \text{khi } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f'(\sin x) dx$ bằng

- A. $\frac{3}{2} - 4\ln 3 + 4\ln 2$. B. $\frac{3}{2} + 4\ln 3 + 4\ln 2$.
C. $-\frac{3}{2} + 4\ln 3 + 4\ln 2$. D. $\frac{3}{2} + 4\ln 3 - 4\ln 2$.

Lời giải

Chọn A

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cdot f'(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x \cdot \cos x \cdot f'(\sin x) dx$$

$$\text{Đặt } t = \sin x \text{ ta có } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x \cdot \cos x \cdot f'(\sin x) dx = \int_0^1 2t \cdot f'(t) dt$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = t \\ dv = f'(t) dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = f(t) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 2t \cdot f'(t) dt = 2 \left(t \cdot f(t) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(t) dt \right) = 2 \left(1 - \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t) dt \right) \\ &= 2 \left(1 - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{t+1} dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 (2t-1) dt \right) = \frac{3}{2} - 4\ln 3 + 4\ln 2 \end{aligned}$$

Câu 50: Cho hàm số $f(x), f(-x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f(x) + 3f(-x) = \frac{1}{4+x^2}$. Tính

$$I = \int_{-2}^2 f(x) dx$$

- A. $\frac{\pi}{20}$. B. $-\frac{\pi}{20}$. C. $-\frac{\pi}{10}$. D. $\frac{\pi}{10}$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } 2f(x) + 3f(-x) = \frac{1}{4+x^2} \Rightarrow 2f(-x) + 3f(x) = \frac{1}{4+x^2} \Rightarrow \begin{cases} 2f(x) + 3f(-x) = \frac{1}{4+x^2} \\ 2f(-x) + 3f(x) = \frac{1}{4+x^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{5(x^2 + 4)} \Rightarrow I = \frac{1}{5} \int_{-2}^2 \frac{1}{x^2 + 4} dx$$

$$\text{Đặt } x = 2 \tan t \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow dx = 2(1 + \tan^2 t) dt$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{5} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2(1 + \tan^2 t)}{4(1 + \tan^2 t)} dt = \frac{1}{5} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} dt = \frac{1}{10} t \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{20}$$

Câu 51: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, $f(1) = e^3$. Biết $\frac{f'(x)}{f(x)} = 2x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm thực phân biệt.

- A. $m \geq e^{\frac{3}{4}}$. B. $0 < m < e^{\frac{3}{4}}$. C. $1 < m < e^{\frac{3}{4}}$. D. $m > e^{\frac{3}{4}}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \frac{f'(x)}{f(x)} = 2x + 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int (2x + 1) dx \Rightarrow \ln f(x) = x^2 + x + C$$

$$f(1) = e^3 \Rightarrow \ln e^3 = 2 + C \Rightarrow C = 1. \text{ Do đó } f(x) = e^{x^2 + x + 1}.$$

$$\text{Phương trình } f(x) = m \Leftrightarrow e^{x^2 + x + 1} = m \Leftrightarrow x^2 + x + 1 - \ln m = 0 \quad (m > 0).$$

$$\text{Để phương trình có hai nghiệm phân biệt } \Leftrightarrow \Delta = 1 - 4(1 - \ln m) > 0 \Leftrightarrow \ln m > \frac{3}{4} \Leftrightarrow m > e^{\frac{3}{4}}.$$

Câu 52: Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $3f(-x) + 2f(x) = x^{10}, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_0^1 f(x) dx$.

- A. $I = \frac{1}{55}$. B. $I = \frac{1}{11}$. C. $I = 55$. D. $I = 11$.

Lời giải

Chọn A

Thay x bởi $-x$, ta cũng có: $3f(x) + 2f(-x) = x^{10}, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó, ta sẽ có:

$$3f(x) + 2f(-x) - [3f(-x) + 2f(x)] = x^{10} - x^{10} \Leftrightarrow f(x) = f(-x).$$

$$\text{Do vậy nên từ đề, ta có } 5f(x) = x^{10} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{5} x^{10}.$$

Câu 53: Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right]$ thỏa

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [f^2(x) - 2f(x)(3-x)] dx = -\frac{109}{12}. \text{ Khi đó } \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x^2 - 1} dx \text{ bằng}$$

- A. $\ln \frac{7}{9}$. B. $\ln \frac{5}{9}$. C. $\ln \frac{2}{9}$. D. $\ln \frac{8}{9}$.

Lời giải

Chọn C

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [f^2(x) - 2f(x)(3-x)] dx = -\frac{109}{12} \Leftrightarrow \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [f(x) - (3-x)]^2 dx = -\frac{109}{12} + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (3-x)^2 dx$$

$$\Rightarrow \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [f(x) - (3-x)]^2 dx = 0 \Rightarrow f(x) = 3-x$$

$$\text{Do đó } \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x^2-1} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-x+3}{x^2-1} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-1} \right) dx = (-2\ln|x+1| + \ln|x-1|) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \ln \frac{2}{9}.$$

Câu 54: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f^2(x) - xf(x)f'(x) = 2x + 4, \forall x \in [0;1]$.

Biết $f(1) = 3$. Tích phân $\int_0^1 f^2(x) dx$ bằng

- A. 19. B. 13. C. $\frac{19}{3}$. D. $\frac{13}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$$f^2(x) - xf(x)f'(x) = 2x + 4 \Leftrightarrow f^2(x) = xf(x)f'(x) + 2x + 4$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f^2(x) dx = \int_0^1 xf(x)f'(x) dx + \int_0^1 (2x+4) dx \Leftrightarrow \int_0^1 f^2(x) dx = \int_0^1 xf(x)f'(x) dx + 5 \quad (*).$$

Đặt $I = \int_0^1 f^2(x) dx$, tính tích phân $\int_0^1 xf(x)f'(x) dx$ bằng phương pháp từng phần:

$$\text{Đặt } u = x \Rightarrow du = dx; dv = f(x)f'(x) dx \Rightarrow v = \frac{1}{2} f^2(x),$$

$$\text{ta có } \int_0^1 xf(x)f'(x) dx = \frac{1}{2} x \cdot f^2(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} \cdot f^2(x) dx = \frac{1}{2} f^2(1) - \frac{1}{2} I = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} I.$$

$$\text{Thay vào } (*): I = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} I + 5 \Leftrightarrow I = \frac{19}{3}.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f^2(x) dx = \frac{19}{3}.$$

Câu 55: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = 2021$. Tính $I = \int_0^{\pi} xf(\sin x) dx$.

- A. $I = 2021$. B. $I = 1010\pi$. C. $I = \frac{2021\pi}{2}$. D. $I = 2021\pi$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $I = \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf(\sin x)dx$ (1)

Đặt $I_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf(\sin x)dx$

Đặt $t = \pi - x \Rightarrow dt = -dx$

$\Rightarrow I_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\pi - t) f[\sin(\pi - t)](-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - t) f(\sin t)dt$

$\Rightarrow I_1 = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x)dx$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra được $I = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = 2021\pi$.

Câu 56: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(4) = \frac{4}{3}$ và $f(x) = x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} - f'(x) \right)$, $\forall x > 0$. Khi đó

$\int_1^4 xf(x)dx$ bằng

A. $\frac{1283}{30}$.

B. $-\frac{157}{30}$.

C. $\frac{157}{30}$.

D. $-\frac{1283}{30}$.

Lời giải

Chọn B.

$\forall x > 0$ ta có: $f(x) + xf'(x) = x + \sqrt{x} \Leftrightarrow (x.f(x))' = x + \sqrt{x}$.

Lấy nguyên hàm hai vế ta được: $x.f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$.

Mà $f(4) = \frac{4}{3} \Rightarrow C = -8$.

$\Rightarrow xf(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 8$.

Vậy $\int_1^4 xf(x)dx = \int_1^4 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 8 \right) dx = -\frac{157}{30}$.

Câu 57: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định trên $\mathbb{R}$. Biết $f(1) = 2$ và

$\int_0^1 x^2 f'(x)dx = \int_1^4 \frac{1+3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} f(2-\sqrt{x})dx = 4$. Giá trị của $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. 1.

B. $\frac{5}{7}$.

C. $\frac{3}{7}$.

D. $\frac{1}{7}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } 4 = \int_0^1 x^2 f'(x) dx = \int_0^1 x^2 d(f(x)) = \left(x^2 f(x) \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 2xf(x) dx$$

$$\Leftrightarrow 4 = f(1) - 2 \int_0^1 xf(x) dx \Leftrightarrow 4 = 2 - 2 \int_0^1 xf(x) dx \Rightarrow \int_0^1 xf(x) dx = -1.$$

$$\text{Xét } \int_1^4 \frac{1+3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} f(2-\sqrt{x}) dx.$$

$$\text{Đặt } t = 2 - \sqrt{x} \Rightarrow dt = -\frac{1}{2\sqrt{x}} dx.$$

$$\text{Với } x=1 \Rightarrow t=1 \text{ và } x=4 \Rightarrow t=0.$$

$$\text{Khi đó } 4 = \int_1^4 \frac{1+3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} f(2-\sqrt{x}) dx = - \int_1^0 [1+3(2-t)] f(t) dt$$

$$\Leftrightarrow 4 = \int_0^1 (7-3t) f(t) dt \Leftrightarrow 4 = 7 \int_0^1 f(t) dt - 3 \int_0^1 tf(t) dt \Leftrightarrow 4 = 7 \int_0^1 f(t) dt - 3(-1) \Leftrightarrow \int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{7}.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{7}.$$

Câu 58: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^3 [2x \ln x + 1 + xf'(x)] dx = 0$ và $f(3) = 1$. Biết

$$\int_0^3 f(x) dx = \frac{a+b \ln 2}{2} \text{ với } a, b \text{ là các số nguyên dương. Giá trị của } a+b \text{ là}$$

A. 35.

B. 7.

C. 11.

D. 29.

Lời giải

Chọn A

$$\int_0^3 [2x \ln x + 1 + xf'(x)] dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^3 \ln x + 1 d(x^2) + \int_0^3 xf'(x) dx = 0$$

$$+ I_1 = \int_0^3 \ln x + 1 d(x^2) = x^2 \ln x + 1 \Big|_0^3 - \int_0^3 \frac{x^2}{x+1} = 9 \ln 4 - \int_0^3 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$I_1 = 9 \ln 4 - \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_0^3 - \ln x + 1 \Big|_0^3 = 9 \ln 4 - \frac{3}{2} - \ln 4$$

$$I_1 = 16 \ln 2 - \frac{3}{2}. (1)$$

$$I_2 = \int_0^3 x d(f(x)) = xf(x) \Big|_0^3 - \int_0^3 f(x) dx = 3f(3) - \int_0^3 f(x) dx = 3 - \int_0^3 f(x) dx. (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) ta có } 16 \ln 2 - \frac{3}{2} + 3 - \int_0^3 f(x) dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^3 f(x) dx = 16 \ln 2 + \frac{3}{2} = \frac{32 \ln 2 + 3}{2}$$

$$\Rightarrow a+b = 32+3 = 35.$$

Câu 59: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 4-x & \text{khi } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_0^2 f(x) dx$.

A. $\frac{7}{2}$.

B. 1.

C. $\frac{5}{2}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải**Chọn A**

Ta có

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^1 (3x^2) dx + \int_1^2 (4-x) dx = \frac{3x^3}{3} \Big|_0^1 + \left(4x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = \frac{7}{2}.$$

Câu 60: Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[1;3]$ và $f(x) \neq 0$ với mọi $x \in [1;3]$, đồng thời $f'(x)(1+f(x))^2 = \left[(f(x))^2(x-1) \right]^2$ và $f(1) = -1$. Khi đó $\int_1^3 f(x) dx$ là:

A. $-\ln 3$.**B.** $\ln 3$.**C.** $\ln 2$.**D.** $-\ln 2$.**Lời giải****Chọn A**

$$\text{Ta có } f'(x)(1+f(x))^2 = \left[(f(x))^2(x-1) \right]^2 \Leftrightarrow \frac{f'(x)(1+f(x))^2}{[f(x)]^4} = (x-1)^2.$$

$$\text{Lấy nguyên hàm 2 vế ta được } \int \frac{f'(x)(1+f(x))^2}{[f(x)]^4} dx = \int (x-1)^2 dx$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{(1+2f(x)+[f(x)]^2) f'(x)}{[f(x)]^4} dx = \int (x-1)^2 dx$$

$$\Leftrightarrow \int \left(\frac{1}{[f(x)]^4} + 2 \frac{1}{[f(x)]^3} + \frac{1}{[f(x)]^2} \right) d(f(x)) = \frac{(x-1)^3}{3} + C$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3[f(x)]^3} - \frac{1}{[f(x)]^2} - \frac{1}{f(x)} = \frac{(x-1)^3}{3} + C \Leftrightarrow -\frac{1+3f(x)+3[f(x)]^2}{3[f(x)]^3} = \frac{(x-1)^3}{3} + C$$

$$\text{Mà } f(1) = -1 \text{ nên } -\frac{1-3+3}{-3} = C \Rightarrow C = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Suy ra } -\frac{1+3f(x)+3[f(x)]^2}{3[f(x)]^3} = \frac{(x-1)^3}{3} + \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1+3f(x)+3[f(x)]^2}{3[f(x)]^3} + \frac{1}{3} = -\frac{(x-1)^3}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+f(x))^3}{[f(x)]^3} = -(x-1)^3 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{f(x)} \right)^3 = (1-x)^3 \Leftrightarrow f(x) = \frac{-1}{x}.$$

$$\text{Vậy } \int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 \frac{-1}{x} dx = -\ln|x| \Big|_1^3 = -\ln 3.$$

Câu 61: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} e^x + m & \text{khi } x \geq 0 \\ 2x\sqrt{3+x^2} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{-1}^1 f(x) dx = ae + b\sqrt{3} + c$,

$(a, b, c \in \mathbb{Q})$. Tổng $a + b + 3c$ bằng

A. 15.**B.** -10.**C.** -19.**D.** -17.**Lời giải****Chọn C**

Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng d có một véc-tơ pháp tuyến Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + m) = m + 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x\sqrt{3+x^2}) = 0 \quad \text{và} \quad f(0) = m + 1.$$

Vì hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục tại $x = 0$.

$$\text{Suy ra } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \text{ hay } m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1.$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^0 2x\sqrt{3+x^2} dx + \int_0^1 (e^x - 1) dx = \int_{-1}^0 \sqrt{3+x^2} d(3+x^2) + \int_0^1 (e^x - 1) dx \\ &= \frac{2}{3} (3+x^2) \sqrt{3+x^2} \Big|_{-1}^0 + (e^x - x) \Big|_0^1 = e + 2\sqrt{3} - \frac{22}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } a = 1, b = 2, c = -\frac{22}{3}. \text{ Vậy tổng } a + b + 3c = -19.$$

Câu 62: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \cdot f(\cos^2 x) dx = \int_1^8 \frac{f(\sqrt[3]{x})}{x} dx = 6$. Tính

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} \frac{f(x^2)}{x} dx$$

A. 4.

B. 6.

C. 7.

D. 10.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Xét } I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \cdot f(\cos^2 x) dx = 6.$$

$$\text{Đặt } t = \cos^2 x \Rightarrow dt = -2 \sin x \cdot \cos x dx. \text{ Đổi cận: } x = 0 \Rightarrow t = 1; x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Khi đó: } I_1 = -\frac{1}{2} \int_1^{\frac{1}{4}} \frac{-2 \sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x} f(\cos^2 x) dx = -\frac{1}{2} \int_1^{\frac{1}{4}} \frac{f(t)}{t} dt = \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{f(t)}{2t} dt = 6 \Rightarrow \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{f(x)}{2x} dx = 6.$$

$$\text{Xét } I_2 = \int_1^8 \frac{f(\sqrt[3]{x})}{x} dx = 6.$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt[3]{x} \Rightarrow t^3 = x \Rightarrow 3t^2 dt = dx.$$

$$\text{Khi } \begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = 1 \\ x = 8 \Rightarrow t = 2 \end{cases}. \text{ Ta có } I_2 = \int_1^2 \frac{3t^2 f(t)}{t^3} dt = 6 \Rightarrow \int_1^2 \frac{f(x)}{2x} dx = 1.$$

$$\text{Xét tích phân } I = \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} \frac{f(x^2)}{x} dx.$$

$$\text{Đặt } t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx. \text{ Đổi cận } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{4} \\ x = \sqrt{2} \Rightarrow t = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } I = \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} \frac{2xf(x^2)}{2x^2} dx = \int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f(t)}{2t} dt = \int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f(x)}{2x} dx = \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{f(x)}{2x} dx + \int_1^2 \frac{f(x)}{2x} dx = 6 + 1 = 7.$$

Câu 63: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 2]$ và thỏa mãn $f(1) = -\frac{1}{2}$ và

$$f(x) + xf'(x) = (2x^3 + x^2) f^2(x), \forall x \in [1; 2]. \text{ Giá trị của tích phân } \int_1^2 xf(x)dx \text{ bằng}$$

A. $\ln \frac{4}{3}$.

B. $\ln \frac{3}{4}$.

C. $\ln 3$.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

$$\bullet \text{ Từ giả thiết, ta có } f(x) + xf'(x) = (2x^3 + x^2) f^2(x) \Rightarrow \frac{f(x) + xf'(x)}{[xf(x)]^2} = 2x + 1$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{xf(x)} \right]' = -2x - 1 \Rightarrow \frac{1}{xf(x)} = \int (-2x - 1) dx \Rightarrow \frac{1}{xf(x)} = -x^2 - x + C.$$

$$\bullet f(1) = -\frac{1}{2} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow xf(x) = -\frac{1}{x(x+1)}$$

$$\Rightarrow \int_1^2 xf(x) dx = \int_1^2 \frac{-1}{x(x+1)} dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \right) dx = \ln \frac{x+1}{x} \Big|_1^2 = \ln \frac{3}{4}.$$

Câu 64: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi } x \geq 2 \\ x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\sin x + 1) \cos x dx$ bằng

A. $\frac{23}{3}$.

B. $\frac{23}{6}$.

C. $\frac{17}{6}$.

D. $\frac{17}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$\text{Đặt } t = 2\sin x + 1 \Rightarrow dt = 2 \cos x dx, \text{ đổi cận: } x = 0 \Rightarrow t = 1; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 3.$$

$$\text{Vậy } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(2\sin x + 1) \cos x dx = \int_1^3 f(t) \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int_1^3 f(x) dx.$$

$$\text{Mặt khác ta có, } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi } x \geq 2 \\ x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x < 2 \end{cases} \text{ nên}$$

$$\frac{1}{2} \int_1^3 f(x) dx = \frac{1}{2} \left[\int_1^2 (x^2 - 2x + 3) dx + \int_2^3 (x^2 - 1) dx \right] = \frac{23}{6}.$$

Câu 65: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x^2 - x - 2) = x + 3$ với mọi

$x \in \mathbb{R}$. Tích phân $I = \int_{-2}^0 xf'(x)dx$ có giá trị là

- A. $\frac{4}{3}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $-\frac{10}{3}$. D. $-\frac{46}{3}$.

Lời giải

Chọn C

+) Ta có $f(x^2 - x - 2) = x + 3 \Rightarrow (2x - 1)f(x^2 - x - 2) = (2x - 1)(x + 3)$

$$\Rightarrow \int_0^2 (2x - 1)f(x^2 - x - 2)dx = \int_0^2 (2x - 1)(x + 3)dx.$$

$$+) \text{ Ta có } \int_0^2 (2x - 1)(x + 3)dx = \int_0^2 (2x^2 + 5x - 3)dx = \left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 3x \right) \Big|_0^2 = \frac{28}{3}.$$

$$+) \text{ Xét } \int_0^2 (2x - 1)f(x^2 - x - 2)dx$$

$$\text{Đặt } t = x^2 - x - 2 \Rightarrow dt = (2x - 1)dx.$$

Với $x = 0$ thì $t = -2$, với $x = 2$ thì $t = 0$.

$$\text{Suy ra } \int_0^2 (2x - 1)f(x^2 - x - 2)dx = \int_{-2}^0 f(t)dt = \int_{-2}^0 f(x)dx = \frac{28}{3}.$$

$$\text{Xét } I = \int_{-2}^0 xf'(x)dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = xf(x) \Big|_{-2}^0 - \int_{-2}^0 f(x)dx = 2f(-2) - \frac{28}{3} = 2 \cdot 3 - \frac{28}{3} = -\frac{10}{3}.$$

Câu 66: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 6x & \text{khi } x \geq 2 \\ \frac{2}{2x - 5} & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Tích phân $I = \int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x} dx$ bằng

- A. $15 + \frac{1}{2} \ln 6$. B. $15 - \frac{1}{5} \ln 6$. C. $15 + \frac{1}{5} \ln 6$. D. $15 - \frac{1}{2} \ln 6$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Xét } I = \int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x} dx.$$

$$\text{Đặt } u = \ln^2 x \Rightarrow du = \frac{2 \ln x}{x} dx = \frac{2 \ln^2 x}{x \ln x} dx = \frac{2u}{x \ln x} dx \Rightarrow \frac{dx}{x \ln x} = \frac{du}{2u}.$$

$$\text{Đổi cận: } \begin{cases} x = e \Rightarrow u = 1 \\ x = e^2 \Rightarrow u = 4 \end{cases}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{f(u)}{u} du = \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{f(x)}{x} dx = \frac{1}{2} \left(\int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx + \int_2^4 \frac{f(x)}{x} dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_1^2 \frac{2}{x(2x-5)} dx + \int_2^4 \frac{3x^2+6x}{x} dx \right) = \frac{1}{2} \left(\int_1^2 \frac{2}{x(2x-5)} dx + \int_2^4 (3x+6) dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{4}{5} \int_1^2 \left(\frac{1}{2x-5} - \frac{1}{2x} \right) dx + \left(\frac{3x^2}{2} + 6x \right) \right]_2^4 = \frac{1}{2} \left[\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2x-5}{2x} \right| \right]_1^2 + 30 \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{5} (-\ln 6) + 30 \right] = 15 - \frac{1}{5} \ln 6 \end{aligned}$$

Câu 67: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(4) = \frac{4}{3}$ và $f(x) = x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} - f'(x) \right), \forall x > 0$. Khi đó

$$\int_1^4 xf(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{1283}{30}$.

B. $-\frac{157}{30}$.

C. $\frac{157}{30}$.

D. $-\frac{1283}{30}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \frac{1}{x} f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} - f'(x) \Leftrightarrow f'(x) + \frac{1}{x} f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$\Leftrightarrow xf'(x) + f(x) = x + \sqrt{x} \Leftrightarrow (xf(x))' = x + \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow xf(x) = \int (x + \sqrt{x}) dx = \frac{1}{2} x^2 + \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C$$

$$\text{Do } f(4) = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{2} 4^2 + \frac{2}{3} \sqrt{4^3} + C \Leftrightarrow C = -8$$

$$\Rightarrow xf(x) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{2}{3} \sqrt{x^3} - 8.$$

$$\text{Vì vậy } \int_1^4 xf(x) dx = \int_1^4 \left(\frac{1}{2} x^2 + \frac{2}{3} \sqrt{x^3} - 8 \right) dx = -\frac{157}{30}.$$

Câu 68: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn các điều kiện $f(1) = 3$ và

$$\frac{2f^2(x)}{x^2} - \left(\frac{1}{x} + \frac{8}{x^3} \right) f(x) + \frac{8}{x^4} = f'(x), \forall x > 0. \text{ Tính } \int_2^4 f(x) dx$$

A. $6 - 2\ln 2$.

B. $6 + 4\ln 2$.

C. $6 + 2\ln 2$.

D. $8 + 4\ln 2$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Giả thiết: } \frac{2f^2(x)}{x^2} - \left(\frac{1}{x} + \frac{8}{x^3}\right)f(x) + \frac{8}{x^4} = f'(x), \forall x > 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 f^2(x) - x^3 f(x) - 8xf(x) + 8 = x^4 f'(x)$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 f^2(x) - 4xf(x) + 4) = x^3 [xf'(x) + f(x)]$$

$$\Leftrightarrow 2[xf(x) - 2]^2 = x^3 [xf'(x)]' \Leftrightarrow \frac{2}{x^3} = \frac{[xf(x) - 2]'}{[xf(x) - 2]^2}$$

$$\text{Do đó } \int \frac{2}{x^3} dx = \int \frac{[xf(x) - 2]'}{[xf(x) - 2]^2} dx \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} + C = -\frac{1}{xf(x) - 2} \quad (*)$$

$$\text{Thay } x=1 \text{ vào hệ thức } (*), \text{ ta được: } -1 + C = -\frac{1}{f(3) - 2} \Leftrightarrow C = 0 \quad .$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{xf(x) - 2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^2 + 2}{x}.$$

$$\text{Vậy } \int_2^4 f(x) dx = \int_2^4 \frac{x^2 + 2}{x} dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2\ln|x| \right) \Big|_2^4 = 6 + 2\ln 2.$$

