

Người làm: Hoàng Thu Trang

Zalo: Hoàng Thu Trang

- số đt zalo: 0968162299

Email: trangduonghang@gmail.com

CD8: CÁC DẠNG TOÁN VỀ PHÂN SỐ

Dạng 1. Tìm phân số thỏa mãn điều kiện cho trước

Câu 1. (HSG 7 Trường Quang Trung, 2018 - 2019)

Tìm số nguyên a để $\frac{a^2 + a + 3}{a + 1}$ là số nguyên.

Lời giải

$$\frac{a^2 + a + 3}{a + 1} = \frac{a(a + 1) + 3}{a + 1} = a + \frac{3}{a + 1}$$

Ta có:

Vì a là số nguyên nên $\frac{a^2 + a + 3}{a + 1}$ là số nguyên khi $\frac{3}{a + 1}$ là số nguyên hay $a + 1$ là ước của 3 do đó $(a + 1) \in \{-3; -1; 1; 3\} \Rightarrow a \in \{-4; -2; 0; 2\}$

Vậy với $a \in \{-4; -2; 0; 2\}$ thì $\frac{a^2 + a + 3}{a + 1}$ là số nguyên.

Câu 2. Tìm số nguyên x, y biết: $\frac{5}{x} + \frac{y}{4} = \frac{1}{8}$.

Lời giải

Ta có $\frac{5}{x} + \frac{y}{4} = \frac{1}{8}$

$$\Rightarrow \frac{5}{x} = \frac{1}{8} - \frac{y}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{x} = \frac{1 - 2y}{8}$$

$$\Rightarrow x(1 - 2y) = 40$$

$$\Rightarrow 1 - 2y \text{ thuộc ước lẻ của } 40 \text{ là } \pm 1; \pm 5$$

$1 - 2y$	- 5	- 1	1	5
x	- 8	- 40	40	8
y	3	1	0	- 2

Vậy ta có các cặp số $(x; y) = \{(-8; 3); (-40; 1); (40; 0); (8; -2)\}$.

Câu 3. (HSG 7 huyện Tây Sơn, 2018 - 2019)

Tìm số nguyên x để A có giá trị là một số nguyên biết: $A = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} (x \geq 0)$.

Lời giải

Ta có: $A = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} = 1 + \frac{4}{\sqrt{x} - 3}$

$$A \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{x} - 3} \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} - 3 \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$$

Lập bảng:

$\sqrt{x} - 3$	- 4	- 2	- 1	1	2	4
x	Loại	1	4	16	25	49

Vậy $x \in \{1; 4; 16; 25; 49\}$.

Câu 4. (HSG 7 huyện Sơn Trà, 2018 - 2019)

Cho 2 biểu thức: $A = \frac{4x - 7}{x - 2}; B = \frac{3x^2 - 9x + 2}{x - 3}$

a) Tìm giá trị nguyên của x để mỗi biểu thức có giá trị nguyên.

b) Tìm giá trị nguyên của x để cả hai biểu thức cùng có giá trị nguyên.

Lời giải

$$A = \frac{4x - 7}{x - 2} = \frac{4(x - 2) + 1}{x - 2} = 4 + \frac{1}{x - 2}$$

a) Ta có:

Với $x \in \mathbb{Z}$ thì $x - 2 \in \mathbb{Z}$

Để $A \in \mathbb{Z}$ thì $\frac{1}{x - 2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - 2$ là ước của 1
 $x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3$
 $x - 2 = -1 \Rightarrow x = 1$

$$B = \frac{3x^2 - 9x + 2}{x - 3} = \frac{3x(x - 3) + 2}{x - 3} = 3x + \frac{2}{x - 3}$$

Với $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - 3 \in \mathbb{Z}$

Để $B \in \mathbb{Z}$ thì $\frac{2}{x - 3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - 3 \in \{\pm 1; \pm 2\}$

Do đó $x \in \{1; 2; 4; 5\}$.

Vậy để B nguyên thì $x \in \{5; 1; 4; 2\}$.

b) Từ câu a suy ra để A, B cùng nguyên thì $x = 1$.

Dạng 2: Chứng minh phân số đã cho là phân số tối giản
 (không có bài)

Dạng 3: Tìm điều kiện để phân số là phân số tối giản
 (không có bài)

Dạng 4: Tìm số tự nhiên để phân số rút gọn được
 (không có bài)

Dạng 5: Một số bài toán có lời văn
 (không có bài)

Dạng 6. Các bài toán về so sánh, chứng minh.

Câu 1. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Bảo Phương 2018 -2019)

Chứng minh rằng: $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2012}} + \frac{1}{3^{2013}} < \frac{1}{2}$.

Lời giải

$$B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2012}} + \frac{1}{3^{2013}}$$

$$3B = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2012}}$$

$$3B - B = 1 - \frac{1}{3^{2013}}$$

$$2B = 1 - \frac{1}{3^{2013}}$$

$$B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{2013}}$$

Vậy $B < \frac{1}{2}$.

Câu 2. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Điện Hồng 2018 - 2019)

Chứng minh: $\frac{1}{6} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$.

Lời giải

Đặt $A = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$, ta có:

$$*A < \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{99.100}$$

$$A < \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$$

$$A < \frac{1}{4} - \frac{1}{100}$$

$$A < \frac{1}{4}$$

$$*A > \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{99.100} + \frac{1}{100.101}$$

$$A > \frac{1}{5} - \frac{1}{101}$$

$$A > \frac{1}{6}$$

Vậy $\frac{1}{6} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$.

Câu 3. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Thường Tín 2018 - 2019)

Chứng minh rằng: $A = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{2019^3} < \frac{1}{2^2}$.

Lời giải

Ta có: $2^3 > 1.2.3 \Rightarrow \frac{1}{2^3} < \frac{1}{1.2.3}$

Tương tự: $\frac{1}{3^3} < \frac{1}{2.3.4}; \dots; \frac{1}{2019^3} < \frac{1}{2017.2018.2019}$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{2017.2018.2019}$$

$$A < \frac{1}{2} \left(\frac{3-1}{1.2.3} + \frac{4-2}{2.3.4} + \dots + \frac{2019-2017}{2017.2018.2019} \right)$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2017.2018} - \frac{1}{2018.2019} \right)$$

$$A < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2018.2019} \right)$$

$$\Rightarrow A < \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2018.2019.2}$$

$$A < \frac{1}{2^2}$$

Vậy $A = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{2019^3} < \frac{1}{2^2}$.

Câu 4. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Hoàng Quyên 2018 - 2019)

Cho ba số dương $0 \leq x \leq y \leq z \leq 1$. Chứng minh: $\frac{x}{yz+1} + \frac{y}{xz+1} + \frac{z}{xy+1} \leq 2$.

Lời giải

Vì $0 \leq x \leq y \leq z \leq 1$

$$\Rightarrow x-1 \leq 0; y-1 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(y-1) \geq 0$$

$$\Rightarrow xy+1 \geq x+y$$

$$\Rightarrow \frac{1}{xy+1} \leq \frac{1}{x+y}$$

$$\Rightarrow \frac{z}{xy+1} \leq \frac{z}{x+y} \quad (1)$$

Chứng minh tương tự: $\frac{x}{yz+1} \leq \frac{x}{y+z} \quad (2)$

$$\frac{y}{xz+1} \leq \frac{y}{x+z} \quad (3)$$

Cộng từng vế (1), (2), (3) ta có: $\frac{x}{yz+1} + \frac{y}{xz+1} + \frac{z}{xy+1} \leq \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \quad (4)$

Mà $\frac{x}{y+z} \leq \frac{x+x}{x+y+z} \Rightarrow \frac{x}{y+z} \leq \frac{2x}{x+y+z}$

Chứng minh tương tự: $\frac{y}{x+z} \leq \frac{2y}{x+y+z}; \frac{z}{x+y} \leq \frac{2z}{x+y+z}$

$$\Rightarrow \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \leq \frac{2(x+y+z)}{x+y+z}$$

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \leq 2 \quad (5)$$

Từ (4) và (5) suy ra $\frac{x}{yz+1} + \frac{y}{xz+1} + \frac{z}{xy+1} \leq 2$.

Câu 5. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Lê Hồng Phong 2018 - 2019)

Cho $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_9$ thì: $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_9}{a_3 + a_6 + a_9} < 3$

Lời giải

Ta có: $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_9$ nên suy ra:

$$a_1 + a_2 + a_3 < 3a_3 \quad (1)$$

$$a_4 + a_5 + a_6 < 3a_6 \quad (2)$$

$$a_7 + a_8 + a_9 < 3a_9 \quad (3)$$

Cộng vế với vế của (1), (2), (3) ta được:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_9 < 3(a_3 + a_6 + a_9)$$

Vì $a_1 + a_2 + \dots + a_9 > 0$ nên ta được: $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_9}{a_3 + a_6 + a_9} < 3$

Câu 6. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Cát Tiên 2018 - 2019)

Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Hãy so sánh $\frac{a}{b}$ với $\frac{a+c}{b+d}$.

Lời giải

Vì a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ nên $ad < bc$ (1)

Mặt khác: $\frac{a}{b} = \frac{a(b+d)}{b(b+d)} = \frac{ab+ad}{b(b+d)} \quad (2)$

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{b(a+c)}{b(b+d)} = \frac{ab+bc}{b(b+d)} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$.

Câu 7. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Lục Nam 2018 - 2019)

Cho $\frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2004^3} < \frac{1}{40}$.

Lời giải

Đặt $A = \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2004^3}$

$$A < \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{6.7.8} + \dots + \frac{1}{2003.2004.2005}$$

$$A < \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4.5} - \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.5} - \dots + \frac{1}{2003.2004} - \frac{1}{2004.2005} \right) \right]$$

$$A < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4.5} - \frac{1}{2004.2005} \right)$$

$$A < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4.5}$$

$$A < \frac{1}{40}$$

Vậy $\frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2004^3} < \frac{1}{40}$.

Câu 7. (HSG 7 huyện Thái Thụy, tỉnh, trường Lục Nam 2018 - 2019)

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ thì tổng: $S = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2}$ không thể là một số nguyên.

Lời giải

S có $(n - 1)$ số hạng

$$S = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2}$$

$$S = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) + \dots + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$S = n - 1 - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$S < n - 1 \quad (1)$$

Mặt khác: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{(n-1).n}$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n}$$

Suy ra: $S > n - 1 - 1 + \frac{1}{n}$

$$S > n - 2 + \frac{1}{n} > n - 2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $n - 2 < S < n - 1$.

Vậy S không có giá trị nguyên với mọi số tự nhiên $n \geq 2$.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com
<https://www.vnteach.com>