

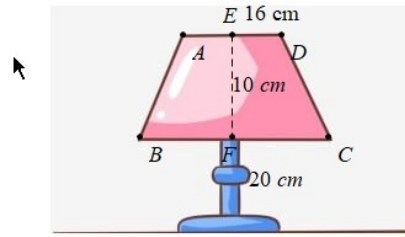
ĐỀ SỐ 1

MÔN THI: TOÁN

Thời gian: 150 phút (Không tính thời gian giao đề)

PHẦN I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (6 điểm)

- Câu 1:** Cho  $x^2 + x = 2$ . Khi đó giá trị của biểu thức  $A = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 10$  là  
A. 10. B. 16. C. 14. D. 18.
- Câu 2:** Rút gọn biểu thức  $(2x+y)^3 + (2x-y)^3 + 12x(2x+y)(2x-y)$  ta được kết quả là:  
A.  $64x^3$ . B.  $64x^3 - y^3$ . C.  $64x^3 + y^3$ . D.  $64x^3 + 24xy^2$ .
- Câu 3:** Biểu thức  $D = (9x^2y^2 - 6x^2y^3) : (-3xy)^2 + (6x^5y + 2x^4) : (2x^4)$  sau khi rút gọn là một đa thức có bậc bằng  
A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.
- Câu 4:** Cho đa thức  $P(x) = (x+2)(x+4)(x+6)(x+8) + 2022$ . Số dư của phép chia  $P(x)$  cho  $x^2 + 10x + 21$  là.  
A. 2022 B. 2027 C. 2007 D. 2
- Câu 5:** Biểu thức  $A = (x-2)^3 - x(x-5)^2 - 3x^2 + 3x$  đạt giá trị nhỏ nhất bằng.  
A. 33 B. -33 C. 5 D. -5
- Câu 6:** Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $C = 2x^2 + y^2 - 4x + 2xy + 1$  là  
A. -5 B. 2 C. -3 D. -2
- Câu 7:** Có bao nhiêu giá trị của  $x$  thỏa mãn  $x^3 + 4x - 5 = 0$ .  
A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.
- Câu 8:** Cho  $A = x^{n+1}y^5 + 3x^{14}y^6$ ;  $B = x^5y^{2n-3}$ . Số tự nhiên  $n$  để đa thức  $A$  chia hết cho đơn thức  $B$  là  
A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.
- Câu 9:** Cho hai đa thức  $f(x) = x^3 - x - 6$  và đa thức  $g(x) = x^2 + ax + b$ . Xác định  $a, b$  để đa thức  $f(x)$  chia hết cho đa thức  $g(x)$ .  
A.  $a = 2; b = 3$  B.  $a = 3; b = 2$   
C.  $a = -2; b = 3$  D.  $a = 2; b = -3$
- Câu 10:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 9\text{ cm}$ , điểm  $D$  thuộc cạnh  $AB$  sao cho  $AD = 6\text{ cm}$ . Kẻ  $DE \parallel BC$  ( $E \in AC$ ), kẻ  $EF \parallel CD$  ( $F \in AB$ ). Khi đó độ dài  $AF$  bằng:  
A. 4 cm B. 5 cm C. 6 cm D. 7 cm
- Câu 11:** Dung có một chiếc đèn ngủ có phần chụp dạng hình thang cân. Hình dưới đây biểu diễn mặt cắt của đèn chụp với các kích thước như sau:  $AD = 16\text{ cm}$ ,  $BC = 20\text{ cm}$ ,  $EF = 10\text{ cm}$ . Khi đó khoảng cách giữa hai vị trí  $A$  và  $B$  là



- A.  $2\sqrt{26} \text{ cm}$       B.  $18 \text{ cm}$       C.  $26\sqrt{2} \text{ cm}$       D.  $23 \text{ cm}$

**Câu 12:** Trong hộp có một số thẻ, mỗi thẻ ghi một trong các số  $1; 2; 3; 4; 5; \dots$ , trong đó các thẻ đánh số  $1; 2; 3; 4; 5$  có màu đỏ, thẻ đánh số  $6$  có màu xanh và các thẻ còn lại đánh số  $7; 8; 9; 10$  có màu trắng. Lấy ngẫu nhiên một thẻ, tính xác suất của biến cố “Chiếc thẻ lấy ra màu xanh”.

- A.  $\frac{1}{2}$       B.  $\frac{2}{5}$       C.  $\frac{1}{10}$       D.  $\frac{13}{50}$

## PHẦN II. PHẢN TỰ LUẬN (14 điểm)

### Câu I. (2 điểm)

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử:  $a(b^3 - c^3) + b(c^3 - a^3) + c(a^3 - b^3)$

b) Cho các số thực  $a, b, c$  khác 0 và không phải là các số đối của nhau, thỏa mãn

$$B = \frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(a^2+2023)(b^2+2023)(c^2+2023)}$$

$ab + bc + ca = 2023$ . Tính giá trị biểu thức:

### Câu II. (4 điểm)

a) Tìm nghiệm của đa thức sau  $x^2(x+6)^2 + 19(x+3)^2 + 19 = 0$

b) Tìm hai số  $x, y$  thỏa mãn các đẳng thức sau:  $x^3 + y^3 = 6xy - 8$  và  $2x + y = 1$

### Câu III. (3 điểm)

a) Tìm tất cả các cặp số  $x, y$  nguyên dương thỏa mãn  $x^4 + y + 4 = y^2 - x^2$ .

b) Cho  $x, y, z$  là các số tự nhiên. Chứng minh:  $C = 4x(x+y)(x+y+z)(x+z) + y^2z^2$  chia cho 3 chỉ có thể dư 0 hoặc 1.

### Câu IV. (6 điểm)

Cho tam giác  $ABC$  nhọn ( $AB < AC$ ). Các đường cao  $AD, BM, CN$  của tam giác  $ABC$  cắt nhau tại

$H$ . Gọi  $O$  là trung điểm của đoạn thẳng  $BC$ ,  $E$  là điểm đối xứng của  $H$  qua  $O$ . Kẻ  $CF$  vuông góc với đường thẳng  $BE$  tại  $F$ .

1) Tính số đo  $\angle MN$ .

2) Gọi  $K, L, R$  lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ  $N$  đến các đường thẳng  $AC, AD, BC$ . Chứng minh rằng ba điểm  $K, L, R$  thẳng hàng.

3) Tia phân giác của  $\angle BAC$  cắt  $BC$  tại  $I$ , kẻ đường thẳng đi qua  $C$  và vuông góc với đường thẳng  $AI$  tại  $P$ , đường thẳng  $CP$  cắt đường thẳng  $AO$  tại  $Q$ . Gọi  $G$  là trung điểm của đoạn thẳng  $IQ$ . Chứng minh đường thẳng  $PG$  đi qua trung điểm của đoạn thẳng  $AC$ .

**Câu IV. (1 điểm)**

Cho hai số  $x, y$  thỏa mãn điều kiện

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $A = x^2 + y^2$ .

.....**HẾT**.....

Họ tên học sinh: .....; Số báo danh: .....

## HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ ĐÁP ÁN

### PHẦN I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (6 điểm)

#### BẢNG ĐÁP ÁN

|      |      |     |     |     |     |     |     |     |      |
|------|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| 1.B  | 2.A  | 3.D | 4.A | 5.B | 6.C | 7.C | 8.C | 9.B | 10.A |
| 11.A | 12.C |     |     |     |     |     |     |     |      |

**Câu 1:** Cho  $x^2 + x = 2$ . Khi đó giá trị của biểu thức  $A = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 10$  là  
**A.** 10.                                      **B.** 16.                                      **C.** 14.                                      **D.** 18.

**Giải**

$$A = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 10 = (x^2 + x)^2 + x^2 + x + 10. \text{ Vậy } A = 16$$

**Đáp án cần chọn là: B.**

**Câu 2:** Rút gọn biểu thức  $(2x + y)^3 + (2x - y)^3 + 12x(2x + y)(2x - y)$  ta được kết quả là:  
**A.**  $64x^3$                                       **B.**  $64x^3 - y^3$                                       **C.**  $64x^3 + y^3$                                       **D.**  $64x^3 + 24xy^2$

**Giải**

$$\begin{aligned} & (2x + y)^3 + (2x - y)^3 + 12x(2x + y)(2x - y) \\ &= (2x)^3 + 3(2x)^2 \cdot y + 3 \cdot 2x \cdot y^2 + y^3 + (2x)^3 - 3(2x)^2 \cdot y + 3 \cdot 2x \cdot y^2 - y^3 + 12x(4x^2 - y^2) \\ &= 16x^3 + 12xy^2 + 48x^3 - 12xy^2 = 64x^3 \end{aligned}$$

**Đáp án cần chọn là: A.**

**Câu 3:** Biểu thức  $D = (9x^2y^2 - 6x^2y^3) : (-3xy)^2 + (6x^5y + 2x^4) : (2x^4)$  sau khi rút gọn là một đa thức có bậc bằng

**A.** 1.                                      **B.** 2.                                      **C.** 3.                                      **D.** 4.

**Giải**

$$D = (9x^2y^2 - 6x^2y^3) : (-3xy)^2 + (6x^5y + 2x^4) : (2x^4)$$

$$D = (9x^2y^2 - 6x^2y^3) : (9x^2y^2) + (6x^5y + 2x^4) : (2x^4)$$

$$D = 1 - \frac{2}{3}y + 3xy + 1$$

$$D = 2 - \frac{2}{3}y + 3xy$$

Do vậy đa thức sau rút gọn có bậc là 2.

**Đáp án cần chọn là: B.**

**Câu 4:** Cho đa thức  $P(x) = (x + 2)(x + 4)(x + 6)(x + 8) + 2022$ . Số dư của phép chia  $P(x)$  cho  $x^2 + 10x + 21$  là.

**A.** 2022                                      **B.** 2027                                      **C.** 2007                                      **D.** 2

**Giải**

$$P(x) = (x + 2)(x + 4)(x + 6)(x + 8) + 2022$$

Ta có:

$$\Rightarrow P(x) = [(x + 2)(x + 8)] \cdot [(x + 4)(x + 6)] + 2022 = (x^2 + 10x + 16) \cdot (x^2 + 10x + 24) + 2022$$

$$\Rightarrow P(x) = (x^2 + 10x + 21 - 5)(x^2 + 10x + 21 + 3) + 2022$$

$$t = x^2 + 10x + 21 \Rightarrow P(x) = (t - 5)(t + 3) + 2022 = t^2 - 2t + 2007$$

Đặt:

Vậy số dư trong phép chia là:  $\frac{2007}{1} = 2007$ .

Đáp án cần chọn là. **C.**

**Câu 5:** Biểu thức  $A = (x - 2)^3 - x(x - 5)^2 - 3x^2 + 3x$  đạt giá trị nhỏ nhất bằng.

**A.** 33

**B.** - 33

**C.** 5

**D.** - 5

**Giải**

Ta có  $A = (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) - (x^3 - 10x^2 + 25x) - 3x^2 + 3x = x^2 - 10x - 8$

$$A = (x - 5)^2 - 33 \geq -33, \forall x$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của  $A$  là -33 đạt khi  $x - 5 = 0$   
 $x = 5$

Đáp án cần chọn là. **B.**

**Câu 6:** Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $C = 2x^2 + y^2 - 4x + 2xy + 1$  là

**A.** - 5

**B.** 2

**C.** - 3

**D.** - 2

**Giải**

Ta có:

$$C = 2x^2 + y^2 - 4x + 2xy + 1$$

$$= (x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 2xy + x^2) - 3$$

$$= (x - 2)^2 + (x + y)^2 - 3 \geq -3$$

Dấu “=” xảy ra khi  $x - 2 = 0$ ;  $x = -y$  Suy ra  $x = 2$  và  $y = -2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của  $C$  bằng -3 khi  $x = 2$  và  $y = -2$ .

Đáp án cần chọn là. **C.**

**Câu 7:** Có bao nhiêu giá trị của  $x$  thỏa mãn  $x^3 + 4x - 5 = 0$ .

**A.** 1.

**B.** 2.

**C.** 3.

**D.** 0.

**Giải**

$$x^3 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1) = 0 \quad \text{Vì} \quad x^2 + x + 5 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{19}{4} > 0 \quad \forall x \Leftrightarrow (x - 1) = 0. \text{ Nên } x = 1$$

Vậy có một giá trị của  $x$  thỏa mãn đề bài.

Đáp án cần chọn là. **A.**

**Câu 8:** Cho  $A = x^{n+1}y^5 + 3x^{14}y^6$ ;  $B = x^5y^{2n-3}$ . Số tự nhiên  $n$  để đa thức  $A$  chia hết cho đơn thức  $B$  là

**A.** 2.

**B.** 3.

**C.** 4.

**D.** 5.

**Giải**

Ta có:  $A \vdash B$  nên  $n+1 \geq 5$  và  $5 \geq 2n-3$  suy ra  $n \geq 4$  và  $4 \geq n$ . Mà  $n \in \mathbb{N}$  nên  $n=4$ .

**Đáp án cần chọn là. C.**

**Câu 9:** Cho hai đa thức  $f(x) = x^3 - x - 6$  và đa thức  $g(x) = x^2 + ax + b$ . Xác định  $a, b$  để đa thức  $f(x)$  chia hết cho đa thức  $g(x)$ .

**A.**  $a=2; b=3$

**B.**  $a=3; b=2$

**C.**  $a=-2; b=3$

**D.**  $a=2; b=-3$

**Giải**

Ta có:  $x^3 - x - 6 = (x^2 + ax + b)(x - a) + (a^2 - b - 1)x + ab - 6$

Để  $f(x) : g(x)$  thì  $\begin{cases} a^2 - b - 1 = 0 \\ ab - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b - 1 = 0 \\ b = \frac{6}{a} \quad (a \neq 0) \end{cases}$

Với  $b = \frac{6}{a}$  thì  $a^2 - \frac{6}{a} - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow a^3 - a - 6 = 0 \Leftrightarrow (a - 2)(a^2 + 2a + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 2 = 0 \\ a^2 + 2a + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \text{ (t/m)} \\ (a+1)^2 = -2 \text{ (vô lý)} \end{cases}$$

Với  $a=2$  thì  $b=3$

Vậy  $a=2$  và  $b=3$  thì  $f(x) : g(x)$

**Đáp án cần chọn là. A.**

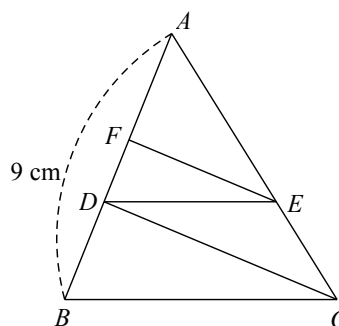
**Câu 10:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB=9\text{ cm}$ , điểm  $D$  thuộc cạnh  $AB$  sao cho  $AD=6\text{ cm}$ . Kẻ  $DE \parallel BC$  ( $E \in AC$ ), kẻ  $EF \parallel CD$  ( $F \in AB$ ). Khi đó độ dài  $AF$  bằng:

**A.**  $4\text{ cm}$

**B.**  $5\text{ cm}$

**C.**  $6\text{ cm}$

**D.**  $7\text{ cm}$

**Giải**

Áp dụng định lý Thalès:

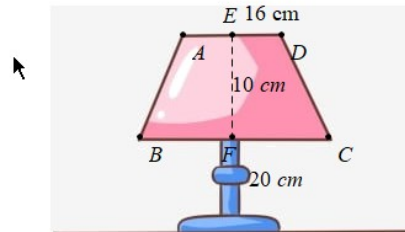
$$\text{Với } EF \parallel CD \Rightarrow \frac{AF}{AD} = \frac{AE}{AC} \quad (1)$$

$$\text{Với } DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra:  $\frac{AF}{AD} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AF = \frac{AD \cdot AD}{AB} = \frac{6 \cdot 6}{9} = 4 \text{ cm}$ . Vậy  $AF = 4 \text{ cm}$ .

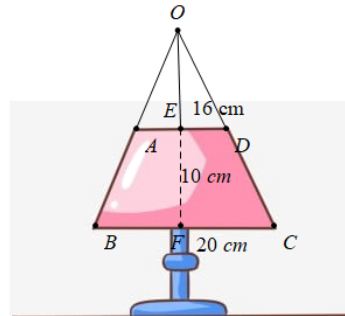
Đáp án cần chọn là. **A.**

**Câu 11:** Dung có một chiếc đèn ngủ có phần chụp dạng hình thang cân. Hình dưới đây biểu diễn mặt cắt của đèn chụp với các kích thước như sau:  $AD = 16 \text{ cm}$ ,  $BC = 20 \text{ cm}$ ,  $EF = 10 \text{ cm}$ . Khi đó khoảng cách giữa hai vị trí  $A$  và  $B$  là



- A.**  $2\sqrt{26} \text{ cm}$       **B.**  $18 \text{ cm}$       **C.**  $26\sqrt{2} \text{ cm}$       **D.**  $23 \text{ cm}$

**Giải**



Ta có  $AE = \frac{AD}{2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ cm}$ ;  $BF = \frac{BC}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ cm}$

Giả sử  $AB$  cắt  $DC$  tại  $O$

Ta có  $AE \parallel BF$ , theo hệ quả của định lý Talet ta có :

$$\frac{AE}{BF} = \frac{OE}{OF} \Rightarrow \frac{OE}{OE + 10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \Rightarrow 5OE = 4OE + 40 \Rightarrow OE = 40 \text{ (cm)}$$

Ta có  $\triangle OEA$  vuông tại  $E$ , theo định lý Pythagore ta có :

$$OA^2 = OE^2 + AE^2 \Rightarrow OA^2 = 40^2 + 8^2 = 1664 \text{ (cm)}$$

Vì  $OA > 0$  nên  $OA = \sqrt{1664} = 8\sqrt{26} \text{ (cm)}$

Ta có  $AE \parallel BF$ , theo định lý Talet ta có :

$$\frac{OA}{AB} = \frac{OE}{EF} \Rightarrow \frac{8\sqrt{26}}{AB} = \frac{40}{10} \Rightarrow AB = 2\sqrt{26} \text{ (cm)}$$

Đáp án cần chọn là. **A.**

**Câu 12:** Trong hộp có một số thẻ, mỗi thẻ ghi một trong các số  $1; 2; 3; 4; 5; \dots$ , trong đó các thẻ đánh số  $1; 2; 3; 4; 5$  có màu đỏ, thẻ đánh số  $6$  có màu xanh và các thẻ còn lại đánh số  $7; 8; 9; 10$  có màu trắng. Lấy ngẫu nhiên một thẻ, tính xác suất của biến cố “Chiếc thẻ lấy ra màu xanh”.

A.  $\frac{1}{2}$ .

B.  $\frac{2}{5}$ .

C.  $\frac{1}{10}$ .

D.  $\frac{13}{50}$ .

**Giải**

Đáp án cần chọn là. **C.**

**PHẦN II. PHẦN TỰ LUẬN (14 điểm)**

| CÂU                    | NỘI DUNG                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | ĐIỂM |
|------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| <b>Câu I. (2 điểm)</b> | <p>a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử. <math>a(b^3 - c^3) + b(c^3 - a^3) + c(a^3 - b^3)</math></p> <p>b) Cho các số thực <math>a, b, c</math> khác <math>0</math> và không phải là các số đối của nhau, thỏa mãn <math>B = \frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(a^2+2023)(b^2+2023)(c^2+2023)}</math> và <math>ab+bc+ca=2023</math>. Tính giá trị biểu thức:</p>                                                                                                                                                                                                |      |
|                        | <p>a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử.</p> <p>Ta có:</p> $a(b^3 - c^3) + b(c^3 - a^3) + c(a^3 - b^3)$ $= ab^3 - ac^3 + bc^3 - ba^3 + ca^3 - cb^3$ $= a^3(c - b) + b^3(a - c) + c^3(b - a)$ $= a^3(c - b) + b^3(a - c) - c^3(a - c + c - b)$ $= a^3(c - b) + b^3(a - c) - c^3(a - c) - c^3(c - b)$ $= (c - b)(a^3 - c^3) + (a - c)(b^3 - c^3)$ $= (c - b)(a - c)(a^2 + ac + c^2) + (a - c)(b - c)(b^2 + bc + c^2)$ $= (a - c)(c - b)(a^2 + ac + c^2 - b^2 - bc - c^2)$ $= (a - c)(c - b)[(a - b)(a + b) + c(a - b)]$ $= (a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c)$ |      |
|                        | <p>b. Ta có:</p> $a^2 + 2023 = a^2 + ab + bc + ca = a(a + b) + c(a + b) = (a + b)(c + a)$ $b^2 + 2023 = (a + b)(b + c); c^2 + 2023 = (b + c)(c + a)$ <p>Tương tự ta được:</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |      |

|                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |  |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
|                                                                                                                                                                                       | $B = \frac{(a+b)^2 (b+c)^2 (c+a)^2}{(a^2+2023)(b^2+2023)(c^2+2023)}$ <p>Khi đó:</p> $= \frac{(a+b)^2 (b+c)^2 (c+a)^2}{(a+b)(c+a)(a+b)(b+c)(c+a)(b+c)} = \frac{(a+b)^2 (b+c)^2 (c+a)^2}{(a+b)^2 (b+c)^2 (c+a)^2} = 1$ <p>Vậy <math>B = 1</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |  |
| <b>Câu II. (3 điểm)</b><br>a) Tìm nghiệm của đa thức sau. $x^2(x+6)^2 + 19(x+3)^2 + 19 = 0$<br>b) Tìm hai số $x; y$ thỏa mãn các đẳng thức sau: $x^3 + y^3 = 6xy - 8$ và $2x + y = 1$ |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |  |
|                                                                                                                                                                                       | <p>Ta có: <math>x^2(x+6)^2 + 19(x+3)^2 + 19 = 0</math></p> $\Leftrightarrow (x^2 + 6x)^2 + 19(x^2 + 6x + 9) + 19 = 0$ $\Leftrightarrow (x^2 + 6x)^2 + 19(x^2 + 6x) + 190 = 0$ <p>Đặt <math>x^2 + 6x = t</math>, ta được</p> $t^2 + 19t + 190 = 0$ $\Leftrightarrow (t+9)(t+10) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} t+9=0 \\ t+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-9 \\ t=-10 \end{cases}$ <p>+) Với <math>t = -9</math> ta được: <math>x^2 + 6x = -9 \Leftrightarrow (x+3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -3</math></p> <p>+) Với <math>t = -10</math>, ta được: <math>x^2 + 6x = -10 \Leftrightarrow (x+3)^2 = -1</math> (Vô lí)</p> <p>Vậy <math>x = -3</math></p> |  |
|                                                                                                                                                                                       | <p>b) ta có <math>x^3 + y^3 = 6xy - 8</math></p> $\Leftrightarrow x^3 + y^3 + 2^3 - 3.x.y.2 = 0$ $\Leftrightarrow (x+y+2)(x^2 + y^2 + 2^2 - xy - 2x - 2y) = 0$ $\Leftrightarrow (x+y+2)(x^2 + y^2 + 2^2 - xy - 2x - 2y) = 0$ $\Leftrightarrow x+y+2=0 \text{ hoặc } x^2 + y^2 + 2^2 - xy - 2x - 2y = 0$ <p>Nếu <math>x+y+2=0</math></p> $\Rightarrow \begin{cases} 2x+y=1 \\ x+y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-5 \end{cases}$ <p>Nếu <math>x^2 + y^2 + 2^2 - xy - 2x - 2y = 0</math></p> $\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2.2^2 - 2.xy - 2.2x - 2.2y = 0$                                                                                             |  |

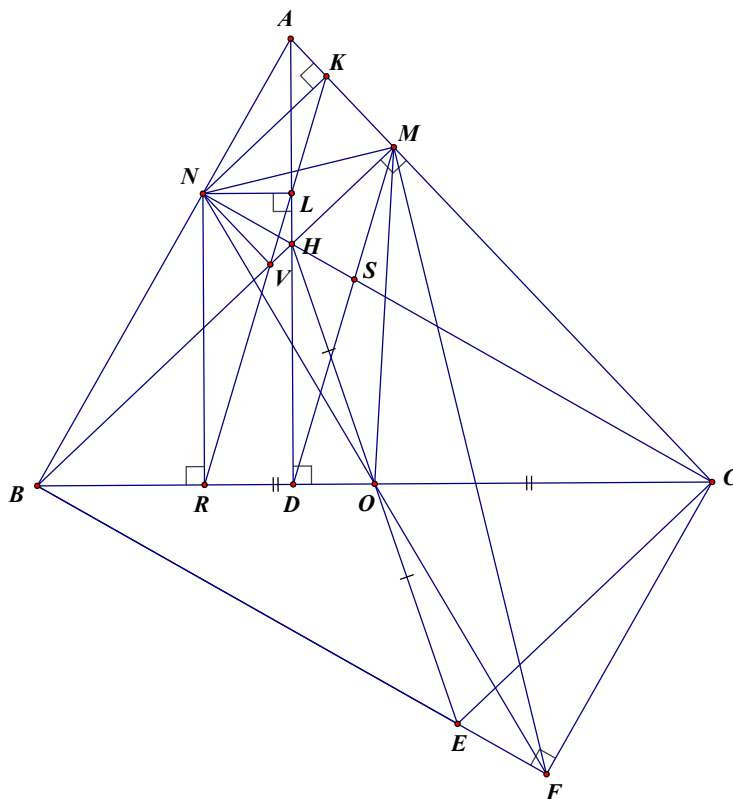
|                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |  |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
|                                                                                                                                                                                                                                       | $\Leftrightarrow (x-y)^2 + (y-2)^2 + (2-x)^2 = 0$ $\Leftrightarrow x=y=2$ $\Rightarrow \begin{cases} 2x+y=1 \\ x=y=2 \end{cases} \text{ (vô lý).}$ <p>Vậy các cặp số thỏa mãn là <math>(x;y)=(3;-5)</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |  |
| <b>Câu III. (3. điểm)</b><br>a) Tìm tất cả các cặp số $x,y$ nguyên dương thỏa mãn $x^4 + y + 4 = y^2 - x^2$ .<br>b) Cho $x,y,z$ là các số tự nhiên. Chứng minh: $C = 4x(x+y)(x+y+z)(x+z) + y^2z^2$ chia cho 3 chỉ có thể dư 0 hoặc 1. |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |  |
|                                                                                                                                                                                                                                       | <p>a. Giả sử tồn tại <math>x,y</math> nguyên dương thỏa mãn: <math>x^4 + y + 4 = y^2 - x^2</math></p> <p>Ta có: <math>x^4 + y + 4 = y^2 - x^2 \Leftrightarrow 4x^4 + 4y + 16 = 4y^2 - 4x^2</math></p> $\Leftrightarrow (4x^4 + 4x^2 + 1) - (4y^2 - 4y + 1) = -16$ $\Leftrightarrow (2x^2 + 1)^2 - (2y - 1)^2 = -16 \Leftrightarrow (2y - 1)^2 - (2x^2 + 1)^2 = 16$ $\Leftrightarrow (2y - 1 - 2x^2 - 1)(2y - 1 + 2x^2 + 1) = 16$ $\Leftrightarrow 4(y - x^2 - 1)(y + x^2) = 16$ $\Leftrightarrow (y - x^2 - 1)(y + x^2) = 4$ <p>Với <math>x,y</math> nguyên dương ta có: <math>y - x^2 - 1 \in \mathbb{Z}; y + x^2 \in \mathbb{N}^*; y + x^2 &gt; y - x^2 - 1</math></p> <p>Lại có <math>4 = 4.1 = (-4)(-1) = 2.2 = (-2)(-2)</math></p> <p>Do đó ta có <math>\begin{cases} y - x^2 - 1 = 1 \\ y + x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 6 \\ y + x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3(tm) \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 1 \text{ (vì } x \in \mathbb{N}^*) \end{cases}</math></p> <p>KL:...</p> <p>b) Với <math>x,y,z</math> là các số tự nhiên ta có:</p> $C = 4x(x+y)(x+y+z)(x+z) + y^2z^2 = 4[x(x+y+z)][(x+y)(x+z)] + y^2z^2$ $= 4(x^2 + xy + xz)(x^2 + xy + xz + yz) + y^2z^2$ $= 4(x^2 + xy + xz)^2 + 4(x^2 + xy + xz).yz + y^2z^2$ $= (2x^2 + 2xy + 2xz + yz)^2$ <p>Lại có: <math>(2x^2 + 2xy + 2xz + yz)^2</math> là một số chính phương với mọi <math>x,y,z</math> là số tự nhiên</p> <p>+ Chứng minh được một số chính phương chia cho 3 chỉ dư 0 hoặc 1</p> <p>Do đó <math>(2x^2 + 2xy + 2xz + yz)^2</math> chia cho 3 chỉ dư 0 hoặc 1</p> <p>KL:...</p> |  |
| <b>Câu IV. (6 điểm)</b><br>Cho tam giác $ABC$ nhọn ( $AB < AC$ ). Các đường cao $AD, BM, CN$ của tam giác $ABC$ cắt nhau                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |  |

tại  $H$ . Gọi  $O$  là trung điểm của đoạn thẳng  $BC$ ,  $E$  là điểm đối xứng của  $H$  qua  $O$ . Kẻ  $CF$  vuông góc với đường thẳng  $BE$  tại  $F$ .

1) Tính số đo  $\angle FMN$ .

2) Gọi  $K, L, R$  lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ  $N$  đến các đường thẳng  $AC, AD, BC$ . Chứng minh rằng ba điểm  $K, L, R$  thẳng hàng.

3) Tia phân giác của  $\angle BAC$  cắt  $BC$  tại  $I$ , kẻ đường thẳng đi qua  $C$  và vuông góc với đường thẳng  $AI$  tại  $P$ , đường thẳng  $CP$  cắt đường thẳng  $AO$  tại  $Q$ . Gọi  $G$  là trung điểm của đoạn thẳng  $IQ$ . Chứng minh đường thẳng  $PG$  đi qua trung điểm của đoạn thẳng  $AC$ .



**a. Tính số đo  $\angle FMN$ .**

Vì  $E$  đối xứng với  $H$  qua  $O$  nên  $O$  là trung điểm của  $EH$ .

Chứng minh được tứ giác  $BHCE$  là hình bình hành  $\Rightarrow CH \parallel EB$ .

Chứng minh được tứ giác  $BNCF$  là hình chữ nhật

$\Rightarrow O$  là trung điểm của  $NF$  và  $BC = NF$ .

$BM$  là đường cao của  $\triangle ABC \Rightarrow BM \perp AC \Rightarrow \triangle BMC$  vuông tại  $M$ .

Vì  $MO$  là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông  $BMC$

$$\Rightarrow MO = \frac{1}{2}BC \Rightarrow MO = \frac{1}{2}NF$$

Xét  $\triangle MNF$  có  $MO$  là đường trung tuyến và  $MO = \frac{1}{2}NF \Rightarrow \triangle MNF$  vuông tại



|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |  |
|--|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
|  | <p>Xét <math>\triangle AIC</math> có <math>OX \parallel AC \Rightarrow \frac{IO}{IC} = \frac{OX}{AC}</math> Suy ra <math>\frac{QO}{QA} = \frac{IO}{IC} \Rightarrow IQ \parallel AC</math></p> <p>Xét <math>\triangle APT</math> có <math>IJ \parallel AT \Rightarrow \frac{IJ}{AT} = \frac{PJ}{PT}</math>, Xét <math>\triangle CPT</math> có <math>QJ \parallel CT \Rightarrow \frac{QJ}{CT} = \frac{PJ}{PT}</math></p> <p><math>\Rightarrow \frac{IJ}{AT} = \frac{QJ}{CT} \Rightarrow IJ = QJ \Rightarrow J</math> là trung điểm của <math>IQ \Rightarrow J</math> trùng với <math>G \Rightarrow PG</math> đi qua trung điểm của <math>AC</math>.</p> |  |
|--|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|

**Câu IV. (1 điểm)**

Cho hai số  $x, y$  thỏa mãn điều kiện  $(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 + x^2 - 2y^2 = 0$ . Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $A = x^2 + y^2$ .

|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |  |
|--|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
|  | $(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 + x^2 - 2y^2 = 0$ $\Leftrightarrow x^4 + y^4 - 2x^2y^2 + 4x^2y^2 + x^2 - 2y^2 = 0$ $\Leftrightarrow (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) + x^2 - 2y^2 = 0$ $\Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 1 = -3x^2 + 1$ $\Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 1)^2 = -3x^2 + 1$ <p>Ta có: <math>x^2 \geq 0 \quad \forall x \Leftrightarrow -3x^2 \leq 0 \quad \forall x \Leftrightarrow -3x^2 + 1 \leq 1 \quad \forall x</math></p> $\Rightarrow (x^2 + y^2 - 1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x^2 + y^2 - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq A \leq 2$ <p>Dấu “=” xảy ra</p> <p>+ <math>A = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0.</math> Vậy GTNN <math>A = 0 \Leftrightarrow x = y = 0</math></p> <p>+ <math>A = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 2 \end{cases}</math> . Vậy</p> $GTLN A = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt{2} \\ x = 0 \\ y = -\sqrt{2} \end{cases}$ <p>KL...</p> |  |
|--|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|

-----Hết-----

**Chú ý:**

- Các cách làm khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa, điểm thành phần giám khảo tự phân chia trên cơ sở tham khảo điểm thành phần của đáp án.
- Các trường hợp khác tổ chấm thống nhất phương án chấm.