

$$P = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \left(\frac{x+1}{3x} - x - 1 \right) \right] : \frac{x-1}{x}$$

Câu 1. (4,0 điểm) Cho biểu thức

- a) Rút gọn P
- b) Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để P có giá trị nguyên
- c) Tìm x để $P \leq 1$

Câu 2 (4,5 điểm)

- a) Giải phương trình : $x^3 - 6x^2 - x + 30 = 0$

- b) Giải bất phương trình sau: $x - 1 - \frac{x-1}{3} \leq \frac{2x+3}{2} + \frac{x}{3} - 1$

- c) Cho biết $\frac{x}{x^2 - x + 1} = \frac{2}{3}$. Hãy tìm giá trị của biểu thức $Q = \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}$

Câu 3. (5,0 điểm)

- a) Tìm x, y thỏa mãn đẳng thức $5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2y - 2x + 2 = 0$

- b) Cho $a, b, c \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $a + b + c = 0$. Chứng minh: $(a^5 + b^5 + c^5) : 30$

- c) Chứng minh rằng $\left(a - \frac{1}{b}\right) \left(b - \frac{1}{c}\right) \left(c - \frac{1}{a}\right) \geq \left(a - \frac{1}{a}\right) \left(b - \frac{1}{b}\right) \left(c - \frac{1}{c}\right)$, trong đó a, b, c là các số thực không nhỏ hơn 1.

Câu 4. (4,5 điểm) Cho tam giác ABC. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Chứng minh rằng:

- a) Tam giác AEF đồng dạng với tam giác ABC

- b) $BH \cdot BE + CH \cdot CF = BC^2$

- c) $AD \cdot HD \leq \frac{BC^2}{4}$

- d) Gọi I, K, Q, R lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ E xuống AB, AD, CF, BC. Chứng minh bốn điểm I, K, Q, R cùng nằm trên một đường thẳng.

Câu 5 (2,0 điểm) Cho tam giác ABC. Trên tia đối của các tia BA, CA lấy theo thứ tự các điểm D, E sao cho $BD = CE = BC$. Gọi O là giao điểm của BE và CD. Qua O vẽ đường thẳng song song với tia phân giác của góc A, đường thẳng này cắt AC ở K. Chứng minh $AB = CK$

....hết.....

ĐÁP ÁN ĐỀ THI HSG TOÁN 8 HOÀNG HÓA

Câu 1.

a) ĐKXD: $x \neq 0; x \neq \pm 1$

Ta có:
$$P = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{x+1} \cdot \frac{x+1}{3x} + \frac{2}{x+1} \cdot (x+1) \right] \cdot \frac{x}{x-1} = \left[\frac{2}{3x} - \frac{2}{3x} + 2 \right] \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{2x}{x-1}$$

Vậy
$$P = \frac{2x}{x-1}$$

b) Ta có
$$P = 2 + \frac{2}{x-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x-1 \in U(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$$

Từ đó suy ra $x \in \{2; 0; 3; -1\}$, kết hợp với điều kiện được $x \in \{2; 3\}$

c)
$$P \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2x}{x-1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2x}{x-1} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} \leq 0$$

Mà $x-1 < x+1$ nên $x-1 < 0$ và $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x < 1$ và $x \geq -1$

Kết hợp với ĐKXD được $-1 < x < 1$ và $x \neq 0$

Câu 2.

$$x^3 - 6x^2 - x + 30 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+2)(x-5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-2 \\ x=5 \end{cases}$$

a) Ta có :

Vậy
$$S = \{-2; 3; 5\}$$

$$x-1 - \frac{x-1}{3} \leq \frac{2x+3}{2} + \frac{x}{3} - 1 \Leftrightarrow 6x-6-2x+2 \leq 6x+9+2x-6 \Leftrightarrow 4x \geq -7 \Leftrightarrow x \geq -\frac{7}{4}$$

b)

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là :
$$S = \left\{ x / x \geq -\frac{7}{4} \right\}$$

c) Từ $\frac{x}{x^2-x+1} = \frac{2}{3} \Rightarrow x \neq 0$, do đó $\frac{x^2-x+1}{x} = \frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow x + \frac{1}{x} - 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 1 = \frac{25}{4} - 1 = \frac{21}{4}$$

Lại có :
$$\frac{x^4+x^2+1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 1 = \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 1 = \frac{21}{4}$$

Suy ra $Q = \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{4}{21}$

Câu 3.

a) $5x^2 + 5y^2 + 8xy + 2y - 2x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 25x^2 + 25y^2 + 40xy + 10y - 10x + 10 = 0$

$\Leftrightarrow (5x + 4y - 1)^2 + 9(y + 1)^2 = 0$

Do $(5x + 4y - 1)^2 \geq 0$ và $9(y + 1)^2 \geq 0$ với mọi x, y

Nên $(5x + 4y - 1)^2 = 9(y + 1)^2 = 0$

Suy ra $x = 1; y = -1$

b) Ta có:

$a^5 - a = a.(a^2 - 1).(a^2 + 1) = a.(a^2 - 1).(a^2 - 4 + 5)$

$= (a - 2)(a - 1)a.(a + 1).(a + 2) + 5(a - 1)a.(a + 1)$

$(a - 2)(a - 1)a.(a + 1).(a + 2)$

Do là tích 5 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2, 3 và 5, do đó chia hết cho 30.

Lại có $(a - 1)a.(a + 1)$ chia hết cho 6 nên $5(a - 1)a(a + 1)$ chia hết cho 30.

Từ đó suy ra $a^5 - a$ chia hết cho 30

Tương tự $b^5 - b$ chia hết cho 30 và $c^5 - c$ chia hết cho 30

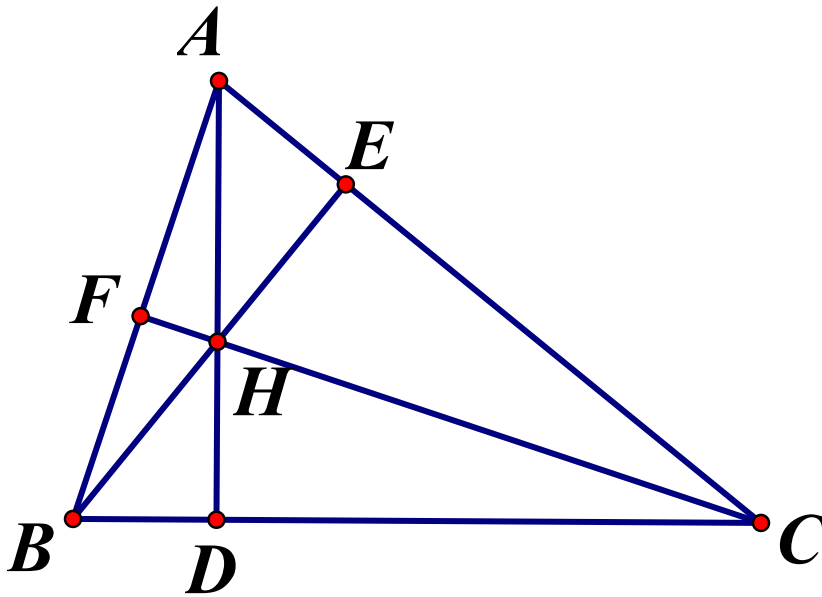
$(a^5 + b^5 + c^5) - (a + b + c) = (a^5 - a) + (b^5 - b) + (c^5 - c)$

Từ đó suy ra chia hết cho 30

Mà $a + b + c = 0$ nên $a^5 + b^5 + c^5$ chia hết cho 30

$$\begin{aligned}
& c) \left(a - \frac{1}{b}\right) \left(b - \frac{1}{c}\right) \left(c - \frac{1}{a}\right) \geq \left(a - \frac{1}{a}\right) \left(b - \frac{1}{b}\right) \left(c - \frac{1}{c}\right) \\
& \Leftrightarrow \frac{(ab-1)(bc-1)(ca-1)}{abc} \geq \frac{(a^2-1)(b^2-1)(c^2-1)}{abc} \\
& \Leftrightarrow (ab-1)(bc-1)(ca-1) \geq (a^2-1)(b^2-1)(c^2-1) \\
& \Leftrightarrow a^2b^2c^2 - abc(a+b+c) + (ab+bc+ca) \geq a^2b^2c^2 + a^2 + b^2 + c^2 - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \\
& \Leftrightarrow 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - 2abc(a+b+c) \geq 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab+bc+ca) \\
& \Leftrightarrow (ab-bc)^2 + (bc-ca)^2 + (ca-ab)^2 \geq (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \\
& \Leftrightarrow (a-c)^2 \cdot (b^2-1) + (b-a)^2 \cdot (c^2-1) + (c-b)^2 \cdot (a^2-1) \geq 0 \\
& \hspace{15em} (\text{đúng với mọi } a, b, c \geq 1)
\end{aligned}$$

Câu 4.



a) Ta có: $\triangle AEB \sim \triangle AFC (g.g) \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC}$

Từ đó suy ra $\triangle AEF \sim \triangle ABC (c.g.c)$

b) $\triangle BDH \sim \triangle BEC (g.g) \Rightarrow \frac{BD}{BE} = \frac{BH}{BC} \Rightarrow BH \cdot BE = BC \cdot BD \quad (1)$

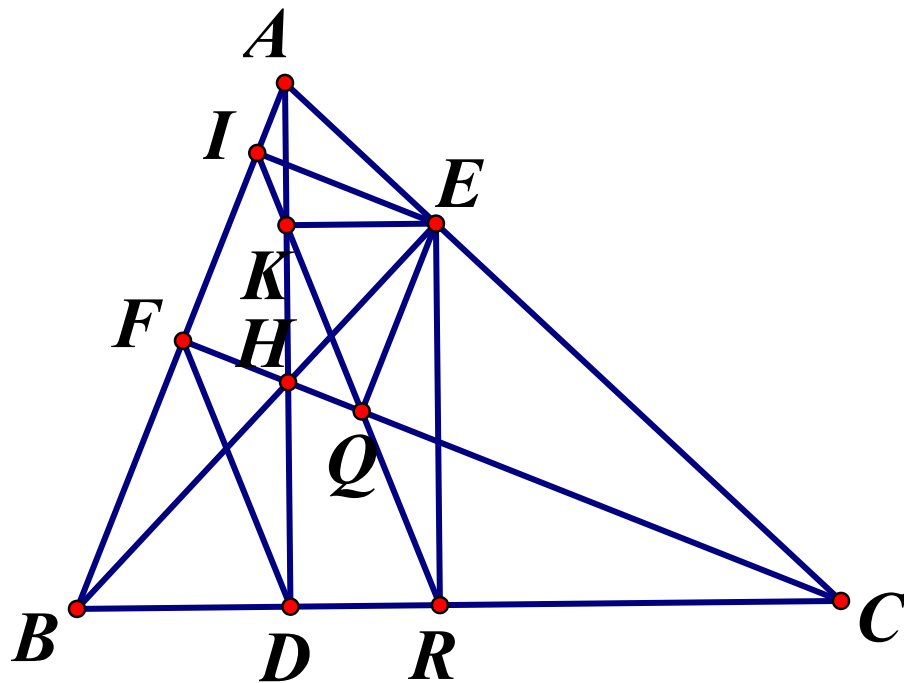
$\triangle CDH \sim \triangle CFB (g.g) \Rightarrow \frac{CD}{CF} = \frac{CH}{BC} \Rightarrow CH \cdot CF = BC \cdot CD \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $BH \cdot BE + CH \cdot CF = BC \cdot BD + BC \cdot CD = BC^2$

c) Chứng minh được $\triangle DBH \sim \triangle DAC (g.g) \Rightarrow \frac{DH}{DC} = \frac{DB}{DA} \Rightarrow DH \cdot DA = DC \cdot DB$

Lại có $DC \cdot DB \leq \frac{(DC + DB)^2}{4} = \frac{BC^2}{4}$ Do đó: $AD \cdot HD \leq \frac{BC^2}{4}$

d)



$$EI // CF, EK // BC, EQ // AB, ER // AD$$

Từ giả thiết suy ra

Áp dụng định lý Ta let ta có:

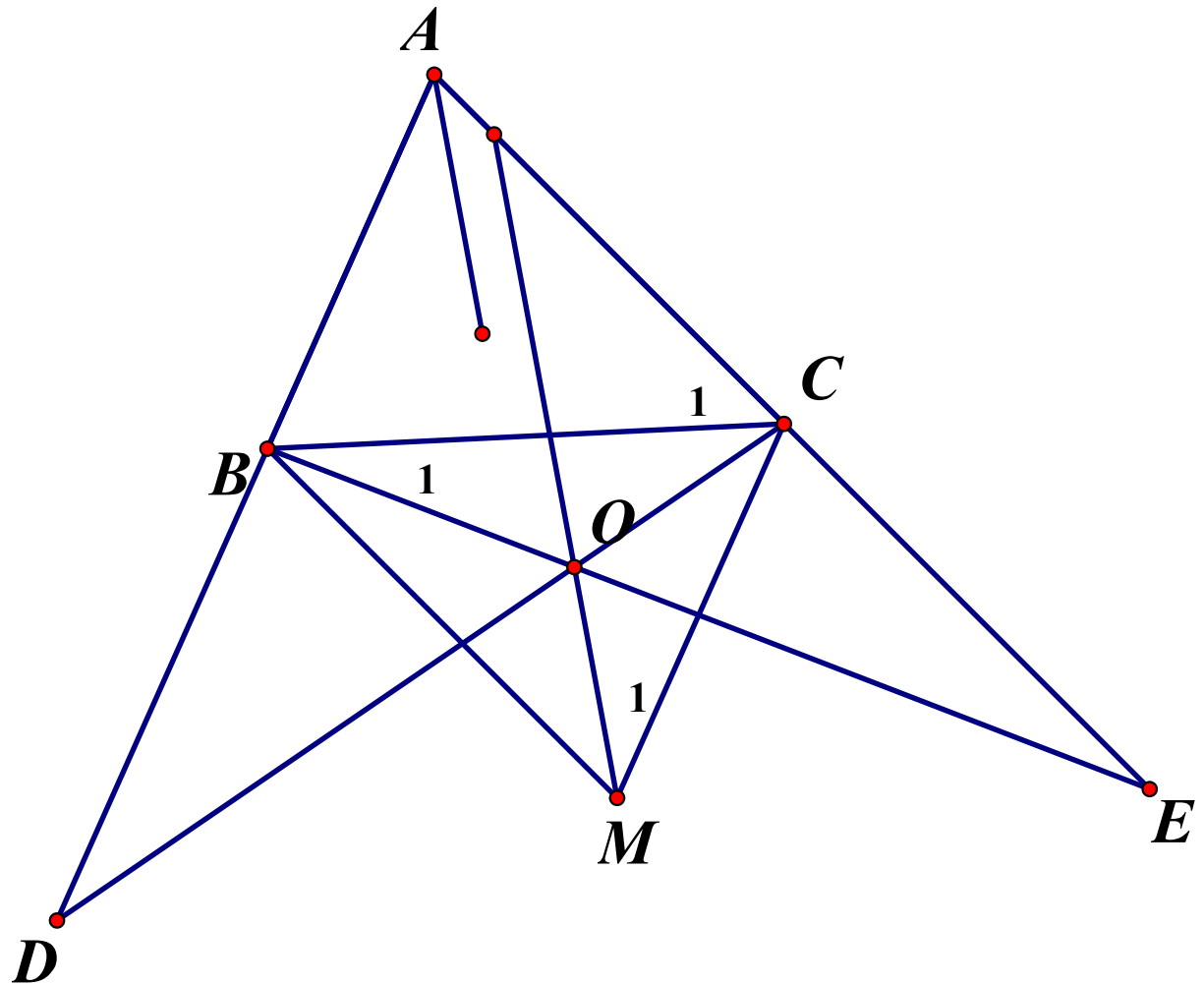
$$* \frac{AI}{AF} = \frac{AE}{AC} = \frac{AK}{AD} \Rightarrow IK // DF (3)$$

$$* \frac{BF}{BI} = \frac{BH}{BE} = \frac{BD}{BR} \Rightarrow IR // DF (4)$$

$$* \frac{CR}{CD} = \frac{CE}{CA} = \frac{CQ}{CF} \Rightarrow RQ // DF (5)$$

Từ (3) (4) và (5) suy ra bốn điểm I, K, Q, R thẳng hàng

Câu 5.



Vẽ hình bình hành $ABMC \Rightarrow AB = CM$ (1)

Ta có : $\angle B_1 = \frac{1}{2} \angle B = \frac{1}{2} \angle BMC$ nên BO là tia phân giác của $\angle BMC$

Tương tự CO là tia phân giác của $\angle BCM$

Do đó MO là tia phân giác của $\angle BMC$

Suy ra OM song song với tia phân giác của góc A, suy ra K, O, M thẳng hàng

$$\angle M_1 = \frac{1}{2} \angle BMC = \frac{1}{2} \angle BAC = \angle K_1$$

Ta có : nên tam giác KMC cân tại C

$$\Rightarrow CK = CM \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $CK = AB$