

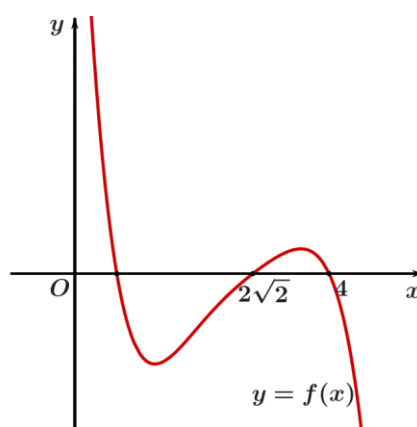
**Câu 1.** (7,0 điểm)

a) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = f(x) = x^6 - 5x^3 + mx + 2$  đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

b) Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} y^4 - 16y^2 + 15 = 2x(3y^2 - 4x - 17) \\ (y^2 + 2x - 15)(\sqrt{5x+1} - \sqrt{y^2 + x + 3}) = 14 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

**Câu 2:** (4,0 điểm)

a) Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Tìm số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = \left[ f(\sqrt{x} + \sqrt{8-x}) \right]^2$ .

b) Trong quá trình truy vết lịch sử tiếp xúc của bệnh nhân Covid-19 ở một trường học, trung tâm y tế xác định được 3 giáo viên và một số học sinh có sự liên quan đến bệnh nhân đó. Người ta chọn ngẫu nhiên 10 người trong số các giáo viên và học sinh liên quan để làm xét nghiệm gộp. Biết rằng xác suất để trong 10 người được chọn có 3 giáo viên bằng 6 lần xác suất trong 10 người được chọn đều là học sinh. Tính xác suất để trong 10 người được chọn làm xét nghiệm có nhiều nhất 2 giáo viên.

**Câu 3:** (1,5 điểm)

Cho  $a, b, c$  là các số thực không âm thay đổi thỏa mãn điều kiện  $\sqrt{1+a^2} + \sqrt{1+2b} + \sqrt{1+2c} = 5$ .

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = 2a^3 + b^3 + c^3$ .

**Câu 4:** (6,0 điểm)

Cho hình hộp  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$  có đáy  $ABCD$  là hình thoi cạnh  $a$ ,  $ABC = 60^\circ$  và  $B_1A \perp (ABCD)$ . Biết góc giữa 2 mặt phẳng  $(B_1CD)$  và  $(A_1B_1C_1D_1)$  bằng  $\alpha$  với  $\cot \alpha = \frac{1}{2}$ .

Gọi  $M$  là trung điểm của  $CD$ ,  $E$  là trung điểm của  $B_1M$ .

a) Tính thể tích khối  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ .

**b)** Gọi  $F$  là điểm thuộc đường thẳng  $DD_1$  sao cho  $EF \perp AC$ . Tính độ dài của  $EF$  và cosin góc giữa hai mặt phẳng  $(AEM)$  và  $(AEF)$ .

**Câu 5** *(1,5 điểm)*

Cho tứ diện  $ABCD$  và điểm  $M$  nằm trong tứ diện. Qua  $M$  dựng các mặt phẳng  $(\alpha) \parallel (BCD), (\beta) \parallel (ACD), (\gamma) \parallel (ABD), (\mu) \parallel (ABC)$ . Biết  $(\alpha)$  cắt  $AB$  tại  $E, (\beta)$  cắt  $BC$  tại  $F, (\gamma)$  cắt  $CD$  tại  $P, (\mu)$  cắt  $AD$  tại  $Q$ .

Chứng minh rằng:  $\sqrt{\frac{EA}{EB}} + \sqrt{\frac{FB}{FC}} + \sqrt{\frac{PC}{PD}} + \sqrt{\frac{QD}{QA}} \geq 4\sqrt{3}$ .

----- **HẾT** -----

## LỜI GIẢI CHI TIẾT

### Câu 1. (7,0 điểm)

**a)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = f(x) = x^6 - 5x^3 + mx + 2$  đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

#### Lời giải

♦ Ta có  $y' = f'(x) = 6x^5 - 15x^2 + m$ .

Hàm số  $y = f(x) = x^6 - 5x^3 + mx + 2$  đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$

$$\Leftrightarrow y' \geq 0 \quad \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow 6x^5 - 15x^2 + m \geq 0 \quad \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow m \geq -6x^5 + 15x^2 \quad \forall x \in (0; +\infty).$$

♦ Xét hàm số  $g(x) = -6x^5 + 15x^2$  trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

Ta có  $g'(x) = -30x^4 + 30x = -30x(x^3 - 1)$ .

$$\text{Khi đó } g'(x) = 0 \Leftrightarrow -30x(x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (loại)} \\ x^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng biến thiên

|         |   |   |           |
|---------|---|---|-----------|
| $x$     | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | + | 0 | -         |
| $g(x)$  | 0 | 9 | $-\infty$ |

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên  $(0; +\infty)$  khi  $m \geq 9$ .

**b)** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} y^4 - 16y^2 + 15 = 2x(3y^2 - 4x - 17) \\ (y^2 + 2x - 15)(\sqrt{5x+1} - \sqrt{y^2 + x + 3}) = 14 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \geq -\frac{1}{5} \\ y^2 + x + 3 \geq 0 \end{cases}.$$

♦ Xét phương trình

$$y^4 - 16y^2 + 15 = 2x(3y^2 - 4x - 17) \Leftrightarrow y^4 - 16y^2 + 15 - 2x(3y^2 - 4x - 17) = 0$$

$$\Leftrightarrow y^4 - 16y^2 + 15 - 6xy^2 + 8x^2 + 34x = 0 \Leftrightarrow y^4 - 2(3x+8)y^2 + 8x^2 + 34x + 15 = 0.$$

Ta có

$$\Delta'_{y^2} = (3x+8)^2 - (8x^2 + 34x + 15) = 9x^2 + 48x + 64 - 8x^2 - 34x - 15 = x^2 + 14x + 49 = (x+7)^2$$

$$\text{Vậy } y^4 - 16y^2 + 15 = 2x(3y^2 - 4x - 17) \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4x + 15 \\ y^2 = 2x + 1 \end{cases}.$$

**Trường hợp 1:**

♦ Thay  $y^2 = 4x + 15$  vào phương trình  $(y^2 + 2x - 15)(\sqrt{5x+1} - \sqrt{y^2 + x + 3}) = 14$  ta được:

$$6x(\sqrt{5x+1} - \sqrt{5x+18}) = 14 \Leftrightarrow \frac{6x(\sqrt{5x+1} - \sqrt{5x+18})(\sqrt{5x+1} + \sqrt{5x+18})}{\sqrt{5x+1} + \sqrt{5x+18}} = 14$$

$$\Leftrightarrow \frac{-17.6x}{\sqrt{5x+1}+\sqrt{5x+18}} = 14 \Leftrightarrow -51x = 7(\sqrt{5x+1}+\sqrt{5x+18})$$

$$\Leftrightarrow 7(\sqrt{5x+1}+\sqrt{5x+18}) + 51x = 0.$$

♦ Xét hàm số  $f(x) = 7(\sqrt{5x+1}+\sqrt{5x+18}) + 51x$  với  $x \geq -\frac{1}{5}$ .

Khi đó  $f'(x) = 7\left(\frac{5}{2\sqrt{5x+1}} + \frac{5}{2\sqrt{5x+18}}\right) + 51 > 0, \forall x > -\frac{1}{5}$ .

Vậy hàm số  $f(x)$  đồng biến với mọi  $x \geq -\frac{1}{5}$ .

Suy ra  $f(x) \geq f\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{-51+35\sqrt{7}}{5} > 0$  nên phương trình  $f(x) = 0$  vô nghiệm.

### Trường hợp 2:

♦ Thay  $y^2 = 2x+1$  vào phương trình  $(y^2 + 2x - 15)(\sqrt{5x+1} - \sqrt{y^2 + x + 3}) = 14$  ta được:

$$(4x-14)(\sqrt{5x+1} - \sqrt{3x+4}) = 14 \Leftrightarrow (2x-7)(\sqrt{5x+1} - \sqrt{3x+4}) = 7 \quad (*)$$

Nhận xét:  $x = \frac{7}{2}$  không phải là nghiệm của phương trình (\*).

Ta có  $(*) \Leftrightarrow \sqrt{5x+1} - \sqrt{3x+4} = \frac{7}{2x-7} \Leftrightarrow \sqrt{5x+1} - \sqrt{3x+4} - \frac{7}{2x-7} = 0$

♦ Xét hàm số  $g(x) = \sqrt{5x+1} - \sqrt{3x+4} - \frac{7}{2x-7}$  với  $x \in \left[-\frac{1}{5}; +\infty\right) \setminus \left\{\frac{7}{2}\right\}$ .

Khi đó  $g'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x+1}} - \frac{3}{2\sqrt{3x+4}} + \frac{14}{(2x-7)^2} = \frac{5\sqrt{3x+4} - 3\sqrt{5x+1}}{2\sqrt{(5x+1)(3x+4)}} + \frac{14}{(2x-7)^2}$

$$= \frac{(5\sqrt{3x+4} - 3\sqrt{5x+1})(5\sqrt{3x+4} + 3\sqrt{5x+1})}{2\sqrt{(5x+1)(3x+4)}(5\sqrt{3x+4} + 3\sqrt{5x+1})} + \frac{14}{(2x-7)^2}$$

$$= \frac{30x+91}{2\sqrt{(5x+1)(3x+4)}(5\sqrt{3x+4} + 3\sqrt{5x+1})} + \frac{14}{(2x-7)^2} > 0, x \in \left[-\frac{1}{5}; +\infty\right) \setminus \left\{\frac{7}{2}\right\}$$

Bảng biến thiên

| $x$     | $-\frac{1}{5}$ | $\frac{7}{2}$ | $+\infty$ |
|---------|----------------|---------------|-----------|
| $g'(x)$ |                | +             | +         |
| $g(x)$  |                | $+\infty$     | $-\infty$ |

Từ bảng biến thiên  $g(x) = 0$  có không quá hai nghiệm trên  $\left[-\frac{1}{5}; +\infty\right) \setminus \left\{\frac{7}{2}\right\}$ .

Mặt khác  $g(0) = g(7) = 0$ . Suy ra phương trình  $g(x) = 0$  có hai nghiệm là  $x = 0$  và  $x = 7$ .

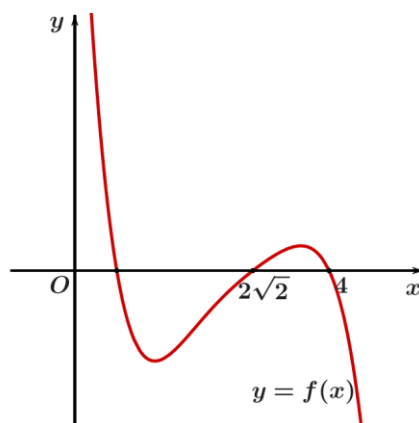
- Với  $x = 0 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$ .

- Với  $x = 7 \Rightarrow y^2 = 15 \Rightarrow y = \pm\sqrt{15}$ .

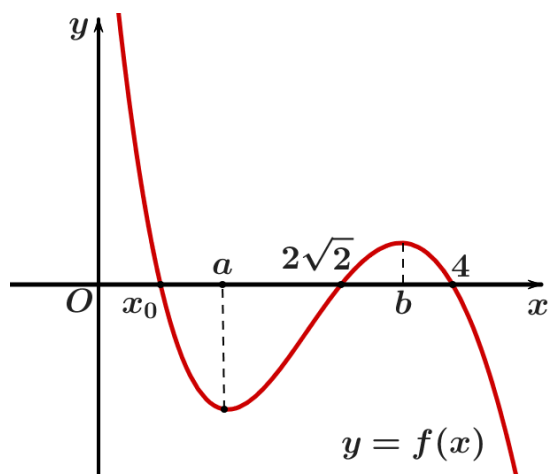
Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm  $(x; y)$  là  $(0; 1)$ ,  $(0; -1)$ ,  $(7; \sqrt{15})$ ,  $(7; -\sqrt{15})$ .

**Câu 2:** (4,0 điểm)

**a)** Cho hàm số bậc ba  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Tìm số điểm cực trị của hàm số  $g(x) = \left[ f(\sqrt{x} + \sqrt{8-x}) \right]^2$ .



Tập xác định:  $D = [0; 8]$

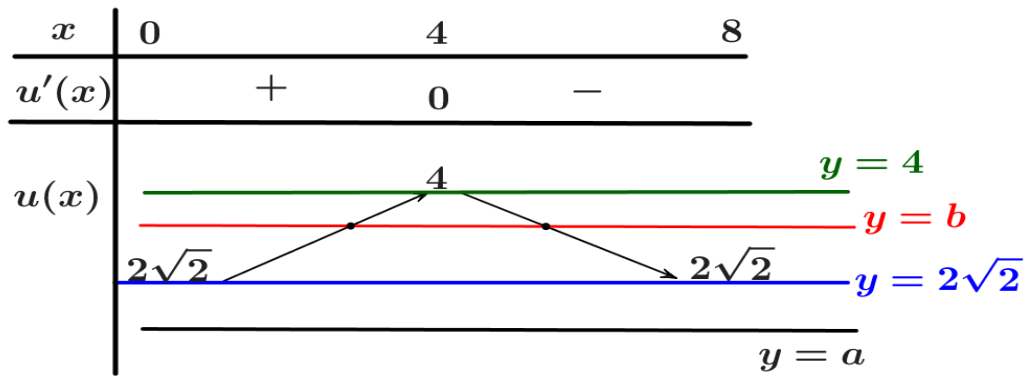
+ Xét hàm số  $g(x) = \left[ f(\sqrt{x} + \sqrt{8-x}) \right]^2$  trên  $D$ .

$$g'(x) = \left( \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{8-x}} \right) \cdot f'(\sqrt{x} + \sqrt{8-x}) \cdot f(\sqrt{x} + \sqrt{8-x}).$$

$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{8-x}} = 0 & x = 4 \\ f'(\sqrt{x} + \sqrt{8-x}) = 0 & \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{8-x} = a & (0 < a < 2\sqrt{2}) & (1) \\ \sqrt{x} + \sqrt{8-x} = b & (2\sqrt{2} < b < 4) & (2) \end{cases} \\ f(\sqrt{x} + \sqrt{8-x}) = 0 & \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{8-x} = x_0 & (0 < x_0 < a < 2\sqrt{2}) & (3) \\ \sqrt{x} + \sqrt{8-x} = 2\sqrt{2} & (4) \\ \sqrt{x} + \sqrt{8-x} = 4 & (5) \end{cases} \end{cases}.$$

+ Xét hàm  $u(x) = \sqrt{x} + \sqrt{8-x}$  trên đoạn  $[0; 8]$

$$u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{8-x}}. \text{ Cho } u'(x) = 0 \Rightarrow x = 4$$



Từ BBT, ta có: Phương trình (1) và (3) vô nghiệm.

$PT(2)$  có 2 nghiệm phân biệt  $0 < x_1; x_2 < 8$  và khác 4.

$PT(4)$  có 2 nghiệm phân biệt  $x = 0; x = 8$ .

$PT(5)$  có 1 nghiệm kép  $x = 4$ .

Vậy hàm số  $g(x)$  có 3 điểm cực trị.

**b)** Trong quá trình truy vết lịch sử tiếp xúc của bệnh nhân Covid-19 ở một trường học, trung tâm y tế xác định được 3 giáo viên và một số học sinh có sự liên quan đến bệnh nhân đó. Người ta chọn ngẫu nhiên 10 người trong số các giáo viên và học sinh liên quan để làm xét nghiệm gộp. Biết rằng xác suất để trong 10 người được chọn có 3 giáo viên bằng 6 lần xác suất trong 10 người được chọn đều là học sinh. Tính xác suất để trong 10 người được chọn làm xét nghiệm có nhiều nhất 2 giáo viên.

#### Lời giải

Gọi  $n$  là số học sinh ( $n \geq 10$ ).

Gọi biến cố  $A$ : “ có 3 giáo viên và 7 học sinh được chọn ”.

Gọi biến cố  $B$ : “ có 10 học sinh được chọn ”.

Gọi biến cố  $C$ : “ có nhiều nhất 2 giáo viên được chọn ”.

Chọn ngẫu nhiên 10 người thì  $n(\Omega) = C_{n+3}^{10}$

Ta có:  $P(A) = \frac{1 \times C_n^7}{C_{n+3}^{10}}$  và  $P(B) = \frac{C_n^{10}}{C_{n+3}^{10}}$

$$\text{Mà } P(A) = 6P(B) \Rightarrow C_n^7 = 6C_n^{10} \Leftrightarrow \frac{n!}{7!(n-7)!} = 6 \cdot \frac{n!}{10!(n-10)!}$$

$$6(n-9)(n-8)(n-7) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \Leftrightarrow (n-9)(n-8)(n-7) = 4 \cdot 5 \cdot 6 \Rightarrow n = 13$$

$$\text{Vậy xác suất } P(C) = 1 - P(A) = 1 - \frac{C_{13}^7}{C_{16}^{10}} = \frac{11}{14}.$$

#### Câu 3: (1,5 điểm)

Cho  $a, b, c$  là các số thực không âm thay đổi thỏa mãn điều kiện  $\sqrt{1+a^2} + \sqrt{1+2b} + \sqrt{1+2c} = 5$ .

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = 2a^3 + b^3 + c^3$ .

#### Lời giải

Ta chứng minh  $\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y} \geq 1 + \sqrt{1+x+y} \quad \forall x, y \geq 0$ .

Thật vậy  $\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y} \geq 1 + \sqrt{1+x+y}$

$$\Leftrightarrow (1+x) + (1+y) + 2\sqrt{(1+x)(1+y)} \geq 2 + x + y + 2\sqrt{1+x+y}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(1+x)(1+y)} \geq \sqrt{1+x+y}$$

$$\Leftrightarrow (1+x)(1+y) \geq 1+x+y$$

$$\Leftrightarrow xy \geq 0 \text{ (đúng } \forall x, y \geq 0).$$

Áp dụng:

$$\text{- Ta có } 5 = \sqrt{1+a^2} + (\sqrt{1+2b} + \sqrt{1+2c}) \geq \sqrt{1+a^2} + 1 + \sqrt{1+2b+2c} \geq 1+1+\sqrt{1+a^2+2b+2c}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+a^2+2b+2c} \leq 3 \Leftrightarrow b+c \leq 4 - \frac{a^2}{2}.$$

$$\text{- Lại có } 5 \geq \sqrt{1+a^2} + 1 + 1 \text{ (do } b, c \geq 0) \Rightarrow \sqrt{1+a^2} \leq 3 \Rightarrow 0 \leq a \leq 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Khi đó } P = 2a^3 + b^3 + c^3 = 2a^3 + (b+c)^3 - 3bc(b+c) \leq 2a^3 + (b+c)^3 \leq 2a^3 + \left(4 - \frac{a^2}{2}\right)^3.$$

$$\text{- Xét hàm số } g(a) = 2a^3 + \left(4 - \frac{a^2}{2}\right)^3, a \in [0; 2\sqrt{2}].$$

$$\text{Có } g'(a) = 6a^2 - 3a\left(4 - \frac{a^2}{2}\right)^2 = 3a\left[2a - \left(4 - \frac{a^2}{2}\right)^2\right] = \frac{3}{4}a(a-2)(-a^3 - 2a^2 + 12a + 32)$$

$$= \frac{3}{4}a(a-2)\left[(3-a)^3 + 11(3-a) + (6a+5)\right].$$

$$g'(a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=2 \end{cases}, \text{ vì: } (3-a)^3 + 11(3-a) + (6a+5) > 0, \forall x \in [0; 2\sqrt{2}].$$

- Bảng biến thiên

|         |    |    |              |
|---------|----|----|--------------|
| $a$     | 0  | 2  | $2\sqrt{2}$  |
| $g'(a)$ | 0  | -  | 0            |
| $g(a)$  | 64 | 24 | $32\sqrt{2}$ |

Suy ra  $\max P = g(0) = 64$  khi  $a = b = 0, c = 4$  hoặc  $a = c = 0, b = 4$ .

**Cách 2: (Đáp án của SGD Nghệ An)**

$$\text{+) Từ } \begin{cases} b \geq 0 \\ c \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 5 = \sqrt{1+a^2} + \sqrt{1+2b} + \sqrt{1+2c} \geq 2 + \sqrt{1+a^2} \Rightarrow a \leq 2\sqrt{2}, \text{ khi đó } 0 \leq a \leq 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Từ giả thiết } \sqrt{1+a^2} + \sqrt{1+2b} + \sqrt{1+2c} = 5 \Rightarrow \sqrt{1+2b} + \sqrt{1+2c} = 5 - \sqrt{1+a^2}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{1+2b} + \sqrt{1+2c})^2 = (5 - \sqrt{1+a^2})^2$$

$$\Rightarrow (5 - \sqrt{1+a^2})^2 = 2 + 2b + 2c + 2\sqrt{1+2b+2c+4bc} \geq 2 + 2b + 2c + 2\sqrt{1+2b+2c}, \text{ do } bc \geq 0$$

$$\Rightarrow (5 - \sqrt{1+a^2})^2 \geq (1 + \sqrt{1+2b+2c})^2 \Rightarrow 5 - \sqrt{1+a^2} \geq 1 + \sqrt{1+2b+2c} \Rightarrow \sqrt{1+2b+2c} \leq 4 - \sqrt{1+a^2}$$

$$\Rightarrow 1+2b+2c \leq (4 - \sqrt{1+a^2})^2 \Rightarrow b+c \leq 8 - 4\sqrt{1+a^2} + \frac{a^2}{2} = 4(3 - \sqrt{1+a^2}) + \frac{a^2}{2} - 4$$

$$= 4 \cdot \frac{8-a^2}{3+\sqrt{1+a^2}} + \frac{a^2}{2} - 4 \leq 4 \cdot \frac{8-a^2}{3+1} + \frac{a^2}{2} - 4 = 4 - \frac{a^2}{2}.$$

+) Kết hợp với  $bc \geq 0$  ta có  $P = 2a^3 + (b+c)^3 - 3bc(b+c) \leq 2a^3 + (b+c)^3 \leq 2a^3 + \left(4 - \frac{a^2}{2}\right)^3$ .

+) Xét hàm số  $f(a) = 2a^3 + \left(4 - \frac{a^2}{2}\right)^3$  trên  $[0; 2\sqrt{2}]$  ta có:

$$\begin{aligned} f'(a) &= 6a^2 - 3a \left(4 - \frac{a^2}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}a \left[8a - (8 - a^2)^2\right] = \frac{3}{4}a \left[-a^4 + 16a^2 + 8a - 64\right] \\ &= \frac{3}{4}a(a-2)(-a^3 - 2a^2 + 12a + 32) = \frac{3}{4}a(a-2) \underbrace{\left[a(12 - a^2) + 2(16 - a^2)\right]}_{>0, \forall a \in [0; 2\sqrt{2}]} \end{aligned}$$

Do đó  $f'(a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}$ .

Hàm số  $f(a)$  liên tục trên đoạn  $[0; 2\sqrt{2}]$ , đồng thời  $f(0) = 64$ ,  $f(2) = 24$ ,  $f(2\sqrt{2}) = 32\sqrt{2}$  nên  $\max_{a \in [0; 2\sqrt{2}]} f(a) = f(0) = 64$ .

Vậy giá trị lớn nhất của  $P$  bằng 64 đạt tại  $a = 0, b = 0, c = 4$  hoặc  $a = 0, b = 4, c = 0$ .

#### Câu 4: (6,0 điểm)

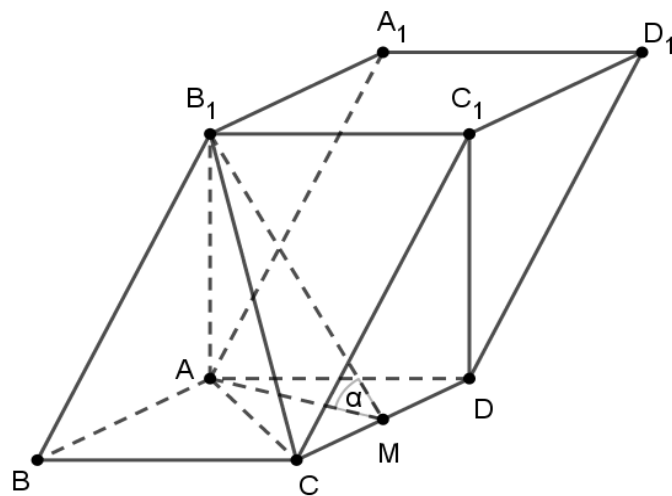
Cho hình hộp  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$  có đáy  $ABCD$  là hình thoi cạnh  $a$ ,  $\angle ABC = 60^\circ$  và  $B_1A \perp (ABCD)$ . Biết góc giữa 2 mặt phẳng  $(B_1CD)$  và  $(A_1B_1C_1D_1)$  bằng  $\alpha$  với  $\cot \alpha = \frac{1}{2}$ .

Gọi  $M$  là trung điểm của  $CD$ ,  $E$  là trung điểm của  $B_1M$ .

a) Tính thể tích khối  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ .

b) Gọi  $F$  là điểm thuộc đường thẳng  $DD_1$  sao cho  $EF \perp AC$ . Tính độ dài của  $EF$  và cosin góc giữa hai mặt phẳng  $(AEM)$  và  $(AEF)$ .

**Lời giải**



a)

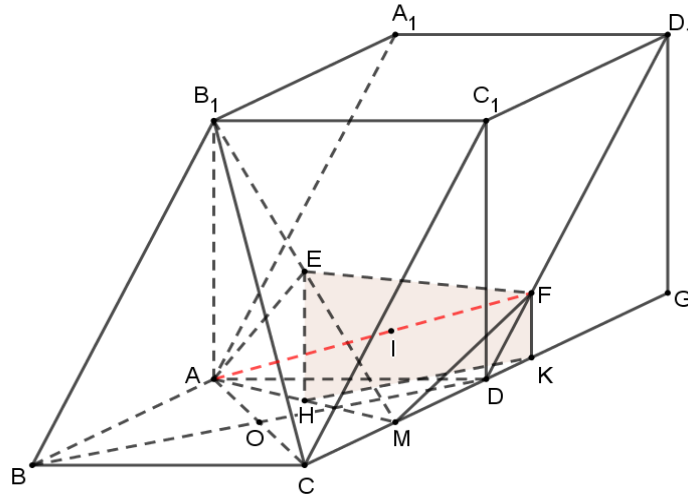
Do  $\angle ABC = 60^\circ$  nên tam giác  $ADC$  đều  $\Rightarrow AM \perp CD$ . Tam giác  $AMB_1$  vuông tại  $A$ .



Do  $(ABCD) // (A_1B_1C_1D_1)$  nên góc giữa 2 mặt phẳng  $(B_1CD)$  và  $(A_1B_1C_1D_1)$  là  $\alpha = \angle AMB_1$   
 $\cot \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{AM}{AB_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow AB_1 = 2AM = a\sqrt{3}$ .

Thể tích khối  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$  là  $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{3}{2}a^3$ .

b)



\* Gọi  $H$  là trung điểm  $AM$ , ta có  $EH // AB_1$  và  $EH = \frac{1}{2}AB_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow EH \perp (ABCD)$ .

Trong mặt phẳng  $(CDD_1C_1)$ , dựng đường thẳng qua  $F$  song song với  $C_1D$  cắt  $CD$  tại  $K \Rightarrow FK \perp (ABCD)$ .

Khi đó,  $HK$  là hình chiếu của  $EF$  trên mặt phẳng  $(ABCD)$ .

Mà  $EF \perp AC \Rightarrow HK \perp AC \Rightarrow HK // BD$ .

Ta được  $KFEH$  là hình thang vuông.

Gọi  $\{O\} = AC \cap BD$ . Khi đó  $\begin{cases} HO // KD \\ KH // DO \end{cases} \Rightarrow KHOD$  là hình bình hành.

Do đó  $KH = DO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$  và  $KD = HO = \frac{MC}{2} = \frac{a}{4}$ .

Dựng hình bình hành  $DC_1D_1G$ , suy ra  $FK // D_1G \Rightarrow \frac{FK}{D_1G} = \frac{DK}{DG} \Rightarrow \frac{FK}{AB_1} = \frac{DK}{C_1D_1} = \frac{1}{4}$ .

$\Rightarrow FK = \frac{1}{4}AB_1 = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ . Xét hình thang vuông  $KFEH$  ta có:

$$EF^2 = (HE - KF)^2 + HK^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{15}{16}a^2 \Rightarrow EF = \frac{a\sqrt{15}}{4}.$$

\* Ta có  $B_1M = \sqrt{AM^2 + AB_1^2} = \frac{a\sqrt{15}}{2} \Rightarrow EF = EA = EM \Rightarrow$  hình chiếu vuông góc của  $E$  xuống mặt phẳng  $(MAF)$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $MAF$ .

Gọi  $I$  là trung điểm  $AF$ , do tam giác  $AMF$  vuông tại  $M \Rightarrow EI \perp (AMF)$ .

Lại có  $MF = MA = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow MI \perp AF \Rightarrow MI \perp (AEF)$  và  $AF = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ .

Lại có  $DC \perp (AEM) \Rightarrow ((MAE), (FAE)) = (MI, MD) = \varphi$ .

Khi đó ta có  $DI^2 = \frac{DA^2 + DF^2}{2} - \frac{AF^2}{4} = \frac{a^2}{4} \Rightarrow DI = \frac{a}{2} = MD$ .

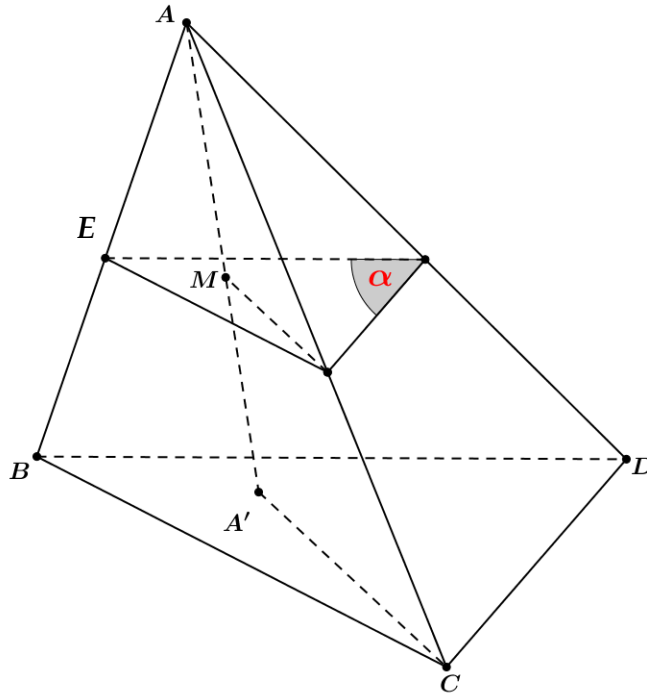
Tam giác  $MID$  cân tại  $D$  nên  $\cos \varphi = \frac{MI}{2MD} = \frac{\sqrt{6}}{4}$ .

### Câu 5 (1,5 điểm)

Cho tứ diện  $ABCD$  và điểm  $M$  nằm trong tứ diện. Qua  $M$  dựng các mặt phẳng  $(\alpha) \parallel (BCD), (\beta) \parallel (ACD), (\gamma) \parallel (ABD), (\mu) \parallel (ABC)$ . Biết  $(\alpha)$  cắt  $AB$  tại  $E, (\beta)$  cắt  $BC$  tại  $F, (\gamma)$  cắt  $CD$  tại  $P, (\mu)$  cắt  $AD$  tại  $Q$ .

Chứng minh rằng:  $\sqrt{\frac{EA}{EB}} + \sqrt{\frac{FB}{FC}} + \sqrt{\frac{PC}{PD}} + \sqrt{\frac{QD}{QA}} \geq 4\sqrt{3}$ .

**Lời giải**



Đầu tiên, ta lần lượt cho các đường thẳng  $AM, BM, CM, DM$  cắt lần lượt các mặt phẳng  $(BCD), (ACD), (ABD), (ABC)$  tại các điểm lần lượt là  $A', B', C', D'$ .

Khi đó theo định lý Thales, ta có:  $\frac{EA}{EB} = \frac{MA}{MA'}; \frac{FB}{FC} = \frac{MB}{MB'}; \frac{PC}{PD} = \frac{MC}{MC'}; \frac{QD}{QA} = \frac{MD}{MD'}$ .

Khi đó ta quy về chứng minh:  $T = \sqrt{\frac{MA}{MA'}} + \sqrt{\frac{MB}{MB'}} + \sqrt{\frac{MC}{MC'}} + \sqrt{\frac{MD}{MD'}} \geq 4\sqrt{3}$ .

Đặt:  $(V_{MBCD}; V_{MACD}; V_{MABD}; V_{MABC}) = (a^2; b^2; c^2; d^2)$ ,  $a, b, c, d > 0$ . Khi đó ta suy ra:

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{MA}{MA'}} + \sqrt{\frac{MB}{MB'}} + \sqrt{\frac{MC}{MC'}} + \sqrt{\frac{MD}{MD'}} = \sqrt{\frac{V_{ABCD}}{V_{MBCD}} - 1} + \sqrt{\frac{V_{ABCD}}{V_{MACD}} - 1} + \sqrt{\frac{V_{ABCD}}{V_{MABD}} - 1} + \sqrt{\frac{V_{ABCD}}{V_{MABC}} - 1} \\ &= \sqrt{\frac{b^2 + c^2 + d^2}{a^2}} + \sqrt{\frac{a^2 + c^2 + d^2}{b^2}} + \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + d^2}{c^2}} + \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{d^2}} \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{b+c+d}{a} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{a+c+d}{b} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{a+b+d}{c} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{a+b+c}{d} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \left( \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) + \left( \frac{c}{d} + \frac{d}{c} \right) + \left( \frac{a}{d} + \frac{d}{a} \right) + \left( \frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right) + \left( \frac{d}{b} + \frac{b}{d} \right) \right] \\
&\geq \frac{1}{\sqrt{3}} \left( 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} + 2\sqrt{\frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b}} + 2\sqrt{\frac{c}{d} \cdot \frac{d}{c}} + 2\sqrt{\frac{a}{d} \cdot \frac{d}{a}} + 2\sqrt{\frac{a}{c} \cdot \frac{c}{a}} + 2\sqrt{\frac{d}{b} \cdot \frac{b}{d}} \right) = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = d$ , khi đó  $M$  là trọng tâm của tứ diện  $ABCD$ .