

Người làm: Nguyễn Thị Lan

Zalo: Lan Lan - số đt zalo: 0965854587

Email: nguyenlan.hneu@gmail.com

CĐ1: THỰC HIỆN PHÉP TÍNH

Dạng 1. Tìm số hạng chưa biết dựa vào tỉ lệ thức

B. Tự luận

Câu 1. (Giao lưu HSG 7 huyện Hương Sơn 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $2x = 3y; 4y = 5z$ và $4x - 3y + 5z = 7$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) Từ } 2x &= 3y; 4y = 5z; 8x = 12y = 15z \\ \Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{8}} &= \frac{y}{\frac{1}{12}} = \frac{z}{\frac{1}{15}} = \frac{4x}{\frac{1}{2}} = \frac{3y}{\frac{1}{4}} = \frac{5z}{\frac{1}{3}} = \frac{4x - 3y + 5z}{\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}} = \frac{7}{\frac{7}{12}} = 12 \\ \Rightarrow x &= 12 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}; y = 12 \cdot \frac{1}{12} = 1; z = 12 \cdot \frac{1}{15} = \frac{4}{5} \\ \text{Vậy } x &= \frac{3}{2}; y = 1; z = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Câu 2. (HSG 7 trường THCS Lý Thường Kiệt 2017-2018)

Tìm các số x, y, z biết: $\frac{xy}{2y+4x} = \frac{yz}{4z+6y} = \frac{zx}{6z+2x} = \frac{x^2+y^2+z^2}{2^2+4^2+6^2}$

Lời giải

Xét $x=0 \Rightarrow y=0, z=0 \Rightarrow 2y+4x=0$ (vô lý)

Suy ra $x \neq 0; y \neq 0; z \neq 0$

Khi đó từ đề suy ra :

$$\begin{aligned} \frac{2y+4x}{xy} &= \frac{4z+6y}{yz} = \frac{6x+2z}{zx} = \frac{2^2+4^2+6^2}{x^2+y^2+z^2} \\ \Rightarrow \frac{2}{x} + \frac{4}{y} &= \frac{4}{y} + \frac{6}{z} = \frac{6}{z} + \frac{2}{x} = \frac{2^2+4^2+6^2}{x^2+y^2+z^2} = 2 \cdot \frac{2}{x} \\ \frac{2}{x} &= \frac{4}{y} = \frac{6}{z} = \frac{1}{k} \quad (k \neq 0) \quad \frac{2^2+4^2+6^2}{x^2+y^2+z^2} = \frac{2}{k} \end{aligned}$$

Đặt $x=2k; y=4k; z=6k$ thì $x^2+y^2+z^2=28k(3)$

Suy ra : $x=2k; y=4k; z=6k$ vào (3) ta được:

$$(2k)^2 + (4k)^2 + (6k)^2 = 28k$$

$$\Rightarrow 56k^2 - 28k = 0 \Rightarrow \begin{cases} k=0(k \text{ tm}) \\ k=\frac{1}{2}(k \text{ tm}) \end{cases}$$

$$k = \frac{1}{2} \Rightarrow x=1; y=2; z=3$$

Với

$$x=1, y=2, z=3$$

Vậy

Câu 3. (Giao lưu HSG huyện Vị Thanh 2017 – 2018)

Tìm x, y, z biết: $2x=3y; 4y=5z$ và $x+y+z=11$

Lời giải

$$2x=3y; 4y=5z \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{2}; \frac{y}{5} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8} = \frac{x+y+z}{15+10+8} = \frac{11}{33} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x=5; y=\frac{10}{3}; z=\frac{8}{3}$$

Câu 4. (Kiểm định chất lượng HSG huyện Bồ Trách 2017-2018)

Tìm x, y, z biết $\frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2}$ và $x+y+z=18$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2}$$

$$\text{Suy ra } \frac{4(3x-2y)}{16} = \frac{3(2z-4x)}{9} = \frac{2(4y-3z)}{4} = \frac{12x-8y+6z-12x+8y-6z}{29} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3x-2y}{4} = 0 \Rightarrow 3x=2y \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ \frac{2z-4x}{3} = 0 \Rightarrow 2z=4x \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{z}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+y+z}{2+3+4} = \frac{18}{9} = 2 \Rightarrow x=4; y=6; z=8$$

Câu 5. (HSG 7 THCS Hiền Quan, Tam Nông 2017-2018)

Tìm x, y, z biết $3x=2y, 4y=5z$ và $x+y-z=78$

Lời giải

$$\text{Từ } 3x=2y \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{5} \quad (1)$$

$$+ 4y=5z \Rightarrow \frac{y}{5} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{y}{15} = \frac{z}{12} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{12} \quad \text{và } x+y-z=78$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{12} = \frac{x+y-z}{10+15-12} = \frac{78}{13} = 6 \Rightarrow x=60; y=90; z=72$$

Câu 6. (Khảo sát HSG 7 huyện Mỹ Cày 2017-2018)

Tìm x, y, z biết: $\frac{5z - 6y}{4} = \frac{6x - 4z}{5} = \frac{4y - 5x}{6}$ và $3x - 2y + 5z = 96$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Từ } \frac{5z - 6y}{4} &= \frac{6x - 4z}{5} = \frac{4y - 5x}{6} \\ \Rightarrow \frac{20z - 24y}{16} &= \frac{30x - 20z}{25} = \frac{24y - 30x}{36} \\ &= \frac{20z - 24y + 30x - 20z + 24y - 30x}{10 + 25 + 36} = 0 \\ \Rightarrow 20z - 24y &= 30x - 20z = 24y - 30x = 0 \\ \Rightarrow 20z &= 24y = 30x \\ \Rightarrow 10z &= 12y = 15x \\ \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6} &\Rightarrow \frac{3x}{12} = \frac{2y}{10} = \frac{5z}{30} = \frac{3x - 2y + 5z}{12 - 10 + 30} = \frac{96}{32} = 3 \end{aligned}$$

Giải ra và kết luận : $x = 12; y = 15; z = 18$

Câu 7. (Đề chọn HSG huyện Việt Yên 2017-2018)

Tìm x, y biết $\frac{x}{4} = \frac{y}{7}$ và $xy = 112$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{x}{4} = \frac{y}{7} &\Rightarrow \frac{x^2}{16} = \frac{xy}{28} = \frac{112}{28} \\ \Rightarrow x^2 &= \frac{16 \cdot 112}{28} = 64 \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \Rightarrow y = 14 \\ x = -8 \Rightarrow y = -14 \end{cases} \end{aligned}$$

Câu 8. (Khảo sát HSG 7 huyện Thạch Thành 2017-2018)

Tìm các số x, y, z biết:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3}; \frac{y}{5} = \frac{z}{7} \quad \text{và} \quad x + y + z = 92$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ \frac{y}{5} = \frac{z}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{10} = \frac{y}{15} \\ \frac{y}{15} = \frac{z}{21} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{21}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau và $x + y + z = 92$, ta được:

$$\frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{21} = \frac{x + y + z}{10 + 15 + 21} = \frac{92}{46} = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{10} = 2 \\ \frac{y}{15} = 2 \\ \frac{z}{21} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 30 \\ z = 42 \end{cases}$$

Câu 9. (Đề HSG 7 2017-2018)

Tìm các cặp số $(x; y)$ biết:

a) $\frac{x}{3} = \frac{y}{7}; xy = 84$

b) $\frac{1+3y}{12} = \frac{1+5y}{5x} = \frac{1+7y}{4x}$

Lời giải

a) $\frac{x}{3} = \frac{y}{7}; xy = 84 \Rightarrow \frac{x^2}{9} = \frac{y^2}{49} = \frac{xy}{3 \cdot 7} = \frac{84}{21} = 4$

$\Rightarrow x^2 = 4 \cdot 49 = 196 \Rightarrow x = \pm 14$

$\Rightarrow y^2 = 4 \cdot 4 = 16 \Rightarrow y = \pm 4$

Do x, y cùng dấu nên:

$\square x = 6; y = 14$

$\square x = -6; y = -14$

b) Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{1+3y}{12} = \frac{1+5y}{5x} = \frac{1+7y}{4x} = \frac{1+7y-1-5y}{4x-5x} = \frac{2y}{-x} = \frac{1+5y-1-3y}{5x-12} = \frac{2y}{5x-12}$$

$$\Rightarrow \frac{2y}{-x} = \frac{2y}{5x-12} \Rightarrow x = 2$$

Thay $x = 2$ vào trên ta được:

$$\frac{1+3y}{12} = \frac{2y}{-2} \Rightarrow 1+3y = -12y \Leftrightarrow -15y = 1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{15}$$

Vậy $x = 2; y = -\frac{1}{15}$ thỏa mãn đề bài

Câu 10. (HSG 7 huyện Hoàng Hóa 2017-2018)

Tìm x, y, z biết: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}; \frac{y}{5} = \frac{z}{4}$ và $x - y + z = 49$

Lời giải

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3}; \frac{y}{5} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{15}; \frac{y}{15} = \frac{z}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{15} = \frac{z}{12} = \frac{x - y + z}{10 - 15 + 12} = \frac{-49}{7} = -7$$

$$\Rightarrow x = -70; y = -105; z = -84$$

Câu 11. (Giao lưu HSG huyện Bồ Trách 2017-2018)

Tìm x, y, z biết: $2x = 3y; 4y = 5z$ và $x + y + z = 11$

Lời giải

$$2x = 3y; 4y = 5z \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{2}; \frac{y}{5} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8} = \frac{x+y+z}{15+10+8} = \frac{11}{33} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x=5; y=\frac{10}{3}; z=\frac{8}{3}$$

Câu 12. (Khảo sát HSG huyện Thái Thụy 2017-2018)

Cho 3 số x, y, z thỏa mãn các điều kiện sau:

$$\frac{5z-6y}{4} = \frac{6x-4z}{5} = \frac{4y-5x}{6} \quad \text{và} \quad 3x-2y+5z=96. \quad \text{Tìm } x, y, z$$

Lời giải

$$\begin{aligned} & \frac{5z-6y}{4} = \frac{6x-4z}{5} = \frac{4y-5x}{6} \\ \text{Từ } & \frac{5z-6y}{4} = \frac{6x-4z}{5} \Rightarrow \frac{20z-24}{y} = \frac{30x-20z}{25} = \frac{24y-30x}{36} = \frac{20z-24y+30x-20z+24y-30x}{10+25+36} = 0 \\ & \Rightarrow 20z-24y=30x-20z=24y-30x=0 \Rightarrow 20z=24y=30x \\ & \Rightarrow 10z=12y=15x \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6} \Rightarrow \frac{3x}{12} = \frac{2y}{10} = \frac{5z}{30} = \frac{3x-2y+5z}{12-10+30} = \frac{96}{32} = 3 \\ & \Rightarrow x=12; y=15; z=18 \end{aligned}$$

Câu 13. (Kiểm định chất lượng HSG huyện Cẩm Phả 2017-2018)

$$\text{Tìm } x, y, z \text{ biết } \frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2} \quad \text{và} \quad x+y+z=18$$

Lời giải

$$\begin{aligned} & \frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2} \\ \text{Ta có : } & \frac{4(3x-2y)}{16} = \frac{3(2z-4x)}{9} = \frac{2(4y-3z)}{4} = \frac{12x-8y+6z-12x+8y-6z}{29} = 0 \\ \text{Suy ra } & \Rightarrow \begin{cases} \frac{3x-2y}{4} = 0 \Rightarrow 3x=2y \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ \frac{2z-4x}{3} = 0 \Rightarrow 2z=4x \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{z}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \end{aligned}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+y+z}{2+3+4} = \frac{18}{9} = 2 \Rightarrow x=4; y=6; z=8$$

Câu 14. (Đề chọn HSG huyện Tam Đư 2017-2018)

$$\text{Tìm 3 số } a, b, c \text{ biết: } \frac{3a-2b}{5} = \frac{2c-5a}{3} = \frac{5b-3c}{2} \quad \text{và} \quad a+b+c=-50$$

Lời giải

$$\frac{3a-2b}{5} = \frac{2c-5a}{3} = \frac{5b-3c}{2} \Rightarrow \frac{15a-10b}{25} = \frac{6c-15a}{9} = \frac{10b-6c}{4}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{15a - 10b}{25} = \frac{6c - 15a}{9} = \frac{10b - 6c}{4} = \frac{15a - 10b + 6c - 15a + 10b - 6c}{38} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 15a - 10b = 0 \\ 6c - 15a = 0 \\ 10b - 6c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a = 2b \\ 2c = 5a \\ 5b = 3c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{2} = \frac{b}{3} \\ \frac{a}{2} = \frac{c}{5} \\ \frac{c}{5} = \frac{b}{3} \end{cases}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau $\Rightarrow a = -10; b = -15; c = -25$

Câu 15. (Khảo sát HSG 7 huyện Kim Sơn 2017-2018)

Tìm x, y biết $\frac{4+x}{7+y} = \frac{4}{7}$ và $x+y=22$

Lời giải

$$28 + 7x = 28 + 4y \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{7} = \frac{x+y}{4+7}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{7} = \frac{22}{11} = 2 \Rightarrow x = 8; y = 14$$

Dạng 2. Chứng minh đẳng thức

B. Tự luận

Câu 1. (Giao lưu HSG 7 huyện Hương Sơn 2022 - 2023)

Cho $\frac{2bz - 3cy}{a} = \frac{3cx - az}{2b} = \frac{ay - 2bx}{3c}$. Chứng minh : $\frac{x}{a} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{3c}$

Lời giải

$$\frac{2bz - 3cy}{a} = \frac{3cx - az}{2b} = \frac{ay - 2bx}{3c}$$

$$\Rightarrow \frac{2abz - 3acy}{a^2} = \frac{6bcx - 2abz}{4b^2} = \frac{3acy - 6bcx}{9c^2} = \frac{2abz - 3acy + 6bcx - 2abz + 3acy - 6bcx}{a^2 + 4b^2 + 9c^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2bz - 3cy = 0 \Rightarrow \frac{z}{3c} = \frac{y}{2b} \quad (1)$$

$$\Rightarrow 3cx - az = 0 \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{z}{3c} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $\frac{x}{a} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{3c}$

Câu 2. (Đề thi chọn HSG THCS Trần Hưng Đạo 2017-2018)

Cho bốn số dương a, b, c, d thỏa điều kiện $a + c = 2b$ và $c(b + d) = 2bd$. Chứng minh

$$\left(\frac{a+c}{b+d} \right)^8 = \frac{a^8 + b^8}{b^8 + d^8}$$

Lời giải

Từ $c(b + d) = 2bd \Rightarrow b + d = \frac{2bd}{c}$

Viết $\frac{a+c}{b+d} = \frac{2bc}{2bd} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} \Rightarrow \left(\frac{a+c}{b+d} \right)^8 = \frac{a^8+b^8}{b^8+d^8}$

Câu 3. (HSG 7 thị xã Sầm Sơn 2017-2018)

Cho các số $a, b, c \neq 0$; $\frac{bz - cy}{a} = \frac{cx - az}{b} = \frac{ay - bx}{c}$

Chứng minh rằng: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

Lời giải

Nhân cả tử và mẫu của mỗi tỉ số với mẫu của chính nó rồi áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau và tính được tỉ số bằng 0 từ đó:

$$bz - cx = cx - az = ay - bx = 0 \Rightarrow dfcm$$

Câu 4. (Đề thi HSG 7)

Cho $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{b}$

Lời giải

Từ $\frac{a}{c} = \frac{c}{b} \Rightarrow c^2 = ab \Rightarrow \frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a^2 + ab}{b^2 + ab} = \frac{a}{b}$

Câu 5. (Đề chọn HSG trường Thực hành Sài Gòn 2017 -2018)

Biết rằng: $\frac{bz - cy}{a} = \frac{cx - az}{b} = \frac{ay - bx}{c}$. Chứng minh: $x : y : z = a : b : c$

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{bz - cy}{a} = \frac{cx - az}{b} = \frac{ay - bx}{c} = \frac{abz - acy}{a^2} = \frac{bcx - abz}{b^2} = \frac{acy - bcz}{c^2} = \frac{abz - acy + bcx - abz + acy - bcz}{a^2 + b^2 + c^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{z}{c} = \frac{y}{b}; \frac{x}{a} = \frac{z}{c} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

$$\Rightarrow x : y : z = a : b : c$$

Câu 6. (HSG 7 THCS Hiền Quan, Tam Nông 2017-2018)

Cho $(a+3)(b-4) - (a-3)(b+4) = 0$. Chứng minh: $\frac{a}{3} = \frac{b}{4}$

Lời giải

Tính được $6a = 8b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{4}$

Câu 7. (Khảo sát HSG 7 huyện Mỹ Cày 2017-2018)

Cho x, y, z thỏa mãn $x^2 = yz, y^2 = xz, z^2 = xy$. Chứng minh rằng: $x = y = z$

Lời giải

TH1: Nếu $x = 0$ thì $y = z = 0 \Rightarrow x = y = z$. Tương tự với y, z

TH2: x, y, z là các số khác 0 từ $x^2 = yz, y^2 = xz, z^2 = xy$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{z}{x}; \frac{y}{z} = \frac{x}{y}; \frac{z}{x} = \frac{y}{z} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau:

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x} = \frac{x+y+z}{y+z+x} = 1 \Rightarrow x = y = z$$

Vậy $x = y = z$

Câu 8. (Khảo sát HSG 7 huyện Thái Thụy 2017-2018)

Cho các số a, b, c, d thỏa mãn $b^2 = ac, c^2 = bd$

Chứng minh rằng: $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3} = \frac{a}{d}$

Lời giải

Từ $b^2 = ac$ và $c^2 = bd$ ta có: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a^3}{b^3} = \frac{b^3}{c^3} = \frac{c^3}{d^3} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3}$ (2)

$$\frac{a^3}{b^3} = \frac{a.a.a}{b.b.b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{d} \quad (3)$$

Mà

Từ (2) và (3) ta có điều phải chứng minh

Câu 9. (Đề chọn HSG huyện Việt Yên 2017-2018)

Chứng minh rằng: Nếu a, b, c là các số khác 0 thỏa mãn:

$$\frac{ab+ac}{2} = \frac{bc+ba}{3} = \frac{ca+cb}{4} \quad \frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{15}$$

thì

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{ab+ac}{2} &= \frac{bc+ba}{3} = \frac{ca+cb}{4} \\ &= \frac{ab+ac+bc+ba+ca+cb}{2+3+4} \\ &= \frac{2(ab+bc+ca)}{9} = \frac{ab+bc+ca}{4,5} \\ &= \frac{ab+bc+ca - ab - ac}{4,5 - 2} = \frac{bc}{2,5} \\ &= \frac{ab+bc+ca - bc - ba}{4,5 - 3} = \frac{ca}{1,5} \\ &= \frac{ab+bc+ca - ca - cb}{4,5 - 4} = \frac{ab}{0,5} \\ \frac{ab}{0,5} &= \frac{ac}{1,5} = \frac{bc}{2,5} \end{aligned}$$

Do đó:

$$\Rightarrow \begin{cases} 1,5ab = 0,5ac \\ 1,5bc = 2,5ac \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3b = c \\ 5a = 3b \end{cases} \quad (a, b, c \neq 0)$$

$$\Rightarrow 5a = 3b = c \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{15}$$

Câu 10. (Đề chọn HSG huyện Sông Lô 2017-2018)

Cho dãy tỉ số bằng nhau $\frac{2bz - 3cy}{a} = \frac{3cx - ay}{2b} = \frac{ay - 2bx}{3c}$. Chứng minh : $\frac{x}{a} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{3c}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \frac{2bz - 3cy}{a} &= \frac{3cx - az}{2b} = \frac{ay - 2bx}{3c} \\ \Leftrightarrow \frac{2abz - 3acy}{a^2} &= \frac{6bcx - 2abz}{4b^2} = \frac{3acy - 6bcx}{9c^2} \\ &= \frac{2abz - 3acy + 6bcx - 2abz + 3acy - 6bcx}{a^2 + 4b^2 + 9c^2} = 0 \\ \Rightarrow 2bz - 3cy &= 0 \Rightarrow \frac{z}{3c} = \frac{y}{2b} \quad (1) \Rightarrow 3cx - az = 0 \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{z}{3c} \quad (2) \\ \frac{x}{a} &= \frac{y}{2b} = \frac{z}{3c} \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra

Câu 11. (HSG THCS Tào Sơn, huyện Anh Sơn 2017-2018)

Cho $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$. Chứng minh rằng $\frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{b}$ (với giả thiết các biểu thức đều có nghĩa)

Lời giải

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{b} \Rightarrow c^2 = ab$$

Từ , khi đó:

Câu 12. (Đề chọn HSG THCS Trường Sa 2017-2018)

Cho bốn số dương a, b, c, d thỏa điều kiện $a + c = 2b$ và $c(b + d) = 2bd$. Chứng minh

$$\left(\frac{a+c}{b+d} \right)^8 = \frac{a^8 + b^8}{b^8 + d^8}$$

Lời giải

$$c(b+d) = 2bd \Rightarrow b+d = \frac{2bd}{c}$$

Từ

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{2bc}{2bd} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} \Rightarrow \left(\frac{a+c}{b+d} \right)^8 = \frac{a^8 + b^8}{b^8 + d^8}$$

Viết

Dạng 3. Chứng minh bất đẳng thức

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 trường THCS Lý Thường Kiệt 2017-2018)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = (2x - 5y)^2 - (15y - 6x)^2 - |xy - 90|$

Lời giải

$$Ta\ có: P = (2x - 5y)^2 - (15y - 6x)^2 - |xy - 90|$$

$$= (2x - 5y)^2 - (6x - 15y)^2 - |xy - 90|$$

$$= (2x - 5y)^2 - 9(2x - 5y)^2 - |xy - 90|$$

$$= - \left[8.(2x - 5y)^2 + |xy - 90| \right]$$

Ta thấy $(2x - 5y)^2 \geq 0$ với mọi x, y nên $8.(2x - 5y)^2 \geq 0$ với mọi x, y
 $|xy - 90| \geq 0$ với mọi x, y

Khi đó $8.(2x - 5y)^2 + |xy - 90| \geq 0$ với mọi x, y

Suy ra $- \left[8.(2x - 5y)^2 + |xy - 90| \right] \leq 0$ với mọi x, y

Hãy $P \leq 0$ với mọi x, y

Dấu "=" xảy ra khi
$$\begin{cases} (2x - 5y)^2 = 0 \\ |xy - 90| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{5} = \frac{y}{2} \\ xy = 90 \end{cases}$$

Đặt $\frac{x}{5} = \frac{y}{2} = k$ ta được $x = 5k, y = 2k$

Mà $xy = 90$ nên $5k.2k = 90 \Rightarrow k^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} k = 3 \\ k = -3 \end{cases}$

Nếu $k = 3 \Rightarrow x = 15, y = 6$

Nếu $k = -3 \Rightarrow x = -15, y = -6$

Vậy $Max P = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15; y = 6 \\ x = -15; y = -6 \end{cases}$

Dạng 4. Bài toán về dãy tỉ số bằng nhau và chia tỉ lệ

Câu 1. (Đề thi HSG 7)

Số A được chia thành 3 số tỉ lệ theo $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6}$. Biết rằng tổng các bình phương của ba số đó bằng 24309. Tìm số A.

Lời giải

Gọi a, b, c là ba số được chia ra từ số A

Theo đề bài ta có: $a : b : c = \frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6}$ (1) và $a^2 + b^2 + c^2 = 24309$ (2)

$$\Rightarrow \frac{a}{\frac{2}{5}} = \frac{b}{\frac{3}{4}} = \frac{c}{\frac{1}{6}} = k \Rightarrow a = \frac{2}{5}k; b = \frac{3}{4}k; c = \frac{1}{6}k$$

Từ (1)

$$(2) \Leftrightarrow k^2 \cdot \left(\frac{4}{25} + \frac{9}{16} + \frac{1}{36} \right) = 24309 \Rightarrow \begin{cases} k = 180 \\ k = -180 \end{cases}$$

Do đó,

Với $k = 180 \Rightarrow a = 72, b = 135, c = 30 \Rightarrow A = a + b + c = 237$

Với $k = -180 \Rightarrow A = -72 + (-135) + (-30) = -237$

Câu 2. (Khảo sát HSG 7 huyện Thái Thụy 2017-2018)

Cho $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$ và $\frac{y}{5} = \frac{z}{6}$. Tính $M = \frac{2x+3y+4z}{3x+4y+5z}$.

Lời giải

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20}; \frac{y}{5} = \frac{z}{6} \Rightarrow \frac{y}{20} = \frac{z}{24} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z}{24} \quad (1)$$

$$(1) \Rightarrow \frac{2x}{30} = \frac{3y}{60} = \frac{4z}{96} = \frac{2x+3y+4z}{30+60+96} \quad \text{và} \quad \frac{3x}{45} = \frac{4y}{80} = \frac{5z}{120} = \frac{3x+4y+5z}{45+80+120}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+3y+4z}{30+60+96} : \frac{3x+4y+5z}{45+80+120} = \frac{2x}{30} : \frac{3x}{45} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{2x+3y+4z}{30+60+96} : \frac{3x+4y+5z}{45+80+120} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{2x+3y+4z}{186} \cdot \frac{245}{3x+4y+5z} = 1 \Rightarrow M = \frac{2x+3y+4z}{3x+4y+5z} = \frac{186}{245}$$

Câu 3. (Đề chọn HSG huyện Việt Yên 2017-2018)

Tìm số có 3 chữ số biết rằng số đó chia hết cho 3^6 và các chữ số của nó tỉ lệ với 1;2;3

Lời giải

Gọi ba chữ số của số phải tìm là a, b, c ta có:

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3}. \quad \text{Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta được: } \frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3}, \quad \text{áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng}$$

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{a+b+c}{6} (*)$$

nhau ta được:

Do số phải tìm chia hết cho 3^6 nên số đó chia hết cho 9 suy ra $a+b+c$ chia hết cho 9

Mà a, b, c là các chữ số có ít nhất một chữ số khác 0 nên $a+b+c$ chỉ có thể nhận một trong ba giá trị 9;18;27

$$a+b+c=9 \Rightarrow (*) \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{a+b+c}{6} \Rightarrow a = \frac{9}{6} (ktm)$$

Nếu

$$a+b+c=18 \Rightarrow (*) \Rightarrow a=3, b=6, c=9$$

Nếu , vì số phải tìm chia hết cho 3^6 nên chữ số hàng đơn vị chẵn, ta có số 396 hoặc 936 .

$$a+b+c=27, (*) \Rightarrow a = \frac{27}{6} (ktm)$$

Nếu

Vậy số phải tìm là $936; 396$

Câu 4. (Khảo sát HSG 7 huyện Thạch Thành 2017-2018)

Cho $\frac{x}{3} = \frac{y}{5}$. Tính giá trị biểu thức $C = \frac{5x^2+3y^2}{10x^2-3y^2}$

Lời giải

$$\text{Đặt } \frac{x}{3} = \frac{y}{5} = k \Rightarrow \begin{cases} x=3k \\ y=5k \end{cases} \text{ . Khi đó:}$$

$$C = \frac{5x^2 + 3y^2}{10x^2 - 3y^2} = \frac{5(3k)^2 + 3(5k)^2}{10(3k)^2 - 3(5k)^2} = \frac{45k^2 + 75k^2}{90k^2 - 75k^2} = \frac{120k^2}{15k^2} = 8$$

Câu 5. (Đề chọn HSG huyện Năm Căn 2017-2018)

Cho ba hình chữ nhật, biết diện tích của hình thứ nhất và diện tích của hình thứ hai tỉ lệ với 4 và 5 , diện tích hình thứ hai và diện tích hình thứ ba tỉ lệ với 7 và 8 , hình thứ nhất và hình thứ hai có cùng chiều dài và tổng các chiều rộng của chúng là $27cm$, hình thứ hai và hình thứ ba có cùng chiều rộng, chiều dài của hình thứ ba là $24cm$. Tính diện tích của mỗi hình chữ nhật đó.

Lời giải

Gọi diện tích ba hình chữ nhật lần lượt là S_1, S_2, S_3 , chiều dài, chiều rộng tương ứng là $d_1, r_1, d_2, r_2, d_3, r_3$ theo đề bài ta có:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{5}; \frac{S_2}{S_3} = \frac{7}{8} \quad \text{và} \quad d_1 = d_2; r_1 + r_2 = 27; r_2 = r_3; d_3 = 24$$

Vì hình thứ nhất và hình thứ hai cùng chiều dài

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{5} = \frac{r_1}{r_2} \Rightarrow \frac{r_1}{4} = \frac{r_2}{5} = \frac{r_1 + r_2}{9} = \frac{27}{9} = 3$$

Suy ra chiều rộng $r_1 = 12cm, r_2 = 15cm$

Vì hình thứ hai và hình thứ ba cùng chiều rộng

$$\frac{S_2}{S_3} = \frac{7}{8} = \frac{d_2}{d_3} \Rightarrow d_2 = \frac{7d_3}{8} = \frac{7 \cdot 24}{8} = 21(cm)$$

Vậy diện tích hình thứ hai: $S_2 = d_2 r_2 = 21 \cdot 15 = 315cm^2$

Diện tích hình thứ nhất: $S_1 = \frac{4}{5} S_2 = \frac{4}{5} \cdot 315 = 252cm^2$

Diện tích hình thứ ba: $S_3 = \frac{8}{7} S_2 = \frac{8}{7} \cdot 315 = 360cm^2$

Diện tích hình thứ ba :

Câu 6. (Kiểm định chất lượng HSG 7 huyện Triệu Sơn 2017-2018)

Cho $\frac{x+16}{9} = \frac{y-25}{16} = \frac{z+9}{25}$ và $2x^3 - 1 = 15$. Tính $B = x + y + z$

Lời giải

Ta có: $2x^3 - 1 = 15 \Leftrightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$

$$\frac{18}{9} = \frac{y-25}{16} = \frac{z+9}{25} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y-25}{16} = 2 \Rightarrow y = 57 \\ \frac{z+9}{25} = 2 \Rightarrow z = 41 \end{cases}$$

Suy ra

Vậy $B = x + y + z = 2 + 57 + 41 = 100$

Câu 7. (Giao lưu HSG THCS Nguyễn Chí, huyện Đông Sơn 2017-2018)

a) Tìm hai số nguyên dương x và y biết rằng tổng, hiệu và tích của chúng lần lượt tỉ lệ với $35; 210; 12$

b) Cho $\frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z}$

$$P = \frac{x+y}{z+t} + \frac{y+z}{t+x} + \frac{z+t}{x+y} + \frac{t+x}{y+z}$$

Chứng minh rằng biểu thức có giá trị nguyên

Lời giải

a) Do tổng, hiệu và tích của x và y lần lượt tỉ lệ nghịch với 35, 210, 12

$$(x+y).35 = (x-y).210 = 12.xy$$

Ta có:

$$(x+y).35 = (x-y).210 \Rightarrow \frac{x+y}{210} = \frac{x-y}{35} \Rightarrow \frac{x+y}{210} = \frac{x-y}{35} = \frac{2x}{245} = \frac{2y}{175}$$

Từ

$$\Rightarrow \frac{x}{7} = \frac{y}{5} \Rightarrow x = \frac{7y}{5} \quad \text{thay vào đẳng thức} \quad (x+y).35 = 12xy \quad \text{ta được}$$

$$\Rightarrow y^2 - 5y = 0 \Rightarrow y(y-5) = 0 \Rightarrow y \in \{0; 5\} \quad \text{mà } y > 0 \Rightarrow y = 5$$

Với $y = 5$ thì $x = 7$

$$\frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z}$$

b)

$$\Rightarrow \frac{y+z+t}{x} = \frac{z+t+x}{y} = \frac{t+x+y}{z} = \frac{x+y+z}{t}$$

$$\Rightarrow \frac{y+z+t}{x} + 1 = \frac{z+t+x}{y} + 1 = \frac{t+x+y}{z} + 1 = \frac{x+y+z}{t} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{x+y+z+t}{x} = \frac{z+t+x+y}{y} = \frac{t+x+y+z}{z} = \frac{x+y+z+t}{t}$$

Nếu $x+y+z+t = 0 \Rightarrow P = -4$

Nếu $x+y+z+t \neq 0 \Rightarrow x = y = z = t \Rightarrow P = 4$

Vậy P nguyên.

Câu 8. (HSG THCS Tào Sơn huyện Anh Sơn 2017-2018)

Số A được chia thành 3 số theo tỉ lệ $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6}$. Biết rằng tổng các bình phương của ba số đó bằng 24309. Tìm số A .

Lời giải

Gọi a, b, c là ba số được chia ra từ số A .

$$a : b : c = \frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6} \quad (1) \quad \text{và} \quad a^2 + b^2 + c^2 = 24309 \quad (2)$$

Theo đề bài ta có:

$$\Rightarrow \frac{a}{\frac{2}{5}} = \frac{b}{\frac{3}{4}} = \frac{c}{\frac{1}{6}} = k \Rightarrow a = \frac{2}{5}k; b = \frac{3}{4}k; c = \frac{k}{6}$$

Từ (1)

$$(2) \Leftrightarrow k^2 \cdot \left(\frac{4}{25} + \frac{9}{16} + \frac{1}{36} \right) = 24309$$

Do đó

$$\Rightarrow k = 180 \quad ; k = -180$$

$$+) k = 180 \Rightarrow a = 72; b = 135; c = 30 \Rightarrow A = a + b + c = 237$$

$$+) k = -180 \Rightarrow a = -72; b = -135; c = -30 \Rightarrow A = a + b + c = -237$$

Câu 9. (Khảo sát HSG 7 huyện Kim Sơn 2017-2018)

Cho $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$ và $\frac{y}{5} = \frac{z}{6}$. Tính $M = \frac{2x+3y+4z}{3x+4y+5z}$

Lời giải

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20}; \frac{y}{5} = \frac{z}{6} \Rightarrow \frac{y}{20} = \frac{z}{24} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z}{24} \quad (1)$$

$$(1) \Rightarrow \frac{2x}{30} = \frac{3y}{60} = \frac{4z}{96} = \frac{2x+3y+4z}{30+60+96}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{3x}{45} = \frac{4y}{80} = \frac{5z}{120} = \frac{3x+4y+5z}{45+80+120}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+3y+4z}{30+60+96} : \frac{3x+4y+5z}{45+80+120} = \frac{2x}{30} : \frac{3x}{45}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+3y+4z}{186} \cdot \frac{245}{3x+4y+5z} = 1 \Rightarrow M = \frac{2x+3y+4z}{3x+4y+5z} = \frac{186}{245}$$

Câu 10. (Đề chọn HSG huyện Dương Nam 2017-2018)

Cho ba hình chữ nhật, biết diện tích của hình thứ nhất và diện tích của hình thứ hai tỉ lệ với 4 và 5, diện tích hình thứ hai và diện tích hình thứ ba tỉ lệ với 7 và 8, hình thứ nhất và hình thứ hai có cùng chiều dài và tổng các chiều rộng của chúng là 27cm, hình thứ hai và hình thứ ba có cùng chiều rộng, chiều dài của hình thứ ba là 24cm. Tính diện tích của mỗi hình chữ nhật đó.

Lời giải

Gọi diện tích ba hình chữ nhật lần lượt là S_1, S_2, S_3 , chiều dài, chiều rộng tương ứng là $d_1, r_1, d_2, r_2, d_3, r_3$, theo đề bài ta có:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{5}; \frac{S_2}{S_3} = \frac{7}{8} \quad \text{và} \quad d_1 = d_2; r_1 + r_2 = 27; r_2 = r_3; d_3 = 24$$

Vì hình thứ nhất và hình thứ hai cùng chiều dài

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{5} = \frac{r_1}{r_2} \Rightarrow \frac{r_1}{4} = \frac{r_2}{5} = \frac{r_1+r_2}{9} = \frac{27}{9} = 3$$

Suy ra chiều rộng $r_1 = 12cm, r_2 = 15cm$

Vì hình thứ hai và hình thứ ba cùng chiều rộng

$$\frac{S_2}{S_3} = \frac{7}{8} = \frac{d_2}{d_3} \Rightarrow d_2 = \frac{7d_3}{8} = \frac{7 \cdot 24}{8} = 21(cm)$$

Vậy diện tích hình thứ hai: $S_2 = d_2 r_2 = 21 \cdot 15 = 315cm^2$

$$S_1 = \frac{4}{5} S_2 = \frac{4}{5} \cdot 315 = 252cm^2$$

Diện tích hình thứ nhất :

$$S_3 = \frac{8}{7} S_2 = \frac{8}{7} \cdot 315 = 360cm^2$$

Diện tích hình thứ ba :

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>