

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUYỆN PHÚ CHƯ

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC : 2018-2019
MÔN TOÁN LỚP 8
Thi ngày 04 tháng 4 năm 2018

ĐỀ CHÍNH THỨC

Bài 1. (4,0 điểm)

1) Phân tích đa thức thành nhân tử:

a) $x^3 - x^2 - 14x + 24$

b) $x^4 + 2018x^2 + 2017x + 2018$

2) Cho $x + y = 1$ và $xy \neq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{y^3 - 1} - \frac{y}{x^3 - 1} + \frac{2(x - y)}{x^2y^2 + 3} = 0$$

Bài 2. (3,0 điểm)

a) Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $y^2 + 2xy - 3x - 2 = 0$

b) Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $2x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{y^2}{4} = 4$ sao cho tích $x \cdot y$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 3. (3,0 điểm)

a) Tìm đa thức $f(x)$, biết $f(x)$ chia cho $x + 2$ dư 10, chia cho $x - 2$ dư 24, chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư

b) Cho p và $2p + 1$ là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $4p + 1$ là hợp số

Bài 4. (8,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) có AD là tia phân giác của $\angle BAC$. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của D trên AB và AC , E là giao điểm của BN và DM , F là giao điểm của CM và DN .

1) Chứng minh tứ giác $AMDN$ là hình vuông và $EF \parallel BC$.

2) Gọi H là giao điểm của BN và CM . Chứng minh $\triangle ANB$ đồng dạng với $\triangle NFA$ và H là trực tâm $\triangle AEF$

3) Gọi giao điểm của AH và DM là K, giao điểm của AH và BC là O, giao điểm

$$\text{của } BK \text{ và } AD \text{ là } I. \text{ Chứng minh: } \frac{BI}{KI} + \frac{AO}{KO} + \frac{DM}{KM} > 9$$

Bài 5. (2,0 điểm)

a) Cho $x > 0, y > 0$ và m, n là hai số thực. Chứng minh rằng $\frac{m^2}{x} + \frac{n^2}{y} \geq \frac{(m+n)^2}{x+y}$

b) Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $abc = 1$

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

1)

$$a) x^3 - x^2 - 14x + 24$$

$$= x^3 - 2x^2 + x^2 - 2x - 12x + 24$$

$$= x^2(x - 2) + x(x - 2) - 12(x - 2)$$

$$= (x^2 + x - 12)(x - 2)$$

$$= (x - 2)(x - 3)(x + 4)$$

$$b) x^4 + 2018x^2 + 2017x + 2018$$

$$= x^4 + 2017x^2 + x^2 + 2017x + 2017 + 1$$

$$= (x^4 + x^2 + 1) + 2017(x^2 + x + 1)$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) + 2017(x^2 + x + 1)$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2018)$$

2) Với $x + y = 1$ và $xy \neq 0$ ta có:

$$\frac{x}{y^3 - 1} - \frac{y}{x^3 - 1} = \frac{x^4 - x - y^4 + y}{(y^3 - 1)(x^3 - 1)}$$

$$= \frac{(x^4 - y^4) - (x - y)}{xy(x^2 + x + 1)(y^2 + y + 1)}$$

$$= \frac{(x - y)[(x + y)(x^2 + y^2) - 1]}{xy(x^2y^2 + xy(x + y) + x^2 + y^2 + xy + 2)}$$

$$= \frac{(x - y)(x^2 - x + y^2 - y)}{xy(x^2y^2 + (x + y)^2 + 2)}$$

$$= \frac{(x - y)[x(x - 1) + y(y - 1)]}{xy(x^2 + y^2 + 3)} = \frac{-2(x - y)}{x^2y^2 + 3}$$

$$\text{Vậy } \frac{x}{y^3 - 1} - \frac{y}{x^3 - 1} + \frac{2(x - y)}{x^2 y^2 + 3} = 0$$

Bài 2.

a)

$$y^2 + 2xy - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + 3x + 2$$

$$\Leftrightarrow (x + y) = (x + 1)(x + 2) (*)$$

VT (*) là số chính phương, VP (*) là tích hai số nguyên liên tiếp nên phải có 1 số bằng 0

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\text{Với } x = -1 \Rightarrow y = 1$$

$$\text{Với } x = -2 \Rightarrow y = 2$$

b)

Điều kiện $x \neq 0$

$$2x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{y^2}{4} = 4 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \right) + \left(x^2 + \frac{y^2}{4} - xy \right) + xy = 2$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 + \left(x - \frac{y}{2} \right)^2 + xy = 2$$

$$\text{Vì } \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 \geq 0; \left(x - \frac{y}{2} \right)^2 \geq 0 \quad \text{với mọi } x \neq 0; \text{ mọi } y$$

Do đó $xy \leq 2$ mà $x, y \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} x = 1; y = 2 \\ x = 2; y = 1 \\ x = -1; y = -2 \\ x = -2; y = -1 \end{cases}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

Bài 3.

a)

Giả sử $f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và dư $ax + b$

$$\text{Khi đó } f(x) = (x^2 - 4)(-5x) + ax + b$$

$$\begin{cases} f(2)=24 \\ f(-2)=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=24 \\ -2a+b=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{7}{2} \\ b=17 \end{cases}$$

Theo đề ta có:

Do đó $f(x) = (x^2 - 4)(-5x) + \frac{7}{2}x + 17$

Vậy $f(x) = -5x^2 + \frac{47}{2}x + 17$

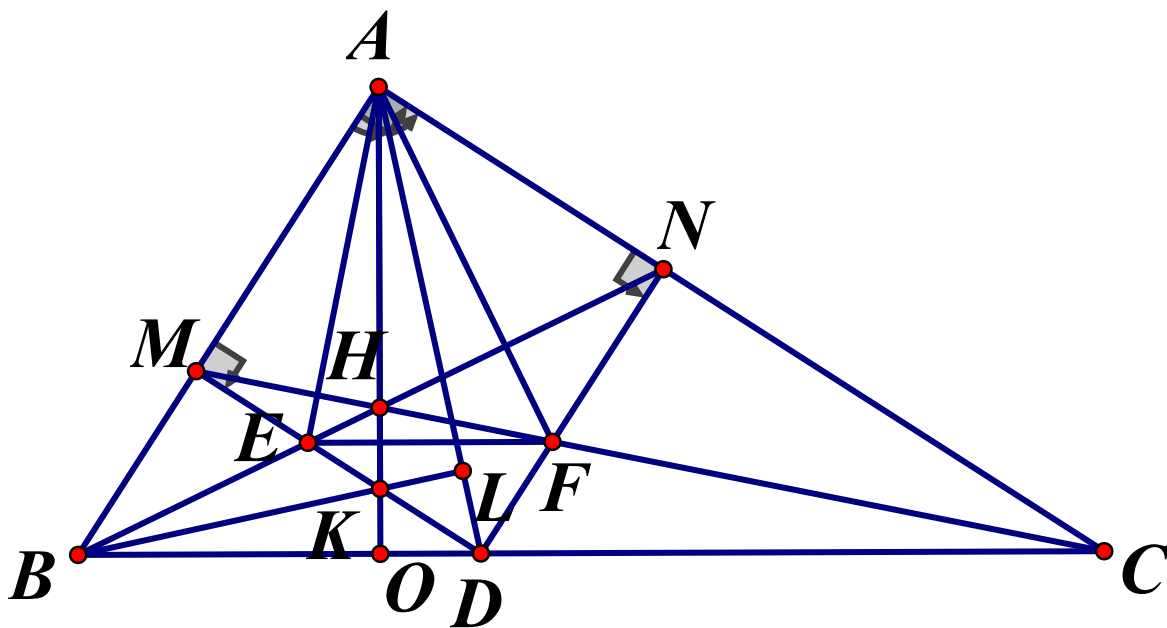
b) Do p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên có dạng $p = 3k + 1; p = 3k - 1$ với $k > 1$
 + Nếu $p = 3k + 1$ thì $2p + 1 = 6k + 3 = 3(2k + 1)$

Suy ra $2p + 1$ là hợp số (vô lý)

+ Nếu $p = 3k - 1, k > 1$ thì $4p + 1 = 12k - 3 = 3(4k - 1)$

Do $k > 1$ nên $4k - 1 > 3$. Do đó $4p + 1$ là hợp số.

Bài 4.



1) ***Chứng minh tứ giác AMDN là hình vuông**

+) Chứng minh $\angle AMD = 90^\circ; \angle AND = 90^\circ; \angle MAN = 90^\circ$

Suy ra tứ giác $AMDN$ là hình chữ nhật

+) Hình chữ nhật $AMDN$ có AD là phân giác của $\angle MAN$ nên tứ giác $AMDN$ là hình vuông.

***Chứng minh $EF \parallel BC$**

+) Chứng minh : $\frac{FM}{FC} = \frac{DB}{DC}$ (1)

Chứng minh: $\frac{DB}{DC} = \frac{MB}{MA}$ (2)

Chứng minh $AM = DN \Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{MB}{DN}$ (3)

Chứng minh $\frac{MB}{DN} = \frac{EM}{ED}$ (4)

Từ (1),(2),(3),(4) suy ra $\frac{EM}{ED} = \frac{FM}{FC} \Rightarrow EF \parallel BC$

2) Chứng minh $\triangle ANB \sim \triangle NFA$

Chứng minh $AN = DN$. suy ra $\frac{AN}{AB} = \frac{DN}{AB}$ (5)

Chứng minh $\frac{DN}{AB} = \frac{CN}{CA}$ (6)

Chứng minh $\frac{CN}{CA} = \frac{FN}{AM}$ (7)

Chứng minh $AM = AN$. Suy ra $\frac{FN}{AM} = \frac{FN}{AN}$ (8)

Từ (5) (6) (7) (8) suy ra $\frac{AN}{AB} = \frac{FN}{AN} \Rightarrow \triangle ANB \sim \triangle NFA (c.g.c)$

***chứng minh H là trực tâm tam giác AEF**

Vì $\triangle ANB \sim \triangle NFA$ nên $\angle NBA = \angle PAN$

Mà $\angle BAF + \angle PAN = 90^\circ \Rightarrow \angle NBA + \angle BAF = 90^\circ$

Suy ra $EH \perp AF$, Tương tự: $FH \perp AE$, suy ra H là trực tâm $\triangle AEF$

3) Đặt $S_{AKD} = a, S_{BKD} = b, S_{AKB} = c$. Khi đó:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{AKD}} + \frac{S_{ABD}}{S_{BKD}} + \frac{S_{ABD}}{S_{AKB}} = \frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c}$$

$$= 3 + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right)$$

Theo định lý AM-GM ta có: $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$

Tương tự : $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2$; $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2$

Suy ra $\frac{BI}{KI} + \frac{AO}{KO} + \frac{DM}{KM} \geq 9$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi ΔABD là tam giác đều, suy ra trái với giả thiết.

Bài 5.

5a) Với $x > 0, y > 0$ và $m, n \in \mathbb{R}$ ta có:

$$\frac{m^2}{x} + \frac{n^2}{y} \geq \frac{(m+n)^2}{x+y} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (m^2y + n^2x)(x+y) \geq xy(m+n)^2$$

$$\Leftrightarrow (nx - my)^2 \geq 0 \text{ luôn đúng}$$

5b) Áp dụng bất đẳng thức ⁽¹⁾ ta có:

$$\frac{m^2}{x} + \frac{n^2}{y} + \frac{p^2}{z} \geq \frac{(m+n)^2}{x+y} + \frac{p^2}{z} \geq \frac{(m+n+p)^2}{x+y+z} \quad (2)$$

Ta có: $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}$

Áp dụng bất đẳng thức (2) ta có:

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ac)} = \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} \quad (\text{do } abc=1)$$

Hay $\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$

Mà $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3$ nên $\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{3}{2}$

Do đó: $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$