**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI TUYỂN SINH 10 THPT**

 **TĨNH PHÚ YÊN NĂM HỌC 2023-2024**

 **Môn thi: TOÁN (chuyên)**

Thời gian làm bài: 150 phút( không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

**Câu 1***. (4.00 điểm)*

1. Cho biểu thức A=$\left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x }+1}+\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right):\frac{ \sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ 

 Rút gọn biểu thức A; tính giá trị của A, biết $x=\frac{6+2\sqrt{5}}{2+\sqrt{6+2\sqrt{5}}}+\frac{6-2\sqrt{5}}{2-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$

1. Cho biết $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}= \sqrt{2}$ (a>1,b>1). Chứng minh rằng $ab-\sqrt{1-a^{2}b^{2}+a^{2}+b^{2}}=$1

**Câu 2.** (6,00 điểm) Giải các phương trình, hệ phương trình sau:

 a)$\left(x-\sqrt{3}\right)^{3}+\left(x+\sqrt{5}\right)^{3}$+$\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}-2x\right)^{3}$=0

 b)$\left\{\begin{array}{c}\left(xy\right)^{3}+\left(x+\sqrt{5}\right)^{3}+\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}-2x\right)^{3}=0\\3xy^{3}=y^{2}+2\end{array}\right.$

**Câu 3**. (*3,00 điểm*) Cho đoạn thẳng AB, với M là trung điểm. Trên đường trung trực Mt của đoạn thẳng AB lấy điểm I bất kì. Vẽ tia A$x$ sao cho AI là phân giác góc BA$x$. Đường thẳng BI cắt A$x$ tại N. Gọi C là điểm đối xứng của A qua N,H là hình chiếu vuông góc của C lên AB.

1. Chứng minh rằng tam giác NHB cân
2. Chứng minh đẳng thức: B$H^{2}$= HI.BN
3. Khi điểm I di chuyển trên đường trung trực Mt đến vị trí làm cho tam giác ABC vuông tại C, hãy tính tỉ số $\frac{AB}{AC}$

**Câu 4**. (1,00 điểm) Cho phương trình $ax^{2}+bx+c=0 \left(a\ne 0\right),$ với a,b,c là số thực thỏa

 $2a-b+c=0.$ Chứng minh rằng phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt và 2 nghiệm không thể đều dương.

 **Câu 5**. (3,00 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi D là trung điểm của AB, H là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng DC. Đường thẳng qua C vuông góc với BC cắt đường thẳng AB tại E. Gọi I là hình chiếu vuông góc của E lên đường thẳng DC.

1. Chứng minh BH vuông góc với AI.
2. Đường thẳng qua B vuông góc với BH cắt đường thẳng DC tại K. Chứng minh tứ giác BCEK nội tiếp.

**Câu 6. (3,00 điểm**) Cho $x\geq 1,0<y\leq 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}\geq \frac{x}{x^{2}+y}+\frac{y}{y^{2}+x}$$

--------**Hết**-------

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:....................; Số báo danh:

Chữ kí giám thị 1:........; Chữ kí giảm thị 2:........

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI TUYỂN SINH 10 THPT**

 **TĨNH PHÚ YÊN NĂM HỌC 2023-2024**

 **Môn thi: TOÁN (chuyên)**

Thời gian làm bài: 150 phút( không kể thời gian giao đề)

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

**HƯỚNG DẪN CHẤM THI**

(Gồm có 04 trang)

1. **Hướng dẫn chung**
* Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án mà vẫn đúng thì cho đủ điểm từng phần như hướng dẫn quy định.
* Việc chi tiết hóa thang điểm (nếu có) so với thang điểm chấm phải bảo dảm không sai lệch với hướng dẫn chấm và được thống nhất thực hiện trong Hội đồng chấm thi.
* Điểm bài thi không làm tròn số.
1. **Đáp án và thang điểm**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **CÂU****1** | **ĐÁP ÁN** | **ĐIỂM** |
|  | **4,00 đ** |
| 1. **Rút gọn, tính giá trị** A=$\left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x }+1}+\frac{1}{1-\sqrt{x}}\right):\frac{ \sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

Biết $x=\frac{6+2\sqrt{5}}{2+\sqrt{6+2\sqrt{5}}}+\frac{6-2\sqrt{5}}{2-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$. | **2,50 đ** |
| **-**Rútgọn $A$: Với điều kiện $x\geq 0,x\ne 1$, ta có:$A=\frac{x+2+\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)-(x+\sqrt{x}+1)}{x\sqrt{x}-1}:\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}=\frac{(\sqrt{x}-1)^{2}}{x\sqrt{x}-1}×\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}$. | **1.00đ** |
| -Lại có: $x=\frac{6+2\sqrt{5}}{2+\sqrt{6+2\sqrt{5}}}+\frac{6-2\sqrt{5}}{2-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}=\frac{6+2\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}+1}+\frac{6-2\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}+1}=\frac{16}{4}=4$. | **1,00 đ** |
| Do đó: $A=\frac{\sqrt{4}+1}{4+\sqrt{4}+1}=\frac{3}{7}$ | **0,50** đ |
| 1. Biết $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\sqrt{2}$(a>1,b>1).CMR:ab-$\sqrt{1-a^{2}b^{2}+a^{2}+b^{2}}=1$
 | **1,50 đ** |
| Vì $a>1,b>1$ nên: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\sqrt{2}⇔a^{2}+b^{2}=2a^{2}b^{2}-2ab$ . | **0,50 đ** |
| Khi đó: $B=ab-\sqrt{1-a^{2}b^{2}+2a^{2}b^{2}-2ab}=ab-\sqrt{(ab-1)^{2}}$. | **0,50 đ** |
| Vì $a>1,b>1⇒ab>nên B=ab-ab+1=1$ (điều phải chứng minh) | **0,50 đ** |
| 2 | Giải các phương trình, hệ phương trình | **6,00 đ** |
|  | $a)\left(x-\sqrt{3}\right)^{3}+\left(x+\sqrt{5}\right)^{3}$+$\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}-2x\right)^{3}$=0 | **3,00 đ** |
| Đặt $u=x-\sqrt{3}, v=x+\sqrt{5}$, khi đó $\sqrt{3}-\sqrt{5}-2x=-(u+v)$ | **1,00 đ** |
| PTCĐ viết lại là:$u^{3}+v^{3}-\left(u+v\right)^{3}=0⟺3\left(u+v\right)uv=0⟺\left[\begin{array}{c}u+v=0\\u=0\\v=0\end{array}\right.$ | **1,00 đ** |
| (1):$u+v=0⟹x-\sqrt{3}+x+\sqrt{5}=0⟺x=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2}$(2):u=0 $⟹x=\sqrt{3}$; (3):$v=0⟹x=-\sqrt{5}$Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S=\left\{\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2};\sqrt{3};\sqrt{5}\right.$} | **1,00đ** |
| Cách 2: Đặt $a=x-\sqrt{3}+x+\sqrt{5}$, c=$\sqrt{3}-\sqrt{5}-2x$. Khi đó:$a^{3}+b^{3}+c^{3}=3abc$( chứng minh). Từ đó ta có nghiệm như cách 1 |  |
| b)$\left\{\begin{array}{c}(xy)^{3}+3xy^{3}+2=6y^{2 }(1)\\3xy^{3}=y^{2}+2 (2)\end{array}\right.$ | **3,00đ** |
| Đặt$\left\{\begin{array}{c}u=xy\\v=y^{2}\end{array}\right.$ . Dễ thấy y$\ne 0.$ Từ(2) suy ra 3$xy=\frac{y^{2}+2}{y^{2}}>0,$ do đó ta luôn có u$>0,v>0(3)$ | **0,50đ** |
| Ta có hệ phương trình mới:$\left\{\begin{array}{c}u^{3}+3uv+2=6v (4)\\3uv=v+2 (5) \end{array}\right.$Thế (5) và (4) ta được:$v=\frac{u^{3}+4}{5}$ (6) | **0,50đ** |
| Thế (6) vào (5) ta được:$3u^{4}-u^{3}+12u-14=0⟺(u-1)(3u^{3}+2u^{2}$+$2u+14)=0$(7)Đối chiếu với điều kiện(3) thì 3$u^{3}+2u^{2}+2u+14>0$ nên(7) có nghiệm $u=1$ | **1,00 đ** |
| Với $u=1$, từ (6) suy ra $v=1$ hay $y^{2}=1⇔y=\pm 1⇒x=\pm 1 $.Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm: $\left(x;y\right)=\left(1;1\right)$ và $\left(x;y\right)=\left(-1;-1\right)$ | **1,00đ** |
| 3 |  | **3,00đ** |
|  | 1. Chứng minh $∆NHB$ cân
 |  | **1,00đ** |
| $∆AHC$ vuông tại $H$ có $HN$ là trung tuyến nên $NA=NC=NH$ nên $∆HNA$ cân tại N, suy ra $\hat{NHA}=\hat{NAH}, do đó \hat{NHA}=2\hat{IAB}=2\hat{IBH}=2\hat{NBH}$ (1). | **0,50 đ** |
| Theo tính chất góc ngoài của tam giác thì $\hat{NHA}=\hat{HNB}+\hat{HBN}$ (2).Từ (1) và (2) suy ra $\hat{HNB}=\hat{HBN}$ hay $∆NHB$ cân tại H | **0,50đ** |
|  | 1. Chứng minh $BH^{2}=HI.BN$
 | **1,00 đ** |
| Theo a) $∆NHB $cân tại H suy ra $HB=HN=\frac{1}{2}$AC (3) |  |
|  | Xét $∆NHI và ∆ BHI có$$$\left\{\begin{array}{c}IAN=IBH\\IA=IB\\AN=BH(=HN)\end{array}⟹∆ANI=∆BHI⟹IN=IH\right.$$Dẫn đến $∆NIH cân tại I⟹IHN⟹INH⟹∆NHB\~∆NIH$ (hai tam giác cân có góc ở đáy bằng nhau) | **0,50 đ** |
|  | $$⟹\frac{BH}{BN}=\frac{HI}{HN}⟹BH.BN=HI.BN⟺BH^{2}=HI.BN$$ | **0,25 đ** |
| 1. Tính tỉ số $\frac{AB}{AC}khi ∆ABC vuông$
 | **1,00 đ** |
|  | Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông và định lí Pytago ta có$$BC^{2}=BH.BA=AB^{2}-AC^{2}⟺AB^{2}-BH.BA-AC^{2}=0\left(4\right)$$Từ (3) và(4) ta có 2$AB^{2}-AB.AC-2AC^{2}=0$(5) | **0,50 đ** |
|  | Vì AC>0, chia 2 vế cho $AC^{2}$ ta được phương trình bậc 2 với $x=\frac{AB}{AC}$ là: $2x^{2}-x-2=0⟺\left[\genfrac{}{}{0pt}{}{x=\frac{1+\sqrt{17}}{4}}{x=\frac{1-\sqrt{17}}{4}}\right.$Do $\frac{1-\sqrt{17}}{4}<0 (loại)$ nên ta chọn $x=\frac{1+\sqrt{17}}{4}$, hay $\frac{AB}{AC}=\frac{1+\sqrt{17}}{4}$ |  |
| 4 |  |  |
|  | Ta có biểu thức:$∆=b^{2}-4ac=b^{2}-4a\left(b-2a\right)=\left(2a-b\right)^{2}+4a^{2}>0,∀a\ne 0$; do đó, phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt. |  |
|  | Giả sử 2 nghiệm đã cho là $x\_{1},x\_{2}$.Theo định lí Viét, ta có $\left\{\begin{array}{c}x\_{1}+x\_{2}=-\frac{b}{a}\\x\_{1}x\_{2}=\frac{c}{a}\end{array}\right.$Từ giả thiết $2a-b+c=0⇒\frac{b}{a}-\frac{c}{a}=2$, do đó$-\left(x\_{1}+x\_{2}\right)-x\_{1}x\_{2}=2⟺\left(x\_{1}+1\right)\left(x\_{2}+1\right)=-1$(\*). Nếu 2 nghiệm đều dương thì $\left(x\_{1}+1\right)\left(x\_{2}+1\right)>1$, mâu thuẫn với (\*).Vậy 2 nghiệm của phương trình không thể đều dương. |  |
| 5 |  | **3,00đ** |
|  | 1. Chứng minh $BH⊥AI$
 | **0,50đ** |
| Gọi $M$ là giao điểm của $EI$ và $AC$, ta có $M$ là trực tâm của tam giác $ECD⇒DM$//$BC$. |  | **0,50đ** |
| Tam giác ABC có$DA=DB, DM∥BC⇒MA=MC$.Tam giác $AHC$ có$MA=MC, MI∥AH⇒IH=IC$.Gọi $N$ là trung điểm của $AH$ ta có $IN∥AC⇒IN⊥AD$ | **0,50đ** |
| Tam giác $ADI có$$AH⊥DI, IN⊥AD$ do đó $N$ là trực tâm $⇒DN⊥AI⇒BH⊥AI$ | **0.50đ** |
| 1. Chứng minh tứ giác $BCEK$ nội tiếp
 | **1,50đ** |
| Từ $BH⊥AI ⇒IN∥AC⇒\hat{IAD}=\hat{KBD}$Xét $∆KBD và ∆IAD$ có:$$\hat{IAD}=\hat{KBD}, DA=DB, \hat{ADI}=\hat{BDK}⇒∆KBD v= ∆IAD$$$⇒DK=DI$ (1). | **0.50đ** |
| Vì $∆DAC \~ ∆DIE$ (g.g) $⇒\frac{DA}{DI}=\frac{DC}{DE}⇒DA.DE=DI.DC$(2). | **0.50đ** |
| Từ (1) và (2) kết hợp với $DA=DB$ suy ra $DA.DE=DK.DC$$⇒\frac{DK}{DE}=\frac{DB}{DC}⇒∆DEK \~ ∆DCB⇒\hat{DEK}=\hat{DCB}$dẫn đến $BCEK$ nội tiếp.  | **0.50đ** |
| 6 | Cho $x,y$ là hai số thực thỏa mãn: $x\geq 1,0<y\leq 1. $Chứng minh rằng: $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}\geq \frac{x}{x^{2}+y}+\frac{y}{y^{2}+x}$ | **3,00 đ** |
|  | Với giả thiết đã cho, ta sẽ chứng minh $\frac{1}{y+1}\geq \frac{x}{x^{2}+1}(1)$ và$\frac{1}{x+1}\geq \frac{y}{y^{2}+x}$(2) | **0,50 đ** |
| Ta có: (1)$⟺xy+x-x^{2}-y\leq 0⟺y\left(x-1\right)+x\left(1-x\right)\leq 0$$$⟺(x-1)(y-x)\leq 0(3)$$ | **0,50 đ** |
| (3) đúng vì $x\geq 1,0<y\leq 1$Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=1,0<y\leq 1$ | **0,50 đ** |
| Ta cũng có: (2)$⟺xy+y-y^{2}-x\leq 0⟺$y($x$-y)-($x$-y)$\leq 0$ $⟺(x-y)(y-1)\leq 0$(4) | **0,50 đ** |
| (4) đúng vì $x\geq 1,0<y\leq 1$Dấu bất đẳng thức xảy ra khi $x=y=1$ | **0,50 đ** |
|  | Cộng vế theo vế (1) và (2) ta được$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}\geq \frac{x}{x^{2}+y}+\frac{y}{y^{2}+x}$Dấu đẳng thức xảy ra khi $x=y=1$ | **0,50 đ** |