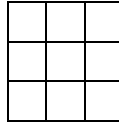


**Câu 1** (3,5 điểm) Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x + y - 3\sqrt{x+3} = 3\sqrt{y-5} & (1) \\ \sqrt{x^2 + 16(y-x)} + y = 2\sqrt{xy} & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

**Câu 2** (2,0 điểm) Đặt ngẫu nhiên hết các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 vào 9 ô vuông của lưới  $3 \times 3$  (hình vẽ lưới dưới đây) sao cho mỗi ô vuông chỉ được đặt đúng một số. Tính xác suất để tổng các số trên mỗi hàng là số lẻ và tổng các số trên mỗi cột cũng là số lẻ.



**Câu 3** (5,5 điểm)

**a.** (3,5đ) Cho hàm số  $y = x^5 - \frac{15}{4}m(m+2)x^4 + \frac{5}{2}(3m^2 + 6m - 1)x^2 + 5m$ . Tìm  $m$  để hàm số đồng biến trên  $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$

**b.** (2,0đ) Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  đồng thời thỏa mãn điều kiện  $f(0) > 0$  và  $[f(x) + 6x]f(x) = 9x^4 + 3x^2 + 4, \forall x \in \mathbb{R}$ . Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(2x^2 - 3x + 1)$  trên đoạn  $[0; 1]$ .

**Câu 4** (5 điểm) Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có tất cả các mặt là hình thoi cạnh  $a$ ,  $BAD = BAA' = A'AD = 60^\circ$ .

**a.** (3đ) Tính thể tích khối hộp  $ABCD.A'B'C'D'$

**b.** (2đ) Gọi  $I, J, G$  lần lượt là trung điểm  $A'D, AB, IJ$ . Mặt phẳng  $(P)$  đi qua  $G$  cắt các cạnh  $A'A, A'B, A'D$  lần lượt tại  $A_1, B_1, D_1$  ( $A \notin (P), B \notin (P), D \notin (P)$ ). Gọi  $V_{A.A_1B_1D_1}, V_{B.A_1B_1D_1}, V_{D.A_1B_1D_1}$  lần lượt là thể tích các khối chóp  $A.A_1B_1D_1, B.A_1B_1D_1, D.A_1B_1D_1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $T = V_{A.A_1B_1D_1} + V_{B.A_1B_1D_1} + V_{D.A_1B_1D_1}$  theo  $a$

**Câu 5** (4 điểm)

**a.** (2đ) Cho tứ diện đều  $ABCD$  có cạnh bằng 1. Gọi  $M, N$  là hai điểm thay đổi lần lượt thuộc các cạnh  $AB, AC$  sao cho mặt phẳng  $(DMN)$  luôn vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$ . Đặt  $AM = x, AN = y$ . Tìm  $x, y$  để tam giác  $DMN$  có diện tích nhỏ nhất, lớn nhất.

**b.** (2đ) Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $(a+c)(b+c) = 4c^2$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{32a^3}{(b+3c)^3} + \frac{32b^3}{(a+3c)^3} + (a+b-3c) \cdot \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}.$$

## ĐÁP ÁN

**Câu 1.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x + y - 3\sqrt{x+3} = 3\sqrt{y-5} & (1) \\ \sqrt{x^2 + 16(y-x)} + y = 2\sqrt{xy} & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

**Lời giải.** Điều kiện 
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 5 \\ x^2 + 16(y-x) \geq 0 \end{cases}$$

Từ phương trình (1) ta có  $y - 5 - 3\sqrt{y-5} + x - 3\sqrt{x+3} + 5 = 0$

Đặt  $t = \sqrt{y-5} \geq 0$

Khi đó ta có  $t^2 - 3t + x - 3\sqrt{x+3} + 5 = 0$

$$\Delta_t = 9 - 4(x + 5 - 3\sqrt{x+3}) \geq 0 \Leftrightarrow 4(x+3) - 12\sqrt{x+3} - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x+3} \leq \frac{6+2\sqrt{10}}{4} \Rightarrow x < 16$$

Mặt khác từ (2) ta có

$$\sqrt{x^2 + 16(y-x)} - \sqrt{xy} - \sqrt{xy} + y = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y) \left( \frac{x-16}{\sqrt{x^2 + 16(y-x)} + \sqrt{xy}} \right) - (x-y) \frac{y}{y + \sqrt{xy}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y) \left( \frac{x-16}{\sqrt{x^2 + 16(y-x)} + \sqrt{xy}} - \frac{y}{y + \sqrt{xy}} \right) = 0$$

$$\text{Do } 0 \leq x < 16; y \geq 5 \Rightarrow \frac{x-16}{\sqrt{x^2 + 16(y-x)} + \sqrt{xy}} - \frac{y}{y + \sqrt{xy}} < 0$$

$$\text{Với } x = y \Rightarrow 2x = 3(\sqrt{x+3} + \sqrt{x-5})$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 9x + 9 = 9\sqrt{x^2 - 2x - 15}$$

$$\Rightarrow x^4 - 9x^3 + 9x^2 + 324 = 0$$

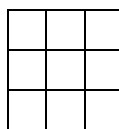
$$\Rightarrow (x-6)^2(x^2 + 3x + 9) = 0$$

$$\Rightarrow x = 6$$

Thử lại thỏa mãn

Vậy nghiệm của hệ đã cho là  $(x; y) = (6; 6)$ .

**Câu 2.** Đặt ngẫu nhiên hết các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 vào 9 ô vuông của lưới  $3 \times 3$  (hình vẽ lưới dưới đây) sao cho mỗi ô vuông chỉ được đặt đúng một số. Tính xác suất để tổng các số trên mỗi hàng là số lẻ và tổng các số trên mỗi cột cũng là số lẻ.



**Lời giải**

Vì tổng các số trên mỗi hàng và tổng các số trên mỗi cột đều là các số lẻ nên trên mỗi hàng và trên mỗi cột đều có ba số lẻ hoặc hai số chẵn và một số lẻ.

Vì chỉ có 5 số lẻ: 1; 3; 5; 7; 9 và có 4 số chẵn: 2; 4; 6; 8 nên có đúng một hàng được đặt toàn số lẻ và hai hàng còn lại thì mỗi hàng có hai số chẵn và một số lẻ; có đúng một cột được đặt toàn số lẻ và hai cột còn lại thì mỗi cột có hai số chẵn và một số lẻ;

Chọn một hàng có 3 cách.

Chọn 3 số lẻ trong 5 số lẻ: 1;3;5;7;9 rồi sắp xếp vào 3 ô vuông của hàng vừa chọn có  $A_5^3$  cách.

|      |    |      |
|------|----|------|
| lẻ   | lẻ | lẻ   |
| chẵn | lẻ | chẵn |
| chẵn | lẻ | chẵn |

Chọn một cột có 3 cách.

Có 3 ô vuông trong cột vừa chọn gồm một ô vuông đã được đặt số lẻ và hai ô vuông trống. Sắp xếp 2 số lẻ còn lại vào 2 ô vuông trống đó có  $2!$  cách.

Sắp xếp 4 số chẵn: 2;4;6;8 vào 4 ô vuông trống còn lại có  $4!$  cách.

Vậy có  $3.A_5^3.3.2!.4!$  cách đặt các số đã cho để tổng các số trên mỗi hàng là số lẻ và tổng các số trên mỗi cột cũng là số lẻ.

Trong khi đặt ngẫu nhiên hết các số 1,2,3,4,5,6,7,8,9 vào 9 ô vuông có  $9!$  cách nên:

Xác suất để tổng các số trên mỗi hàng là số lẻ và tổng các số trên mỗi cột cũng là số lẻ là:

$$\frac{3.A_5^3.3.2!.4!}{9!} = \frac{1}{14}.$$

**Câu 3a.** Cho hàm số  $y = x^5 - \frac{15}{4}m(m+2)x^4 + \frac{5}{2}(3m^2 + 6m - 1)x^2 + 5m$ . Tìm  $m$  để hàm số đồng biến trên  $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$

### Lời giải

Ta có:

$$y' = 5x^4 - 15m(m+2)x^3 + 5(3m^2 + 6m - 1)x$$

$$y' = 5x \left[ x^3 - 3m(m+2)x^2 + 3m^2 + 6m - 1 \right]$$

$$y' = 5x(x-1)(x^2 + x + 1 - 3m^2 - 6m).$$

Hàm số đồng biến trên  $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$  khi và chỉ khi  $y' \geq 0$  với mọi  $x \in \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$  và  $y' = 0$  tại hữu hạn điểm.

$$*\forall x \in \left[\frac{3}{2}; +\infty\right) \text{ nên } y' \geq 0, \forall x \in \left[\frac{3}{2}; +\infty\right) \Rightarrow x^2 + x + 1 \geq 3m^2 + 6m, \forall x \in \left[\frac{3}{2}; +\infty\right) \quad (1)$$

\* Xét hàm số  $y = x^2 + x + 1$  trên  $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$

Ta thấy  $\text{Min}_y = \frac{19}{4}$  tại  $x = \frac{3}{2}$ .

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow \frac{19}{4} \geq 3m^2 + 6m \Leftrightarrow m \in \left[ \frac{-12 - \sqrt{372}}{12}; \frac{-12 + \sqrt{372}}{12} \right].$$

\* Với  $m = \frac{-12 - \sqrt{372}}{12}; m = \frac{-12 + \sqrt{372}}{12}$ , thay vào  $y' = 0$  ta thấy phương trình có hữu hạn nghiệm.

Vậy hàm số đồng biến trên  $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$  khi  $m \in \left[ \frac{-12 - \sqrt{372}}{12}; \frac{-12 + \sqrt{372}}{12} \right]$ .

**Câu 3b.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  đồng thời thỏa mãn điều kiện  $f(0) > 0$  và  $[f(x) + 6x]f(x) = 9x^4 + 3x^2 + 4, \forall x \in \mathbb{R}$ . Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(2x^2 - 3x + 1)$  trên đoạn  $[0; 1]$ .

### Lời giải

$$\text{Ta có: } [f(x) + 6x]f(x) = 9x^4 + 3x^2 + 4$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) + 6x.f(x) + 9x^2 = 9x^4 + 12x^2 + 4$$

$$\Leftrightarrow [f(x) + 3x]^2 = (3x^2 + 2)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 3x^2 - 3x + 2 \\ f(x) = -3x^2 - 3x - 2 \end{cases}. \text{ Vì } f(0) > 0 \text{ nên } f(x) = 3x^2 - 3x + 2.$$

Xét hàm số  $y = f(2x^2 - 3x + 1)$ .

$$\text{Đặt } 2x^2 - 3x + 1 = t, \text{ với } x \in [0; 1] \Rightarrow t \in \left[-\frac{1}{8}; 1\right].$$

Bài toán trở thành: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $f(t) = 3t^2 - 3t + 2$  trên  $\left[-\frac{1}{8}; 1\right]$ .

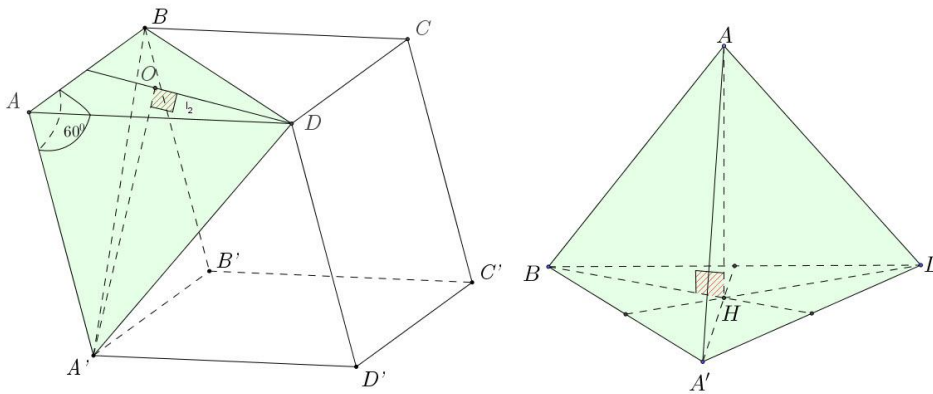
$$\text{Xét } f'(t) = 6t - 3, \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} f\left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{155}{64} \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4} \\ f(1) = 2 \end{cases} \quad \text{Vậy } \max_{[0;1]} f(2x^2 - 3x + 1) = \frac{155}{64}.$$

**Câu 4.** Cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có tất cả các mặt là hình thoi cạnh  $a$ ,  $BAD = BAA' = A'AD = 60^\circ$ .

- a) Tính thể tích khối hộp  $ABCD.A'B'C'D'$   
b) Gọi  $I, J, G$  lần lượt là trung điểm  $A'D, AB, IJ$ . Mặt phẳng  $(P)$  đi qua  $G$  cắt các cạnh  $A'A, A'B, A'D$  lần lượt tại  $A_1, B_1, D_1$  ( $A \notin (P), B \notin (P), D \notin (P)$ ). Gọi  $V_{A.A_1B_1D_1}, V_{B.A_1B_1D_1}, V_{D.A_1B_1D_1}$  lần lượt là thể tích các khối chóp  $A.A_1B_1D_1, B.A_1B_1D_1, D.A_1B_1D_1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $T = V_{A.A_1B_1D_1} + V_{B.A_1B_1D_1} + V_{D.A_1B_1D_1}$  theo  $a$

**Lời Giải**



a. Các tam giác  $ABD, AA'D, AA'B$  là các tam giác đều suy ra  $A'B = BD = A'D = a$ . Do đó tứ diện  $AA'BD$  là tứ diện đều có cạnh bằng  $a$ .

Gọi  $H$  là trọng tâm tam giác  $A'BD$ . Ta có  $BH = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ . Tam giác  $ABH$  vuông tại

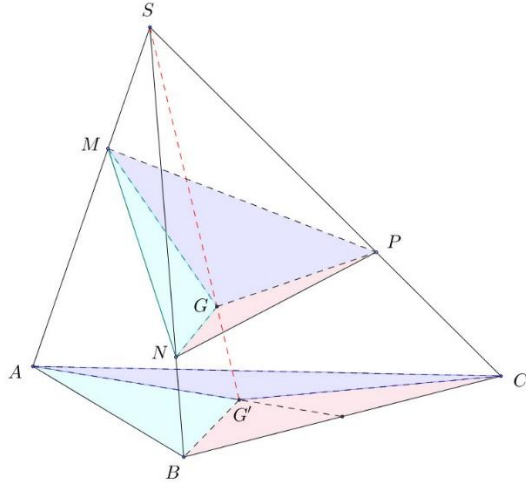
$$H \text{ nên } AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; S_{A'BD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Vậy } V_{A.A'BD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

$$\text{Suy ra } V_{ABCD.A'B'C'D'} = 6 \cdot V_{A.A'BD} = 6 \cdot \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}.$$

b. **Bổ đề:** Cho tứ diện  $SABC$  có  $SA = SB = SC = 1$ . Một mặt phẳng  $(P)$  thay đổi qua trọng tâm  $G$  của tứ diện lần lượt cắt  $SA, SB, SC$  tại  $M, N, P$ . CMR:  $\frac{1}{SM} + \frac{1}{SN} + \frac{1}{SP} = 4$ .

**Chứng minh:**



Gọi  $G'$  là trọng tâm  $\triangle ABC$ . Theo tính chất trọng tâm của tứ diện ta có  $S, G, G'$  thẳng hàng và  $\frac{SG}{SG'} = \frac{3}{4}$ .

Thêm nữa  $V_{SABGG'} = V_{SBCG'} = V_{SG'CA} = \frac{1}{3}V_{SABC}$ .

Ta có:

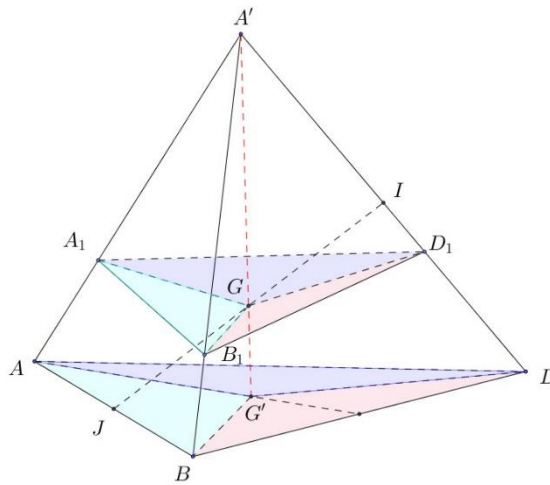
$$\frac{V_{SMNG}}{V_{SABG'}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SG}{SG'} \Leftrightarrow \frac{3V_{SMNG}}{V_{SABC}} = \frac{3SM \cdot SN}{4} \Leftrightarrow \frac{V_{SMNG}}{V_{SABC}} = \frac{SM \cdot SN}{4} \quad (1) \quad (\text{Lưu ý } SA = SB = 1).$$

Lập luận tương tự thu được  $\frac{V_{SNPG}}{V_{SABC}} = \frac{SN \cdot SP}{4} \quad (2)$  và  $\frac{V_{SGPM}}{V_{SG'CA}} = \frac{SP \cdot SM}{4} \quad (3)$ .

Cộng theo vế các đẳng thức (1), (2), (3) ta được

$$\begin{aligned} \frac{V_{SMNP}}{V_{SABC}} &= \frac{SM \cdot SN + SN \cdot SP + SP \cdot SM}{4} \Leftrightarrow \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC} = \frac{SM \cdot SN + SN \cdot SP + SP \cdot SM}{4} \\ &\Leftrightarrow 4 \cdot SM \cdot SN \cdot SP = SM \cdot SN + SN \cdot SP + SP \cdot SM \Leftrightarrow \frac{1}{SM} + \frac{1}{SN} + \frac{1}{SP} = 4. \end{aligned}$$

Quay lại bài toán đã cho:



$G$  là trung điểm đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh đối của tứ diện  $A'ABD$  nên  $G$  là trọng tâm tứ diện. Coi  $a$  là một đơn vị dài. Áp dụng bổ đề trên cho tứ diện  $A'ABD$  với  $G$  là trọng tâm tứ diện và  $A_1, B_1, D_1$

lần lượt là giao điểm của mặt phẳng  $(P)$  qua  $G$  với các cạnh  $A'A, A'B, A'D$ . Ta có:

$$\frac{1}{A'A_1} + \frac{1}{A'B_1} + \frac{1}{A'D_1} = 4.$$

Đặt  $A'A_1 = x; A'B_1 = y; A'D_1 = z (0 < x, y, z < 1)$  ta được  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$ .

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có  $4 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}} \Leftrightarrow \frac{27}{xyz} \leq 64 \Leftrightarrow xyz \geq \frac{27}{64}$ .

Dấu bằng xảy ra khi  $x = y = z = \frac{3}{4}$  (mặt phẳng  $(P)$  song song với  $(ABD)$ ).

Mặt khác

$$\frac{V_{AA_1B_1D_1}}{V_{A'A_1B_1D_1}} = \frac{AA_1}{A'A_1} = \frac{1-x}{x}; \frac{V_{BA_1B_1D_1}}{V_{A'A_1B_1D_1}} = \frac{BB_1}{A'B_1} = \frac{1-y}{y}; \frac{V_{DA_1B_1D_1}}{V_{A'A_1B_1D_1}} = \frac{DD_1}{A'D_1} = \frac{1-z}{z} \text{ và}$$

$$\frac{V_{A'A_1B_1D_1}}{V_{A'ABD}} = \frac{A'A_1}{A'A} \cdot \frac{A'B_1}{A'B} \cdot \frac{A'D_1}{A'D} = xyz \Leftrightarrow V_{A'A_1B_1D_1} = xyz \cdot V_{A'ABD}$$

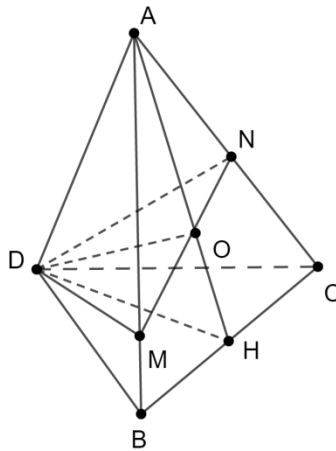
Suy ra

$$T = \left( \frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{y} - 1 + \frac{1}{z} - 1 \right) \cdot V_{A'A_1B_1D_1} = \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 3 \right) \cdot xyz \cdot V_{A'ABD} = xyz \cdot V_{A'ABD} \geq \frac{27}{64} V_{A'ABD}$$

Mà  $V_{A'ABD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} \Rightarrow T \geq \frac{27}{64} \cdot \frac{a^3\sqrt{2}}{12} \Rightarrow T_{\min} \geq \frac{9a^3\sqrt{2}}{256}$  đạt được khi mp  $(P)$  song song với mp  $(ABD)$ .

**Câu 5a.** Cho tứ diện đều  $ABCD$  có cạnh bằng 1. Gọi  $M, N$  là hai điểm thay đổi lần lượt thuộc các cạnh  $AB, AC$  sao cho mặt phẳng  $(DMN)$  luôn vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$ . Đặt  $AM = x, AN = y$ . Tìm  $x, y$  để tam giác  $DMN$  có diện tích nhỏ nhất, lớn nhất.

**Lời giải**



Gọi  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác đều  $ABC$ . Do  $ABCD$  là tứ diện đều nên  $DO \perp (ABC)$ . Theo đề bài, mặt phẳng  $(DMN) \perp (ABC)$  nên suy ra  $O \in MN$ .

Tam giác  $DMN$  có  $DO \perp MN$  nên  $S_{\triangle DMN} = \frac{1}{2} DO \cdot MN$ . Mà  $DO$  là hằng số nên  $S_{\triangle DMN}$  lớn nhất khi  $MN$  lớn nhất, nhỏ nhất khi  $MN$  nhỏ nhất.

Áp dụng định lí cosin trong tam giác  $AMN$  ta có  $MN^2 = x^2 + y^2 - xy = (x+y)^2 - 3xy$ .

Như vậy  $M, N$  thay đổi sao cho đoạn thẳng  $MN$  luôn đi qua  $O$ . Ta có  $0 < x, y \leq 1$ .

Ta có  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = y\overrightarrow{AC} - x\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AH} - x\overrightarrow{AB} = \left(\frac{1}{3} - x\right)\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ .

Vì  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{MO}$  cùng hướng nên  $\frac{\frac{1}{3}}{y} = \frac{\frac{1}{3} - x}{-x} > 0 \Leftrightarrow y\left(\frac{1}{3} - x\right) = -\frac{1}{3}x \Leftrightarrow 3xy = x + y$ .

Từ  $0 < x, y \leq 1$ , ta có  $x + y = 3xy \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 3 - \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{1}{x} \leq 2 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$

Ta có  $MN^2 = (x+y)^2 - (x+y)$ .

Đặt  $t = x + y$ . Ta có  $t = x + \frac{x}{3x-1}$  với  $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ ,  $t'(x) = \frac{3x(3x-2)}{(3x-1)^2}$ . Bảng biến thiên:

|      |               |               |               |
|------|---------------|---------------|---------------|
| $x$  | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | 1             |
| $t'$ | —             | 0             | +             |
| $t$  | $\frac{3}{2}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{3}{2}$ |

Quan sát bảng biến thiên, ta có  $\frac{4}{3} \leq t \leq \frac{3}{2}$ .

Ta có  $MN^2 = f(t) = t^2 - t$ . Khảo sát sự biến thiên của hàm  $f(t)$  trên đoạn  $\left[\frac{4}{3}; \frac{3}{2}\right]$  ta được

$$MN \text{ min} \Leftrightarrow t = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}, MN \text{ max} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{2} \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, y = \frac{1}{2} \\ y = 1, x = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

**Câu 5b.** Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $(a+c)(b+c) = 4c^2$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{32a^3}{(b+3c)^3} + \frac{32b^3}{(a+3c)^3} + (a+b-3c) \cdot \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}.$$

**Lời giải**

Bổ đề: Cho  $m, n$  là hai số thực dương khi đó ta có



$$a) \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} \geq \frac{8}{(m+n)^2}.$$

$$b) \frac{m^3 + n^3}{2} \geq \left( \frac{m+n}{2} \right)^3.$$

Thật vậy

$$a) \text{ Ta có } \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} \geq 2 \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n} = 2 \frac{1}{m \cdot n} \geq 2 \cdot \frac{4}{(m+n)^2} = \frac{8}{(m+n)^2}.$$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow m = n$ .

$$b) \frac{m^3 + n^3}{2} \geq \left( \frac{m+n}{2} \right)^3 \Leftrightarrow 4m^3 + 4n^3 \geq m^3 + 3m^2 \cdot n + 3m \cdot n^2 + n^3 \Leftrightarrow m^3 + n^3 - m^2 \cdot n - m \cdot n^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (m-n)^2 (m+n) \geq 0 \text{ (luôn đúng với } m, n \text{ là hai số thực dương)}.$$

$$\text{Vậy } \frac{m^3 + n^3}{2} \geq \left( \frac{m+n}{2} \right)^3 \quad \forall m, n > 0; \text{ Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow m = n.$$

Áp dụng vào bài toán.

$$\text{Ta có } (a+c)(b+c) = 4c^2 \Leftrightarrow \left( \frac{a}{c} + 1 \right) \left( \frac{b}{c} + 1 \right) = 4.$$

$$\text{Đặt } x = \frac{a}{c} > 0; y = \frac{b}{c} > 0. \text{ Từ giả thiết ta có } (x+1)(y+1) = 4.$$

$$P = \frac{32a^3}{(b+3c)^3} + \frac{32b^3}{(a+3c)^3} + (a+b-3c) \cdot \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} \geq \frac{32\left(\frac{a}{c}\right)^3}{\left(\frac{b}{c}+3\right)^3} + \frac{32\left(\frac{b}{c}\right)^3}{\left(\frac{a}{c}+3\right)^3} + (a+b-3c) \cdot \sqrt{\frac{8}{(a+b)^2}}$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{32\left(\frac{a}{c}\right)^3}{\left(\frac{b}{c}+3\right)^3} + \frac{32\left(\frac{b}{c}\right)^3}{\left(\frac{a}{c}+3\right)^3} + 2\sqrt{2} - \frac{6\sqrt{2}c}{a+b} = \frac{32\left(\frac{a}{c}\right)^3}{\left(\frac{b}{c}+3\right)^3} + \frac{32\left(\frac{b}{c}\right)^3}{\left(\frac{a}{c}+3\right)^3} + 2\sqrt{2} - \frac{6\sqrt{2}}{\frac{a}{c} + \frac{b}{c}}$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{32x^3}{(y+3)^3} + \frac{32y^3}{(x+3)^3} + 2\sqrt{2} - \frac{6\sqrt{2}}{x+y} = 32 \left[ \left( \frac{x}{y+3} \right)^3 + \left( \frac{y}{x+3} \right)^3 \right] + 2\sqrt{2} - \frac{6\sqrt{2}}{x+y}$$

$$\Rightarrow P \geq 8 \cdot \left( \frac{x}{y+3} + \frac{y}{x+3} \right)^3 + 2\sqrt{2} - \frac{6\sqrt{2}}{x+y}.$$

$$\text{Ta có } \frac{x}{y+3} + \frac{y}{x+3} = \frac{x^2 + 3x + y^2 + 3y}{(x+3)(y+3)} = \frac{(x+y)^2 + 3(x+y) - 2xy}{xy + 3(x+y) + 9}.$$

$$\text{Từ } (x+1)(y+1) = 4 \Leftrightarrow xy + x + y = 3 \Leftrightarrow xy = 3 - x - y.$$

$$\text{Ta có } 3 = xy + x + y \leq \frac{(x+y)^2}{4} + x + y \Leftrightarrow \frac{(x+y)^4}{4} + (x+y) - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x+y \geq 2 \text{ (vì } x+y > 0).$$

$$\text{Đặt } t = x+y \geq 2. \text{ Ta có } xy = 3-t.$$

Khi đó

$$P \geq 8 \cdot \left[ \frac{(x+y)^2 + 3(x+y) - 2xy}{xy + 3(x+y) + 9} \right]^3 + 2\sqrt{2} - \frac{6\sqrt{2}}{x+y} = 8 \cdot \left[ \frac{t^2 + 3t - 2(3-t)}{3-t + 3t + 9} \right]^3 + 2\sqrt{2} - \frac{6\sqrt{2}}{t}.$$

$$\Rightarrow P \geq 8 \cdot \left( \frac{t^2 + 5t - 6}{2t + 12} \right)^3 + 2\sqrt{2} - \frac{6\sqrt{2}}{t} = (t-1)^3 - \frac{6\sqrt{2}}{t} + 2\sqrt{2}.$$

Xét hàm  $f(t) = (t-1)^3 - \frac{6\sqrt{2}}{t} + 2\sqrt{2}$  trên  $[2; +\infty)$ .

Ta có

$$f'(t) = 3(t-1)^2 + \frac{6\sqrt{2}}{t^2} > 0 \quad \forall t \in [2; +\infty).$$

Vậy hàm số  $f(t) = (t-1)^3 - \frac{6\sqrt{2}}{t} + 2\sqrt{2}$  đồng biến trên  $[2; +\infty)$ .

Từ đó suy ra  $P \geq f(t) \geq f(2) = 1 - \sqrt{2}$ .

Vậy  $P_{\min} = 1 - \sqrt{2}$  xảy ra khi và chỉ khi  $x = y = 1 \Leftrightarrow a = b = c$ .