

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM
TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU

CHUYÊN ĐỀ TOÁN HỌC SỐ 8

Năm học 2004-2005

Lời ngỏ

Các bạn thân mến !

Sau những mong muốn và cố gắng , cuối cùng chúng tôi - tập thể học sinh lớp 12 Toán niên khóa 2002-2005 cùng các em lớp 11 - cũng đã có thể gửi đến các bạn quyển *Chuyên đề toán học số 8* này !

Tiếp nối truyền thống, Chuyên đề toán học số 8 ra đời như một kỷ vật mà mỗi thế hệ học sinh chuyên Toán nói chung và chúng tôi nói riêng muốn gửi gắm lại cho thầy cô, cho mái trường Năng Khiếu thân yêu của mình . Đó cũng là một lời tri ân dành tặng cho những người thầy đã dìu dắt chúng tôi trên con đường chông gai mà không kém phần tươi đẹp của Toán học .

Trong quá trình học toán, ắt hẳn ai trong chúng ta cũng có lúc vui mừng làm sao, sung sướng làm sao khi phát hiện ra một vấn đề nào đó lý thú, một lời giải đẹp hay một phương pháp mới ... Tại sao chúng ta không ghi lại những điều ấy ? Chuyên đề toán học ra đời với ý nghĩa trên, đó là những cốp nhặt, những suy nghĩ, tìm tòi của từng thành viên thu được trong suốt ba năm học. Chúng tôi hy vọng rằng quyển chuyên đề này sẽ đem đến một niềm vui nho nhỏ nào đấy cho các bạn !

Chào thân ái !

Ban biên tập !

Mục lục

1) Phương pháp tổng quát giải bất đẳng thức trong tam giác – Trần Minh Hoàng	1
2) Định lý Pick Vũ Đỗ Uyên Vy - Phạm Khang Hy	10
3) Phương pháp xây dựng dãy truy hồi & các bài toán giải tích tổ hợp – Lương Minh Thắng	14
4) Liên hệ định lý Ceva và định lý Carnot trong chứng minh đồng quy - Trần Tiến Hiếu	20
5) Phương pháp lượng giác trong chứng minh bất đẳng thức - Nguyễn Lữ Khoa	26
6) Các số lũy thừa mod p – Kha Tuấn Minh	31
7) Một vài dãy số đặc biệt Lê Đăng Khoa – Bùi Lê Trọng Thanh	37
8) Một số phương pháp giải các bài toán về dãy số nguyên - Lê Đăng Khoa – Bùi Lê Trọng Thanh	44
9) Phương pháp chính phương hóa trong chứng minh bất đẳng thức - Nguyễn Anh Cường	49
10) Phương pháp đại số(Phương pháp gien) - Thầy Trần Nam Dũng	57
11) Đề và lời giải kỳ thi chọn đội tuyển toán trường PTNK 2003-2004	62
12) Đề thi vùng Balkan 2004	68
13) Đề thi chọn đội tuyển toán Trung Quốc tham dự IMO 2004	69
14) Đề thi chọn đội tuyển toán Việt Nam tham dự IMO 2004	70
15) Đề thi APMO 2004	71
16) Đề thi USAMO 2004	72

PHƯƠNG PHÁP TỔNG QUÁT GIẢI CÁC BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC ĐỐI XỨNG TRONG TAM GIÁC

Trần Minh Hoàng – 12 Toán

I – Giới thiệu.

Bài viết này sẽ trình bày một phương pháp chung để tiếp cận các bất đẳng thức đối xứng trong Δ . Dựa vào nhận xét: một Δ sẽ được xác định hoàn toàn qua 3 yếu tố p, R, r (nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp), chúng ta đưa bất đẳng thức cần chứng minh về p, R, r rồi bằng các kỹ năng đại số chúng ta sẽ chứng minh dễ dàng hơn bất đẳng thức đó.

VD: Cho ΔABC có 3 cạnh a, b, c . CMR $3(\sum a^3) + 9abc \leq 2(\sum a)(\sum a^2)$. Chúng ta đưa bất đẳng thức trên về $p^2 + 5r^2 \geq 16Rr$ (1) (có lẽ (1) đã quen thuộc với nhiều bạn, nếu không, trong phần sau tôi sẽ trình bày cách chứng minh tổng quát cho các bất đẳng thức dạng (1)). Như vậy là ta đã giải xong ví dụ trên.

II – Các bước chứng minh của phương pháp p, R, r .

Chúng ta xem như “Mọi bất phương trình đại số đều có thể giải được” là 1 “tiên đề” để thực hiện phương pháp p, R, r .

- Bước 1: Biến đổi bất đẳng thức đã cho về dạng chỉ còn p, R, r . chúng ta lưu ý rằng mọi biểu thức đối xứng theo của ΔABC , đều có thể tính được theo p, R, r thì đều là biểu thức đối xứng của ΔABC .

Bài viết này chỉ xét các biểu thức đối xứng của ΔABC nên bước 1 dĩ nhiên thực hiện được.

- Bước 2: Sau khi thực hiện bước 1, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với 1 hệ thức $f(p, R, r) \geq 0$, bước 2 có nhiệm vụ đưa bất đẳng thức trên về dạng $p > / < g(R, r)$ (*). Điều này có thể thực hiện được do chúng ta đã chấp nhận “tiên đề” của phương pháp pRr .

- Bước 3: Từ điều kiện của ΔABC chúng ta tìm miền giá trị của p theo R, r . điều này tức là chúng ta tìm hệ thức $h(R, r) \leq p \leq k(R, r)$ (*) để mọi p thoả mãn (**) chúng ta đều lập được 1 $\Delta A'B'C'$ thoả mãn điều kiện ΔABC .

Đây chính là công đoạn khó khăn nhất của phương pháp và mọi bất đẳng thức của p, R, r thoả điều kiện của ΔABC đều là những hệ quả của (**). Tôi không thể chứng minh bước 3 luôn thực hiện được bởi có vô số điều kiện của ΔABC và tôi không thể nào kiểm tra hết được. Tuy nhiên trong các phần dưới đây tôi sẽ tìm miền giá trị cho một số Δ quen thuộc. Chính điều này đã làm tôi tự tin rằng bước 3 luôn có thể thực hiện được.

- Bước 4: Kiểm tra (*) có phải là hệ quả của (**) hay không. Việc kiểm tra này hoàn toàn có thể thực hiện được bởi ta có thể đưa về 1 biến $t = \frac{R}{r}$. Vì việc tìm điều kiện của t

chắc chắn làm được do điều kiện của p theo R, r còn thực hiện được thì không có lí do gì để không tin rằng điều kiện của R theo r lại không tìm được. Sau đây tôi sẽ chứng minh 1 số định lý để củng cố thêm niềm tin của các bạn vào phương pháp pRr .

III – Các định lý:

1) Định lý 1: Một Δ hoàn toàn xác định nếu biết p, R, r

Chứng minh

Điều này được suy ra dễ dàng từ hệ đẳng thức sau:

$$\begin{cases} a + b + c = 2p \\ ab + bc + ca = p^2 + 4Rr + r^2 \\ abc = 4pRr \end{cases}$$

Ngoài ra hệ đẳng thức trên còn cho ta biết rằng p, R, r mỗi đại lượng đều là một hàm đối xứng theo a, b, c . Điều này đã chứng minh cho khẳng định ở bước 1 của chúng ta.

2) Định lý 2: Xét ΔABC , khi đó ta có

i) $R \geq 2r$.

ii)

$$2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R - 2r)\sqrt{R(R - 2r)} \leq P^2 \leq 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R - 2r)\sqrt{R(R - 2r)}$$

Chứng minh

i) Quá quen thuộc nên tôi bỏ qua chứng minh. Tôi sẽ chứng minh ii).

Ta có a, b, c là nghiệm của phương trình: $a \geq b \geq c > 0$.

$$M(X) = X^3 - 2pX^2 + (p^2 + 4Rr + r^2)X - 4pRr = 0$$

$$\text{Điều kiện để } a, b, c \text{ là số đo của 3 cạnh } \Delta \text{ là } \begin{cases} b + c > a \\ c > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p > a \\ c > 0 \end{cases} \Leftrightarrow p > a \geq b \geq c > 0$$

(2.1)

$\Leftrightarrow$ phương trình $M(X) = 0$ có nghiệm thỏa (2.1)

$$\text{ta có } M'(X) = 3X^2 - 4pX + p^2 + 4Rr + r^2$$

$$\Delta' = (2p)^2 - 3(p^2 + 4Rr + r^2) = p^2 - 12Rr - 3r^2$$

$M(X)$ có 3 nghiệm $\Rightarrow \Delta' \geq 0$

$$\text{Hai nghiệm của } M'(X) = 0 \text{ là } x_1 = \frac{2p - \sqrt{\Delta'}}{3}; x_2 = \frac{2p + \sqrt{\Delta'}}{3}$$

x	0	x_1	x_2	p
$M'(x)$	+	0	-	0
$M(x)$		$M(x_1)$	$M(x_2)$	$M(p)$

$$\Rightarrow (2.1) \Leftrightarrow \begin{cases} M(0) < 0 \\ M(x_1) \geq 0 \\ M(x_2) \leq 0 \\ M(p) > 0 \end{cases}$$

$M(0) < 0, M(p) > 0$ là hiển nhiên

$$\begin{cases} M(x_1) \geq 0 \\ M(x_2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \sqrt{\Delta'} \geq p(p^2 - 18Rr + 9r^2) \\ \Delta' \sqrt{\Delta'} \geq -p(p^2 - 18Rr + 9r^2) \end{cases} \Leftrightarrow \Delta' \sqrt{\Delta'} \geq |p(p^2 - 18Rr + 9r^2)|$$

$$\Leftrightarrow (\Delta')^3 \geq p^2(p^2 - 18Rr + 9r^2)^2 \Leftrightarrow p^4 - 2p^2(2R^2 + 10Rr - r^2) + r(4R + r)^3 \leq 0$$

$$\Delta'_1 = (2R^2 + 10Rr - r^2) - r(4R + r)^3 = 4R(R - 2r)^3$$

$$\Leftrightarrow 2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R - 2r)\sqrt{R(R - 2r)} \leq p^2 \leq 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R - 2r)\sqrt{R(R - 2r)}$$

Như vậy định lý 2 được chứng minh, hơn nữa i) và ii) còn là điều kiện cần và đủ để tồn tại 1 ΔABC có p, R, r cho trước

3) Định lý 3: Xét ΔABC nhọn, khi đó ta có:

i) $R \geq 2r$.

$$\begin{aligned} \text{ii) } 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R - 2r)\sqrt{R(R - 2r)} &\geq p^2 \geq \\ &\geq \max\{(2R + r)^2, 2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R - 2r)\sqrt{R(R - 2r)}\} \end{aligned}$$

Ta thực hiện tương tự như chứng minh của định lý 2.

$$M(X) = X^3 - 2pX^2 + (p^2 + 4Rr + r^2)X - 4pRr$$

$$a \geq b \geq c > 0$$

$$\text{Điều kiện của } \Delta \text{ nhọn} \Leftrightarrow b^2 + c^2 > a^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 > 2a^2$$

$$\Leftrightarrow 2(p^2 - 4Rr - r^2) > 2a^2 \Leftrightarrow a < \sqrt{p^2 - 4Rr - r^2}$$

Vậy điều kiện của phương trình $M(X) = 0$ có 3 nghiệm a, b, c

$$\sqrt{p^2 - 4Rr - r^2} > a \geq b \geq c > 0 \quad (3.1)$$

$$(3.1) \Leftrightarrow \begin{cases} M(0) < 0 \\ M(x_1) \geq 0 \\ M(x_2) \leq 0 \\ M(\sqrt{p^2 - 4Rr - r^2}) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^2 \geq 2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R - 2r)\sqrt{R(R - 2r)} \\ p^2 \leq 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R - 2r)\sqrt{R(R - 2r)} \\ p\sqrt{p^2 - 4Rr - r^2} > (p^2 - 2Rr - r^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} p^2 \geq 2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R - 2r)\sqrt{R(R - 2r)} \\ p^2 \leq 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R - 2r)\sqrt{R(R - 2r)} \\ p^2 > (2R + r)^2 \end{cases}$$

Vậy ta suy ra định lý 3

4) Định lý 4: Xét ΔABC không nhọn khi đó ta có:

i) $R \geq (\sqrt{2} + 1)r$

$$\begin{aligned} \text{ii) } 2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R - 2r)\sqrt{R(R - 2r)} &\leq p^2 \leq \\ &\leq \min\{(2R + r)^2, 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R - 2r)\sqrt{R(R - 2r)}\} \end{aligned}$$

Chứng minh:

$$\text{i) } 1 + \frac{r}{R} = \sum \cos A = 1 - 2\sin^2 \frac{A}{2} + 2\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B - C}{2} \leq 1 - 2\sin^2 \frac{A}{2} + 2\sin \frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{r}{R} \leq 2\sin \frac{A}{2} - 2\sin^2 \frac{A}{2}$$

$$\text{Do } \sin \frac{A}{2} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{r}{R} \leq \sqrt{2} - 1 \Rightarrow R \geq (\sqrt{2} + 1)r.$$

ii) Chứng minh hoàn toàn tương tự như ở định lý 3 với lưu ý rằng điều kiện tương ứng của Δ không nhọn bây giờ là phương trình $M(x) = 0$ có nghiệm a, b, c thỏa mãn điều kiện.

$$a \geq \sqrt{p^2 - 4Rr - r^2} \geq b \geq c > 0$$

$$\text{hay là } \begin{cases} M(0) < 0 \\ M(x_1) \geq 0 \\ M(x_2) \leq 0 \\ M(\sqrt{p^2 - 4Rr - r^2}) \leq 0 \end{cases}$$

Các định lý 2, 3, 4 đã trình bày miền giá trị của p trong các lớp Δ tương đối quen thuộc: Δ thường, Δ nhọn, Δ không nhọn. Ở những phần dưới đây tôi sẽ tìm miền giá trị của p trong những lớp Δ “hơi đặc biệt”.

IV – Lớp các Δ có cả 3 góc $\geq \alpha$ (4.1)

Dễ thấy là điều kiện để lớp Δ không rỗng $\Leftrightarrow \alpha \leq \frac{\pi}{3}$.

Nếu $\alpha = \frac{\pi}{3}$ thì không có gì đáng nói. Vẫn giả sử:

$$a \geq b \geq c \Rightarrow (4.1) \Leftrightarrow c \geq \alpha \Leftrightarrow \cot g C \leq \cot g \alpha$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 \leq 4S \cot g \alpha \Leftrightarrow c \geq \sqrt{p^2 - 4Rr - r^2 - 2pr \cot g \alpha} \quad (4.2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M(0) < 0 \\ M(x_1) \geq 0 \\ M(x_2) \leq 0 \\ M(p) < 0 \\ M(\sqrt{p^2 - 4Rr - r^2 - 2pr \cot g \alpha}) \leq 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\text{ta thấy } (4.3) \Leftrightarrow \sqrt{p^2 - 4Rr - r^2 - 2pr \cot g \alpha} (p^2 + 4Rr + r^2 + p^2 - 4Rr - r^2 - 2pr \cot g \alpha) \geq 2p^3 - 4pRr - 2pr^2 - 4p^2 r \cot g \alpha$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{p^2 - 4Rr - r^2 - 2pr \cot g \alpha} (p^2 - pr \cot g \alpha) \geq 2p(p^2 - 2Rr - r^2 - 2pr \cot g \alpha)$$

khai triển và rút gọn ta được.

$$\Leftrightarrow p^2 - 2r \cot g \alpha \cdot p - 4Rr - r^2 - 4R^2 \sin^2 \alpha \geq 0$$

$$\Delta' = (r \cot g \alpha)^2 + 4R^2 \sin^2 \alpha + 4Rr + r^2 = \left(2R \sin \alpha + \frac{r}{\sin \alpha} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow p \geq r \cot g \alpha + 2R \sin \alpha + \frac{r}{\sin \alpha} = 2R \sin \alpha + r \cot g \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{Vậy } p \geq 2R \sin \alpha + r \cot g \frac{\alpha}{2} \quad (4.4).$$

Bây giờ chúng ta tìm điều kiện giữa R và r.

$$\text{Ta có: } A \geq B \geq C \geq \alpha \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} > \frac{\pi - \alpha}{2} \geq \frac{\pi - C}{2} \geq B \geq C \geq \alpha$$

$$\Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} \leq \sin \frac{C}{2} \leq \cos B \leq \cos C \leq \cos \alpha$$

Ta có

$$\begin{aligned} 1 + \frac{r}{R} &= \cos A + \cos B + \cos C = -\cos(B+C) + \cos B + \cos C = \\ &= \sin B \sin C - \cos B \cos C + \cos B + \cos C \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } x = \cos B, y = \cos C \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} \leq \sin \frac{C}{2} \leq x \leq y \leq \cos \alpha$$

Đầu tiên ta nhận xét $\frac{r}{R} \leq \frac{1}{2}$ và dấu “=” xảy ra khi ΔABC đều. Dĩ nhiên là trường hợp này thoả mãn yêu cầu bài toán.

Như vậy ta chỉ quan tâm đến GTNN của $p(x, y) = \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} - xy + x + y$

Cố định y . xét $f(x) = x(1-y) + \sqrt{(1-y^2)(1-x^2)} + y$

$$f'(x) = 1 - y - \frac{\sqrt{1-y^2}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ta sẽ chứng minh $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in [\sin \frac{C}{2}, y]$

$$\Leftrightarrow (1-y)^2(1-x^2) \leq (1-y^2)x^2 \Leftrightarrow (1-y)(1-x^2) \leq (1+y)x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 \geq \frac{1-y}{2} = \frac{1-\cos C}{2} = \sin^2 \frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow x \geq \sin \frac{C}{2} \text{ (đúng)}$$

$$\Rightarrow f(x) \geq f(y) = 1 - y^2 - y^2 + 2y = 1 + 2y - 2y^2$$

$$g(y) = 1 + 2y - 2y^2 \quad y \in \left(\sin \frac{\alpha}{2}; \cos \alpha \right)$$

$$g'(y) = 2 - 4y. \quad g'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \in \left(\sin \frac{\alpha}{2}, \cos \alpha \right)$$

$$\text{Min } g(y) = \text{Min} \left\{ g\left(\sin \frac{\alpha}{2}\right), g(\cos \alpha) \right\}$$

ta sẽ chứng minh $g\left(\sin \frac{\alpha}{2}\right) \geq g(\cos \alpha)$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \geq \cos \alpha - \cos^2 \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \left(\cos \alpha - \sin \frac{\alpha}{2} \right) \left(\cos \alpha + \sin \frac{\alpha}{2} - 1 \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos \alpha - \sin \frac{\alpha}{2} \right) \left(\sin \frac{\alpha}{2} - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) \geq 0 \text{ (đúng)}$$

$$\Rightarrow g(y) \geq g(x) \Rightarrow p(x, y) \geq g(\cos \alpha)$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{r}{R} \geq g(\cos \alpha) = 1 + 2 \cos \alpha - 2 \cos^2 \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{r}{R} \geq 2 \cos \alpha (1 - \cos \alpha) = 4 \cos \alpha \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \pi - 2\alpha \\ B = C = \alpha \end{cases} \Rightarrow \text{Miền giá trị } \frac{r}{R} = \left[4 \cos \alpha \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2} \right] \quad (4.5)$$

Tổng hợp 2 kết quả 4.4 và 4.5 ta được định lý sau đây:

Định lý 5: Xét ΔABC có $\text{Min} \{A, B, C\} \geq \alpha$, khi đó ta có:

$$i) \frac{r}{R} \in \left[4 \cos \alpha \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2} \right]$$

ii)

$$2R^2 + 10Rr - r^2 + 2((R - 2r)\sqrt{R(R - 2r)}) \geq p^2 \geq \max \left\{ \begin{array}{l} \left(2R \sin \alpha + r \cot g \frac{\alpha}{2} \right)^2 \\ 2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R - 2r)\sqrt{R(R - 2r)} \end{array} \right\}$$

Điều kiện i), ii) cũng là những điều kiện đủ để có ΔABC mà $\min(A, B, C) \geq \alpha$.

Còn rất nhiều các lớp Δ khác mà các bạn có thể áp dụng phương pháp trên tìm điều kiện ví dụ như:

Lớp các Δ có $\max(A, B, C) \geq \alpha$.

$$\text{i) } \frac{r}{R} \leq 2 \sin \frac{\alpha}{2} \left(1 - \sin \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$ii) 2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R - 2r)\sqrt{R(R - 2r)} \leq p^2 \leq \max \left\{ \left(2R \sin \alpha + r \cot g \frac{\alpha}{2} \right)^2, \right. \\ \left. 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R - 2r)\sqrt{R(R - 2r)} \right\}$$

Sau đây tôi xin minh họa qua một số bất đẳng thức nổi tiếng, những bất đẳng thức này dù rất mạnh cũng chỉ là các hệ quả của những định lý mà ta đã trình bày.

V – Bất đẳng thức A. W. Walker.

Trong mọi Δ nhọn, ta có bất đẳng thức sau.

$$p^2 \geq 2R^2 + 8Rr + 3r^2$$

Chứng minh

Áp dụng kết quả định lý 3, ta chỉ cần chứng minh.

$$\begin{aligned} & \left[(2R+r)^2 \geq 2R^2 + 8Rr + 3r^2 \right. \\ & \left. (2R^2 + 10Rr - r^2) - 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)} \geq 2R^2 + 8Rr + 3r^2 \right. \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} R^2 - 2Rr - r^2 \geq 0 \\ (R-2r)(r - \sqrt{R(R-2r)}) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R^2 - 2Rr - r^2 \geq 0 \\ R^2 - 2Rr - r^2 \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Điều này hiển nhiên đúng $\Rightarrow$ bất đẳng thức A.Walker được chứng minh:

Dấu “=” $\Leftrightarrow R = 2r \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều ; $R = (\sqrt{2} + 1)r \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông cân

Bất đẳng thức A.W.Walker có 1 dạng tương đương rất đẹp

$$\left(\sum HA\right)^2 \leq AB^2 + BC^2 + CA^2 \quad (H \text{ là trực tâm của } \Delta ABC)$$

trong không gian: $\left(\sum_{i=1}^4 \text{HA}_i\right)^2 \leq \sum_{1 \leq i \leq j \leq 4} A_i A_j^2$ trong đó A_1, A_2, A_3, A_4 là tứ diện trực tâm.

VI – Bất đẳng thức W.I Gridasov

Trong mọi Δ nhọn ta có bất đẳng thức .

$$\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C \sin A \sin B \sin C \geq \frac{27}{8} \quad (*)$$

Chứng minh

$$(*) \Leftrightarrow p^2 - (2R + r)^2 \leq \frac{8p^2 r^2}{27R^2}$$

$$\Leftrightarrow p^2 \leq \frac{(2R+r)^2 27R^2}{(27R^2-8r^2)}$$

theo định lý 3, chúng ta chỉ cần chứng minh:

$$2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)} \leq \frac{27(2R+r)^2 R^2}{(27R^2-8r^2)}$$

$$\Leftrightarrow 2(R-2r)(27R^3 - 27R^2r - 19Rr^2 + 2r^3) \geq 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}(27R^2 - 8r^2)$$

$$\Leftrightarrow 27R^3 - 27R^2r - 19Rr^2 + 2r^3 \geq (27R^2 - 8r^2)\sqrt{R(R-2r)} \quad (**)$$

Bình phương hai vế khai triển và thu gọn (**)

$$\Leftrightarrow r^2(135R^4 + 270R^3r + 189R^2r^2 + 52r^3R + 4r^4) \geq 0$$

Bất đẳng thức hiển nhiên đúng $\Rightarrow$ bất đẳng thức W.I.Wridasov.

Dấu “=” $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều

VII – Các bất đẳng thức của Jack Garfulkel

1) Cho ΔABC . Khi đó ta có $\sum \cos \frac{B-C}{2} \geq \frac{2}{\sqrt{3}} (\sum \sin A)$.

Phép chứng minh cho bất đẳng thức này bạn đọc có thể tham khảo tạp chí toán học và Tuổi trẻ số 291 tháng 9/2001. Đặc biệt cách giải của tác giả Vũ Thành Long hoàn toàn giống với những gì tôi muốn trình bày nên tôi sẽ không viết ra chứng minh của VII. 1 trong bài viết này.

2) Cho ΔABC nhọn. Khi đó ta có:

a) $\sum \sin \frac{A}{2} \geq \frac{4}{3} \left(1 + \prod \sin \frac{A}{2} \right)$

b) $\sum \cos \frac{A}{2} \geq \frac{4}{\sqrt{3}} \left(1 + \prod \sin \frac{A}{2} \right)$

Chứng minh

Tôi chỉ trình bày cách chứng minh cho b). a) hoàn toàn tương tự.

Ta có: $\cos \frac{A}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \right)$, $\cos \frac{B}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2} \right)$, $\cos \frac{C}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \right)$

Đặt $A' = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$, $B' = \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}$, $C' = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$

VII.2.b $\Leftrightarrow \sum \sin A' \geq \frac{4}{\sqrt{3}} \left(1 + \prod \cos A' \right) \quad (**)$

Dễ dàng chứng minh A', B', C' là số đo 3 góc của 1 Δ nhọn và có $\min(A', B', C') \geq \frac{\pi}{4}$

(**) $\Leftrightarrow \frac{P}{R} \geq \frac{4}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{P^2 - (2R+r)^2}{4R^2} \right)$

$\Leftrightarrow P^2 - \sqrt{3}RP - 4Rr - r^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow P \leq \frac{R\sqrt{3} + \sqrt{3R^2 + 16Rr + 4r^2}}{2}$

$$\Leftrightarrow P^2 \leq \frac{3R^2 + 8Rr + 2r^2 + R\sqrt{9R^2 + 48Rr + 12r^2}}{2}$$

Ap dụng định lý 5 ta chỉ cần chứng minh

$$2(2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R - 2r)\sqrt{R(R - 2r)}) \leq 3R^2 + 8Rr + 2r^2 + R\sqrt{9R^2 + 48Rr + 12r^2}$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 12t - 4 + 2(t - 2)\sqrt{t(t - 2)} \leq t\sqrt{9t^2 + 48t + 12}$$

$$t = \frac{R}{r} \quad t \in [2, \sqrt{2} + 1]$$

$$\Leftrightarrow 2(t - 2)\sqrt{t(t - 2)} \leq \frac{4(t - 2)(2t^3 + 10t^2 - 11t + 2)}{t^2 + 12t - 4 + t\sqrt{9t^2 + 48t + 12}}$$

$$\Leftrightarrow (t^2 + 12t - 4 + \sqrt{9t^2 + 48t + 12})\sqrt{t(t - 2)} \leq 2(2t^3 + 10t^2 - 11t + 2)$$

$$\Leftrightarrow 4(t - 2)(t^3 + 14t^2 - 15t + 2 - \sqrt{t(t - 2)}(t^2 + 12t - 4))$$

$$\Leftrightarrow t^3 + 14t^2 - 15t + 2 \geq \sqrt{t(t - 2)}(t^2 + 12t - 4)$$

$$\Leftrightarrow 6t^5 + 78t^4 - 48t^3 + 73t^2 - 28t + 4 \geq 0$$

$$\text{Đặt } h(t) = 6t^5 + 78t^4 - 48t^3 + 73t^2 - 28t + 4$$

$$h'(t) = 2(15t^4 + 156t^3 - 72t^2 + 73t - 14)$$

$$\text{dễ thấy } h'(t) \geq 0 \quad \forall t \in [2, \sqrt{2} + 1]$$

$$\Rightarrow h(t) \geq h(2) = 1296 > 0$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Dấu “=” $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều

VIII – Các bài toán khác

$$1) \text{ Cho } \Delta ABC. \text{ CMR } \frac{1}{\prod \cos \frac{B-C}{2}} + 1 \geq \frac{3}{\sum \cos A} \quad (*)$$

Giải

$$\text{Ta có hệ thức } \sum \cos A = 1 + \frac{r}{R}$$

$$\pi \cos \frac{B-C}{2} = \frac{p^2 + 2Rr + r^2}{8R^2}$$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{8R^2(R+r)}{2R-r} - r^2 - 2Rr \geq p^2$$

ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{8R^2(R+r)}{2R-r} - r^2 - 2Rr \geq 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{R(R-2r)(2R-3r)}{(2R-r)} \geq (R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$$

$$\Leftrightarrow R(2R-3r) \geq (2R-r)\sqrt{R(R-2r)}$$

$$t = \frac{R}{r}, \quad t \geq 2$$

$$\Leftrightarrow t(2t-3)^2 \geq (2t-1)^2(t-2)$$

$$\Leftrightarrow 2 \geq 0 \text{ (đúng)}$$

$\Rightarrow (*)$ được chứng minh. Dấu “=” $\Leftrightarrow \Delta$ ABC đều

2) Cho a, b, c là số đo ba cạnh Δ và k là 1 số thực $\geq 2,6$.

$$\text{CMR: } \frac{a}{\sqrt{a^2 + kbc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + kca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + kab}} \geq \frac{3}{\sqrt{k+1}}$$

Giải

$$\text{Ap dụng bất đẳng thức B.C.S } [\sum a\sqrt{a^2 + kbc}][\sum \frac{a}{\sqrt{a^2 + kbc}}] \geq (\sum a)^2$$

$$F^2 = \left(\sum a\sqrt{a^2 + kbc}\right)^2 \leq (\sum a)(\sum (a^3 + kabc)) = (\sum a)\sum (a^3 + 3kabc)$$

$$\Rightarrow A = \sum \frac{a}{\sqrt{a^2 + kbc}} \geq \frac{(\sum a)^2}{\sqrt{(\sum a)}\sqrt{(\sum a^3 + 3kabc)}}$$

$$\text{dễ dàng chứng minh: } (\sum a^3) + 3kabc = 2p(p^2 - 3r^2 - 6Rr(k+1))$$

$$\Rightarrow A \geq \frac{2p}{\sqrt{p^2 - 3r^2 - 6Rr(k+1)}}$$

$$\text{Ta chỉ cần chứng minh: } \frac{2p}{\sqrt{p^2 - 3r^2 - 6Rr(k+1)}} \geq \frac{3}{\sqrt{k+1}}$$

$$\text{Bất đẳng thức này là hệ quả của: } p^2 + 5r^2 \geq 16Rr \quad (k \geq 2,6)$$

IX – Tổng kết

Qua bài viết này tôi đã cố gắng trình bày cho các bạn 1 phương pháp tiếp cận các bất đẳng thức trong Δ . Nếu so sánh với các phương pháp khác, phương pháp pRr không thể gọi là phương pháp giải hay, đẹp. Tôi tin rằng tất cả những định lý, bài toán được đề cập trong bài viết này đều có thể được chứng minh 1 cách gọn gàng, hay và đẹp hơn.

Lẽ dĩ nhiên phương pháp pRr mà tôi cho là phương pháp tổng quát cũng sẽ mất hiệu lực trong một số trường hợp như biểu thức giữa p, R, r quá phức tạp, bất phương trình p theo R, r không giải được hay là chúng ta không thể tìm được biểu thức đánh giá giữa R và r. Tuy nhiên tôi hy vọng rằng các bạn cũng sẽ sử dụng được phương pháp này trong một số trường hợp nhất định. Để kết thúc cho bài viết này tôi xin giới thiệu đến các bạn 2 quyển sách mà tôi đã sử dụng làm tài liệu tham khảo chính để viết bài báo này.

1) Lượng giác sơ cấp phần I – tác giả: GS Phan Huy Khải. Các bạn có thể tìm được 1 cách khác chứng minh định lý 2 ở đây.

2) Lượng giác sơ cấp phần II – tác giả: GS Phan Huy Khải. Trong quyển sách này có rất nhiều bất đẳng thức nổi tiếng và đặc biệt là GS Phan Huy Khải trình bày phương pháp tính theo p, R, r các biểu thức đối xứng trong Δ : nắm vững phương pháp này các bạn có thể dễ dàng thực hiện được bước 1 của phương pháp p, R, r.

ĐỊNH LÝ PICK

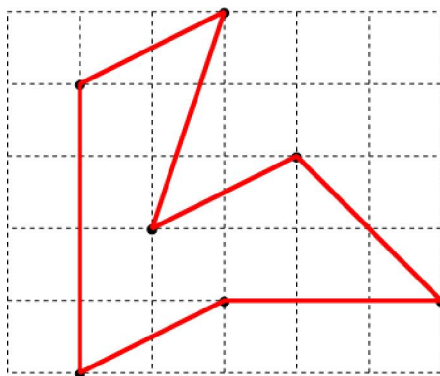
VŨ ĐỖ UYÊN VY – 11 Toán
PHẠM KHANG HY – 11 Toán

Mến chào các bạn! Hẳn là chúng ta đã được làm quen với lưới nguyên trên mặt phẳng tọa độ và nhiều định lý hay liên quan đến lĩnh vực này. Trong bài viết này, chúng tôi giới thiệu với các bạn một định lý khá thú vị về đa giác trên lưới nguyên và một vài bài toán nhỏ ứng dụng của định lý này.

♦ ĐỊNH LÝ:

Trong mặt phẳng tọa độ, cho P là một đa giác có tất cả các đỉnh đều nguyên. Gọi I là số điểm nguyên nằm trong P và O là số điểm nguyên thuộc P . Khi đó, diện tích đa giác P bằng :

$$S_P = I + \frac{1}{2}O - 1$$



Hình P.1
($S_P = 5 + 13/2 - 1 = 11/2$)

♦ CHỨNG MINH ĐỊNH LÝ :

Khi tính diện tích đa giác, ta vẫn thường chia đa giác thành những đa giác không có điểm trong chung rồi tính diện tích của những đa giác đó.

Trường hợp này cũng vậy.

Giả sử P có nhiều hơn 3 đỉnh

Trước hết, ta chứng minh rằng khi chia P thành 2 đa giác nhỏ hơn không có điểm trong chung P_1, P_2 (các đỉnh P_1 và P_2 nguyên), định lý Pick sẽ đúng cho P nếu nó đúng cho 2 đa giác này.

$$S_{P_1} = I_1 + \frac{1}{2}O_1 - 1$$

Thật vậy, theo Pick :

$$S_{P_2} = I_2 + \frac{1}{2}O_2 - 1$$

Trong đó, I_1, I_2, O_1, O_2 lần lượt là số điểm nguyên nằm trong và thuộc đa giác P_1, P_2 .

Gọi L là số điểm nguyên thuộc cạnh chung của 2 đa giác.

Ta có: $I = I_1 + I_2 + L - 2$

$$O = O_1 + O_2 - 2L + 2$$

(Bạn đọc dễ chứng minh hai công thức trên)

Do 2 đa giác P_1 và P_2 không có điểm trong chung nên:

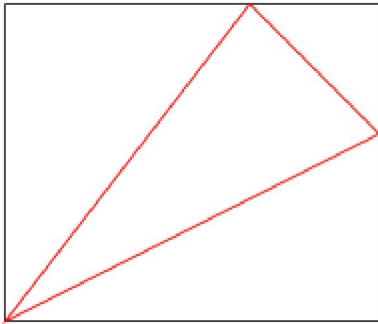
$$S_P = S_{P_1} + S_{P_2}$$

$$\Rightarrow S_P = I_1 + \frac{1}{2}O_1 - 1 + I_2 + \frac{1}{2}O_2 - 1$$

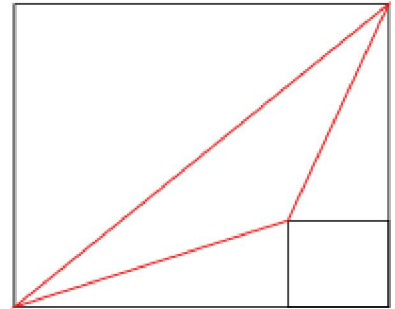
$$\Rightarrow S_P = I + \frac{1}{2}O - 1$$

Như vậy, để chứng minh định lý, ta chỉ cần chia đa giác P thành những tam giác có 3 đỉnh nguyên nhỏ nhất có thể rồi tính tổng diện tích của các tam giác này.

Lúc đó, các cạnh của tam giác thu được không chứa một điểm nguyên nào ngoài các đỉnh của tam giác (Hình P.2 và P.3).



(Hình P.2)



(Hình P.3)

Như một bài toán quen thuộc, ta liên hệ những tam giác này với các hình chữ nhật và tam giác vuông có liên quan đến nó.

Do đó, ta chỉ còn phải chứng minh rằng định lý Pick đúng cho tam giác vuông và hình chữ nhật.

• TAM GIÁC VUÔNG:

Gọi a và b là độ dài của các cạnh góc vuông.

Ta dễ dàng chứng minh được:

$$I = \frac{1}{2}(a-1)(b-1)$$

$$O = a + b + 1$$

$$\text{Do đó: } S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}(a-1)(b-1) + \frac{1}{2}(a+b+1) - 1 = I + \frac{1}{2}O - 1$$

• HÌNH CHỮ NHẬT:

Gọi a và b là độ dài hai cạnh hình chữ nhật.

Ta dễ chứng minh:

$$I = (a-1)(b-1)$$

$$O = 2(a+b)$$

$$\text{Suy ra: } S = ab = (a-1)(b-1) + (a+b) - 1 = I + \frac{1}{2}O - 1$$

Như vậy, ta hoàn thành việc chứng minh định lý này.

♦ MỘT VÀI BÀI TOÁN ỨNG DỤNG ĐỊNH LÝ PICK:

Định nghĩa:

Ta gọi một điểm (n,m) là *hữu hình* nếu và chỉ nếu đoạn thẳng nối gốc toạ độ O với điểm (n,m) không chứa một điểm nguyên nào khác hai điểm đã cho.

Bổ đề: (Dành cho bạn đọc chứng minh)

Cho n và m là hai số nguyên khác 0. Điểm (n,m) là *hữu hình* khi và chỉ khi $\text{UCLN}(n,m)=1$.

Trên hai trục toạ độ, chỉ có các điểm $(1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1)$ là *hữu hình*.

Bài toán 1:

Phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(n,0)$ và điểm $B(0,n)$ là $x+y=n$. Đường thẳng này chứa tất cả các điểm có toạ độ $(i,n-i)$ với i là một số nguyên. Có $n-1$ điểm như thế nằm giữa A và B . Nối $n-1$ điểm trên với gốc toạ độ O , ta chia tam giác OAB thành n tam giác. Hiển nhiên rằng, hai tam giác nhận OA và OB làm một cạnh của nó thì không chứa bất kỳ điểm nguyên nào trong nó. Câu hỏi của bài toán này là :

Với số n nguyên tố, chứng minh rằng $n-2$ tam giác còn lại chứa cùng một số các điểm nguyên bên trong.

Chứng minh :

Vì n là số nguyên tố nên $\text{UCLN}(i,n-i)=1$ với mọi i .

Theo bổ đề đã nêu ở trên, đoạn thẳng OX_i nối O với $(i,n-i)$ không chứa bất kỳ một điểm nguyên nào khác.

Do đó, với mỗi tam giác OX_iX_{i+1} ($1 \leq i \leq n-1$), chỉ có 3 điểm nguyên (chính là 3 đỉnh của tam giác) thuộc các cạnh của nó.

Mặt khác, $(n-2)$ tam giác này có diện tích bằng nhau.

Nên theo định lý Pick, ta dễ dàng suy ra chúng chứa cùng một số lượng các điểm nguyên thuộc miền trong của chúng. (Hình P.4).

Bài toán 2 :

Cho hình vuông $N \times N$ trong mặt phẳng toạ độ. Chứng minh rằng nó chỉ chứa nhiều nhất là $(N+1)^2$ điểm nguyên.

Chứng minh :

Ta có : 1 là khoảng cách nhỏ nhất giữa 2 điểm nguyên.

Chu vi của hình vuông bằng $4N$.

Suy ra có nhiều nhất $4N$ điểm nguyên thuộc các cạnh của hình vuông.

Gọi I là số điểm nguyên nằm trong hình vuông, J là số điểm nguyên thuộc các cạnh của hình vuông.

Theo định lý Pick, ta có:

$$N^2 = I + \frac{J}{2} - 1$$

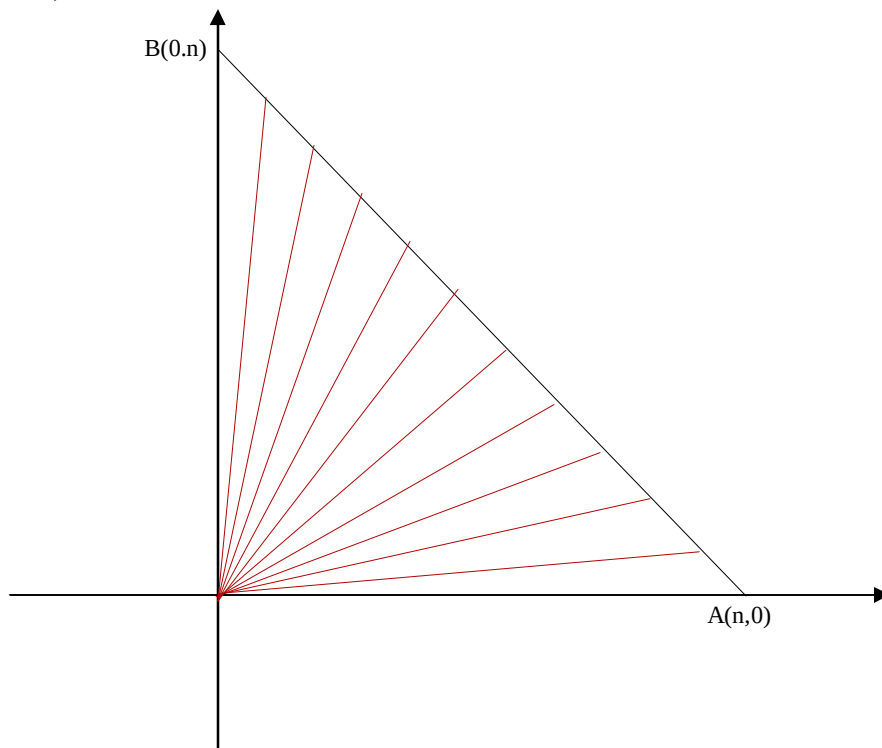
$$\Rightarrow I + J = N^2 + \frac{J}{2} + 1 \leq N^2 + 2N + 1 = (N+1)^2$$

Bốn đỉnh của hình vuông là các điểm nguyên :

Khi đó, hình vuông này chứa $(N-1)2$ điểm nguyên bên trong và $4N$ điểm nguyên trên các cạnh của nó.

Suy ra, nó chứa $(N+1)^2$ điểm nguyên.

Vậy $I + J \leq (N+1)^2$ (đpcm).



Hình P.4

Ứng dụng của định lý này còn rất nhiều, dãy Farey là một ví dụ. Chúng tôi chỉ nêu ra những gì cơ bản nhất liên quan đến định lý. Chắc hẳn các bạn sẽ tìm thêm được nhiều ứng dụng của nó trên nền tảng nội dung định lý được nêu ở trên!



PHƯƠNG PHÁP XÂY DỰNG DÃY TRUY HỒI & CÁC BÀI TOÁN GIẢI TÍCH TỔ HỢP

Lương Minh Thắng -12 Toán

I. Giới thiệu:

Phương pháp xây dựng dãy truy hồi (công thức đệ quy) là một trong những công cụ khá mạnh để giải các bài toán GTTH bên cạnh các phương pháp như: phương pháp quỹ đạo, phương pháp thêm bớt, phương pháp song ánh... Có thể nói tìm công thức truy hồi là một trong những ý tưởng chúng ta hướng đến đầu tiên khi bắt tay vào giải các bài toán GTTH bởi vì chúng ta có một định hướng rõ ràng rằng sẽ đưa bài toán về trường hợp nhỏ hơn, đơn giản hơn để xử lý. Một khi đã có được công thức truy hồi, chúng ta sẽ có một cái nhìn khái quát về số cần tìm, từ đó có thể suy ra các tính chất của số đó và thậm chí có thể tìm ra được những lời giải đẹp hơn cho bài toán thông qua các phương pháp khác.

Trong bài viết này, tôi sẽ đề cập đến 2 vấn đề: xây dựng dãy truy hồi đơn giản và xây dựng các dãy truy hồi lồng nhau.

II. Xây dựng các dãy truy hồi đơn giản:

1) Ý tưởng:

Ta sẽ giải bài toán tổng quát dựa trên tham số n và đặt số cần tìm là a_n . Ta biểu diễn a_n thông qua các đại lượng a_i ($i < n$) hay nói cách khác tìm hàm $f(a_1, \dots, a_{n-1})$: $a_n = f(a_1, \dots, a_{n-1})$ (trong một số trường hợp ta dùng luôn đại lượng a_0)

2) Một số thí dụ:

v Ví dụ 1 (Canada 96): tìm số hoán vị $(a_1, \dots, a_n)$ của $(1, \dots, n)$ thỏa

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ |a_{i+1} - a_i| \leq 2 \quad \forall i = 1, n-1 \end{cases}$$

Giải

$\forall n \in \mathbb{N}^*$. Đặt x_n là số hoán vị của $\{1, \dots, n\}$ thỏa điều kiện

A_n là tập hợp các hoán vị của $\{1, \dots, n\}$ thỏa điều kiện

Ta có $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 4$.

Với $n \geq 5$, xét các bộ $(a_1, \dots, a_k)$ thỏa điều kiện

$$\text{Do } |a_2 - a_1| = |a_2 - 1| \leq 2 \Rightarrow a_2 = 2 \vee 3$$

$$+ a_2 = 2$$

Đặt $(b_1, \dots, b_{n-1}) \equiv (a_2 - 1, \dots, a_n - 1)$

Ta có $(b_1, \dots, b_{n-1})$ là một hoán vị của $\{1, \dots, n-1\}$, $b_1 = 1$

$$\text{và } |b_{i-1} - b_i| = |a_i - a_{i+1}| \leq 2, i = 1, n-1$$

$\Rightarrow (b_1, \dots, b_{n-1}) \in A_{n-1}$. Gọi A_n^* là tập các hoán vị $(a_1, \dots, a_n) \in A_n$ và $a_2 = 2$

Xét $f: A_n^* \rightarrow A_{n-1}$

$$(a_1, \dots, a_n) \rightarrow (a_2 - 1, \dots, a_n - 1)$$

dễ chứng minh f là song ánh

$\Rightarrow$ số bộ thỏa điều kiện trong trường hợp này là x_{n-1}

{* Lưu ý: Để cho đơn giản, ta sẽ làm tắt quá trình xây dựng song ánh

Ví dụ ở đoạn trên ta chỉ nói:

“mỗi một bộ $(a_1, \dots, a_n) \in A_n^*$ tương ứng với một bộ $(a_2 - 1, \dots, a_n - 1) \in A_{n-1}$

$\Rightarrow$ số bộ trong trường hợp này là x_{n-1} ”

chi tiết xin dành cho bạn đọc!}

$$+ a_2 = 3$$

Nếu $a_i = 2$ với $3 < i < n \Rightarrow a_{i-1} = a_{i+1} = 4$ (vô lý)

$$\Rightarrow a_3 = 2 \vee a_n = 2$$

* $a_n = 2 \Rightarrow a_{n-1} = 4 \Rightarrow a_3 = 5$; có một bộ thoả $(1, 3, \dots, 2\left[\frac{n+1}{2}\right] - 1, 2\left[\frac{n}{2}\right], 2\left[\frac{n}{2}\right] - 2, \dots, 2)$

* $a_3 = 2 \Rightarrow a_4 = 4$; mỗi một bộ $(a_1, \dots, a_n)$ trong trường hợp này sẽ tương ứng với một bộ $(a_4 - 3, \dots, a_n - 3) \in A_{n-3} \Rightarrow$ số bộ trong trường hợp này là x_{n-3}

Vậy ta có hệ thức truy hồi $x_n = x_{n-1} + x_{n-3} + 1$ ($n \geq 5$)

v Ví dụ 2 (Bungari 99, vòng 4)

Tìm số có n chữ số $\overline{a_1 \dots a_n}$ thỏa mãn $a_1 a_2 + \dots + a_{n-1} a_n$ chia hết cho 2

Giải

$\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$, đặt S_n là số số có n chữ số thoả điều kiện

A_n là tập hợp các số có n chữ số thoả điều kiện

$$S_2 = 65, S_3 = 675$$

Với $n \geq 4$. Xét các số $\overline{a_1 \dots a_n}$ thoả điều kiện.

* a_{n-1} chẵn $\Rightarrow a_1 a_2 + \dots + a_{n-3} a_{n-2} \equiv 2$

Với mỗi a_{n-1}, a_n cố định thì một số $\overline{a_1 \dots a_n}$ trong trường hợp này sẽ tương ứng với một số $\overline{a_1 \dots a_{n-2}} \in A_{n-2}$

$\Rightarrow$ có S_{n-2} số thoả điều kiện $\forall a_{n-1}, a_n$ cố định.

Có 5.10 cách chọn a_{n-1}, a_n vậy với a_{n-1} chẵn có tất cả $50S_{n-2}$

* a_{n-1} lẻ

Với mọi cách chọn $(a_1, \dots, a_{n-1})$ luôn $\exists 5$ cách chọn a_n

sao cho $a_{n-1} \cdot a_n \equiv -(a_1 a_2 + \dots + a_{n-2} a_{n-1}) \pmod{2}$

Vậy có $9 \cdot 10^{n-3} \cdot 5 \cdot 5$ số

Cuối cùng ta có công thức truy hồi $S_n = 9 \cdot 25 \cdot 10^{n-3} + 50 \cdot S_{n-2}$ ($n \geq 4$)

Việc tính S_n xin dành cho bạn đọc

III. Xây dựng các dãy truy hồi lồng nhau:

1) Ý tưởng:

Trong quá biểu diễn a_n bằng các đại lượng nhỏ hơn $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots$ sẽ có bài toán ta không thể kết thúc được quá trình truy hồi. Điều đó sẽ dẫn đến ta không thể tìm được công thức truy hồi hoặc là công thức tìm được quá cồng kềnh khó xử lý.

Để giải quyết vấn đề trên ta sẽ đặt thêm một (hay nhiều dãy) u_n (hay v_n, x_n) để dừng quá trình truy hồi, như vậy ta có: $a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, u_n, u_{n-1}, \dots)$

Sau đó ta lại biểu diễn $u_n = g(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, u_{n-1}, u_{n-2}, \dots)$

$$v_n = \dots$$

$$\begin{cases} a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots) \\ u_n = g(u_{n-1}, u_{n-2}, \dots) \end{cases} \text{ để tìm } a_n$$

$$\dots$$

2) Một số ví dụ:

Ta xét ví dụ dựa trên bài 3 thi HSG QG 2002–2003

v Ví dụ 3: Tìm công thức truy hồi của dãy x_n = số hoán vị $(a_1, \dots, a_n)$ của $\{1, \dots, n\}$ thỏa:

$$1 \leq |a_i - i| \leq 2 \text{ với } i = \overline{1, n}$$

Nhận xét:

Lời giải bài toán này các bạn có thể tham khảo trên báo THPT 2/2004. Theo tôi thì lời giải đó không thật sự được tự nhiên cho lắm và chúng ta sẽ đi tìm một lời giải khác tự nhiên hơn bằng phương pháp trên.

Ta bắt đầu xét các trường hợp :

Có 2 trường hợp: $a_{n-1} = n \vee a_{n-2} = n$

Nếu $a_{n-1} = n$: lại có 2 trường hợp $a_n = (n-1) \vee a_n = n-2$.

Với $a_n = n-1$: ta có thể chuyển bài toán từ n về $(n-2)$

Tuy nhiên với $a_n = n-2$, nếu tiếp tục xét trường hợp thì ta sẽ dẫn đến $a_{n-2} = (n-4) \vee (n-3) \vee (n-1)$. Đến đây thì bài toán trở nên khó kiểm soát vì có quá nhiều trường hợp. Chính điều này khiến ta phải ngắt quá trình truy hồi bằng cách tạo ra bộ hoán vị $(b_1, \dots, b_n)$ như lời giải dưới đây :

Giải

x_n = số hoán vị $\{1, \dots, n\}$ thỏa điều kiện

A_n là tập các hoán vị $\{1, \dots, n\}$ thỏa điều kiện

y_n là số các hoán vị $(b_1, \dots, b_n)$ của $\{1, 2, 3, \dots, n-1, n+1\}$ thỏa $1 \leq |b_i - i| \leq 2$

B_n là tập các hoán vị $(b_1, \dots, b_n)$ của $\{1, 2, 3, \dots, n-1, n+1\}$ thỏa $1 \leq |b_i - i| \leq 2$

a) Xét các bộ $(a_1, \dots, a_n) \in A_n$

Ta có 2 trường hợp: $a_{n-1} = n \vee a_{n-2} = n$

* $a_{n-1} = n$: ta có 2 trường hợp $a_n = (n-1) \vee a_n = n-2$

+ $a_n = n-1$: mỗi một bộ $(a_1, \dots, a_n)$ ứng với 1 bộ $(a_1, \dots, a_{n-2}) \in A_{n-2} \Rightarrow$ số bộ là x_{n-2}

+ $a_n = n-2$: mỗi một bộ $(a_1, \dots, a_n)$ ứng với 1 bộ $(a_1, \dots, a_{n-2}) \in B_{n-2}$ (tại sao ?) $\Rightarrow$ số bộ

là y_{n-2}

* $a_{n-2} = n$. Ta có 2 trường hợp $a_n = n-1 \vee a_{n-3} = n-1$

+ $a_n = n-1$

• $a_{n-1} = n-2$ $(a_1, \dots, a_n) \rightarrow (a_1, \dots, a_{n-3}) \in A_{n-3}$ à số bộ là x_{n-3}

• $a_{n-1} = n-3$ $(a_1, \dots, a_n) \rightarrow (a_1, \dots, a_{n-3}) \in B_{n-3}$

số bộ là y_{n-3}

+ $a_{n-3} = n-1 \Rightarrow a_n = n-2; a_{n-1} = n-3$

$(a_1, \dots, a_n) \rightarrow (a_1, \dots, a_{n-4}) \in A_{n-4}$

số bộ là x_{n-4}

Vậy ta có $x_n = x_{n-2} + y_{n-2} + x_{n-3} + y_{n-3} + x_{n-4}$ (1)

b) Xét các bộ $(b_1, \dots, b_n) \in B_n$

Ta có 2 trường hợp $b_{n-1} = n+1 \vee b_n = n+1$

+ $b_n = n+1$: $(b_1, \dots, b_n) \rightarrow (b_1, \dots, b_{n-1}) \in A_{n-1}$

số bộ là x_{n-1}

+ $b_{n-1} = n+1$

• $b_n = n-1$ $(b_1, \dots, b_n) \rightarrow (b_1, \dots, b_{n-2}) \in A_{n-2}$

số bộ là x_{n-2}

• $b_n = n-2$ $(b_1, \dots, b_n) \rightarrow (b_1, \dots, b_{n-2}) \in B_{n-2}$

số bộ là y_{n-2}

$$\text{Vậy } y_n = x_{n-1} + x_{n-2} + y_{n-2} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{c) Từ (1)} \Rightarrow (x_{n-2} + x_{n-3} + x_{n-4}) + (y_{n-2} + y_{n-3}) - (x_{n-3} + x_{n-4} + x_{n-5}) - (y_{n-3} + y_{n-4}) \\ = x_{n-2} - x_{n-5} + y_{n-2} - y_{n-4} \quad (3) \end{aligned}$$

$$\text{Mà từ (2)} \Rightarrow y_{n-2} - y_{n-4} = x_{n-3} + x_{n-4} \text{ thế vào (3)}$$

$$\Rightarrow x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3} + x_{n-4} - x_{n-5}$$

* Cũng với ý tưởng ngắt quá trình truy hồi như trên ta đưa ra thêm một lời giải đẹp khác cho bài toán như sau :

Sử dụng các ký hiệu A_n, x_n như trên. Ta đổi lại các ký hiệu B_n, y_n :

y_n là số các hoán vị $(b_1, \dots, b_n)$ của $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ thỏa $1 \leq |b_i - i| \leq 2$ và $b_1=2$

B_n là tập các hoán vị $(b_1, \dots, b_n)$ của $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ thỏa $1 \leq |b_i - i| \leq 2$ và $b_1=2$

Nhận xét : y_n cũng là số các hoán vị $(b_1, \dots, b_n)$ của $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ thỏa $1 \leq |b_i - i| \leq 2$ và $b_2=1$ (*)

Chứng minh :

Chi tiết xin dành cho bạn đọc.

Ý tưởng gọi f song ánh bản từ $[1, 2, 3, \dots, n]$ vào $(b_1, \dots, b_n)$, $f(i) = b_i$

f là song ánh nên f^{-1} cũng là song ánh $\Rightarrow (f^{-1}(1), \dots, f^{-1}(n))$ là hoán vị của $(1, \dots, n)$.

$$f(1)=b_1=2 \Rightarrow f^{-1}(2) = 1 \text{ và } 1 \leq |b_i - i| = |b_i - f^{-1}(b_i)| \leq 2$$

Rõ ràng $(f^{-1}(1), \dots, f^{-1}(n))$ là hoán vị của $(1, \dots, n)$ thỏa (*)

Trở lại bài toán :

a) Xét các bộ $(a_1, \dots, a_n) \in A_n$

Ta có 2 trường hợp: $a_2 = 1 \vee a_3 = 1$

* $a_2 = 1$: theo nhận xét ta có số bộ là y_n .

* $a_3 = 1$. Ta có 2 trường hợp $a_1 = 2 \vee a_1 = 3$

$$+ a_1 = 2$$

Ta có thể xem $a_3=2$ và mỗi một bộ $(a_1, \dots, a_n)$ ứng với 1 bộ $(a_2-1, a_3-1=1, \dots, a_n-1) \in B_{n-1} \Rightarrow$ số bộ là y_{n-1} (các bạn thử suy nghĩ xem tại sao ta có thể xem $a_3=2$ và có tương ứng trên)

$$+ a_1 = 3 \Rightarrow a_2 = 4; a_4 = 2$$

$$(a_1, \dots, a_n) \rightarrow (a_5-4, \dots, a_n-4) \in A_{n-4}$$

số bộ là x_{n-4}

$$\text{Vậy ta có } x_n = y_n + y_{n-1} + x_{n-4} \quad (1)$$

b) Xét các bộ $(b_1, \dots, b_n) \in B_n$,

$b_1=2$, ta có 2 trường hợp $b_2 = 1 \vee b_3 = 1$

$$+ b_2 = 1 : (b_1, \dots, b_n) \rightarrow (b_3-2, \dots, b_n-2) \in A_{n-2}$$

số bộ là x_{n-2}

$$+ b_3 = 1$$

Ta có thể xem $b_3=2$ và mỗi một bộ $(b_1, \dots, b_n)$ ứng với 1 bộ $(b_2-1, b_3-1=1, \dots, b_n-1) \in B_{n-1} \Rightarrow$ số bộ là y_{n-1}

$$\text{Vậy } y_n = x_{n-2} + y_{n-1} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{c) (1)} \Rightarrow x_n - x_{n-1} &= (y_n + y_{n-1}) + x_{n-4} - (y_{n-2} + y_{n-1}) - x_{n-5} \\ &= y_n + x_{n-4} - y_{n-2} - x_{n-5} \quad (3) \end{aligned}$$

$$(2) \Rightarrow y_n - y_{n-2} = x_{n-2} + x_{n-3} \quad (4)$$

$$(3), (4) \Rightarrow x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3} + x_{n-4} - x_{n-5}$$

v Ví dụ 4 (Mỹ 1996)

Gọi a_n là số các xâu nhị phân độ dài n không chứa chuỗi con 010

b_n là số các xâu nhị phân độ dài n không chứa chuỗi con 0011 và 1100

$$\text{Cmr } b_{n+1} = 2a_n$$

Giải

Gọi a_n là số các xâu nhị phân $d_1 \dots d_n$ không chứa chuỗi 010

A_n là tập các xâu nhị phân $d_1 \dots d_n$ không chứa chuỗi 010

a'_n là số các xâu nhị phân $d_1 \dots d_n$ không chứa chuỗi 010 và $d_n = 0$

A'_n là tập các xâu nhị phân $d_1 \dots d_n$ không chứa chuỗi 010 và $d_n = 0$

a) Xét các xâu nhị phân $d_1 \dots d_n$ không chứa chuỗi 010

* $d_n = 0$ ta có a'_n chuỗi

* $d_n = 1$ $d_1 \dots d_n \rightarrow d_1 \dots d_{n-1} \in A_{n-1} \Rightarrow$ có a_{n-1} chuỗi

$$\text{Vậy } a_n = a'_n + a_{n-1} \quad (1)$$

b) Xét các xâu nhị phân $d_1 \dots d_n$ không chứa chuỗi 010 và $d_n = 0$

* $d_{n-1} = 1 \Rightarrow d_{n-2} = 1$

$d_1 \dots d_n \rightarrow d_1 \dots d_{n-3} \in A_{n-3} \Rightarrow$ số chuỗi là a_{n-3}

* $d_{n-1} = 0$ $d_1 \dots d_n \rightarrow d_1 \dots d_{n-1} \in A'_{n-1} \Rightarrow$ số chuỗi là a'_{n-1}

$$\text{Vậy } a'_n = a'_{n-1} + a_{n-3} \quad (2)$$

$$(1) \text{ và } (2) \Rightarrow a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} \quad (n \geq 3) \quad (*)$$

Gọi b_n là số các xâu nhị phân $d_1 \dots d_n$ không chứa chuỗi 0011 & 1100

B_n là tập các xâu nhị phân $d_1 \dots d_n$ không chứa chuỗi 0011 & 1100

b_{1n} là số các xâu nhị phân $d_1 \dots d_n$ không chứa chuỗi 0011 & 1100 & $d_{n-1}d_n = 00$

B_{1n} là tập các xâu nhị phân $d_1 \dots d_n$ không chứa chuỗi 0011 & 1100 & $d_{n-1}d_n = 00$

b_{2n} là số các xâu nhị phân $d_1 \dots d_n$ không chứa chuỗi 0011 & 1100 & $d_{n-1}d_n = 11$

B_{2n} là tập các xâu nhị phân $d_1 \dots d_n$ không chứa chuỗi 0011 & 1100 & $d_{n-1}d_n = 11$

b_{3n} là số các xâu nhị phân $d_1 \dots d_n$ không chứa chuỗi 0011 & 1100 & $d_{n-1}d_n = 01$

B_{3n} là tập các xâu nhị phân $d_1 \dots d_n$ không chứa chuỗi 0011 & 1100 & $d_{n-1}d_n = 01$

b_{4n} là số các xâu nhị phân $d_1 \dots d_n$ không chứa chuỗi 0011 & 1100 & $d_{n-1}d_n = 10$

B_{4n} là tập các xâu nhị phân $d_1 \dots d_n$ không chứa chuỗi 0011 & 1100 & $d_{n-1}d_n = 10$

Ta bắt đầu đi thiết lập các mối quan hệ giữa các b_{in} .

* Xét các xâu nhị phân $d_1 \dots d_n \in B_{1n}$, $d_{n-1}d_n = 00$

+ $d_{n-2} = 0$ ta có $b_{1(n-1)}$ xâu.

+ $d_{n-2} = 1 \Rightarrow d_{n-3} = 0$ ta có $b_{3(n-2)}$ xâu.

$$\text{Như vậy } b_{1n} = b_{1(n-1)} + b_{3(n-2)}$$

Tương tự, ta dễ dàng có :

$$\begin{cases} b_{1n} = b_{1(n-1)} + b_{3(n-2)} & (3) \\ b_{2n} = b_{4(n-2)} + b_{2(n-1)} & (4) \\ b_{3n} = b_{4(n-1)} + b_{2(n-1)} & (5) \\ b_{4n} = b_{3(n-1)} + b_{1(n-1)} & (6) \end{cases} \quad (\text{Chi tiết xin dành cho bạn đọc})$$

Đặt $u_n = b_{1n} + b_{2n}$, $v_n = b_{3n} + b_{4n}$ (lưu ý $u_n + v_n = b_n$)

$$(3) (4) \Rightarrow u_n = u_{n-1} + v_{n-2} \quad (7)$$

$$(5) (6) \Rightarrow v_n = v_{n-1} + u_{n-1} = b_{n-1}$$

$$(7) \Rightarrow b_n - v_n = b_{n-1} - v_{n-1} + v_{n-2}$$

$$b_n - b_{n-1} = b_{n-1} - b_{n-2} + b_{n-3}$$

$$b_n = 2b_{n-1} - b_{n-2} + b_{n-3} \quad (n \geq 3) \quad (**)$$

Từ (*) (**) kết hợp với các giá trị khởi đầu, ta dễ dàng suy ra kết luận của bài toán là $b_{n+1} = 2a_n$

Nhận xét :

*Tuy rằng ta phân ra thành rất nhiều b_{in} nhưng những mối quan hệ giữa chúng được thiết lập rất dễ dàng và giúp chúng ta có một cái nhìn rất tổng quát về dãy b_n . Mỗi một hệ thức ta có đều cho ta một ý nghĩa nào đó về dãy b_n .

Ví dụ như từ hệ thức (3) ta suy ra số xâu nhị phân độ dài n tận cùng = 00 thì bằng số các xâu nhị phân độ dài $n-1$ tận cùng = 00 cộng với số các xâu nhị phân độ dài $n-2$ tận cùng = 01 (ở đây các xâu không chứa 0011,1100)...

IV. Kết luận:

Qua các ví dụ trên mong rằng các bạn thấy được tính hiệu quả của phương pháp này và vận dụng thật nhuần nhuyễn, sáng tạo trong các bài toán trong các bài toán giải tích tổ hợp.

Sau đây là một số bài tập để các bạn rèn luyện :

1) Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4 có bao nhiêu số có n chữ số mà 2 chữ số kề nhau luôn kém nhau luôn kém nhau 1 đơn vị?

2) Cho $n \geq 2$ có bao nhiêu hoán vị $(a_1, \dots, a_n)$ của $\{1, \dots, n\}$ thỏa: $\exists! i \in \{1, \dots, n-1\}$ mà $a_i > a_{i+1}$?

3) Gọi T_n là tập các bộ $(a_1, \dots, a_r)$ ($1 \leq r \leq n$) thỏa

$$\begin{cases} a_1 < a_2 < \dots < a_r \\ 1 \leq a_i \leq n \text{ \& } a_i \in \overline{N^*} \quad \forall i = \overline{1, r} \\ a_i \equiv 1(\text{mod } 2) \Leftrightarrow i \equiv 1(\text{mod } 2) \end{cases} \quad \text{Tính } |T_n|$$

4) (Singapore 98–99)

$$\text{Tìm số bộ } (x_1, \dots, x_n) \begin{cases} x_i = \pm 1, i = \overline{1, n} \\ 0 \leq x_1 + \dots + x_r < 4, r = \overline{1, n-1} \\ x_1 + \dots + x_n = 4 \end{cases}$$

LIÊN HỆ ĐỊNH LÝ CEVA VÀ ĐỊNH LÝ CARNOT TRONG CHỨNG MINH ĐỒNG QUY

Trần Tiến Hiếu – 12 Toán

Trong các phương pháp chứng minh đồng quy thì phương pháp sử dụng các định lý cổ điển tỏ ra khá hiệu quả. Ở đây tôi muốn đề cập đến định lý Ceva, định lý Carnot 1,2 và liên hệ, so sánh các định lý này.

Định lý Ceva:

$$AM, BN, CP \text{ đồng quy} \Leftrightarrow \frac{\sin A_1}{\sin A_2} \cdot \frac{\sin B_1}{\sin B_2} \cdot \frac{\sin C_1}{\sin C_2} = 1$$

Và phát biểu một cách tổng quát:

Cho $M \notin AB \cup AC$, $N \notin BA \cup BC$, $P \notin CA \cup CB$

Khi đó AM, BN, CP đồng quy

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB})}{\sin(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC})} \cdot \frac{\sin(\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{BC})}{\sin(\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{BA})} \cdot \frac{\sin(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CA})}{\sin(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CB})} = -1$$

Vd1: Cho tam giác ABC. Một đường tròn bất kì cắt các cạnh AB, BC, CA lần lượt tại Q, M, S, P, N, R như hình vẽ $PQ \cap RS = \{X\}$, $RS \cap MN = \{Y\}$, $PQ \cap MN = \{Z\}$,
Cmr AX, BY, CZ đồng quy

Giải

Áp dụng định lý Ceva cho tam giác AQR

$$\frac{\sin A_1}{\sin A_2} \cdot \frac{\sin X\hat{Q}R}{\sin X\hat{Q}A} \cdot \frac{\sin X\hat{R}A}{\sin X\hat{R}Q} = 1 \quad (1)$$

tương tự cho tam giác BMS, tam giác CNP ta

có:

$$\frac{\sin B_1}{\sin B_2} \cdot \frac{\sin Y\hat{S}M}{\sin Y\hat{S}B} \cdot \frac{\sin Y\hat{M}B}{\sin Y\hat{M}S} = 1 \quad (2)$$

$$\frac{\sin C_1}{\sin C_2} \cdot \frac{\sin Z\hat{N}P}{\sin Z\hat{N}C} \cdot \frac{\sin Z\hat{P}C}{\sin Z\hat{P}N} = 1 \quad (3)$$

Nhân (1), (2), (3) đồng thời, lưu ý rằng $\sin X\hat{Q}R = \sin Y\hat{S}B$,

ta có

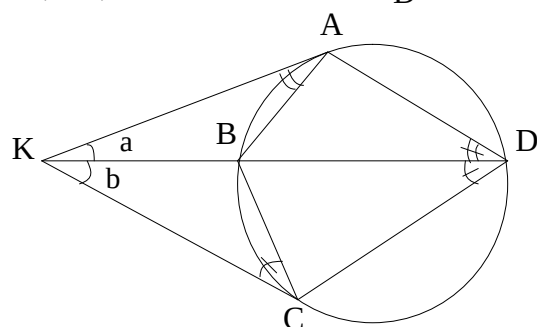
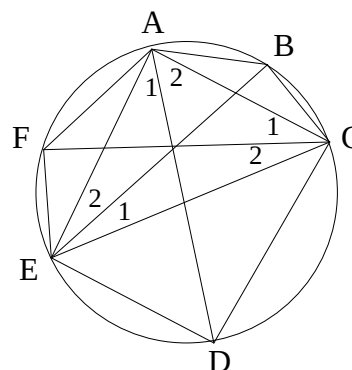
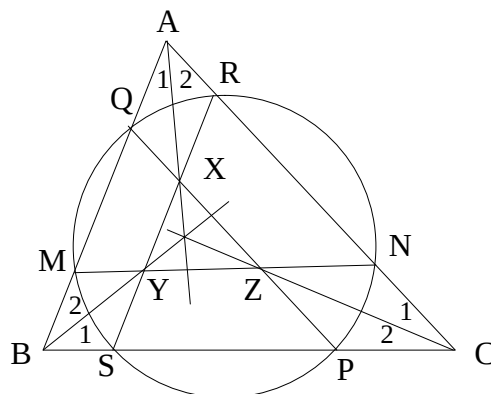
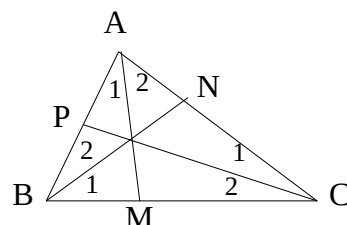
$$\frac{\sin A_1}{\sin A_2} \cdot \frac{\sin B_1}{\sin B_2} \cdot \frac{\sin C_1}{\sin C_2} = 1 \Rightarrow \text{đpcm}$$

Vd2: Cho tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại A_1, B_1, C_1 . M là 1 điểm bên trong (I). A_1M cắt (I) tại điểm thứ hai là A_2 . Tương tự có B_2, C_2 . Cmr AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy

Giải

Bổ đề 1: Cho lục giác nội tiếp ABCDEF. Cmr AD, BE, CF

$$\text{đồng quy} \Leftrightarrow \frac{AB \cdot CD \cdot EF}{BC \cdot DE \cdot FA} = 1$$



Bổ đề 2: (Xem hình vẽ) $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{AB^2}{BC^2} = \frac{AD^2}{DB^2}$

Chứng minh:

Ta có $\frac{AB}{AC} = \frac{AB}{KB} \cdot \frac{KB}{BC} = \frac{\sin \alpha}{\cos A_1} \cdot \frac{\sin C_1}{\cos \beta}$

$$\Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{AB \sin A_1}{BC \sin C_1} = \frac{AB \cdot 2R \sin \frac{\widehat{AOB}}{2}}{BC \cdot 2R \sin \frac{\widehat{BOC}}{2}} = \frac{AB^2}{BC^2} \text{ (đpcm)}$$

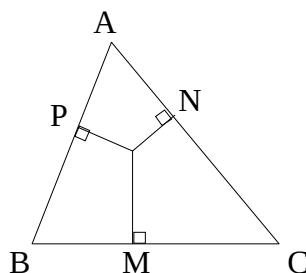
Trở lại bài toán

Áp dụng bổ đề 2 ta có

$$\frac{\sin \widehat{BA_2A_1}}{\sin \widehat{CA_2A_1}} \cdot \frac{\sin \widehat{C_2CA_1}}{\sin \widehat{C_2CB_1}} \cdot \frac{\sin \widehat{B_2BA_1}}{\sin \widehat{B_2CA_1}} =$$

$$= \frac{A_2C_1^2 \cdot B_2A_1^2 \cdot C_2B_1^2}{A_1C_2^2 \cdot B_1A_2^2 \cdot C_1B_2^2} = 1 \Rightarrow \text{đpcm}$$

* **Định lý Carnot 1:**



M, N, P lần lượt nằm trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC

Khi đó đường thẳng qua M và vuông góc BC, đường thẳng qua N và vuông góc CA, đường thẳng qua P và vuông góc AB đồng quy $\Leftrightarrow MB^2 + NC^2 + PA^2 = MC^2 + NA^2 + PB^2$.

Các bạn có thể dễ dàng chứng minh định lý này bằng cách sử dụng định lý Pitago

Vd3: Cho điểm M nằm trong tam giác ABC. Hạ $MA_1 \perp BC$, $MB_1 \perp CA$, $MC_1 \perp AB$. Gọi Ax, By, Cz là các đường thẳng qua A vuông góc B_1C_1 , qua B vuông góc C_1A_1 , qua C vuông góc A_1B_1

Cmr: Ax, By, Cz đồng quy

Giải:

Cách 1: dùng định lý Ceva

Dễ thấy $\widehat{ABx} = \widehat{A_1CM}$, mà $\widehat{A_1CM} = \widehat{MBA_1}$

$$\Rightarrow \widehat{ABx} = \widehat{MBA_1}$$

Tương tự $\widehat{CBx} = \widehat{MBC_1}$

$$\Rightarrow \frac{\sin \widehat{ABx}}{\sin \widehat{CBx}} = \frac{\sin \widehat{MBA_1}}{\sin \widehat{MBC_1}}$$

Làm tương tự với các góc tại A và C

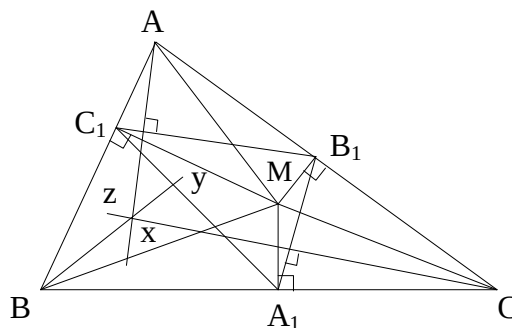
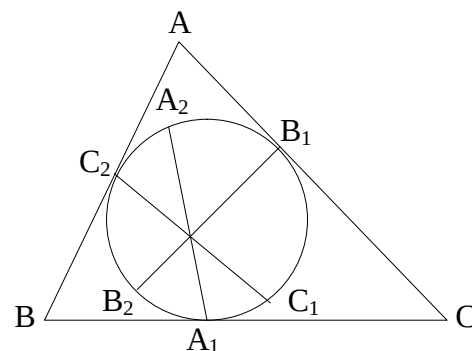
Theo định lý Ceva ta có đpcm

Cách 2: Dùng định lý Carnot 1

$Ax \cap B_1C_1 = \{D\}$, $By \cap C_1A_1 = \{E\}$, $Cz \cap A_1B_1 = \{F\}$

Ax, By, Cz đồng quy $\Leftrightarrow DC_1^2 + EA_1^2 + FB_1^2 = DB_1^2 + EC_1^2 + FA_1^2$

$\Leftrightarrow AC_1^2 + BA_1^2 + CB_1^2 = AB_1^2 + CA_1^2 + BC_1^2$ (đúng theo định lý Carnot)



$\Rightarrow$ đpcm

Bây giờ quay lại ví dụ 1; chúng ta sẽ xét một dạng hơi khác của nó

Vd4: Cho tam giác ABC. Trên các cạnh BC, CA, AB ta lấy lần lượt các cặp điểm A_1 và A_2 , B_1 và B_2 , C_1 và C_2 sao cho 6 điểm đó nằm trên cùng một đường tròn. Cmr nếu các đường thẳng đi qua A_1 và vuông góc với BC, qua B_1 và vuông góc CA, đi qua C_1 và vuông góc AB đồng quy thì các đường thẳng đi qua A_2 và vuông góc với BC, qua B_2 và vuông góc CA, đi qua C_2 và vuông góc AB cũng đồng quy.

Lưu ý: Bài toán này được trích ra từ “Phép biến hình trong hình học phẳng” của tác giả Đỗ Thanh Sơn. Để tiện cho các bạn tham khảo, tôi xin trình bày luôn chứng minh bằng phép biến hình của bài toán này.

Giải

Cách 1 (dùng phép biến hình)

Ta kí hiệu x là đường thẳng đi qua A_1 và vuông góc với BC, (γ) là đường tròn đi qua 6 điểm đã nêu trong bài toán. O là tâm của (γ) . Gọi A_1' là giao điểm thứ hai của x với (γ) . Rõ ràng $A_1'A_2$ là đường kính của (γ) , vì vậy phép đối xứng:

$Z_O: A_1' \rightarrow A_2 \Rightarrow x \rightarrow x'$ đi qua A_2 và $x' \parallel x$ hay $x' \perp BC$

Tương tự: $Z_O: y \rightarrow y'$ đi qua B_2 và vuông góc AC
 $z \rightarrow z'$ đi qua C_2 và vuông góc AB
 (y, z được kí hiệu tương tự như x)

Theo giả thiết, x, y, z đồng quy $\Rightarrow x', y', z'$ đồng quy

Cách 2 (dùng định lý Carnot 1)

Gọi R là bán kính của (γ) . Từ giả thiết và theo định lý Carnot 1 ta có:

$$AB_1^2 + CA_1^2 + BC_1^2 = AC_1^2 + BA_1^2 + CB_1^2.$$

Theo định lý hàm số cos

$$OA^2 = AB_2^2 + OB_2^2 - 2AB_2 \cdot OB_2 \cdot \cos \widehat{AB_2O}$$

$$OC^2 = OB_1^2 + CB_1^2 - 2OB_1 \cdot CB_1 \cdot \cos \widehat{OB_1C}$$

$$\Rightarrow OA^2 - OC^2 = AB_2^2 - CB_1^2 + 2R \cos \alpha (AB_2 - CB_1)$$

$$\text{tương tự: } OC^2 - OB^2 = CA_2^2 - BA_1^2 + 2R \cos \beta (CA_2 - BA_1)$$

$$OB^2 - OA^2 = BC_2^2 - AC_1^2 + 2R \cos \omega (BC_2 - AC_1)$$

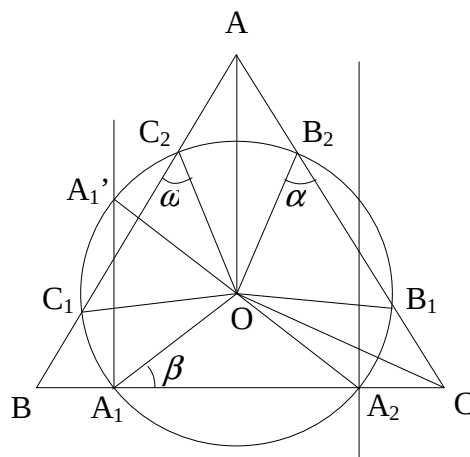
$$\Rightarrow AB_2^2 + CA_2^2 + BC_2^2 = CB_1^2 + BA_1^2 + AC_1^2 - 2R[\cos \alpha (AB_2 - CB_1) + \cos \beta (CA_2 - BA_1) + \cos \omega (BC_2 - AC_1)]$$

$$\text{tương tự } \Rightarrow AC_2^2 + BA_2^2 + CB_2^2 = CB_1^2 + BA_1^2 + AC_1^2 - 2R[\cos \alpha (AB_2 - CB_1) + \cos \beta (CA_2 - BA_1) + \cos \omega (BC_2 - AC_1)]$$

$$\Rightarrow AB_2^2 + CA_2^2 + BC_2^2 = AC_2^2 + BA_2^2 + CB_2^2$$

Theo định lý Carnot ta có đpcm.

Cũng với ý tưởng sử dụng định lý Carnot cho bài toán này, chúng ta còn có một cách giải khác không cần dùng định lý hàm số cos, các bạn hãy thử tìm xem.



Vd5: Cho tam giác ABC. Các đường tròn bàng tiếp tiếp xúc các cạnh BC, CA, AB tại M, N, P. Đường tròn nội tiếp tiếp xúc các cạnh tại X, Y, Z. Các đường thẳng D_1, D_2, D_3 qua M, N, P và vuông góc với các cạnh BC, CA, AB. Cmr D_1, D_2, D_3 đồng quy.

Giải

Giả sử $D_1 \cap YZ = \{H\}$. Ta có:

$$\begin{aligned} HY^2 - HZ^2 &= MY^2 - MZ^2 \\ &= (p-b)(p-c)(\cos B - \cos C) \\ &= -4 \sin \frac{B-C}{2} \cos \frac{A}{2} (p-b)(p-c)(p-a) \cdot \frac{r_a}{S} \\ &= -\frac{2}{S} \cdot p(p-a)(p-b)(p-c) \tan \frac{A}{2} \cdot 2 \sin \frac{B-C}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \end{aligned}$$

$$= 2S(\sin B - \sin C)$$

Làm tương tự với D_2 và D_3

Theo định lý Carnot 1 ta có đpcm

* **Nhận xét:** Định lý Carnot 1 gồm toàn những bình phương như trên đôi khi lại tỏ ra hiệu quả khi chứng minh đồng quy, vì khi đó các bạn chỉ cần chịu khó tính toán cộng với một chút khéo léo khi biến đổi. Chẳng hạn trong ví dụ trên, nếu sử dụng định lý Ceva thì có thể sẽ gặp nhiều khó khăn, trong khi với định lý Carnot 1 thì con đường đi đến lời giải đơn giản hơn nhiều.

Bây giờ chúng ta xét tiếp:

Định lý Carnot 2

Cho tam giác ABC và tam giác $A_1B_1C_1$ như hình vẽ. Khi đó các đường thẳng qua A_1, B_1, C_1 và vuông góc BC, CA, AB đồng quy $\Leftrightarrow$ các đường thẳng qua A, B, C và vuông góc B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 đồng quy.

Định lý Carnot 2 thực ra chỉ là một hệ quả của định lý Ceva và định lý Carnot 1 (có thể dùng định lý Ceva hoặc Carnot 1 để chứng minh định lý này). Tuy nhiên sử dụng “hệ quả” này có khi lại cho chúng ta những lời giải thú vị

Ta xét ví dụ minh họa:

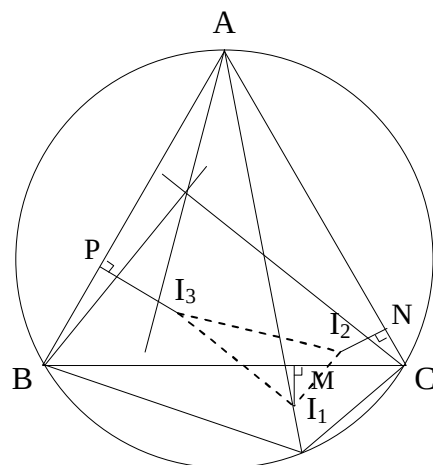
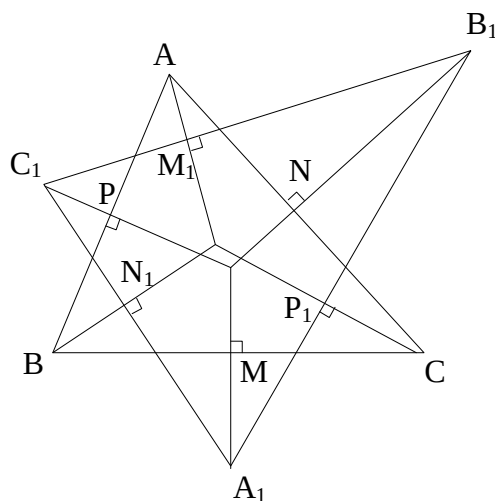
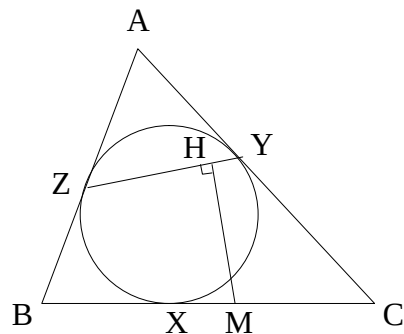
Vd6: Cho tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn (O). D là một điểm trên cung nhỏ BC. I_1, I_2, I_3 là tâm nội tiếp tam giác DBC, tam giác DCA, và tam giác DAB. Chứng minh rằng các đường thẳng qua A, B, C và vuông góc I_2I_3, I_3I_1, I_1I_2 đồng quy

Giải

Hạ $I_1M \perp BC, I_2N \perp CA, I_3P \perp AB$, đặt $AB = BC = CA = a$

Sử dụng tính chất $DA = DB + DC$ các bạn dễ dàng chứng minh được:

$$AP^2 + BM^2 + CN^2 = AN^2 + BP^2 + CM^2$$

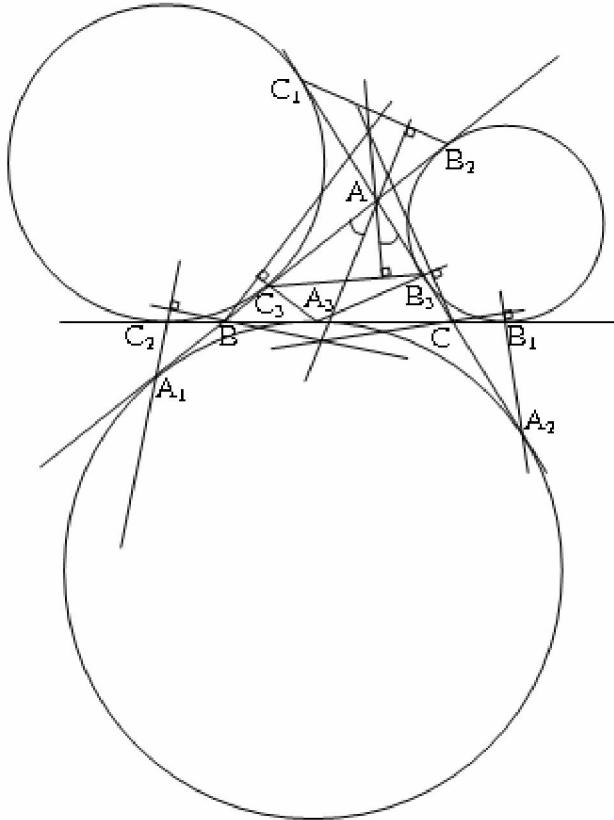


Theo định lý Carnot 1 $\Rightarrow$ các đường thẳng qua I_1, I_2, I_3 và vuông góc BC, CA, AB đồng quy. Do đó theo định lý Carnot 2 ta có đpcm

Sự kết hợp nhịp nhàng giữa định lý Carnot 1 và 2 đã cho ta một kết quả khá đẹp như trên. Và tiếp theo, để so sánh giữa định lý Ceva và định lý Carnot 2, ta xét tiếp:

Vd7: Cho tam giác ABC. Gọi A_1, A_2 là các tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc A với AB, AC; B_1, B_2 là các tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc B với BC, BA; C_1, C_2 là các tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc C với CA, CB. Các đường thẳng C_1B_2, B_1A_2, A_1C_2 cắt nhau tạo thành tam giác $A_0B_0C_0$. Gọi D_1, D_2, D_3 là các đường thẳng qua A_0, B_0, C_0 và vuông góc BC, CA, AB. Cmr D_1, D_2, D_3 đồng quy

Giải



Cách 1 (dùng định lý Ceva)

d_A, d_B, d_C là các đường thẳng qua A, B, C và vuông góc B_1C_2, A_1B_2, C_1A_2

Gọi $H = d_1 \cap C_1B_2$

$$\text{Ta có } \frac{\sin A_1}{\sin A_2} = \frac{S_{AHC_1}}{S_{AHB_2}} \cdot \frac{AB_2}{AC_1} = \frac{HC_1(p-c)}{HB_2(p-b)}$$

$$\text{Đặt } \overrightarrow{AH} = \alpha \overrightarrow{AC_1} + \beta \overrightarrow{AB_2} \Rightarrow \frac{HC_1}{HB_2} = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\text{do } AH \perp C_1B_2 \Rightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{C_1B_2} = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha \overrightarrow{AC_1} + \beta \overrightarrow{AB_2}) \cdot (\overrightarrow{AB_2} + \overrightarrow{AC_1}) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \frac{(p-b)[(p-b) - \cos A(p-c)]}{(p-c)[(p-c) - \cos A(p-b)]}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\sin A_1}{\sin A_2} &= \frac{(p-b) - \cos A(p-c)}{(p-b) - \cos A(p-b)} \\ &= \frac{\sin \frac{C}{2} \cos \frac{B}{2} - \cos A \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - \cos A \sin \frac{C}{2} \cos \frac{B}{2}} = \frac{\sin \frac{C}{2} \cos \frac{B}{2} - (2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1) \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - (2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1) \sin \frac{C}{2} \cos \frac{B}{2}} \\ &= \frac{\sin \left(\frac{B+C}{2} \right) - 2 \cos^2 \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\sin \left(\frac{B+C}{2} \right) - 2 \cos^2 \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{B}{2}} \cdot \frac{\sin A_1}{\sin A_2} = \frac{1 - 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} \sin \frac{B}{2}}{1 - 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\frac{\sin B_1}{\sin B_2} = \frac{1 - 2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2}}{1 - 2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2}} \quad (2)$$

tương tự

$$\frac{\sin C_1}{\sin C_2} = \frac{1 - 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{A}{2}}{1 - 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}} \quad (3)$$

nhân (1), (2), (3) với nhau $\Rightarrow d_A, d_B, d_C$ đồng quy

theo định lý Carnot 2 $\Rightarrow D_1, D_2, D_3$ đồng quy

Cách 2 (dùng định lý Carnot 2)

Gọi A_3, B_3, C_3 là tiếp điểm của các đường tròn bàng tiếp $(I_a), (I_b), (I_c)$ với các cạnh BC, CA, AB

Để thấy B_3C_3 đối xứng với C_1B_2 qua I_bI_c

Gọi d_a', d_b', d_c' là các đường thẳng qua A, B, C và vuông góc B_3C_3, C_3A_3, A_3B_3

$\Rightarrow d_a', d_b', d_c'$ là các đường đẳng giác của d_a, d_b, d_c .

Dùng định lý Carnot 1, dễ dàng chứng minh các đường thẳng đi qua A_3, B_3, C_3 và vuông góc BC, CA, AB đồng quy

Theo định lý Carnot 2 $\Rightarrow d_a', d_b', d_c'$ đồng quy $\Rightarrow d_a, d_b, d_c$ đồng quy

Theo định lý Carnot 2 $\Rightarrow D_1, D_2, D_3$ đồng quy

Các ví dụ minh họa trong bài viết đa phần là tương đối đơn giản, điều này có thể giúp bạn đọc dễ dàng có cái nhìn cơ bản nhất về mối tương quan của định lý Ceva và định lý Carnot 1 và 2. Đó cũng là mục đích của bài viết này. Vì vậy bài tập làm thêm có lẽ là không cần thiết. Thay vào đó, trong các dạng “chơi đùa” trong thế giới hình học với tam giác và những đường tròn, các bạn hãy thử vận dụng định lý Ceva và định lý Carnot 1, 2 để có được những kết quả thú vị khác, và coi đó là phần bài tập dành cho mình

Chúc các bạn thành công

PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Nguyễn Lữ Khoa – 12 Toán

I/ Giới thiệu

Lượng giác là một bộ môn trong toán học đã xuất hiện lâu đời và một điều không thể phủ nhận, nó đã đóng một vai trò hết sức quan trọng. Nó không chỉ là những hàm số trong giải tích, mà còn liên quan tới hình học cũng như những ngành khác như vật lý. Qua bài viết này, tôi muốn giới thiệu việc sử dụng lượng giác trong chứng minh các bất đẳng thức.

II/ Phép thế lượng giác

1) Chúng ta trước hết xét hai hàm quan trọng trong lượng giác : $\sin x$ và $\cos x$.

Cả hai đều xác định trên $\mathbb{R}$, tập giá trị là $[-1,1]$, tuần hoàn theo chu kỳ 2π và liên tục trên $\mathbb{R}$. Vì thế, với mỗi $a \in [-1,1]$, ta đều tìm được $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ và $y \in [0, \pi]$ sao cho $a = \sin x = \cos y$.

Xét 2 số $a, b \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $a^2 + b^2 = 1$. Khi đó ta có $a, b \in [-1,1]$. Do đó $\exists x \in [0, 2\pi]$ thỏa $a = \sin x, b = \cos x$. Các bạn hãy lưu ý và thử suy nghĩ về miền giá trị của x, y trong các phép đặt trên. Và từ đó hãy chỉ ra cách đặt trong trường hợp $a^2 + b^2 = m$ với $m > 0$.

Hai hàm $\tan$ và $\cot$ xin dành lại cho bạn đọc.

2) Tam giác là một chủ đề mà hình học và lượng giác hết sức quan tâm. Xét $\triangle ABC$, chúng ta hãy thử nhắc lại một số công thức quen thuộc nhé:

$$\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1$$

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C = 1$$

Bây giờ ta thử xét ngược lại xem. Nếu cho $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $ab+bc+ca=1$ thì ta sẽ chỉ ra cách đặt lượng giác thế nào. Các bạn có thể chỉ ra dễ dàng từ công thức lượng giác quen thuộc là $a = \cot x, b = \cot y, c = \cot z$ trong đó $x, y, z \in (0, \pi)$ và $x+y+z = k\pi$ với $k \in \{1, 2, 3\}$. Nếu ta thêm điều kiện tồn tại nhiều nhất một trong ba số a, b, c âm, ta có thể suy ra $k = 1$, tức là x, y, z là ba góc của một tam giác. Các bạn cần phải lưu ý miền xác định cũng như giá trị của biến đặt và biến được đặt. Ngoài cách đặt này ra, các bạn còn có thể đặt $a = \tan x, b = \tan y, c = \tan z$ trong đó $x, y, z \in (0, \pi)$ và $x+y+z = (k-1/2)\pi$ trong đó $k \in \{1, 2, 3\}$.

Dựa vào công thức thứ hai bên trên, các bạn hãy thử chỉ ra cách đặt lượng giác cho a, b, c với $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$. Chắc chắn chúng ta sẽ nghĩ tới $a = \cos x, b = \cos y, c = \cos z$ gì đó. Nhưng rõ ràng không phải a, b, c nào thỏa đẳng thức trên cũng suy ra được $a, b, c \in [-1, 1]$. Vì thế ta cứ thêm điều kiện $a, b, c \in [-1, 1]$ để đặt. Các bạn thử làm tiếp xem.

3) Bây giờ ta sẽ xét $a, b, c > 0$. Dĩ nhiên nếu có điều kiện $ab+bc+ca=1$ thì các bạn có thể chỉ ra cách đặt được. Nhưng nếu ta không có gì cả thì liệu có được không? Sự việc tưởng chừng như phức tạp nhưng thật ra chẳng có gì cả. Trở lại bên trên một chút, giả sử các bạn đang có $a, b \in \mathbb{R}$, các bạn sẽ chỉ ra cách đặt thế nào. Dĩ nhiên ta cho giá trị của $a^2 + b^2 = m$ thì đặt $a = \sqrt{m} \sin x, b = \sqrt{m} \cos x$ với $x \in [0, 2\pi]$. Tức là $\forall a, b \in \mathbb{R}$, ta có thể chỉ ra sự tồn tại của $x \in [0, 2\pi]$ sao cho $\sin x = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos x = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Chắc các bạn cũng tự hỏi

rằng thế thì có liên quan gì tới biến a, b . Thật ra ở đây ta không thể đặt cụ thể lượng giác được biến a và b . Các bạn có thể đặt $a = \tan x, b = \tan y$ nhưng nó không thể hiện được gì cả, nhất là khi ta cần mối quan hệ của a và b . Do đó với cách đặt trên, các bạn sẽ thấy nó sẽ rất có lợi.

Bây giờ, trở lại vấn đề của chúng ta, nếu $a, b, c > 0$ thì ta sẽ chỉ ra cách đặt lượng giác thể hiện mối quan hệ ba biến như thế nào. Các bạn thử suy nghĩ xem.

Chắc các bạn dễ dàng trả lời câu hỏi đó dễ dàng. Khi đó sẽ tồn tại $\triangle XYZ$ thỏa mãn

$$\cot gX = \frac{a}{\sqrt{ab+bc+ca}}, \cot gY = \frac{b}{\sqrt{ab+bc+ca}}, \cot gZ = \frac{c}{\sqrt{ab+bc+ca}}$$

Từ đây các bạn có thể suy ra rằng :

$$\sin X = \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{(a+b)(a+c)}}, \sin Y = \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{(b+c)(b+a)}}, \sin Z = \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{(c+a)(c+b)}}$$

$$\cos X = \frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}, \cos Y = \frac{b}{\sqrt{(b+c)(b+a)}}, \cos Z = \frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}},$$

Nếu các bạn thay a, b, c bằng $\frac{\sqrt{cb}}{\sqrt{a}}, \frac{\sqrt{ca}}{\sqrt{b}}, \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{c}}$, ta được

$$\cot gX = \sqrt{\frac{bc}{(a+b+c)a}}, \sin X = \sqrt{\frac{a(a+b+c)}{(b+a)(c+a)}}, \cos X = \sqrt{\frac{bc}{(c+a)(a+b)}}$$

Bây giờ ta sẽ thay a, b, c bởi một số giá trị cụ thể, ở đây ta coi cách đặt đầu tiên là (1), cách đặt sau là (2)

1) Cho $a = \sin A, b = \sin B, c = \sin C$ ($\triangle ABC$) vào trong cách đặt (2) ta được

$$\sin X = \sqrt{\frac{\sin A \cos(\frac{A}{2})}{\cos(\frac{A-C}{2}) \cos(\frac{A-B}{2})}}, \sin Y = \sqrt{\frac{\sin B \cos(\frac{B}{2})}{\cos(\frac{B-C}{2}) \cos(\frac{B-A}{2})}}, \sin Z = \sqrt{\frac{\sin C \cos(\frac{C}{2})}{\cos(\frac{C-A}{2}) \cos(\frac{C-B}{2})}},$$

2) Cho $a = \tan(A/2), b = \tan(B/2), c = \tan(C/2)$ vào trong cách đặt (2) ta có

$$\sin X = \sqrt{\frac{1}{2} \sin A \left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \right)}, \sin Y = \sqrt{\frac{1}{2} \sin B \left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \right)},$$

$$\sin Z = \sqrt{\frac{1}{2} \sin C \left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \right)}$$

3) Cho $a = x(y^2+z^2), b = y(z^2+x^2), c = z(x^2+y^2)$ vào cách đặt thứ hai ta có

$$\sin X = \sqrt{\frac{x(z^2+y^2)M}{(x+y)(x+z)(y^2+zx)(z^2+xy)}}, \sin Y = \sqrt{\frac{y(z^2+x^2)M}{(x+y)(y+z)(x^2+yz)(z^2+xy)}},$$

$$\sin Z = \sqrt{\frac{z(x^2+y^2)M}{(z+y)(z+x)(y^2+zx)(x^2+zy)}}$$

$$\cos X = \sqrt{\frac{yz(x^2+z^2)(x^2+y^2)}{(x+y)(x+z)(y^2+zx)(z^2+xy)}}, \cos Y = \sqrt{\frac{zx(y^2+z^2)(y^2+x^2)}{(x+y)(y+z)(x^2+yz)(z^2+xy)}},$$

$$\cos Z = \sqrt{\frac{yx(z^2+x^2)(z^2+y^2)}{(z+y)(z+x)(y^2+zx)(x^2+zy)}}$$

trong đó $M = x^2y + x^2z + y^2z + y^2x + z^2x + z^2y$.

Các bạn hãy thử so sánh xem cách đặt nào lợi hơn hoặc trường hợp nào nên dùng cách đặt (1) hay (2).

III/ Một số bất đẳng thức liên quan giữa ΔXYZ và ba số thực m, n, p .

Phần này tôi xin giới thiệu một số bất đẳng thức con để thuận tiện trong việc chứng minh một số bất đẳng thức khác

Cho ΔXYZ và 3 số thực m, n, p . Khi đó ta có:

$$1) 2(mn\cos Z + np\cos X + pm\cos Y) \leq m^2 + n^2 + p^2$$

Chứng minh

Ta đặt ba vector đơn vị e_1, e_2, e_3 lần lượt trên XY, YZ, ZX . Khi đó ta có

$$(me_1 + ne_2 + pe_3)^2 \geq 0 \quad \text{ó} \quad m^2 + n^2 + p^2 + 2mne_1e_2 + 2pne_2e_3 + 2mpe_1e_3 \geq 0$$

$$\text{ó} \quad (m^2 + n^2 + p^2) \geq 2(mn\cos Z + np\cos X + pm\cos Y)$$

Dấu bằng xảy ra khi $m:n:p = \sin X : \sin Y : \sin Z$.

Ngoài ra, các bạn có thể chứng minh bằng cách vận dụng tính chất tam thức bậc hai. Tương tự các bạn có thể chứng minh bất đẳng thức sau

$$2) 4(mn\sin^2 Z + np\sin^2 X + pm\sin^2 Y) \leq (m + n + p)^2$$

Bất đẳng thức sau đây đã được giới thiệu trên báo Toán học và Tuổi trẻ rồi

$$3) m\cot gA + n\cot gB + p\cot gC \geq \sqrt{2mn + 2pm + 2np - m^2 - n^2 - p^2}$$

trong đó m, n, p là 3 số dương thỏa mãn $2mn + 2np + 2mp - m^2 - n^2 - p^2 \geq 0$.

Cuối cùng tôi xin giới thiệu một bất đẳng thức trong tam giác nhọn ABC mà tôi tổng quát lên từ một bất đẳng thức khá quen thuộc :

$$4) (m\cos A + n\cos B + p\cos C)^2 \leq M\sin^2 A + N\sin^2 B + P\sin^2 C$$

trong đó m, n, p là 3 số dương và $M = -m^2 + n^2 + p^2, N = -n^2 + m^2 + p^2, P = -p^2 + m^2 + n^2$.

Với $m=n=p=1$ ta có $(\cos A + \cos B + \cos C)^2 \leq \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$. Lời giải hết sức đơn giản sử dụng bất đẳng thức Bulhiacovski và đẳng thức :

$$\frac{\cos A}{\sin B \sin C} + \frac{\cos B}{\sin A \sin C} + \frac{\cos C}{\sin B \sin A} = 2$$

IV. Các ví dụ

Ví dụ 1

Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng :

$$\frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} \geq 2\sqrt{\frac{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)}{xyz}}$$

Chứng minh

Ta sử dụng bất đẳng thức 2) và cách đặt (2) ta có

$$VP^2 \geq 4 \left(\sum \frac{(x+y)(y+z)}{zx} \sin^2 Y \right) = 4 \sum \frac{(x+y)(y+z)}{zx} \frac{y(x+y+z)}{(y+x)(y+z)} = VT^2$$

đ đpcm.

Ví dụ 2

Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2$$

Chứng minh

Ta có bất đẳng thức ở trên tương đương với $\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 4$

Lưu ý rằng ở dưới tử có $ab+bc+ca$. Điều này gợi ta sử dụng cách đặt (1). Áp dụng bất đẳng thức 2) ta có

$$\begin{aligned} \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} &\geq 4 \left(\sum \frac{bc}{ab+bc+ca} \sin^2 X \right) = 4 \left(\sum \frac{bc}{ab+bc+ca} \frac{ab+bc+ca}{(a+b)(b+c)(c+a)} \right) = \\ &= 4 \left(\sum \frac{bc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \right) = 4 \left(1 - \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \right) \\ &\Rightarrow \text{đpcm} \end{aligned}$$

Ví dụ 3

Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$64a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2)^3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \leq (a^2+b^2)^2(b^2+c^2)^2(c^2+a^2)^2(a+b+c)^4$$

Chứng minh

Nếu ta đặt $x = a^2, y = b^2, z = c^2$ thì vế trái của bất đẳng thức vừa chứa cả $xy + yz + zx$ và $x+y+z$, đồng thời vế phải chứa $(x+y)(y+z)(z+x)$. Điều này làm cho ta nghĩ tới việc sử dụng 2 cách đặt một lúc : cách (1) cho ΔXYZ , cách (2) cho $\Delta X'Y'Z'$. Áp dụng bất đẳng thức 2) ta có:

$$\begin{aligned} (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2 &\geq 4 \left(\sqrt{yz} \sin^2 \frac{X+X'}{2} \right) \geq 4 \sum \sqrt{yz} \sin X \sin X' \\ &= 4 \sum \sqrt{yz} \sqrt{\frac{x(x+y+z)}{(x+y)(x+z)}} \sqrt{\frac{xy+yz+zx}{(x+y)(x+z)}} = 4 \sqrt{xyz(x+y+z)(xy+yz+zx)} \left(\sum \frac{1}{(x+y)(x+z)} \right) \end{aligned}$$

đ đpcm

Qua 3 ví dụ trên, hẳn các bạn cũng thấy sự lợi hại của lượng giác như thế nào. Nó đưa ta đến những lời giải hết sức ngắn gọn mà nhiều khi những phương pháp khác lại không thể nào làm được hoặc rất phức tạp. Bạn đọc hãy tự thắc mắc và trả lời các câu hỏi sau đây

- 1) Khi nào ta có thể sử dụng phương pháp này ?
- 2) Khi nào thì ta sử dụng cách đặt nào ?
- 3) Khi nào ta xài bất đẳng thức phụ nào ?

Thật ra có rất nhiều những bất đẳng thức phụ như thế nhưng tôi chỉ tạm thời đưa ra 4 bất đẳng thức phụ hay dùng. Qua 2 ví dụ dưới đây, một lần nữa các bạn lại thấy rằng phương pháp này cũng rất hữu hiệu đối với những bất đẳng thức lượng giác. Sau đây tôi xin giới thiệu 2 bất đẳng thức rất nổi tiếng của nhà toán học Jack Garfunkel

Ví dụ 4

Cho ΔABC . Chứng minh rằng

$$\cos\left(\frac{B-C}{2}\right) + \cos\left(\frac{C-A}{2}\right) + \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \geq \frac{2}{\sqrt{3}}(\sin A + \sin B + \sin C)$$

Chứng minh

Sử dụng cách đặt 1) trong trường hợp cụ thể và bất đẳng thức 2) ta có

$$VP^2 \geq 4 \sum \cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{C-A}{2} \sin^2 X = 4 \sum \cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{C-A}{2} \frac{\sin A \cos \frac{A}{2}}{\cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{C-A}{2}} = 4 \sum \sin A \cos \frac{A}{2}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Bulhiacovski ta có

$$VT^2 = \left(\sum \sqrt{\sin A \cos \frac{A}{2}} \sqrt{2 \sin \frac{A}{2}} \right)^2 \leq \left(\sum \sin A \cos \frac{A}{2} \right) \left(\sum 2 \sin \frac{A}{2} \right) \leq 3 \left(\sum \sin A \cos \frac{A}{2} \right)$$

đ đpcm

Ví dụ 5

Cho ΔABC . Chứng minh rằng : $tg^2 \frac{A}{2} + tg^2 \frac{B}{2} + tg^2 \frac{C}{2} + 8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \geq 2$

Chứng minh

Đây là bất đẳng thức trong ví dụ 3 nếu ta thay $x = tg(A/2)$, $y = tg(B/2)$, $z = tg(C/2)$.

Cuối cùng tôi xin kết thúc bài viết này bằng một số bài tập. Riêng bài tập cuối cùng là một bất đẳng thức cho 4 số. Hi vọng các bạn sẽ tìm thêm được nhiều điều thú vị qua chúng.

1) Cho ΔABC nhọn. Tìm giá trị lớn nhất của

$$\left(tg \frac{A}{2} + tg \frac{B}{2} + tg \frac{C}{2} \right) \left(\sqrt{\cot g B \cot g C} + \sqrt{\cot g A \cot g C} + \sqrt{\cot g B \cot g A} \right)$$

2) Cho ΔABC . Chứng minh rằng

$$m_a m_b + m_b m_c + m_c m_a - l_a l_b - l_b l_c - l_c l_a \geq \frac{1}{4} (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

3) Cho $x, y, z \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $x+y+z = 2004$. Tìm giá trị lớn nhất của $xy \sin A + yz \sin B + zx \sin C$ trong đó A, B, C là 3 góc một tam giác.

4) Cho $x, y, z > 0$ và $xy + yz + zx = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+z^2} + z\sqrt{1+x^2}$

5) Cho $a, b, c, d > 0$ thỏa $abcd = 1$. Chứng minh rằng

$$\left| \sum_{(cyclic)} \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{(1+a)(a+b)}} \right| + \frac{\sqrt{ac} + 1}{\sqrt{(a+1)(c+1)}} + \frac{\sqrt{bd} + 1}{\sqrt{(b+1)(d+1)}} \leq 2$$

CÁC SỐ LŨY THỪA MOD P

Kha Tuaán Minh-12 Toaùn

< Wherever there is a number, there is beauty >

Proclus Diadochus

I. Mở đầu :

Vaán ñeà taäp hôïp caùc soá k – phöông (mod p); trong ñoù p laø soá nguyêân toá; ñaõ ñöôïc caùc nhaø toaùn hoïc nghiêân cöùu töø raát laâu (khoaùng theá kyû 17 cho ñeán nay) vaø hieän nay ñây laø moät lönh vöïc raát roäng trong lyù thuyeát soá. Dó nhieân, chæ vòu trình ñoä phoả thoâng, vòu baøi baøu naøy chuùng toái chæ xin nhaéc laïi moät soá kieán thöùc cô baùn vaø moät soá coâng cuï caàn thieát ñeå giaûi quyêát caùc baøi toaùn sô caáp,cô baùn coù lieân quan ñeán vaán ñeà chính.

II. Số chính phương mod p :

Trở òu c heát ta ñi vaø “theá giòu i cuûa caùc soá chính phöông mod p”, ñây laø tröông hïp ñôn giaûn nhaát cuûa soá k – phöông.

Nếu ta xét tổng $\sum_{i=0}^{p-1} a^i$ thì ta có:

* **Caùc tính chaát cô baùn cuûa :** $\left(\frac{a}{p}\right)$

a) $a, b \in \mathbb{Z}, p \nmid a, p \nmid b$

$$\text{i) } \left(\frac{1}{p}\right) = 1, a \equiv b \Rightarrow \left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right) \text{ (ii)}$$

$$\text{iii) } \left(\frac{a^2}{p} \right) = 1, \quad \left(\frac{a}{p} \right) \left(\frac{b}{p} \right) = \left(\frac{ab}{p} \right)$$

$$\text{iv) } \left(\frac{a}{p} \right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$$

b) *Luaät thuaän nghòch bình phồông*: (Luaät tồông hoả thaêng dồ baắc hai cuũa Gauss)

i) p, q là 2 số nguyên tố khác nhau.

Khi ñoù:

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$$

ii) p nguyên tố lẻ: $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$

$$\text{h\^on n\^o\^a: v\^ou\^i a l\^eu} \in \mathbb{Z} : p \mid x \text{ a th\^i} \left(\frac{a}{p} \right) = (-1)^{\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{ja}{p} \right]}$$

Caùc tính chaát trên ñaõ ñõõic chõùng mình trong nhieàu taøi lieäu maø caùc baïn coù theå tìm thaáy.

Tieáp theo chuùng toái xin giòuì thieäu moät soá ví duịi nhoụ lieân quan ñeân vaân ñeân naøy.

Ví dụ 1: Traéc nghiẽm Pepin

CMR: Số Fermat F_m là số nguyên tố khi và chỉ khi $3^{\frac{F_m-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$ (*)

Số Fermat là số có dạng $F_m = 2^{2^m} + 1$

Chứng minh:

Gia sử F_m là số nguyên tố. Theo luật thừa nhận nghịch bình phương (tính chất e và i) ta có:

$$\left(\frac{3}{F_m}\right)\left(\frac{F_m}{3}\right) = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{F_m}\right) = \left(\frac{F_m}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) = -1$$

Theo tiêu chuẩn Euler tính chất b) $\left(\frac{3}{F_m}\right) \equiv 3^{\frac{F_m-1}{2}} \pmod{F_m}$

Vậy $3^{\frac{F_m-1}{2}} \equiv -1 \pmod{F_m}$

Chứng minh: Giả sử F_m có ước nguyên tố p nếu F_m thỏa mãn không đồng dư (*)

Vậy $\text{ord}_p 3$ phải là ước của $F_m - 1$, tức là lũy thừa của 2, mà ước tố

giả thuyết suy ra $\text{ord}_p 3$ không chia hết $\frac{F_m - 1}{2} = 2^{2^{m-1}}$

Vậy $\text{ord}_p 3$ chỉ có thể là 2^{2^m} tức là $\text{ord}_p 3 = F_m - 1$. từ đó suy ra

$$F_m - 1 \leq p - 1$$

Vì p là ước của F_m nên $F_m = p$

Do đó F_m là số nguyên tố. **Q.E.D.**

Nhận xét: Dạng tiêu chuẩn Pepin chúng ta đã chứng minh với F_1, F_2, F_3, F_4 là số nguyên tố còn F_5 là hợp số.

Ví dụ 2: Cho $m \in \mathbb{N}^*$, $m \geq 2$. CM mọi ước nguyên tố p của số Fermat F_m đều có dạng $2^{m+2}k + 1$, trong đó $k \in \mathbb{N}^*$

Giải:

Giả sử p là ước nguyên tố của F_m .

_ Bổ đề: Giả sử h là cấp của 2 mod p (p lẻ)

Khi đó $h = 2^{m+1}$

_ Mà ước tố: $m > 1$ nên nếu $p / 2^{2^m} + 1 \Rightarrow 2^{2^{m+1}} \equiv 1 \pmod{p}$

$$\Rightarrow 2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \text{ (định lý Fermat)}$$

$$\Rightarrow p - 1 \mid 2^{m+1} \Rightarrow p \equiv 1 \pmod{8}$$

theo tính chất e ii) ta có $\left(\frac{2}{p}\right) = 1 \Leftrightarrow 2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$

$$\Rightarrow \frac{p-1}{2} \mid h = 2^{m+1} \Leftrightarrow p \equiv 1 \pmod{2^{m+2}}$$

Do đó tồn tại $k \in \mathbb{N}^*$: $p = 2^{m+2}k + 1$. (đpcm) **Q.E.D.**

Ví dụ 3: Cho F_n là tổng n của dãy Fibonacci. CM nếu p là số nguyên

toán > 5 thì $F_p \equiv \left(\frac{p}{5}\right) \pmod{p}$

Giải:

$$F_p \equiv \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^p - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^p \right) = \frac{1}{2^{p-1}} \sum_{i=0}^{p-1} C_p^{2i+1} \cdot 5^i$$

do $(2^{p-1}, p) = 1$ và $\forall 1 \leq i \leq p-1: C_p^i \equiv 0 \pmod{p}$ nên $2^{p-1} \cdot F_p \equiv C_p^p \cdot 5^{\frac{p-1}{2}}$

$$\text{Mà } 2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow F_p \equiv 5^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{5}{p} \right) = \left(\frac{p}{5} \right) \pmod{p} \quad \text{J}$$

2 ví dụ sau là hoán toán tổng đối ví dụ 1.

Ví dụ 4: $n \geq 2: p = 2^n + 1$. CM nếu $3^{\frac{p-1}{2}} + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ thì p là nguyên tố.

Ví dụ 5: $n = 4^k + 1, k \in \mathbb{N}^*$. CM n nguyên tố $\Leftrightarrow 3^{\frac{n-1}{2}} + 1 \mid n$

III – Số lập phương mod p :

p nguyên tố > 3 . là các số có dạng: $a \equiv x^3 \pmod{p}$ với $x \in \{0, \dots, p-1\}$.

Nếu nghiên cứu tính chất các số lập phương mod p ta cần nghiên cứu tính chất nghiệm của phương trình bậc 3 sau: $X^3 \equiv 1 \pmod{p} \quad (1)$

Bây giờ ta tiến hành giải và biến luận phương trình bậc 3 (1) với

$X \in \mathbb{Z}_p = \{0, \dots, p-1\}$.

Xét X không tương đương 1 mod p ($X \not\equiv 1 \pmod{p}$) là một nghiệm của (1)

$$(1) \Leftrightarrow X^2 + X + 1 \equiv 0 \pmod{p} \quad (2)$$

a) $p = 3k + 2$: do $X^3 \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow X^{3k} \equiv 1 \pmod{p}$

Theo định lý Fermat: $X^{3k+1} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow X \equiv 1 \pmod{p}$ (vô lý)

Vậy với $p \equiv 2 \pmod{3}$ phương trình có nghiệm duy nhất $X \equiv 1 \pmod{p}$

b) $p = 3k + 1$ ta sẽ giải (2) và chứng minh nó có 2 nghiệm phân biệt mod p .

– Nhận xét: trong các số $1^k, 2^k, \dots, (p-1)^k$ phải $\exists a: 1 \leq a \leq p-1$ mà a^k không $\equiv 1 \pmod{p}$ [thực chất ta có thể chọn a là các nguyên thủy mod p]

– Theo định lý Fermat: $a^{3k} \equiv 1 \pmod{p} \quad (*)$

Nếu $r = a^k$ không $\equiv 1 \pmod{p}$ và áp dụng (*) có $r^3 - 1 = (r-1)(r^2 + r + 1) \equiv 0 \pmod{p}$ vì $r-1$ không $\equiv 0 \pmod{p}$ cho nên $r^2 + r + 1 \equiv 0 \pmod{p}$

Khi $(r+1)^2 - (r+1) + 1 = r^2 + r + 1 \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow r^2 = -(r+1)$ cũng là nghiệm của (2)

Ta có r^3 không $\equiv r \pmod{p}$.

Vậy ta có npcm

Xét $p = 3k + 2$ thế thì theo chứng minh trên hệ lập phương mod p gồm đúng p số $\{0, 1, \dots, p-1\}$ cũng chính là hệ thừa số nguyên thủy mod p .

Xét $p = 3k + 1$:

$X^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow (x^k)^3 \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow x^k$ là nghiệm của phương trình bậc 3 $x^3 \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow x^k \in \{0, r, \dots, -(r+1)\} \pmod{p}$.

Ta sẽ mô tả một số tính chất của tập hợp $\{1, 2, \dots, (p-1)\} = \mathbb{Z}_p$ qua 3 tập hợp sau:

- A là tập hợp tất cả các số phân biệt mod p mà $x^k \equiv 1 \pmod{p}$
- B là tập hợp tất cả các số phân biệt mod p mà $x^k \equiv r \pmod{p}$
- C là tập hợp tất cả các số phân biệt mod p mà $x^k \equiv -(r+1) \pmod{p}$

Roõ raøng A, B, C laø moät phaân hoaïch cuûa Z_p .

Ta chøùng minh A laø taäp $\{1^3, 2^3, \dots, (p-1)^3\}$ thoâng qua meänh ñeà toång quaut sau (xem c/m ñoàn lí 1 ôû phaàn IV)

Cho $(a, p) = 1, n \in \mathbb{N}^*$ thoaû $n/p-1$ khi ñoù phöông trình ñoàng dö $x^n \equiv a \pmod{p}$ coù nghieäm $\Leftrightarrow a^{\frac{p-1}{n}} \equiv 1 \pmod{p}$. Theo meänh ñeà treân: $x^{\frac{p-1}{3}} \equiv 1 \pmod{p} \Leftrightarrow x$ laø laäp phöông mod p.

Vaäy A laø heä thaêng dö laäp phöông mod p.

Hieän nhieän $B \cup C$ laø taäp hôïp goàm taát caù caùc soá thuaùc Z_p nhöng khoâng laø soá laäp phöông mod p.

Tính chaát:

$$* x, y \in A \Rightarrow xy \in A$$

$$* x \in B, y \in C \Rightarrow xy \in A$$

$$\text{CM: } \begin{cases} x \in B \\ y \in C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^k \equiv r \pmod{p} \\ y^k \equiv -(r+1) \pmod{p} \end{cases} \Rightarrow (xy)^k \equiv -r^2 - r \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow xy \in A.$$

* $x \in C(B), y \in C(B) \Rightarrow xy \in B(C)$ caùc tính chaát naøy chøùng minh töông töï nhö treân.

Sau ñaây chuùng ta coù 1 soá baøi toaùn lieân quan:

Ví duï 7: $n \in \mathbb{N}, n > 1$

$$a) (1) \forall x \in \mathbb{Z}: x^3 \equiv 1 \pmod{n} \Rightarrow x \equiv 1 \pmod{n}$$

$$x^3 \equiv 0 \pmod{n} \Rightarrow x \equiv 0 \pmod{n}$$

$$(2) n = \prod p_i \text{ với } p_i \in P; \text{ à } p_i \neq p_j \text{ với } i \neq j;$$

$$\begin{cases} p_i \equiv 2 \pmod{3} \\ p_i \equiv 0 \pmod{3} \end{cases} \forall i$$

$$\text{CM } (1) \Leftrightarrow (2)$$

$$b) n \in \mathbb{Z} \text{ thoaû } \forall x \in \mathbb{Z}:$$

$$\begin{cases} x^3 \equiv 1 \pmod{n} \Rightarrow x \equiv 1 \pmod{n} \\ x^3 \equiv 0 \pmod{n} \Rightarrow x \equiv 0 \pmod{n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3 \equiv 1 \pmod{n} \Rightarrow x \equiv 1 \pmod{n} \\ x^3 \equiv 0 \pmod{n} \Rightarrow x \equiv 0 \pmod{n} \end{cases}$$

$$\text{CM neáu } x^3 \equiv y^3 \pmod{n} \text{ thì } x \equiv y \pmod{n}$$

Höông ñaân: Soû döng caùc tính chaát cuûa phöông trình ñoàng dö (1), (2).

Ñaâu tieân haøy chøùng minh soá muõ cuûa möi ööùc nguyêân toá cuûa n baèng 1

Ví duï 8: Cho p laø soá nguyêân toá > 3 , $a, b, c \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ vaø a, b, c ñoài möt khác

nhau $\pmod{p}$; $a^3 \equiv b^3 \equiv c^3 \pmod{p}$.

$$\text{CMR: } a^2 + b^2 + c^2 \nmid a + b + c \text{ (Ba Lan 2003)}$$

Giaûi

Vì $a \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ neân toàn taïi a' laø phaàn töù nghòch ñaùo modulo p cuûa a (nghiaõ laø $aa' \equiv 1 \pmod{p}$). Roõ raøng $(a', p) = 1$ neân :

$$(aa')^3 \equiv (ba')^3 \equiv (ca')^3 \equiv 1 \pmod{p} \text{ neân } \{aa'; ba'; ca'\} = \{1, r, -r-1\}.$$

$$\Rightarrow a'(a+b+c) \equiv 1 + r - (r+1) \equiv 0 \pmod{p}$$

$$\Rightarrow a + b + c \equiv 0 \pmod{p}$$

$$\text{do } a, b, c \in \{1, \dots, p-1\} \text{ neân } 0 < a + b + c < 3(p-1) \Rightarrow a + b + c \in \{p; 2p\}$$

Maët khaùc $a^2 (a^2 + b^2 + c^2) \equiv 1^2 + r^2 + (-(r+1))^2 \equiv 2(r^2 + r + 1) \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \equiv a + b + c \pmod{p}$

Maët khaùc $a^2 + b^2 + c^2 \equiv a + b + c \pmod{2} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \equiv a + b + c \pmod{2p}$

Maø $2p \nmid a + b + c \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \equiv 0 \pmod{(a+b+c)} \Rightarrow \text{npcm } J$

IV – Sơ lược về lớp số k phương:

Ta có các định lý sau về các số k – phương

Định lý 1: Cho m là số nguyên dương có căn nguyên thủy $g(a, m) = 1$: phương trình đồng dư $x^n \equiv a \pmod{m}$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow a^{\frac{\varphi(m)}{(\varphi(m), n)}} \equiv 1 \pmod{m}$$

trong đó ký hiệu $\varphi(x)$ là hàm Euler của số nguyên dương x.

Đây là định lý tổng quát của mệnh đề trên. (phần số LP mod p)

Chøùng minh:

Nieàu kieän caàn: Giaû söû pt coù nghieäm x_0 . Khi ñoù $(a, m) = 1$ neân $(x_0, m) = 1$.

$$a^{\frac{\varphi(m)}{(\varphi(m), n)}} \equiv (x_0)^{\frac{n\varphi(m)}{(\varphi(m), n)}} \equiv 1 \pmod{m} \text{ (Ñònh lí Euler). Ta coù npcm. } J$$

Nieàu kieän ñuù: Goïi g laø caên nguyeân thuûy mod m. Toản taïi

$b \in S = \{1, 2, \dots, \varphi(m)\}$ sao cho $a \equiv g^b \pmod{m}$.

$$\text{Maø } a^{\frac{\varphi(m)}{(\varphi(m), n)}} \equiv g^{\frac{b\varphi(m)}{(\varphi(m), n)}} \equiv 1 \pmod{m} \text{ neân } \frac{b\varphi(m)}{(\varphi(m), n)} \mid \varphi(m) \Rightarrow b \mid (\varphi(m), n)$$

Xeùt phöông trình ñoàng dö $nu \equiv b \pmod{\varphi(m)}$ coù $(\varphi(m), n)$ nghieäm phaân bieät mod $(\varphi(m))$. Goïi U laø taäp nghieäm naøy thì $|U| = (\varphi(m), n)$.

Ta coù:

$$u \in U \Rightarrow nu \equiv b \pmod{\varphi(m)} \Rightarrow g^{nu} \equiv g^b \pmod{m} \Rightarrow x^n = (g^u)^n \equiv a \pmod{m}$$

Vaäy $x = g^u, u \in U$, laø nghieäm cuûa pt ñoàng dö ban ñàu. J

Töø ñây chuùng ta suy ra ngay:

Ñònh lyù 2: Cho m laø soá nguyeân döông coù caên nguyeân thuûy.

Phöông trình ñoàng dö $x^n \equiv a \pmod{m}$ trong ñoù $(a, m) = 1$, neáu phöông trình coù nghieäm thì noù coù ñuùng $(\varphi(m), n)$ nghieäm.

Ví dụ 9: Cho $n \geq 2$ tuyø yù. CM $\exists x \in \mathbb{Z}$ sao cho $x^3 + 17 \mid 3^n$

CM: Xeùt phöông trình $x^3 \equiv -17 \pmod{3^n}$ (* ‘)

Theo ñònh lyù 1 aùp döng $m = 3^n$ laø soá nguyeân döông coù toản taïi CNT.

$$\text{Phöông trình (* ‘) naøy coù nghieäm } x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (-17)^{\frac{\varphi(3^n)}{(\varphi(3^n), 3)}} \equiv 1 \pmod{3^n}$$

$$\Leftrightarrow 17^{2 \cdot 3^{n-2}} \equiv 1 \pmod{3^n} \quad (**)$$

Duong quy naïp $\forall n \geq 2$ c/m deã daøng (**’) ñuùng.

Vaäy (**’) ñuùng $\Leftrightarrow (*)$ coù nghieäm $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{npcm.}$

Ví dụ 10: (baøi toàùn soá k – phöông mod 2^n)

Cho $k, n \in \mathbb{N}^*$; a goïi laø soá k – phöông mod 2^n neáu $\exists b \in \mathbb{Z}$ thoaû maõn:

$$\begin{cases} a \equiv 1 \pmod{2} \\ a \equiv b^k \pmod{2^n} \end{cases}$$

Xeùt taäp $S = \{1, 2, \dots, 2^n - 1\}$. Goïi S^* laø taäp taát caù cauc soá k – phöông mod 2^n cuûa taäp S , bieän luaän $|S^*|$

Giaûi: Xeùt $n \geq 3$.

1) k chaün: $k = 2^u \cdot t \quad (t, 2) = 1 \text{ u} \geq 1.$

Giaû söû $\exists y, y' \in S. y \neq y' \text{ vaø } y^{2^u t} \equiv y'^{2^u t} \pmod{2^n}$

$$\text{Choïn } y'^{-1} \Rightarrow (y'^{-1}.y)^{2^u t} \equiv 1 \pmod{2^n}$$

Bây giờ ta xét phương trình modulo $X^k \equiv 1 \pmod{2^n}$

$$\Rightarrow X^{2^u} \equiv 1 \pmod{2^n} \Rightarrow (X^2 - 1)(X^2 + 1)(X^4 + 1) \dots (X^{2^{u-1}} + 1) \equiv 0 \pmod{2^n}$$

Xeùt $1 \leq u \leq n-2$

Do $X^{2^l} + 1 \equiv 2 \pmod{4} \forall l \geq 1$, X leu

$$\Rightarrow X^2 \equiv 1 \pmod{2^{n-u+1}} \Leftrightarrow X \equiv \pm 1 \pmod{2^{n-u}}$$

Trong S có 2^{u+1} số X thỏa phương trình đã cho.

Xeùt càuc soá k – phöông sau: $1^k, 3^k, \dots, (2^n - 1)^k$ (1)

Vì thế mỗi số k – phương $\neq$ nhau nối tiếp lại 2^{u+1} lần trong dãy (1). Vậy số

soá k – phöông lêu laø: $\frac{2^{n-1}}{2^{u+1}} = 2^{n-u-2}$ (soá)

$$X \text{ e } u \text{ t } n-1 \leq u \Rightarrow X^{2^{n-1}} \equiv 1 \pmod{2^n}$$

$$\Rightarrow X^{2^u t} \equiv 1 \pmod{2^n} \Rightarrow X^k \equiv 1 \pmod{2^n}, \forall X \in S$$

$$\text{vaäy} \mid S^* \mid = 1.$$

2) Xeùt k leù: $X^k \equiv 1 \pmod{2^n}$ chæ coù duy nhaát

$$\begin{cases} X \equiv 1 \pmod{2^n} \\ X \in S \end{cases} \Rightarrow X = 1 \Rightarrow |S^*| = 2^{n-1}$$

Xeùt $n = 2$:

$$k \leq \text{co} 2 \text{ soa} |S^*| = 2$$

k chaün coù 1 soá $|S^*| = 1$

— Xeùt n = 1: $|S^*| = 1$

$$n \geq 3$$

k chaün $|S^*| = 2^{n-o_2(k)-2}$

$$k \text{ leu } |S^*| = 2^{n-1}$$

Qua những ví dụ nêu trên, tôi và các bạn nào chuyên ngành một phần nào về nội bộ và bí ẩn của lý thuyết số mà các số k-phông mod p chiếm giữ một vai trò không nhỏ.

Trong phần này, các bạn thử suy nghĩ mở rộng nhìn lí 1,2 vài một số nguyên đồng m bất kì xem sao?...Chắc chắc câu trả lời sẽ phòch táp hơn không rất thú vị!

Hy vờing càuc bảỉn seõ thaønh công tìm toại ra nhữõng kết quả mảỉnh hõn, mõi mĩ, sảùng tảõ nhữõng cuõng ãà y ãi ảũ kỉ dĩ ảũ trong mảỉnh ã ả ả “soả hỏĩ” nhĩ ả ti ả m ã ả ã ả. Chũc càuc bảỉn gả ả hả ả nhữõng “tra ả ngo ả quả ã ả” trẽ ả cõ ã ả ã ả to ả ả hỏĩ... J

Nếu kết thúc bài viết như vậy, xin nêu một số bài tập để bạn thử vận dụng:

Baøi taäp 1:

- a) C/m $\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists m \in \mathbb{N}^*: m^3 + 10 \nmid 3^k$.
 b) Tìm mọi $a \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn nhiều kiện: $\forall$ số nguyên dương $k, \exists$ số nguyên dương m sao cho $m^3 + 10 \nmid 3^k$ (Ñề thi chọn ñoài tuyền PTNK năm hoïc 2003 – 2004)

Bài tập 2:

Cho m là số tố nhĩn ≥ 2 , số nguyên dương n có tính chất là:

$\forall a \geq 1$ và $(a, n) = 1$ thì $a^m \equiv 1 \pmod{n}$

CMR: a) m lẻ: $n \leq 2(2^m - 1)$

b) m chẵn: $n \leq 2^{2+o_2(m)}(2^m - 1)$ trong ñoù $o_2(m)$ là lũy thừa cao nhất của 2 trong khai triển của m . (Romania TST 2004)

Bài tập 3: $p \in \mathbb{P}$ và các số nguyên $1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_k \leq p-1 \forall i, j, : \exists t \ r_i r_j \equiv r_t \pmod{p}$

a) CMR $\forall k \geq 3: \sum_{i=1}^k r_i^2 \equiv 0 \pmod{p}$

b) Tõu số của phân số $\frac{a}{b} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{r_i}$ trong ñoù $(a, b) = 1$ thì chia hết cho p^2 nếu k

là số chẵn lớn hơn 2.

Bài tập 4: Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $m, n \geq 2$ sao cho $a^n \equiv 1 \pmod{m}, \forall a \in \{1, 2, \dots, n\}$ (Romania TST 2003).

Bài tập 5: p nguyên tố > 5 . Ñặt $S = \{p - n^2 / n \in \mathbb{N}, n^2 < p\}$. CMR $\exists a, b \in S: 1 < a < b$ và $b \nmid a$ (Balkan 95)

Bài tập 6: Cho $(a, b) = 1, p \in \mathbb{P}, p = 4k + 1$. CMR: $a^{\frac{p-1}{4}} + 2b^{\frac{p-1}{4}} \nmid p$.

Bài tập 7: Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5. Ñặt:

$$f_p(x) = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{(px+k)^2}, x \in \mathbb{Z}. \text{CMR: } \forall x, y \in \mathbb{N}^* \text{ thì } f_p(x) - f_p(y) \text{ khi}$$

viết dạng phân số tối giản luôn chia hết cho p^3 . (USA TST 2003)

V. Tài liệu tham khảo :

- 1) Nhập môn Số Hoïc Thuaät Toaùn – Haø Huy Khoaù – NXB KHKT 1997.
- 2) Giáo trình Ñĩi Số II – Jean Marie Monier – NXBGD.
- 3) Một số ñề thi tở Internet.
- 4) Một số chuyên ñề toaùn chọn lọc bài döông hoïc sinh gioùi-Trööøng ÑHKHTN-ÑHQG Haø Ñoài 2004.

MỘT VÀI DÃY SỐ ĐẶC BIỆT

Bùi Lê Trọng Thanh – 12 Toán

Lê Đăng Khoa- 12 Toán

I. Dãy Fibonacci – Dãy Lucas

Dãy Fibonacci: $f_0 = 0; f_1 = 1; f_2 = 1; f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$

$$L_n = f_{n-1} + f_{n+1}$$

Dãy Lucas : $L_1 = 1; L_2 = 3; L_3 = 4; \dots; L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$

$\{f_n\}$: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,...

$\{L_n\}$: 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, ...

1) Xác định số hạng tổng quát của hai dãy:

Dãy Fibonacci cho 2 số $\alpha < \beta$ thoả $\alpha\beta = -1$, $\alpha + \beta = 1$ và để có $\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
tức là α, β là 2 nghiệm của phương trình: $x^2 = x + 1$

Ta có: $f_{n+1} = f_n + f_{n-1} = (\alpha + \beta)f_n - \alpha\beta.f_{n-1}$

$$\Rightarrow f_{n+1} - \alpha.f_n = \beta(f_n - \alpha.f_{n-1}) = \beta^2(f_{n-1} - \alpha.f_{n-2}) = \dots = \beta^n(f_1 - \alpha.f_0) = \beta^n$$

Tương tự: $f_{n+1} - \beta.f_n = \alpha^n$

$$f_n = \frac{\beta^n - \alpha^n}{\beta - \alpha} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Vậy :

Dãy Lucas ta có:

$$\begin{aligned} L_n = f_{n-1} + f_{n+1} &= \frac{\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}}{\beta - \alpha} + \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha} = \frac{-\alpha.\beta(\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}) + \beta^{n-1} - \alpha^{n-1}}{\beta - \alpha} \\ &= \frac{(\beta^n + \alpha^n)(\beta - \alpha)}{\beta - \alpha} = \beta^n + \alpha^n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \end{aligned}$$

2) Một số tính chất tương đồng giữa 2 dãy:

$$\sum_{i=1}^n f_i^2 = f_n.f_{n+1} \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n L_i^2 = L_n L_{n+1} - 2 \quad (1')$$

Chứng minh:

Ta có: $f_1.f_2 = f_1^2 = 1$

$$f_2.f_3 = f_2(f_1 + f_2) = f_1.f_2 + f_2^2$$

$$f_3.f_4 = f_3(f_2 + f_3) = f_2.f_3 + f_3^2$$

$$f_n.f_{n+1} = f_n(f_{n-1} + f_n) = f_{n-1}.f_n + f_n^2$$

Cộng các vế theo vế ta có:

$$f_n \cdot f_{n+1} = f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2 = \sum_{i=1}^n f_i^2$$

(1') Tương tự ta có:

$$L_1 \cdot L_2 = L_1^2 + 2$$

$$L_2 \cdot L_3 = L_2(L_1 + L_2) = L_1 \cdot L_2 + L_2^2$$

$$L_3 \cdot L_4 = L_3(L_2 + L_3) = L_2 \cdot L_3 + L_3^2$$

.....

$$L_n \cdot L_{n+1} = L_n(L_{n-1} + L_n) = L_{n-1} \cdot L_n + L_n^2$$

cộng vế theo vế ta có:

$$L_n \cdot L_{n+1} = 2 + L_1^2 + L_2^2 + \dots + L_n^2$$

$$L_n \cdot L_{n+1} - 2 = \sum_{i=1}^n L_i^2$$

suy ra

$$* \sum_{k=0}^n C_n^k f_k = f_{2n} \quad (2)$$

$$\sum_{k=0}^n C_n^k L_k = L_{2n} \quad (2')$$

Chứng minh:

$$\sum_{k=0}^n C_n^k f_k = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{\beta^k - \alpha^k}{\beta - \alpha} = \frac{1}{\beta - \alpha} \cdot \sum_{k=0}^n [C_n^k \cdot \beta^k - C_n^k \cdot \alpha^k]$$

(2) Ta có:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\beta - \alpha} \left(\sum_{k=0}^n C_n^k \beta^k - \sum_{k=0}^n C_n^k \alpha^k \right) = \frac{1}{\beta - \alpha} ((1 + \beta)^n - (1 + \alpha)^n) \\ &= \frac{1}{\beta - \alpha} [\beta^{2n} - \alpha^{2n}] = f_{2n} \end{aligned}$$

(2) Tương tự:

$$\sum_{k=0}^n C_n^k L_k = \sum_{k=0}^n (C_n^k \beta^n + C_n^k \alpha^n) = (1 + \beta)^n + (1 + \alpha)^n = \beta^{2n} + \alpha^{2n} = L_{2n}$$

$$\sum_{k=0}^n C_n^k 2^k \cdot f_k = f_{3n} \quad (3)$$

$$* \sum_{k=0}^n C_n^k 2^k \cdot L_k = L_{3n} \quad (3')$$

Chứng minh tương tự phần trên lưu ý: $1 + 2\alpha = (1 + \alpha) + \alpha = \alpha^2 + \alpha = \alpha(1 + \alpha) = \alpha^3$

Lưu ý ta không thể tổng quát: $\sum_{k=0}^n C_n^k a^k \cdot f_k = f_{(a+1)n}$ (với $a \in \mathbb{N}^*$; $a > 2$)

3) Các mối quan hệ chia hết:

* f_m chia hết cho $f_n \Leftrightarrow m$ chia hết cho n

$$\frac{f_m}{f_n} = \frac{\beta^m - \alpha^m}{\beta^n - \alpha^n}$$

ta có

dễ dàng chứng minh: $f_m \mid f_n \Leftrightarrow m \mid n$

* f_m chia hết cho $L_n \Leftrightarrow m = 2k.n$ với $k \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{f_m}{L_n} = \frac{\beta^m - \alpha^m}{(\beta^n + \alpha^n)(\beta - \alpha)} \text{ nên } f_m \mid L_n \Leftrightarrow m = 2k.n \quad (k \in \mathbb{N}^*)$$

* $L_m \mid L_n \Leftrightarrow m = (2k+1)n$ ($k \in \mathbb{N}^*$)

$$\frac{L_m}{L_n} = \frac{\beta^m + \alpha^m}{\beta^n + \alpha^n}$$

do

* Định lý quan trọng: $(f_m, f_n) = f_{(m;n)}$

- Ta đặt: $(f_m, f_n) = d; \quad (m, n) = c$

Vậy cần chứng minh $f_c = d$

- Mặt khác ta đã có với c/m thì f_c/f_m và với c/n thì $f_c/f_n \Rightarrow f_c/(f_m.f_n) \Rightarrow f_c/d$ (1)

- Ta lại có với m, n, c nguyên dương tồn tại $a, b \in \mathbb{Z}$ thoả $am + bn = c$

+ Nếu a, b cùng ≤ 0 (loại)

+ Nếu a, b cùng > 0 thì $c = am + bn \geq m + n > m$ (mâu thuẫn c/m)

+ Vậy $a \leq 0$ hoặc $b \leq 0$ giả sử $a \leq 0$

đặt $a_1 = -a$ ta có $bn = c - am = c + a_1m$

Mà ta có $f_{m+n} = f_{n-1}f_m + f_n f_{m+1}$

$$\beta^{n+m} - \alpha^{n+m} = \frac{1}{\beta - \alpha} [(\beta^{n-1} - \alpha^{n-1})(\beta^m - \alpha^m) + (\beta^n - \alpha^n)(\beta^{m+1} - \alpha^{m+1})]$$

(dễ chứng minh)

$$f_{bn} = f_{c+a_1m} = f_{c-1}f_{a_1m} + f_c f_{a_1m+1}$$

Vậy:

$$d \mid (f_m; f_n) \Rightarrow d \mid f_m \wedge d \mid f_n \Rightarrow d \mid f_{a_1m} \wedge d \mid f_{bn} \Rightarrow d \mid f_c f_{a_1m+1}$$

Ta có:

Mà hai số Fibonacci liên tiếp nguyên tố cùng nhau $\Rightarrow (d, f_{a_1m+1}) = 1$

Vậy $d \mid f_c$ (2)

- Từ (1) (2) suy ra $d = f_c$ (đpcm)

- Do đó $(f_m; f_n) = f_{(m;n)}$

4). Một tính chất quan trọng.

Cho phương trình: $x^2 - 5y^2 = \pm 4$ (*)

Phương trình (*) chỉ có nghiệm nguyên dương khi và chỉ khi $(x; y) = (L_n; f_n)$ nguyên dương

Chứng minh:

Ta có:

$$L_n = \beta^n + \alpha^n \Rightarrow L_n^2 = \beta^{2n} + \alpha^{2n} + 2\beta^n \alpha^n = \beta^{2n} + \alpha^{2n} + 2(-1)^n$$

$$f_n = \frac{\beta^n - \alpha^n}{\beta - \alpha} \Rightarrow f_n^2 = \frac{\beta^{2n} + \alpha^{2n} - 2\beta^n \alpha^n}{\beta^2 + \alpha^2 - 2\beta\alpha} = \frac{\beta^{2n} + \alpha^{2n} - 2(-1)^n}{5}$$

$$\Rightarrow f_n^2 \cdot 5 = \beta^{2n} + \alpha^{2n} + (-2)(-1)^n$$

$$\text{Vậy } L_n^2 = 5f_n^2 + 4(-1)^n$$

- Xét $y = 1; 2; 3 \Rightarrow x = 1; 3; 4; 7$

Vậy (*) có những nghiệm là: $(L_1; f_1); (L_2; f_2); (L_3; f_3); (L_4; f_4)$

- Xét $y \geq 4$

$$\left. \begin{aligned} x^2 &= 5f_n^2 \pm 4 \\ L_n^2 &= 5f_n^2 + 4(-1)^n \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^2 - L_n^2 = -8; 0; 8$$

+ Nếu $y = f_n$ thì

$$\text{- Nếu } x^2 - L_n^2 = 0 \Rightarrow x = L_n \text{ (đpcm)}$$

$$\text{- Nếu } x^2 - L_n^2 = \pm 8 \Rightarrow (x - L_n)(x + L_n) = \pm 8$$

giải ra ta dễ dàng có $x = 1; 3$ mà do $y \geq 4 \Rightarrow x^2 \geq 5 \cdot 4^2 - 4 > 9 \Rightarrow$ loại

Vậy $y = f_n$ thì $x = L_n$

+ Nếu $y \neq f_n$; gọi y là số nhỏ nhất thoả mãn phương trình (*)

$$\text{do } y \geq 4 \Rightarrow 2y < x < 3y$$

$$\text{mà } x \equiv y \pmod{2} \text{ nên đặt } x = y + 2t \text{ (} t \in \mathbb{N}^*)$$

$$\text{suy ra } \frac{y}{2} < t < y$$

$$\text{ta có: } 5y^2 \pm 4 = y^2 + 4ty + 4t^2 \Leftrightarrow y^2 - ty - t^2 \pm 1 = 0$$

$$\text{Vậy: } y = \frac{t \pm \sqrt{5t^2 \pm 4}}{2} \Rightarrow 2y = t \pm \sqrt{5t^2 \pm 4}$$

$$\text{Vậy } 5t^2 \pm 4 = (2y - t)^2 = s^2 \text{ với } |\Delta| = 2y - t > 0$$

$$\text{Do } t < y \Rightarrow t = f_n; s = L_n; \Rightarrow 2y = t \pm s = f_n \pm L_n$$

$$\text{Mà } y > 0 \text{ và } f_n < L_n \Rightarrow 2y = f_n + L_n \Rightarrow 2y = f_n + f_{n-1} + f_{n+1}$$

$$\Rightarrow 2y = 2f_{n+1} \Rightarrow y = f_{n+1} \text{ (mâu thuẫn)}$$

$\Rightarrow$ ĐPCM

Vậy ta đã chứng minh được tính chất:

Phương trình: $x^2 - 5y^2 = \pm 4$ chỉ có nghiệm $(x; y) = (f_n; L_n) \forall n \in \mathbb{N}^*$

Từ đây ta rút ra một kết quả quan trọng để nhận biết số Lucas

$$* x \text{ là số Lucas} \Leftrightarrow 5x^2 \pm 20 \text{ là số chính phương} \begin{pmatrix} 5x^2 + 20 \\ 5x^2 - 20 \end{pmatrix}$$

Chứng minh:

$$5x^2 \pm 20 = y^2 \Rightarrow y \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow y = 5y_1 \text{ (} y_1 \in \mathbb{N}^*)$$

$$\text{vậy } x^2 \pm 4 = 5y_1^2 \Rightarrow x^2 - 5y_1^2 = \pm 4$$

Từ tính chất trên ta có phương trình này chỉ có nghiệm $x = L_n$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{y_1} = \frac{a}{b} + \frac{1}{by_0 + b^2 t_1} > \frac{a}{b}$$

$$\frac{x_1}{y_1} > \frac{c}{d}$$

Mặt khác giả sử

$$\frac{x_1}{y_1} - \frac{c}{d} = \frac{dx_1 - cy_1}{y_1 d} \geq \frac{1}{y_1 d} \quad (\text{do } \frac{x_1}{y_1} > \frac{c}{d} \text{ nên tử } \geq 1)$$

$$\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc - ad}{bd} \geq \frac{1}{bd} \quad (\text{do } \frac{c}{d} > \frac{a}{b} \text{ nên tử } \geq 1)$$

$$\frac{1}{by_1} = \frac{bx - ay}{by} = \frac{x}{y} - \frac{a}{b} = \frac{x}{y} - \frac{c}{d} + \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \geq \frac{1}{dy_1} + \frac{1}{bd}$$

$$\text{Vậy nên } \frac{1}{by_1} \geq \frac{y_1 + b}{bdy_1} > \frac{n}{bdy_1} \geq \frac{1}{by_1} \quad (\text{mâu thuẫn})$$

(do $n - b < y_0 + t_1 b = y_1$)

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{c}{d}$$

Vậy

$$\text{Vậy } bc - ad = by_1 - a.x_1 = 1 \quad (\text{đpcm})$$

(a) ta có $\frac{a}{b}; \frac{c}{d}; \frac{e}{f}$ là 3 phân tử liên tiếp trong F_n

$$\text{theo (1)} \quad \begin{cases} bc - ad = 1 \\ de - cf = 1 \end{cases} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \begin{cases} bce - ade = e \\ -acf + ade = a \end{cases} \Rightarrow c(be - af) = a + e \\ (*) &\Leftrightarrow \begin{cases} bcf - adf = f \\ deb - cfb = b \end{cases} \Rightarrow d(be - af) = b + f \end{aligned} \quad \Rightarrow \frac{a + e}{c} = \frac{b + f}{d} = be - af \quad (\text{đpcm})$$

(do $a + e; b + f > 0$)

- Nếu $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ là hai phân tử liên tiếp trong F_n thì $b + d > n$ (3)

Chứng minh:

(3) giả sử $b + d \leq n$ thì xét phân tử $\frac{a + c}{b + d}$ rõ ràng đây là một phân tử của F_n

$$\text{mà } \frac{a}{b} < \frac{a + c}{b + d} < \frac{c}{d} \quad (\text{vô lý})$$

vậy $b + d > n$

- Nếu $n > 1$ thì không có 2 phân tử liên tiếp nào có cùng mẫu số (4)

Chứng minh:

(4) $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{b}$ là hai phân tử liên tiếp của F_n

Khi đó:

$bc - ba = 1 = b(c - a) \Rightarrow b = 1; c = a + 1$ mà $a, c \leq b$ nên 2 phân tử là $\frac{0}{1}; \frac{1}{1} \Rightarrow n = 1$
(loại)
Vậy ta có đpcm

$$N(n) = 1 + \sum_{k=1}^n \varphi(k)$$

- Số các số hạng của F_n được tính bằng công thức:

III – Bài tập:

$$\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k C_n^k f_k = 0$$

1. Cho n lẻ chứng minh:

2. Chứng minh $f_{4n}^2 + 8f_{2n}(f_{2n} + f_{6n})$ là số chính phương

3. Chứng minh $f_{n+1} \cdot L_{n+2} - f_{n+2} \cdot L_n = f_{2n+1}$ tính $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{2n+1}}{L_n L_{n+1} L_{n+2}}$

4. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh với $n = 2p^k$ ($k \in \mathbb{N}^*$) thì L_n luôn tận cùng là 3.

5. Cho dãy $\{x_n\}$ được xác định: $x_1 = a; x_2 = b; x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ ($a, b \in \mathbb{R}$)

1 là số thực k được gọi là giá trị lặp nếu $x_p = x_q = k$ với $p \neq q \in \mathbb{N}^*$

Chứng minh. Ta có thể chọn a, b để dãy có 2005 giá trị lặp (hoặc 1 số hữu hạn nào đó) nhưng không thể chọn a, b để dãy có vô số giá trị lặp.

6. Cho $a_1, a_2, \dots, a_m$ là các mẫu số của các phân số của dãy F_n (dãy Farey)

$m = 1 + \sum_{k=1}^n \varphi(k)$
(). Chứng minh: $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{m-1} a_m} = 1$

7. Chứng minh rằng: $\forall k, e \in \mathbb{Z}^*$ thì $4f_n f_{n+k+e} f_{n-2k+e} + f_k^2 f_{k+1}^2$ là số chính phương

8. Cho dãy Fibonacci (f_n)

Chứng minh $\exists! (a, b, c) \in \mathbb{N}; b < a; c < a$ và $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $(f_n - n \cdot bc^n) \mid a^n$ (Anh)

9. Chứng minh mỗi số hạng của dãy số: $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 2$ ($n \in \mathbb{N}$) là số tự nhiên và biểu diễn dưới dạng: $5k^2$ nếu n chẵn
 k^2 nếu n lẻ (Tiệp Khắc)

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC BÀI TOÁN DÃY SỐ NGUYÊN

Bùi Lê Trọng Thanh -12 Toán
Lê Đăng Khoa – 12 Toán

I – Phương pháp quy nạp:

Bài toán 1: cho dãy $\{a_n\}$; $a_1 = 1$; $a_{n+1} = a_n + \lfloor \sqrt{a_n} \rfloor$,

Chứng minh a_n chính phương $\Leftrightarrow n = 2^k + k - 2$

– Xét $n_k = 2^k + k - 2$ ta sẽ chứng minh bằng quy nạp a_{n_k} :

$$cp \Leftrightarrow \begin{cases} n = n_k \\ a_{n_k} = 4^{k-1} = (2^{k-1})^2 \end{cases} \quad k \geq 1$$

+ Với $k = 1$ ta có khẳng định đúng

+ Giả sử bài toán đúng đến k

+ Ta chứng minh với $k + 1$ ta có $n_{k+1} - n_k = 2^k + 1$

Ta chứng minh quy nạp theo i ($0 \leq i \leq 2k-1$)

$$a_{n_k+2i+1} = (2^{k-1} + i)^2 + 2^{k-1} - i$$

$$- i = 0 \quad a_{n_k+1} = a_{n_k} + \lfloor \sqrt{a_{n_k}} \rfloor = 2^{2(k-1)} + 2^{k-1}$$

- Giả sử mệnh đề đúng đến $i < 2k-1$ ta chứng minh đúng với $i + 1$

$$a_{n_k+2i+2} = (2^{k-1} + i)^2 + 2^{k-1} - i + 2^{k-1} + i = (2^{k-1} + i)^2 + 2^k$$

$$(do \quad a_{n_k+2i+1} = (2^{k-1} + i)^2 + 2^{k-1} - i)$$

$$\Rightarrow a_{n_k+2i+1} = (2^{k-1} + i)^2 + 2^k + (2^{k-1} + i)$$

$$= (2^{k-1} + i + 1)^2 + 2^{k-1} - (i + 1) \quad (\text{đúng})$$

$$vậy \text{ áp dụng cho } i = 2k-1 \text{ thì } a_{n_{k+1}} = (2^{k-1} + 2^{k-1})^2 + 2^{k-1} - 2^{k-1} = 2^{2k}$$

$$Vậy \text{ ta có nếu } n = n_k \text{ thì } a_n = a_{n_k} = (2^{k-1})^2$$

$$\text{Mặt khác } a_{n_k+2i+1} \quad (\forall i = 0, 2^{k-1} - 1) = (2^{k-1} + i)^2 + 2^{k-1} - i \text{ không là số chính phương}$$

$$\text{Còn } a_{n_k+2i+1} \quad (\forall i = 0, 2^{k-1} - 1) = (2^{k-1} + i)^2 + 2^k \text{ cũng không là số chính phương}$$

Vậy ta có đpcm

Bài toán 02: cho $\{a_n\}$; $a_1 = a \in \mathbb{Z}^*$; $a_{n+1} = a_n + \lfloor \sqrt{a_n} \rfloor$ chứng minh trong dãy có vô số số chính phương

Bài toán 03: cho $\{a_n\}$; $a_1 = a \in \mathbb{Z}^*$; $a_{n+1} = a_n + \lfloor \sqrt{a_n} \rfloor$ chứng minh trong dãy có vô số số k-phương.

Lưu ý : Ta có thể dùng phép quy nạp để chứng minh các tính chất của dãy nguyên sau khi dự đoán được dạng của dãy.

$$\text{Bài toán 04: cho dãy } \{u_n\} \begin{cases} u_0 = 1; u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 3}{u_{n-1}} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z}^*)$$

Chứng minh dãy u_n nguyên

- Ta có $u_0 = 1; u_1 = 1; u_2 = 4; u_3 = 19; u_4 = 91; \dots$ ta dự đoán $u_{n+2} = 5u_{n+1} - u_n$

$$u_2 = \frac{u_1^2 + 3}{u_0} = 4 = 5u_1 - u_0$$

- $n = 0$ (đúng)

- Giả sử mệnh đề đúng đến k

- Xét $n = k + 1$

$$u_{k+3} = \frac{u_{k+2}^2 + 3}{u_{k+1}} = 5u_{k+2} - u_{k+1} \Leftrightarrow u_{k+2}^2 + 3 = 5u_{k+1}u_{k+2} - u_{k+1}^2 \quad (1)$$

$$u_{k+2} = \frac{u_{k+1}^2 + 3}{u_k} = 5u_{k+1} - u_k \Rightarrow u_{k+1}^2 + 3 = (5u_{k+1} - u_k)u_k$$

mà

$$\text{nên (1)} \Leftrightarrow (25u_{k+1}^2 + u_k^2) + 3 - 10u_k u_{k+1} = 5u_{k+1}(5u_{k+1} - u_k) - u_{k+1}^2$$

$$\Leftrightarrow u_k^2 + 3 + u_{k+1}^2 - 5u_k u_{k+1} = 0 \quad (\text{đúng})$$

Vậy ta có đpcm

$$\text{Do đó } \{u_n\} \text{ được xác định } \begin{cases} u_0 = 1; u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 5u_n - u_{n-1} \end{cases} \text{ do đó } \{u_n\} \text{ nguyên}$$

Bài toán 05: cho $\{a_n\}$ có $a_0 = a_1 = 1; a_{n+1} = 14a_n - a_{n-1}$. Chứng minh $\forall n \in \mathbb{N}$ thì $2a_n - 1$ là số chính phương (Rumani 2002)

Gợi ý: lập $\{b_n\}$ dãy thoả $b_0 = b_1 = 1; b_{n+1} = 4b_n - b_{n-1}$ chứng minh $2a_n - 1 = b_n^2$

Bài toán 06: cho dãy $\{a_n\}$ có $a_0 = 1; a_1 = 13; a_{n+2} = 14a_{n+1} - a_n$.

Chứng minh: a) $2a_n + 1$ là số chính phương

$$\text{b) } a_n = k^2 + (k+1)^2$$

$$\text{c) } a_n^2 = (k+1)^3 - k^3$$

Bài toán 07: Cho $\{u_n\}$ có $u_0 = 1; u_1 = 6; u_{n+2} = 6u_{n+1} - u_n$.

$$u_n^2 = \frac{k(k+1)}{2}$$

Chứng minh:

$$\text{Gợi ý: } \begin{cases} a_0 = 2; a_1 = 9 \\ a_{n+1} = 6a_n - a_{n-1} - 2 \end{cases} \text{ thì } u_n^2 = \frac{a_n(a_n - 1)}{2}$$

II – Một số định lý và dãy số truy hồi

Định lý 1: Cho dãy $ax_{n+2} + bx_{n+1} + ax_n = 0$ khi đó $ax_{n+1}^2 + bx_{n+1}x_n + ax_n^2 = \text{const}$

Chứng minh

$$ax_{n+2}^2 + bx_{n+1}x_{n+2} + ax_{n+1}^2 = ax_{n+1}^2 + bx_nx_{n+1} + ax_n^2$$

$$\Leftrightarrow (x_{n+2} - x_n)(ax_{n+2} + bx_{n+1} + ax_n) = 0 \quad (\text{đúng})$$

Định lý 2: Cho dãy u_0, u_1 xác định $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$

Khi đó $u_{n+1}^2 - au_{n+1}u_n - bu_n^2 = A(-b)^n$ với $A = \text{const}$

$$\begin{aligned} \text{Chứng minh ta có: } & (u_{n+2}^2 - au_{n+1}u_n - bu_n^2) - (-b)(u_n^2 - au_nu_{n-1} - bu_{n-1}^2) \\ &= (au_n + bu_{n-1})^2 - au_{n-1}u_n - bu_n^2 + bu_n^2 - abu_nu_{n-1} - bu_{n-1}^2 \\ &= a^2u_n^2 + abu_nu_{n-1} - au_{n+1}u_n \\ &= -au_n(u_{n+1} - au_n - bu_{n-1}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

vậy

$$u_{n+1}^2 - au_nu_{n+1} - bu_n^2 = (-b)(u_n^2 - au_{n-1}u_n - bu_{n-1}^2) = \dots = (-b)^n(u_1^2 - au_1u_0 - bu_0^2) = A(-b)^n$$

Định lý 3: Cho dãy a_n có $a_{n+3} - \alpha a_{n+2} - \alpha a_{n+1} + a_n = 0$

Khi đó: $a_{n+2}^2 + a_{n+1}^2 + a_n^2 + \alpha(a_{n+2}a_{n+1} + a_{n+1}a_n + a_na_{n+2}) = \text{const}$

Chứng minh: $[a_{n+2}^2 + a_{n+1}^2 + a_n^2 + \alpha(a_{n+2}a_{n+1} + a_{n+1}a_n + a_na_{n+2})]$

$$\begin{aligned} & - [a_{n+1}^2 + a_n^2 + a_{n-1}^2 + \alpha(a_{n+1}a_n + a_na_{n-1} + a_{n-1}a_{n+1})] \\ &= (a_{n+2} - a_{n-1})(a_{n+2} - \alpha a_{n+1} - \alpha a_n + a_{n-1}) = 0 \end{aligned}$$

Các bài tập 05; 06; 07 đều giải được bằng những định lý này.

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 12 \\ a_3 = 20 \end{cases}$$

Bài toán 08: Cho dãy (a_n) có $a_{n+3} = 2a_{n+2} + 2a_{n+1} - a_n$

Chứng minh $1 + 4a_na_{n+1}$ là số chính phương

Bài toán 09: Cho $\{a_n\}$ có $a_0 = 3; a_1 = 17; a_{n+2} = 6a_{n+1} - a_n$. Chứng minh $\frac{a_n^2 - 1}{2}$ là số chính phương.

III. Dãy số dạng $[n\alpha]$

Bài toán 10:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$$

a. Gọi $\alpha, \beta > 0$ thoả α, β vô tỷ và

Chứng minh $\forall n \in \mathbb{N}^* \exists i$ - Duy nhất i sao cho $[i\alpha] = n$

- Duy nhất j sao cho $[j\beta] = n$

b. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists! i, j$ để $n = [\alpha i]$

- $n = [\beta j]$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$$

Chứng minh rằng: α, β vô tỷ;

a. Giả sử $n, n+1$ không có số hạng nào dạng $[i\alpha]; [j\beta]$

$$\text{Vậy } \exists! i, j \text{ để } \begin{cases} i\alpha < n < n+1 < (i+1)\alpha \\ j\beta < n < n+1 < (j+1)\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i < \frac{n}{\alpha}; i+1 > \frac{n+1}{\alpha} \\ j < \frac{n}{\beta}; j+1 > \frac{n+1}{\beta} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } i + j < 1 + n\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right); (n+1)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) < i + j + 2$$

$\Rightarrow i + j < n < n + 1 < i + j + 2$ (vô lý vì $i + j + 1 = n$ hay $n + 1$ đều loại)

$$\begin{cases} n < i\alpha < n + 1 \\ n < j\beta < n + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{n}{\alpha} < i < \frac{n+1}{\alpha} \\ \frac{n}{\beta} < j < \frac{n+1}{\beta} \end{cases}$$

Giả sử $\exists! i, j$ mà

$\Rightarrow n < i + j < n + 1$ (loại vô lý)

Vậy ta có đpcm

b. Xét $N \in \mathbb{N}^*$

Gọi x là số lớn nhất mà $[\alpha x] < N \leq [(x + 1)\alpha]$

Gọi y là số lớn nhất mà $[\beta y] < N \leq [(y + 1)\beta]$

Ta có tập hợp $\begin{cases} [\alpha]; [2\alpha]; \dots; [\alpha x] \\ [\beta]; [2\beta]; \dots; [\beta y] \end{cases}$ phủ kín $[1; N - 1]$

$\Rightarrow x + y = N - 1$

$$\begin{cases} \alpha x < N < (x + 1)\alpha \\ \beta y < N < (y + 1)\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{N}{\alpha} < x + 1 \\ y < \frac{N}{\beta} < y + 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x + y}{N} < \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < \frac{x + y + 2}{N}$$

mà

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{N} < \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < 1 + \frac{1}{N} \quad \forall N \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{cho } N \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$$

- Giả sử $\alpha \in \mathbb{Q} \Rightarrow \beta \in \mathbb{Q}$ mà khi đó tập hợp $\{[\alpha i] = [\beta j]\}$ có vô hạn phần tử (vô lý)

Vậy α, β vô tỷ

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$$

- tóm lại α, β vô tỷ;

Bài toán 11: Cho $\{f_n\}, \{g_n\}$ là 2 dãy số nguyên dương được xác định $f_1 = 1; g_n = na - 1 - f_n$; (a là số nguyên > 4)

f_{n+1} là số nguyên dương nhỏ nhất khác $f_1, f_2, \dots, f_n; g_1, g_2, \dots, g_n$

Chứng minh $\exists \alpha, \beta$ hằng số sao cho $f_n = [n\alpha]; g_n = [n\beta] \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Bài toán 12: Đặt $S(\alpha) = \{[n\alpha]; n \in \mathbb{N}^*\}$ chứng minh tập hợp $\mathbb{N}^*$ không thể phân hoạch làm 3 tập $S(\alpha); S(\beta); S(\gamma)$

IV – Nguyên lý Dirichlet:

Định lý (về sự tuần hoàn của các số dư).

Cho dãy số nguyên $\{x_n\}$ được xác định bởi công thức truy hồi :

$x_{n+k} = x_{n+k-1}a_1 + \dots + x_{n+1}a_{k-1} + x_na_k$ và k số hạng đầu tiên nguyên. Khi đó $\forall$ số nguyên dương N ; dãy số dư của x_n khi chia cho N sẽ tuần hoàn.

Chứng minh:

Xét dãy $\{y_i\}$ là số dư của dãy $\{x_i\}$ khi chia cho N .

Ta có $y_i < N$; $y_i \in \mathbb{N}$. ta cần chứng minh $\exists q$ sao cho $y_1 = y_{q+1}$; $y_2 = y_{q+2}$; ...; $y_k = y_{q+k}$ là có đpcm.

Xét các bộ k số $(y_{i+1}; y_{i+2}; \dots; y_{i+k})$ rõ ràng có vô số các bộ k số mà số các bộ khác nhau không vượt quá Nk ($< \infty$: hữu hạn)

Vậy theo nguyên lý Dirichlet thì $\exists 2$ bộ k số liên tiếp bằng nhau tức $\exists x; y \in \mathbb{N}$ thoả $(y_{x+1}; y_{x+2}; \dots; y_{x+k}) = (y_{y+1}; y_{y+2}; \dots; y_{y+k})$ (đpcm)

Bài toán 13: (Đề thi chọn đội tuyển Việt Nam 2004)

Cho dãy (x_n) : $x_1 = 603$; $x_2 = 102$; $x_{n+1} = x_n + x_{n-1} + 2\sqrt{x_n x_{n-1}} - 2$

a. Chứng minh dãy (x_n) nguyên

b. Chứng minh $\exists$ vô số số x_n thoả tận cùng là 2003

c. Chứng minh không $\exists$ vô số x_n nào mà tận cùng là 2004

a. Ta có $(x_{n+1} - x_n - x_{n-1})^2 = 4(x_n x_{n-1} - 2)$

$$\Rightarrow x_{n+1}^2 + x_n^2 + x_{n-1}^2 - 2(x_{n+1}x_n + x_n x_{n-1} + x_{n+1}x_{n-1}) = -8$$

$$\text{tương tự } x_{n+2}^2 + x_{n+1}^2 + x_n^2 - 2(x_{n+2}x_{n+1} + x_{n+1}x_n + x_{n+2}x_n) = -8$$

$$\text{suy ra } (x_{n+2} - x_{n-1})(x_{n+2} - 2x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) = 0$$

$$\text{rõ ràng } x_{n+2} > x_{n-1} \Rightarrow x_{n+2} - 2x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = 0$$

$$\text{Ta có } x_3 = 1201$$

Vậy $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (x_n)$ nguyên

b. Xét dãy (y_k) là dãy số dư của (x_k) khi chia cho 10^4 hay $y_k \equiv x_k [10^4]$ thì $0 \leq y_k \in \mathbb{N} \leq 10^4 - 1$

$$\text{Ta có } y_{k+2} - 2y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1} \equiv 0 [10^4]$$

Theo định lý trên thì dãy (y_k) tuần hoàn mà $x_4 = 2003 \Rightarrow y_4 = 2003$. Vậy $\exists$ vô số $y_k = 2003$

$\Rightarrow \exists$ vô số x_n tận cùng là 2003.

c. Xét dãy (z_k) là dãy số dư của (x_k) khi chia cho 4 ta có dãy (z_k) cũng tuần hoàn chu kỳ 3 theo mod 4 (3, 2, 1; 3, 2, 1; ...)

vậy không $\exists z_k \equiv 0 [4] \Rightarrow$ không $\exists$ số x_n có tận cùng là 2004

Bài toán 14: Cho dãy số lẻ $1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n+2} < 3n$. Chứng minh $\exists i, j$ sao cho $x_i \equiv x_j$

Bài toán 15: Cho $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ là dãy các số nguyên thuộc đoạn $[-1000; 1000]$. Trong đó tổng các số hạng của A bằng 1. CMR $\exists 1$ dãy con của A có tổng bằng 0.

Phương pháp chính phương hóa trong chứng minh bất đẳng thức

Nguyễn Anh Cường – 11 Toán

1. Lời giới thiệu

Bất đẳng thức là một trong những vấn đề hóc búa và thú vị nhất của Toán Học. Chúng ta không thể phủ nhận rằng đã có biết bao nhà Toán Học lỗi lạc đã từng bị cuốn hút trong vòng xoay kỳ diệu của nó. Ngày nay, các vấn đề về bất đẳng thức đã trở nên vô cùng đa dạng. Chúng đang dần trở nên phức tạp, hóc búa và ghồ ghề hơn. Điều này đòi hỏi chúng ta phải sáng tạo nên những phương pháp, kỹ thuật mới để hạ bệ những con quái vật này. Dưới đây chúng tôi xin giới thiệu với các bạn một số phương pháp mới đó. Đây sẽ là công cụ rất hiệu quả giúp các bạn đối mặt với những bất đẳng thức ghồ ghề nhất trong lịch sử những bất đẳng thức ghồ ghề.

Xin cảm ơn anh Trần Tuấn Anh-sinh viên Đại Học KHTN đã truyền đạt cho em nhiều phương pháp độc đáo, cảm ơn các thành viên của Mathlinks.ro đã giúp tôi có nhiều ý tưởng quý báu, cảm ơn ban biên tập đã cho phép tôi thực hiện bài viết này.

2. Phương pháp chính phương hóa

a) Cho hàm số $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$, ý tưởng của phương pháp này là đưa $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ về dạng $\sum g(a_i)(a_i - a_j)^2$. Điều này có vẻ rất đơn giản nhưng thật ra là rất hiệu quả. Chúng ta hãy xem xét tính hiệu lực ấy qua ví dụ sau đây:

Ví dụ 1:

Cho a, b là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} + 7(a+b) \geq 8\sqrt{2(a^2 + b^2)}$$

Giải:

Bất đẳng thức đã cho là tương đương với:

$$(a-b)^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{8}{\sqrt{2(a^2 + b^2)} + a + b} \right) \geq 0$$

Rõ ràng ta có thể chứng minh biểu thức bên trong ngoặc là không âm bằng BĐT Cauchy.

Ví dụ 2:

Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa điều kiện $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$4(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) \geq 3(a^2 + b^2 - 2ab)$$

Giải:

Rõ ràng bất đẳng thức đã cho là tương đương với:

$$2(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 3(a-b)^2$$

$$\Leftrightarrow 2(b-c)^2 + 2(c-a)^2 \geq (a-b)^2$$

$$\Leftrightarrow (a+b-2c)^2 \geq 0$$

Ví dụ 3:

Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn các điều kiện sau:

$y^2 \geq xz; x \geq y \geq z \geq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2 y}{z} + \frac{y^2 z}{x} + \frac{z^2 x}{y} \geq 2(x^2 + y^2 + z^2) - xy - xz - yz.$$

Đây có thể xem như bài áp dụng. Các bạn giải thử nhé. J

b) Như vậy chúng ta cũng đã thấy được phần nào sự hiệu quả của phương pháp trên. Thế nhưng nhiều câu hỏi đặt ra là làm thế nào để sử dụng chúng và sử dụng như thế nào. Định lý dưới đây sẽ giúp ta giải quyết các thắc mắc trên:

Định lý: Cho các số thực a, b, c và A, B, C thỏa 1 trong các điều kiện sau:

i) $A + B \geq 0, B + C \geq 0, C + A \geq 0$.

Nếu a là số giữa 2 số còn lại thì $A \geq 0$

ii) $A + B + C > 0$ và $AB + AC + BC \geq 0$

iii) Nếu $C = \min\{A, B, C\}$ thì $A + 2C \geq 0$ và $B + 2C \geq 0$

Khi đó $A(b-c)^2 + B(c-a)^2 + C(a-b)^2 \geq 0$.

Chứng minh:

i) Giả sử c là số ở giữa (các trường hợp khác c/m tương tự), đặt $x = b - c; y = c - a$. Bất đẳng thức đã cho là tương đương với:

$$Ax^2 + By^2 + C(x+y)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (A+C)x^2 + (B+C)y^2 + 2Cxy \geq 0$$

ii) Nếu có 1 số bằng 0, giả sử là $C \Rightarrow A \geq 0, B \geq 0 \Rightarrow dpcm$.

Nếu $ABC \neq 0$, ta sẽ chứng minh có ít nhất 2 số dương. Thực vậy giả sử

$$C < 0 \Rightarrow A + B > 0 \Rightarrow AB > 0 \Rightarrow A > 0, B > 0.$$

Khi đó ta có:

$$\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right)[A(b-c)^2 + B(c-a)^2] \geq (b-c+c-a)^2 = (a-b)^2$$

$$\Leftrightarrow A(b-c)^2 + B(c-a)^2 \geq \left(\frac{AB}{A+B}\right)(a-b)^2$$

$$\Leftrightarrow A(b-c)^2 + B(c-a)^2 + C(a-b)^2 \geq \left(\frac{AB}{A+B} + C\right)(a-b)^2 = \left(\frac{AB+AC+BC}{A+B}\right)(a-b)^2 \geq 0$$

iii) Giả sử $C = \min\{A, B, C\}$. Nếu $C \geq 0$, bất đẳng thức là hiển nhiên. Nếu $C < 0$, ta có: $C(a-b)^2 = C(b-c+c-a)^2 \geq 2C(b-c)^2 + 2C(c-a)^2$

Do đó:

$$A(b-c)^2 + B(c-a)^2 + C(a-b)^2 \geq (2C+A)(b-c)^2 + (2C+B)(c-a)^2 \geq 0$$

Như vậy BĐT đã được chứng minh xong.

Dưới đây, chúng ta sẽ xem xét một số ví dụ cụ thể áp dụng định lý trên:

Ví dụ 1: (Stronger than Schur inequality J)

Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab\sqrt{2(a^2 + b^2)} + bc\sqrt{2(b^2 + c^2)} + ca\sqrt{2(c^2 + a^2)}$$

Giải:

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$. Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$\sum (a+b-c - \frac{2ab}{\sqrt{2(a^2+b^2)}+a+b})(a-b)^2 \geq 0$$

$$\text{Ta có: } a+c-b - \frac{2ac}{\sqrt{2(a^2+c^2)}+a+c} \geq (a-b) + c(1 - \frac{2}{\sqrt{2}+1}) \geq 0$$

Ngoài ra:

$$\begin{aligned} B+C &= 2a - \frac{2ab}{\sqrt{2(a^2+b^2)}+a+b} - \frac{2ac}{\sqrt{2(a^2+c^2)}+a+c} \geq 2a(1 - \frac{b}{2(a+b)} - \frac{c}{2(a+c)}) \\ &= a(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c}) \geq 0 \end{aligned}$$

Theo định lý trên ,BĐT được chứng minh. $\mathcal{J}$

Ví dụ 2: Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 4(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geq a^2b + b^2c + c^2a + 12abc$$

Giải:

Bất đẳng thức đã cho là tương đương với:

$$(2a+2b-c)(b-c)^2 + (2b+2c-a)(c-a)^2 + (2c+2a-b)(a-b)^2 \geq 0$$

Giả sử $2a+2b-c = \min\{(2a+2b-c), (2b+2c-a), (2c+2a-b)\}$ (hoàn toàn tương tự cho các trường hợp còn lại) thì:

$$2(2a+2b-c) + 2b+2c-a = 3a+6b > 0; 2(2a+2b-c) + 2c+2a-b = 6a+2b > 0$$

nên theo định lý, BĐT được chứng minh. $\mathcal{J}$

Ví dụ 3: Cho các số thực dương a,b,c thỏa điều kiện $\sqrt{ab}, \sqrt{ac}, \sqrt{bc}$ là độ dài 3 cạnh tam giác.

Chứng minh rằng: $a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0$

Giải:

Bất đẳng thức đã cho là tương đương với:

$$(ab+ac-bc)(a-b)^2 + (bc+ba-ac)(b-c)^2 + (ac+bc-ab)(c-a)^2 \geq 0$$

$$\text{Rõ ràng: } (ab+ac-bc) + (bc+ba-ac) + (ac+bc-ab) = ab+ac+bc > 0$$

Đồng thời:

$$(ab+ac-bc)(bc+ba-ac) + (ab+ac-bc)(ac+bc-ab) + (bc+ba-ac)(ac+bc-ab)$$

$$= 2abc(a+b+c) - a^2b^2 - b^2c^2 - a^2c^2$$

$$= (\sqrt{ab} + \sqrt{ac} - \sqrt{bc})(\sqrt{ab} - \sqrt{ac} + \sqrt{bc})(-\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc})(\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc}) \geq 0$$

Do đó theo định lý, BĐT đã được chứng minh. $\mathcal{J}$

Ví dụ 4: Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$3(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}) \geq 2(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}) + 3$$

Giải:

Bất đẳng thức đã cho là tương đương với:

$$(5a+5b-c)(a-b)^2 + (5b+5c-a)(b-c)^2 + (5c+5a-b)(c-a)^2 \geq 0(1)$$

Đặt $x = a+b; y = b+c; z = c+a$.

Nếu $x \geq y \geq z$ thì $(a-b)(b-c)(c-a) \Leftrightarrow (a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 \Rightarrow (1)$ là hiển nhiên.

Nếu $z \geq y \geq x$

$$(1) \Leftrightarrow (4x-z)(x-z)^2 + (4z-y)(y-z)^2 + (4y-x)(x-y)^2 (*) \geq 0.$$

Ta chỉ xét trường hợp $4x < z$. Ta có: $(x-z)^2 \leq 2(y-z)^2 + 2(x-y)^2$ nên

$$(*) \geq (8x+2z-y)(y-z)^2 + (7x+4y-2z)(x-y)^2 (**) \geq 0$$

Nếu $7x+4y-2z \geq 0$ thì BĐT được chứng minh. Ngược lại ta có:

$$z \geq 2y \Rightarrow z-y \geq y-x \geq 0. \text{ Do đó:}$$

$$(**) \geq (x-y)^2(15x+3y) \geq 0.$$

Tóm lại, BĐT đã được chứng minh. **J**

Ví dụ 5:

Cho a, b, c là các số thực dương thoả: $\min\{a, b, c\} \geq \frac{1}{4} \max\{a, b, c\}$. Chứng minh rằng:

$$(ab+ac+bc) \left[\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \right] \geq \frac{9}{4} + \frac{1}{16} \left[\left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2 + \left(\frac{b-c}{b+c} \right)^2 + \left(\frac{c-a}{c+a} \right)^2 \right]$$

Đây có thể xem như bài áp dụng. Các bạn giải thử nhé. **J**

c) Định lý trên quả thật là một công cụ hiệu quả, tuy nhiên rất hiếm bài toán ở dạng tổng các chính phương như trên. Nhiệm vụ của chúng ta là làm thế nào để quy được về cho đúng dạng chuẩn tắc ấy thì phương pháp của chúng ta mới thật sự hiệu quả. Vậy là một câu hỏi lớn được đặt ra đòi hỏi chúng ta tìm hướng giải quyết.

Ta gọi B là một biểu thức liên hệ của A nếu A-B phân tích được dưới dạng tổng chính phương nói trên.

Có lẽ phần này đòi hỏi chúng ta một chút sự nhạy bén của Toán Học, đó là sự nhạy bén trong việc phát hiện ra các biểu thức liên hệ.

Ví dụ bất đẳng thức cần chứng minh của ta có dạng:

$P(a,b,c)A(a,b,c) - Q(a,b,c)B(a,b,c)$. Trong đó ta đã biết A và B, P và Q lần lượt liên hệ với nhau. Như vậy để mau chóng đưa về dạng bình phương ta sẽ làm như sau:

$$\begin{aligned} & P(a,b,c)A(a,b,c) - Q(a,b,c)A(a,b,c) + Q(a,b,c)A(a,b,c) - Q(a,b,c)B(a,b,c) \\ &= A(a,b,c)[P(a,b,c) - Q(a,b,c)] + Q(a,b,c)[A(a,b,c) - B(a,b,c)] \end{aligned}$$

Hay dưới dạng phân thức:

$$\frac{A(a,b,c)}{P(a,b,c)} - \frac{B(a,b,c)}{Q(a,b,c)} = \frac{A(a,b,c) - B(a,b,c)}{P(a,b,c)} - \frac{B(a,b,c)[Q(a,b,c) - P(a,b,c)]}{P(a,b,c)Q(a,b,c)}$$

Dạng căn thức:

$$\sqrt{A(a,b,c)P(a,b,c)} - \sqrt{B(a,b,c)Q(a,b,c)} = \frac{A(a,b,c)P(a,b,c) - B(a,b,c)Q(a,b,c)}{\sqrt{A(a,b,c)P(a,b,c)} + \sqrt{B(a,b,c)Q(a,b,c)}}$$

Dưới đây xin liệt kê một số dạng thường gặp của các đa thức bậc 2,3,4 để các bạn tham khảo:

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{2}$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{(a+b+c)}{2} [(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$$

$$ab^2 + bc^2 + ca^2 - (a^2b + b^2c + c^2a) = \frac{(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3}{3}$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - b^2c - c^2a = \frac{(2a+b)(a-b)^2 + (2b+c)(b-c)^2 + (2c+a)(c-a)^2}{3}$$

$$a^4 + b^4 + c^4 - a^3b - b^3c - c^3a = \frac{(3a^2 + 2ab + b^2)(a-b)^2 + (3b^2 + 2bc + c^2)(b-c)^2 + (3c^2 + 2ca + a^2)(a-c)^2}{4}$$

$$a^3b + b^3c + c^3a - ab^3 - bc^3 - ca^3 = \frac{a+b+c}{3} [(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3]$$

$$a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2 = \frac{(a-b)^2(a+b)^2 + (b-c)^2(b+c)^2 + (c-a)^2(c+a)^2}{2}$$

Hay một cách tổng quát ta có định lý sau:

Định lý:

Hai đa thức thuần nhất cùng bậc và có dạng tổng vòng quanh là liên hệ với nhau.

Tức là ta có thể biểu diễn hiệu:

$$\sum_{cyclic} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n} - \sum_{cyclic} a_1^{\beta_1} a_2^{\beta_2} \dots a_n^{\beta_n}$$

trong đó $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = \beta_1 + \dots + \beta_n$ dưới dạng $\sum P(a)(a_i - a_j)^2$

Định lý trên chứng minh không khó lắm, các bạn hãy tự tìm lấy lời chứng minh, từ đó các bạn cũng sẽ tìm được thuật toán để biểu diễn chúng về dạng hiệu bình phương. Chúc các bạn thành công. J

d) Dòng sông Toán Học không bao giờ ngừng chảy bởi những ghềnh thác câu hỏi, những vấn đề bức thiết đặt ra buộc chúng ta phải tìm cách giải quyết. Phương pháp này cũng không là một ngoại lệ. Một câu hỏi đặt ra là nếu có thêm nhiều ẩn nữa chứ không phải là ba thì phương pháp trên vô dụng hay sao?

Đây vẫn là một câu hỏi mở mà chúng tôi vẫn còn đang xem xét. Tuy nhiên việc hiệu quả trong ứng dụng của nó thôi cũng đã là rất đáng kinh ngạc. Nó giúp ta nhìn nhận vấn đề một cách rõ ràng và chắc chắn hơn.

Ví dụ 1: Cho n số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$. Chứng minh rằng:

$$n^2 \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq 4(n-1)(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) + n(n-2)^2$$

Giải:

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức trên bằng phương pháp quy nạp theo n . Ta sẽ chỉ xét công đoạn phức tạp nhất, đó là bước chuyển quy nạp.

Trước hết nhận xét rằng bất đẳng thức đã cho là tương đương với:

$$\left[n^2 \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) - n(n-2)^2 \right] (a_1 + \dots + a_n)^2 \geq 4(n-1)n^2 (a_1^2 + \dots + a_n^2)$$

Do đó nếu BĐT đã đúng cho $a_1 + \dots + a_n = n$ thì nó cũng đúng cho $a_1 + \dots + a_n \leq n$.

Đặt $f(a_1, \dots, a_n) = LHS - RHS$. Không mất tính tổng quát, giả sử

$a_1 = \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Ta có:

$$\begin{aligned} & f(a_1, \dots, a_n) - f\left(a_1, \frac{a_2 + \dots + a_n}{n-1}, \dots, \frac{a_2 + \dots + a_n}{n-1}\right) \\ &= n^2 \left(\frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} - \frac{n^2}{a_2 + \dots + a_n} \right) - 4(n-1)(a_2^2 + \dots + a_n^2 - \frac{(a_2 + \dots + a_n)^2}{n-1}) \\ &= \frac{n^2}{(a_2 + \dots + a_n)} \sum \frac{(a_i - a_j)^2}{a_i a_j} - 4 \sum (a_i - a_j)^2 \geq \frac{n^2}{n-1} \sum \frac{(a_i - a_j)^2}{a_i a_j} - 4 \sum (a_i - a_j)^2 (*) \end{aligned}$$

Mặt khác theo giả thiết quy nạp thì:

$$\begin{aligned} & (n-1)^2 \left(\frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq 4(n-2)(a_2^2 + \dots + a_n^2) + (n-1)(n-3)^2 \\ & \Leftrightarrow (n-1) \sum \frac{(a_i - a_j)^2}{a_i a_j} \geq \frac{4(n-2)}{n-1} \sum (a_i - a_j)^2 \\ & \Leftrightarrow \frac{(n-1)^2}{n-2} \sum \frac{(a_i - a_j)^2}{a_i a_j} \geq 4 \sum (a_i - a_j)^2 \end{aligned}$$

Rõ ràng $\frac{n^2}{n-1} > \frac{(n-1)^2}{n-2}$ nên $(*) \geq 0$.

Do đó ta chỉ cần chứng minh $f(a, d, \dots, d) \geq 0, a + (n-1)d = n$. Điều này không khó khăn lắm, các bạn sẽ dễ dàng tìm ra hướng giải quyết.

Ví dụ 2:

*BĐT Vasc

1) Cho n số thực dương $a_1, \dots, a_n$. Chứng minh BĐT sau:

$$a_1^n + \dots + a_n^n + n(n-1)a_1 \dots a_n \geq a_1 \dots a_n (a_1 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)$$

Ở đây, chúng ta sẽ vẫn tiếp tục đi tìm một lời giải áp dụng phương pháp chuyển về dạng chính phương nói trên cho Bài toán Vasc 1. BĐT Suranyi bên dưới chúng ta hãy tạm thời công nhận. Chú ý ở BĐT Suranyi, ta có thể viết dưới dạng tương đương:

$$(n-1)(a_1^n + \dots + a_n^n) - \sum a_1(a_2^{n-1} + \dots + a_n^{n-1}) \geq a_1^n + \dots + a_n^n - na_1 \dots a_n$$

Bây giờ chúng ta hãy quay lại bài toán Vasc 1. Ta cũng sẽ chứng minh theo phương pháp quy nạp. Rõ ràng $n=3$, đây chính là BĐT Schur. Dưới đây tôi sẽ chứng minh bước chuyển từ $n-1$ sang n .

Bất đẳng thức đã cho là tương đương với:

$$(n-1)(a_1^n + \dots + a_n^n - na_1a_2\dots a_n) \geq (n-1)a_1\dots a_n \left[(a_1 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) - n^2 \right]$$

$$\Leftrightarrow (n-1)(a_1^n + \dots + a_n^n - na_1a_2\dots a_n) \geq (n-1)a_i\dots a_j \left[\frac{(a_i - a_j)^2}{a_i a_j} \right]$$

Đến đây chúng ta sẽ cố gắng chuyển $a_1^n + \dots + a_n^n - na_1\dots a_n$ về dạng tổng của các bình phương hiệu. Việc này là không quá phức tạp, ta sẽ lấy $\sum a_1(a_2^{n-1} + \dots + a_n^{n-1})$ làm biểu thức liên hệ. Ta có:

$$\begin{aligned} & (n-1)(a_1^n + \dots + a_n^n - na_1a_2\dots a_n) \\ &= (n-1)(a_1^n + \dots + a_n^n) - \sum a_1(a_2^{n-1} + \dots + a_n^{n-1}) + \sum a_1[a_2^n + \dots + a_n^n - (n-1)a_2\dots a_n] \\ &\geq a_1^n + \dots + a_n^n - na_1\dots a_n + (n-2) \sum a_1\dots a_n \frac{(a_i - a_j)^2}{a_i a_j} \\ &\Rightarrow a_1^n + \dots + a_n^n - na_1a_2\dots a_n \geq \sum a_1\dots a_n \frac{(a_i - a_j)^2}{a_i a_j} = a_1a_2\dots a_n \left[(a_1 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) - n^2 \right] \end{aligned}$$

Và như vậy, bất đẳng thức đã được chứng minh.

3. Phụ lục

Trong phần này chúng tôi xin giới thiệu với các bạn một số BĐT đẹp và vài sự gợi mở về các ý tưởng của một số phương pháp khác:

*BĐT Suranyi

Chứng minh rằng với n số thực không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$ thì ta có bất đẳng thức sau:

$$(n-1)(a_1^n + a_2^n + \dots + a_n^n) + na_1a_2\dots a_n \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \dots + a_n^{n-1}).$$

*BĐT Vasc

2) Cho a, b, c là các số thực. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3(a^3b + b^3c + c^3a)$$

Bất đẳng thức Vasc 2 là một bất đẳng thức rất độc đáo. Lời giải của tác giả là vô cùng kỳ diệu tuy nhiên cũng vô cùng huyền bí, và đây cũng có thể coi là một ý tưởng mới:

$$\begin{aligned} & 4(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)[(a^2 + b^2 + c^2) - 3(a^3b + b^3c + c^3a)] = \\ & [(a^3 + b^3 + c^3) - 5(a^2b + b^2c + c^2a) + 4(ab^2 + bc^2 + ca^2)] + \\ & 3[(a^3 + b^3 + c^3) - (a^2b + b^2c + c^2a) - 2(ab^2 + bc^2 + ca^2) + 6abc] \end{aligned}$$

Thật huyền bí phải không các bạn, thế nhưng mọi thứ đều có nguyên do của nó cả, và ta hãy thử đi tìm cái nguyên do đó nhé.

Trước hết, ta có thể dễ dàng nhận ra dấu bằng của BĐT xảy ra khi $a = b = c$. Như vậy một ý tưởng bộc phát là tại sao ta không đi tìm độ lệch của nó đối với dấu bằng, chính ý tưởng này sẽ gợi cho nghĩ tới việc đặt :

$b = a + x, c = a + y$. Khi đó BĐT của chúng ta sẽ tương đương với:

$$(x^2 + y^2 - xy)a^2 + (x^3 + y^3 + 4xy^2 - 5x^2y)a + x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 3x^3y$$

Đây là một tam thức bậc hai theo a, ta hãy xét biệt thức Δ (chú ý đây là điều kiện tương đương do x,y độc lập hoàn toàn với a), và thật tuyệt vời:

$$\Delta = -3(x^3 - x^2 - 2x + 1)^2 \leq 0$$

Do đó BĐT đã được chứng minh. Xin chú ý với các bạn một chút, do tính hoàn hảo của biệt thức mà dấu bằng của BĐT này cũng rất kì lạ. Các bạn có thể thử :

$$a = 1, b = 0.64310413..., c = 0.19806226...$$

Sau đây sẽ là một ví dụ nữa cho phương pháp này:

Ví dụ: Cho a,b,c là các số thực không nhỏ hơn -1. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 + abc + 2 \geq a + b + c + ab + bc + ca$$

Nhận thấy dấu bằng xảy ra khi a=b=c=1. Do đó ta hãy đặt :

$$a = 1 + x; b = 1 + y; c = 1 + z (x, y, z \geq -2). \text{ Khi đó BĐT đã cho là tương đương với:}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + xyz \geq 0$$

Nếu $xyz \geq 0$ thì BĐT là hiển nhiên.

Nếu $xyz < 0$, giả sử $x < 0 \Rightarrow yz > 0$. Ta có:

$$x^2 + y^2 + z^2 + xyz \geq x^2 + yz(x + 2) \geq 0$$

Như vậy, BĐT đã được chứng minh. J

 Những bài toán hóc búa còn rất nhiều, những phương pháp trên vẫn chỉ là những điều nhỏ bé và những ý tưởng hay khác vẫn đang lưu lạc ở một nơi xa, ẩn khuất sau những điều kì thú mà những bài toán đã đem lại cho người giải quyết chúng. Và chúng vẫn đang chờ các bạn góp nhặt, có thể những ý tưởng nhỏ thôi nhưng vẫn là rất quý báu. Chúc các bạn thành công trên con đường Toán Học của mình. J

Phương pháp đại số (Phương pháp gien)

Thầy Trần Nam Dũng

Nếu từ một nghiệm của phương trình đã cho ta có quy tắc để xây dựng ra một nghiệm mới thì quy tắc đó chính là gien. Phương pháp gien là phương pháp dựa vào gien để tìm tất cả các nghiệm của phương trình đã cho từ các nghiệm cơ sở. Để tìm các nghiệm cơ sở, ta áp dụng bước lùi, tức là quy tắc ngược của quy tắc tiến nói trên. Minh họa tốt nhất cho ý tưởng này là phương trình Pell và phương trình Markov. Ta bắt đầu bằng phương trình Pell.

Phương trình Pell cổ điển là phương trình dạng, $x^2 - Dy^2 = 1$ trong đó D là số nguyên dương không chính phương. Nếu $D = k^2$ thì từ phân tích $(x - ky)(x + ky) = 1$ ta suy ra phương trình đã cho có các nghiệm nguyên duy nhất là $(\pm 1, 0)$. Trong trường hợp D bất kỳ thì $(\pm 1, 0)$ cũng là nghiệm của phương trình Pell. Ta gọi nghiệm này là *ngiem tầm thường*.

Với số nguyên dương D không chính phương cho trước, đặt $S = \{ (x, y) \in (\mathbb{N}^+)^2 \mid x^2 - Dy^2 = 1 \}$ là tập hợp tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình Pell

$$x^2 - Dy^2 = 1 \quad (1).$$

Ta có định lý quan trọng sau

Định lý 8.1. Nếu D là số nguyên dương không chính phương thì $S \neq \emptyset$, tức là phương trình (1) có nghiệm không tầm thường.

Chứng minh định lý này khá phức tạp, dựa vào lý thuyết liên phân số hoặc phương pháp hình học. Tuy nhiên, về mặt ứng dụng (trong các bài toán phổ thông), định lý này là không thực sự cần thiết vì với D cho trước, ta có thể tìm ra một nghiệm nguyên dương của (1) bằng phương pháp thử và sai. Ta bỏ qua định lý này và chuyển sang định lý mô tả tất cả các nghiệm của (1) khi biết nghiệm cơ sở.

Với $(x, y), (x', y') \in S$ ta có nếu $x > x'$ thì $y > y'$. Do đó có thể định nghĩa $(x, y) > (x', y')$ ó $x > x'$. Với thứ tự này, S là một tập sắp thứ tự tốt. Gọi (a, b) là phần tử nhỏ nhất của S theo thứ tự trên. Ta gọi (a, b) là *ngiem cơ sở* của (1).

Định lý 8.2. Nếu (a, b) là nghiệm cơ sở của (1) và (x, y) là một nghiệm nguyên dương tùy ý của (1) thì tồn tại số nguyên dương n sao cho $x + y\sqrt{D} = (a + b\sqrt{D})^n$ và từ đó mọi nghiệm của (1) đều có thể tìm được bởi công thức

$$x = \frac{(a + b\sqrt{D})^n + (a - b\sqrt{D})^n}{2}, y = \frac{(a + b\sqrt{D})^n - (a - b\sqrt{D})^n}{2\sqrt{D}} \quad (2).$$

Chứng minh: Nhận xét rằng nếu (x, y) là nghiệm của (1) thì

$$x' = ax - Dby$$

$$y' = ay - bx$$

cũng là nghiệm của (1) (có thể không nguyên dương)

Trước hết, do $\sqrt{D}$ vô tỷ nên nếu $x + y\sqrt{D} = (a + b\sqrt{D})^n$ thì $x - y\sqrt{D} = (a - b\sqrt{D})^n$ và từ đó $x^2 - Dy^2 = (a + b\sqrt{D})^n(a - b\sqrt{D})^n = (a^2 - Db^2)^n = 1$, suy ra (x, y) là nghiệm của (1) và ta có công thức như trên.

Tiếp theo, giả sử không phải nghiệm nào của (1) cũng có dạng (2). Gọi (x^*, y^*) là nghiệm nhỏ nhất không có dạng (2) thì rõ ràng $x^* > a, y^* > b$.

Theo nhận xét: $x' = ax^* - Dby^*$

$$y' = ay^* - bx^* \quad (3)$$

là nghiệm của (1)

Để dàng kiểm tra được rằng 1) $x^* > x' > 0$ và 2) $y^* > y' > 0$. Từ đó, do tính nhỏ nhất của (x^*, y^*) , tồn tại n nguyên dương sao cho $x' + y' \sqrt{D} = (a + b\sqrt{D})^n$. Giải hệ (3) với ẩn là (x^*, y^*) , ta được (chú ý $a^2 - Db^2 = 1$) $x^* = ax' + Dby'$, $y^* = ay' + bx'$. Từ đó

$x^* + y^* \sqrt{D} = ax' + Dby' + (ay' + bx') \sqrt{D} = (a + b\sqrt{D})(x' + y' \sqrt{D}) = (a + b\sqrt{D})^{n+1}$
mâu thuẫn!.

Vậy điều giả sử là sai và (2) là tất cả các nghiệm của (1).

Tiếp theo, ta xét phương trình dạng Pell, tức là phương trình dạng

$$x^2 - Dy^2 = k \quad (4)$$

trong đó D không chính phương và $k \notin \{0, 1\}$.

Ta có một số nhận xét sau

+ Không phải với cặp D, k nào phương trình (4) cũng có nghiệm. Ví dụ: phương trình $x^2 - 3y^2 = -1$.

+ Nếu phương trình (4) có nghiệm nguyên dương thì nó có vô số nghiệm nguyên dương. Lý do: nếu (x, y) là nghiệm của (4) thì

$$x' = ax + Dby$$

$$y' = ay + bx$$

cũng là nghiệm của (4), trong đó (a, b) là nghiệm cơ sở của phương trình.

Như thường lệ, ta đặt $S = \{ (x, y) \in (\mathbb{N}^+)^2 \mid x^2 - Dy^2 = k \}$ và gọi (a, b) là nghiệm cơ sở của phương trình Pell tương ứng $x^2 - Dy^2 = 1$. Nghiệm (x_0, y_0) thuộc S được gọi là *nghiệm cơ sở* của (4) nếu không tồn tại $(x', y') \in S$ sao cho

$$x = ax' + Dby'$$

$$y = ay' + bx'$$

Gọi S_0 là tập hợp tất cả các nghiệm cơ sở. Ta có định lý quan trọng sau:

Định lý 8.3. Với mọi D, k ta có $|S_0| < \infty$.

Chứng minh: Nếu $S_0 = \emptyset$ thì $|S_0| = 0 < \infty$. Tiếp theo giả sử $S_0 \neq \emptyset$. Gọi (x, y) là một nghiệm cơ sở nào đó của (4). Xét hệ

$$ax' + Dby' = x$$

$$ay' + bx' = y$$

có nghiệm $x' = ax - Dby$, $y' = ay - bx$. Dễ dàng chứng minh được $(x')^2 - D(y')^2 = 1$. Vì $(x, y) \in S_0$ nên theo định nghĩa $(x', y') \notin S$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x' \leq 0 \\ y' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax \leq Dby \\ ay \leq bx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq -kDb^2 \\ y^2 \leq kb^2 \end{cases} \quad (5)$$

$$(6)$$

Nếu (5) xảy ra thì ta có đánh giá $y^2 = (x^2 - k)/D \leq -k(Db^2 + 1)/D$

Nếu (6) xảy ra thì ta có $x^2 = Dy^2 + k \leq Dkb^2 + D$.

Trong cả hai trường hợp, ta có $|S_0| < \infty$.

Cuối cùng, chú ý rằng từ một nghiệm (x, y) bất kỳ của (4) không thuộc S_0 , bằng cách đi ngược xuống bằng công thức $x' = ax - Dby$, $y' = ay - bx$ ta luôn có thể đi đến một nghiệm cơ sở của (4). Như vậy, với định lý trên, phương trình dạng Pell đã được giải quyết hoàn toàn. Dưới đây chúng ta xem xét một ví dụ:

Ví dụ 8.1. Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình $x^2 - 5y^2 = -4$ (1).

Lời giải: Bằng phép thử tuần tự, ta tìm được nghiệm cơ sở của phương trình $x^2 - 5y^2 = 1$ là (9, 4). Theo phép chứng minh định lý 8.3, nghiệm cơ sở của (1) thỏa mãn

$$x^2 \leq 4.5.4^2, y^2 \leq (4.5.42 + 4)/5 \Rightarrow x < 17, y < 9$$

Dùng phép thử tuần tự, ta tìm được hai nghiệm cơ sở là (1, 1) và (11, 5). Từ hai nghiệm này, bằng công thức

$$x' = 9x + 20y, y' = 4x + 9y$$

ta tìm được tất cả các nghiệm của (1).

Với phép giải phương trình dạng Pell, trên thực tế ta đã có thể giải tất cả các phương trình Diophant bậc 2, tức là phương trình dạng

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Dựa vào lý thuyết đường cong bậc 2, ta có thể đưa phương trình trên về một trong các dạng chính sau

+ Dạng ellip: $ax^2 + by^2 = c$ ($a, b, c > 0$) – có hữu hạn nghiệm, giải bằng phương pháp thử và sai

+ Dạng parabol: $ax^2 + by + c = 0$ - giải bằng đồng dư bậc 2

+ Dạng hypebol: $ax^2 - by^2 = c$ - phương trình dạng Pell

Ngoài ra còn có các dạng suy biết như hai đường thẳng cắt nhau, hai đường thẳng song song, ellip ảo ... Dưới đây, ta xét một ví dụ áp dụng:

Ví dụ 8.2: Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (m, n) thỏa mãn phương trình

$$m(m+1) + n(n+1) = 3mn$$

Lời giải: Xét phương trình đã cho như phương trình bậc 2 theo m

$$m^2 - (3n-1)m + n(n+1) = 0$$

Phương trình này có nghiệm nguyên dương khi và chỉ khi Δ là số chính phương, tức là

$$(3n-1)^2 - 4n(n+1) = y^2 \Leftrightarrow y^2 - 5(n-1)^2 = -4$$

ta thu được phương trình dạng Pell mà ta đã biết cách giải.

Phương trình Markov cổ điển là phương trình dạng

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = kx_1x_2\dots x_n \quad (1)$$

Ở đây n và k là các tham số nguyên dương. Trường hợp riêng khi $n = k = 3$ – phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz \quad (2)$$

được nghiên cứu chi tiết trong bài báo của A.A Markov về dạng toàn phương dương đẳng ở Báo cáo VHL KH Liên Xô năm 1951; “dạng Markov”, liên quan chặt chẽ đến phương trình dạng (2) được sử dụng trong lý thuyết xấp xỉ các số vô tỷ bằng các số hữu tỷ.

Đầu tiên, ta chú ý đến một tính chất thú vị của phương trình Markov. Nếu phương trình (1) có một nghiệm thì nó sẽ có rất nhiều nghiệm và có thể tạo ra các nghiệm đó bằng cách sau đây. Ta sẽ coi một biến, chẳng hạn x_n , là “ẩn số”, còn tất cả các biến khác như các tham số. Khi đó, vì phương trình

$$x^2 - kx_1\dots x_{n-1}x + x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 = 0$$

là phương trình bậc 2 theo x và có nghiệm $x = x_n$, nên nó có nghiệm nguyên thứ hai $x'_n = u$; theo định lý Viet ta có

$$u = kx_1\dots x_{n-1} - x_n = (x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2)/x_n \quad (3)$$

Chú ý rằng $u < x_n$ khi và chỉ khi

$$x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 < x_n^2 \Leftrightarrow 2x_n > kx_1\dots x_{n-1} \quad (4)$$

Quá trình này có thể thực hiện với mọi biến số x_j trong vai trò của x_n . Nhưng chỉ đối với một biến - biến lớn nhất là có thể xảy ra (4) và ta thu được nghiệm mới $(x_1, x_2, \dots, x'_n)$ “nhỏ hơn” nghiệm cũ (thứ tự theo tổng các biến); như vậy, theo đa số là các nghiệm tăng lên và ta có cây nghiệm.

Tiếp theo, trừ những trường hợp đặc biệt, ta sẽ giả sử rằng $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. Ta sẽ nói nghiệm $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là **nghiệm gốc** (nghiệm cơ sở), nếu

$$x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \geq x_n^2 \quad \text{ó} \quad 2x_n \leq kx_1 \dots x_{n-1} \quad (5)$$

(từ nghiệm này, tất cả các nhánh cây đi đến các nghiệm bên cạnh, đều tăng)

Bổ đề 8.4. Nếu phương trình (1) có nghiệm nguyên dương thì nó có nghiệm gốc.

Bổ đề 8.5. Nếu $n > 2$, $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là nghiệm gốc, ngoài ra, $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. Khi đó

$$x_1 \dots x_{n-2} \leq 2(n-1)/k.$$

Chứng minh:

$$kx_1 \dots x_{n-2} x_{n-1}^2 \leq kx_1 \dots x_{n-2} x_{n-1} x_n = x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + x_n^2 \leq 2(x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2) \leq 2(n-1)x_{n-1}^2$$

Bổ đề 8.6. Nếu $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ là các số nguyên dương bất kỳ thỏa mãn điều kiện $1 < x_n^2 \leq x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2$, thì tỷ số $R = (x_1^2 + \dots + x_n^2)/x_1 x_2 \dots x_n$ không vượt quá $(n+3)/2$.

Định lý 8.7. Nếu phương trình (1) có nghiệm và $n \neq k$, thì $n \geq 2k - 3$ khi $n \geq 5$ và $n > 4k - 6$ khi $n = 3, n = 4$.

Từ các định lý và bổ đề trên, với n cho trước, việc tìm tất cả các giá trị k sao cho (1) có nghiệm thực hiện được dễ dàng. Hơn nữa, phương pháp gien được sử dụng ở trên có thể áp dụng cho các phương trình dạng tương tự, ví dụ phương trình $(x+y+z)^2 = kxyz$. Cuối cùng là một ví dụ khác về ứng dụng của gien

Ví dụ 8.3: (Iran 2001) Giả sử x, y, z là các số nguyên dương thỏa mãn điều kiện $xy = z^2 + 1$. Chứng minh rằng tồn tại các số a, b, c và d sao cho $x = a^2 + b^2, y = c^2 + d^2$ và $z = ac + bd$.

Bài tập

8.1 (Ailen 1995) Tìm tất cả các số nguyên a sao cho phương trình $x^2 + axy + y^2 = 1$ có vô số nghiệm nguyên phân biệt x, y .

8.2. (Đài Loan 1998) Tồn tại hay không nghiệm của phương trình

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + v^2 = xyzuv - 65$$

trong tập hợp các số nguyên lớn hơn 1998?

8.3. (Việt Nam 1999)

8.4. (Việt Nam 2002) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho phương trình $x + y + z + t = n\sqrt{xyzt}$ có nghiệm nguyên dương.

8.5. (Ba Lan 2002) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương x, y thỏa mãn phương trình $(x+y)^2 - 2(xy)^2 = 1$.

8.6. (Mỹ 2002) Tìm tất cả các cặp sắp thứ tự các số nguyên dương (m, n) sao cho $mn - 1$ chia hết $m^2 + n^2$.

8.7. (Việt Nam 2002, vòng 2) Chứng minh rằng tồn tại số nguyên $m \geq 2002$ và m số nguyên dương phân biệt $a_1, a_2, \dots, a_m$ sao cho

$$\prod_{i=1}^m a_i^2 - 4 \sum_{i=1}^m a_i^2$$

là số chính phương.

8.8. (Việt Nam 2002, vòng 2) Tìm tất cả các đa thức $p(x)$ với hệ số nguyên sao cho đa thức

$$q(x) = (x^2 + 6x + 10)(p(x))^2 - 1$$

là bình phương của một đa thức với hệ số nguyên.

8.9. (THTT 6/181) Với giá trị nguyên dương nào của p thì phương trình $x^2 + y^2 + 1 = pxy$ có nghiệm nguyên dương?

8.10. (THTT 4/202) Cho ba số nguyên a, b, c ; $a > 0$, $ac - b^2 = p_1 p_2 \dots p_m$ trong đó $p_1, p_2, \dots, p_m$ là các số nguyên tố khác nhau. Gọi $M(n)$ là số các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = n.$$

8.11. (Đề đề nghị IMO 95) Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $19n+1$ và $95n+1$ đều là các số chính phương.

8.12. Tam giác với cạnh 3, 4, 5 và tam giác với cạnh 13, 14, 15 có các cạnh là các số nguyên liên tiếp và có diện tích nguyên. Hãy tìm tất cả các tam giác có tính chất như vậy.

8.13. Chứng minh rằng nếu cả $3n+1$ và $4n+1$ đều là các số chính phương thì n chia hết cho 56.

8.14*. Trong các hàng của tam giác Pascal, hãy tìm hàng có chứa ba số hạng liên tiếp lập thành một cấp số cộng.

8.15. (Mỹ 1986) Tìm số nguyên dương $n > 1$ nhỏ nhất sao cho trung bình bình phương của n số nguyên dương đầu tiên là một số nguyên.

8.16. (IMO 88) Nếu $a, b, q = (a^2 + b^2)/(ab+1)$ là các số nguyên dương thì q là số chính phương.

8.17. (MOCP 03) Tìm tất cả giá trị n sao cho phương trình $(x+y+z)^2 = nxyz$ có nghiệm nguyên dương.

8.18. (PTNK 03). Tìm tất cả các số nguyên dương k sao cho phương trình $x^2 - (k^2 - 4)y^2 = -24$.

8.19. Chứng minh rằng phương trình $(k^2 - 4)x^2 - y^2 = 1$ không có nghiệm nguyên với mọi $k > 3$.

8.20. (Mathlinks) Cho A là tập hợp hữu hạn các số nguyên dương. Chứng minh rằng tồn tại tập hợp hữu hạn các số nguyên dương B sao cho $A \subset B$ và $\prod_{x \in B} x = \sum_{x \in B} x^2$.

**Đại học Quốc gia TP Hồ Chí Minh
Trường Phổ thông Năng Khiếu**

Đề thi chọn đội tuyển Toán năm học 2003-2004

Ngày thi thứ nhất: 21/11/2003

Thời gian làm bài: 180 phút

Bài 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} u + v = 2 \\ ux + vy = 3 \\ ux^2 + vy^2 = 5 \\ ux^3 + vy^3 = 9 \end{cases}$$

Bài 2: a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương k , tồn tại số nguyên dương m sao cho $m^3 + 10$ chia hết cho 3^k .

b) Tìm tất cả các số nguyên a thỏa mãn điều kiện: với mọi số nguyên dương k , tồn tại số nguyên dương m sao cho $m^3 + a$ chia hết cho 3^k .

Bài 3: Cho 2 đường tròn (C_1) , (C_2) tâm O_1 , O_2 cắt nhau tại hai điểm A , B

a) Một đường thẳng thay đổi qua A cắt (C_1) , (C_2) lần lượt tại M , N khác A . Gọi P là điểm sao cho tứ giác $BMPN$ là hình bình hành. Tìm quỹ tích điểm P .

b) Đường tròn đường kính O_1A cắt (C_2) tại C , đường tròn đường kính O_2A cắt (C_1) tại D . AC kéo dài cắt (C_1) tại K , AD kéo dài cắt (C_2) tại H . Chứng minh rằng khi (C_1) , (C_2) thay đổi nhưng luôn đi qua A , B thì đường tròn ngoại tiếp tam giác AHK đi qua một điểm cố định khác A .

Ngày thi thứ hai : 22/11/2003

Thời gian làm bài: 180 phút

Bài 4: Cho tam giác ABC . O là đường tròn ngoại tiếp tam giác. Đường tròn nội tiếp tam giác tiếp xúc với các cạnh BC , CA , AB tương ứng tại D , E , F . Gọi p , R và r lần lượt là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác. Chứng minh bất đẳng thức:

a) $OD^2 + OE^2 + OF^2 \geq 3R^2 - p^2/3$

b) $OD^2 + OE^2 + OF^2 \leq 3(R - r)^2 + R^2/4$

Bài 5: Với mỗi số nguyên dương n , kí hiệu $d(n)$ là tổng các ước nguyên dương của n . Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương ta có

$$d(1) + d(2) + \dots + d(n) \leq n \cdot (7n + 2)/8$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

Bài 6: Cho hình vuông 4×4 ô. Người ta muốn đánh dấu 8 ô của hình vuông thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

- a) Số ô được đánh dấu trên mỗi hàng, mỗi cột là một số chẵn;
 - b) Không có hai hàng nào và không có hai cột nào được đánh dấu giống nhau.
- Hỏi có bao nhiêu cách đánh dấu như vậy?

Lời giải :

Bài 1:

$$\begin{cases} u + v = 2 & (1) \\ ux + vy = 3 & (2) \\ ux^2 + vy^2 = 5 & (3) \\ ux^3 + vy^3 = 9 & (4) \end{cases}$$

Từ (1) và (3) ta có: $(u + v)(ux^2 + vy^2) = 10$ (5)

Từ (2) ta có: $(ux + vy)^2 = 9$ (6)

Từ (5) và (6)

$$\Rightarrow (u + v)(ux^2 + vy^2) - (ux + vy)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow uv(x^2 + y^2) - 2uvxy = 1$$

$$\Leftrightarrow uv(x - y)^2 = 1 \quad (*)$$

Tương tự từ (2), (3) và (4) ta có:

$$(ux + vy)(ux^3 + vy^3) - (ux^2 + vy^2)^2 = 3 \cdot 9 - 5^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow uv(xy^3 + x^3y - 2x^2y^2) = 2$$

$$\text{hay } uvxy(x - y)^2 = 2 \quad (**)$$

Từ (1) và (4), (2) và (3) ta có:

$$(u + v)(ux^3 + vy^3) - (ux + vy)(ux^2 + vy^2) = 2 \cdot 9 - 3 \cdot 5$$

$$\Leftrightarrow uv(x^3 + y^3) - uv(xy^2 + x^2y) = 3$$

$$\Leftrightarrow uv(x + y)(x - y)^2 = 3 \quad (***)$$

v Nếu u, v có một số bằng 0 hoặc $x = y$ thì dễ dàng thấy hệ vô nghiệm.

v Nếu $u, v \neq 0, x \neq y$:

Từ (*) (***) và (***) ta có hệ:

$$\begin{cases} uv(x - y)^2 = 1 \\ uvxy(x - y)^2 = 2 \\ uv(x + y)(x - y)^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 2 \\ x + y = 3 \\ uv(x - y)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \wedge y = 2 \\ x = 2 \wedge y = 1 \Rightarrow uv = 1 \\ uv(x - y)^2 = 1 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện $u + v = 2 \Rightarrow u = v = 1$

Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm là $(x; y; u; v) = (2; 1; 1; 1); (1; 2; 1; 1)$

Bài 2:

a) Với $k = 1, 2$ thì rõ ràng tồn tại số nguyên dương m thỏa $(m^3 + 10)$ chia hết cho 3^k

Với $k \geq 3$

Xét 3^{k-2} số:

$$(3 \cdot 0 + 2)^3 + 10$$

$$(3 \cdot 1 + 2)^3 + 10$$

.....

$$(3 \cdot (3^{k-2} - 1) + 2)^3 + 10$$

Ta có $(3t + 2)^3 + 10 \equiv 18 \equiv 0 \pmod{3^2}$

Vậy khi đem $(3t + 2)^3 + 10$ chia cho 3^k thì có thể có số dư thuộc tập

$$A = \{3^2, 3^2 \cdot 2, 3^2 \cdot 3, \dots, 3^2 \cdot 3^{k-2}\}$$

$$|A| = 3^{k-2}$$

do đó đem 3^{k-2} số trên chia cho 3^k có 3^{k-2} số dư thuộc tập A .

_ Nếu không có số nào chia hết cho 3^k thì theo nguyên tắc Dirichlet $\exists m, n$ thỏa:

$$(3m + 2)^3 \equiv (3n + 2)^3 \pmod{3^k}$$

$$\Leftrightarrow (3m + 2)^3 - (3n + 2)^3 \equiv 0 \pmod{3^k}$$

$$\Leftrightarrow (3m - 3n)(9m^2 + 9n^2 + 18m + 18n + 9mn + 12) \equiv 0 \pmod{3^k}$$

$$\Leftrightarrow 3^2(m - n)(3m^2 + 3n^2 + 6m + 6n + 3mn + 4) \equiv 0 \pmod{3^k}$$

$$\Leftrightarrow m - n \equiv 0 \pmod{3^{k-2}}$$

(vô lý vì $m \neq n$ và $m - n < 3^{k-2}$)

Tóm lại luôn tồn tại m sao cho $(m^3 + 10)$ chia hết cho 3^k , $\forall k \in \mathbb{N}^*$

b) Giả sử a là số thỏa điều kiện, $a = 3^{3a} \cdot 3^b \cdot a_1$

trong đó $a, b \in \mathbb{N}$; $a_1 \in \mathbb{N}$; $(a_1, 3) = 1$ và $b \in \{1; 2; 0\}$

Khi đó với $k \in \mathbb{N}$, $k > 3a + 3$ thì $\exists m$ mà $(m^3 + a)$ chia hết cho $3^k \Rightarrow m = 3^a \cdot m_1$

Khi đó $m^3 + a = 3^{3a}(m_1^3 + 3^b \cdot a_1)$ chia hết cho 3^k

_ Tuy nhiên nếu $b = 1$ hoặc 2 thì $(m^3 + a)$ không chia hết cho 3^{3a+3} (vô lý)

Suy ra $b = 0 \Rightarrow a = 3^{3a} \cdot a_1$ và $m^3 + a = 3^{3a}(m_1^3 + a_1)$ chia hết cho 3^k

Đặt $m_1 = 3m_2 + r \Rightarrow r^3 + a_1 \equiv 0 \pmod{9}$

Do $(a_1, 3) = 1 \Rightarrow r = 1$ hoặc $2 \Rightarrow a_1 = 9a_2 \pm 1$

Mặt khác với $a_1 = 9a_2 \pm 1$, ta cũng xét 3^{k-2} số:

$$(3 \cdot 0 \pm 2)^3 + 9a_2 \pm 1$$

$$(3 \cdot 1 \pm 2)^3 + 9a_2 \pm 1$$

.....

$$(3 \cdot (3^{k-2} - 1) \pm 2)^3 + 9a_2 \pm 1$$

Chứng minh tương tự trên ta có với mọi số nguyên dương k , tồn tại số nguyên dương m sao cho $m^3 + a_1$ chia hết cho 3^k

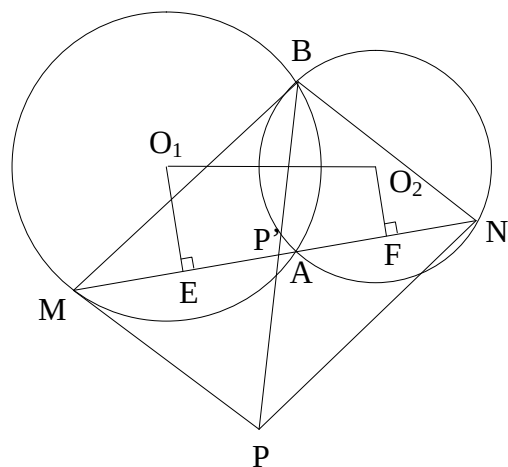
_ Tóm lại với $a_1 = 9a_2 \pm 1$ thì $\forall k \in \mathbb{N}^*$ luôn $\exists m$ thỏa $(m^3 + a_1)$ chia hết cho 3^k

_ Kết luận: vậy $\forall a$ có dạng $3^{3a} \cdot (9t \pm 1)$

với $a \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{Z}$ và $a \neq 0$ thì $\forall k \in \mathbb{N}$ thì $\exists m$ sao cho $(m^3 + a)$ chia hết cho 3^k

Bài 3:

a) Gọi $P' = MN \cap BP$. Ta có P' là ảnh của P qua phép vị tự $H_B^{1/2}$



Ta chuyển bài toán về tìm quỹ tích của P' .

v Phần thuận: Gọi E, F, O lần lượt là trung điểm AM, AN, O_1O_2 và T là trung điểm

EF

$$P'E = P'M - ME = \frac{1}{2} \cdot MN - \frac{1}{2} \cdot AM = \frac{1}{2} \cdot AN = AF$$

T

$\Rightarrow P'$ đối xứng với A qua T

Mặt khác do $OT \parallel O_1E \parallel O_2F$ nên $OT \perp P'A$

$\Rightarrow OP' = OA = a = \text{const} \Rightarrow P' \in (O, a)$

v Giới hạn: $P' \neq P'_1, P'_2$. (P'_1, P'_2 là vị trí P' khi MN suy biến thành tiếp tuyến của $(O_1), (O_2)$ tại A).

v Phần đảo: các bạn tự cm

Như vậy quỹ tích P' là $(O, a) \setminus \{P'_1, P'_2\}$

$\Rightarrow$ Quỹ tích P là $(B', 2a) \setminus \{P_1, P_2\}$

trong đó B' đối xứng B qua O; $P_1 =$

$$H_B^2(P'_1), P_2 = H_B^2(P'_2)$$

b) $\angle ADO_2 = 90^\circ \Rightarrow D$ là trung điểm

AH

Tương tự C là trung điểm AK

_ Gọi $M = AO_1 \cap (C_1)$, $N = AO_2 \cap$

(C_2) , $T = [AO_1] \cap [AO_2]$

(quy ước $[AB]$ là đường tròn đường kính AB)

_ Xét phép nghịch đảo $I(A, k)$ ($k > 0$)

$I(A, k)$ biến các điểm M, N, $O_1, O_2, C, D, T, B, K, H$ thành $M^*, N^*, O_1^*, O_2^*, C^*, D^*, T^*, B^*, K^*, H^*$ trong đó $M^*, O_1^* \in Ax$, $N^*, O_2^* \in Ay$

Do $AM = 2AO_1 \Rightarrow AO_1^* = 2AM^*$.

Tương tự $AO_2^* = 2AN^*$

$(C_1) \xrightarrow{I} d_2$ ($d_2 \perp Ax$, d_2 qua M^*)

$(C_2) \xrightarrow{I} d_3$ ($d_3 \perp Ay$, d_3 qua N^*)

$[AO_1] \xrightarrow{I} d_1$ ($d_1 \perp Ax$, d_1 qua O_2^*)

$[AO_2] \xrightarrow{I} d_4$ ($d_4 \perp Ay$, d_4 qua O_1^*)

Các điểm $K^*, H^*, B^*, D^*, C^*, T^* \in$ các

giao điểm như hình vẽ

$C^*B^*D^*T^*$ là hình bình hành $\Rightarrow C^*D^*$ qua trung điểm K^* của B^*T^*

Xét phép vị tự H_A^2 biến $d_2 \rightarrow d_1, d_3 \rightarrow d_4$

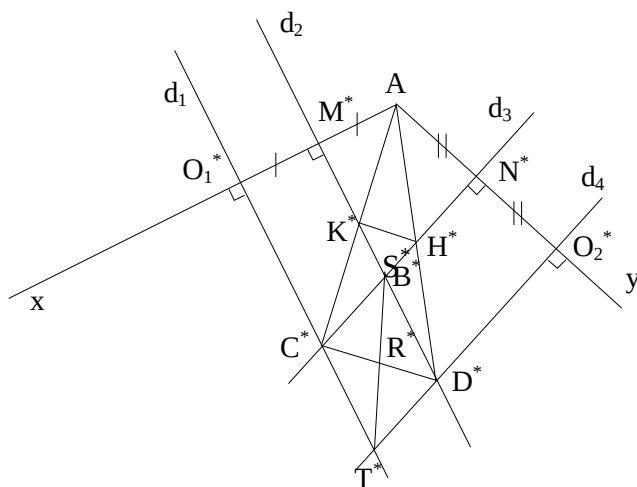
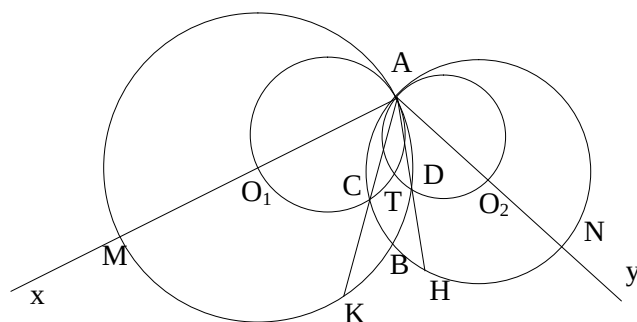
$\Rightarrow B^* \rightarrow T^* \Rightarrow A, B^*, T^*$ thẳng hàng và $AT^* = 2AB^*$.

$K^*H^* \cap AB^* = \{S^*\}$ do K^*, H^* là trung điểm $AC^*, AD^* \Rightarrow AS^* = \frac{1}{2} AR^* = \frac{3}{4} AB^*$

Gọi S là tạo ảnh của S^* qua I, ta có S chính là giao điểm (AHK) với AB

$AS^* = \frac{3}{4} AB^* \Rightarrow AB = \frac{3}{4} AS \Rightarrow S$ cố định

$\Rightarrow (AHK)$ luôn đi qua điểm cố định khác A (đpcm)



Bài 4:

Gọi M là trung điểm BC

$$OD^2 = OM^2 + DM^2 = OB^2 - MB^2 + (MB - DB)^2$$

$$= R^2 - a^2/4 + (a/2 - p + b)^2$$

$$= R^2 - 1/4.a^2 + (1/2.(b-c))^2$$

$$= R^2 + 1/4.(b^2 + c^2 - a^2) - 1/2.bc$$

$$\text{Tương tự } OE^2 = R^2 + 1/4.(a^2 + c^2 - b^2) - 1/2.ac$$

$$OF^2 = R^2 + 1/4.(a^2 + b^2 - c^2) - 1/2.ab$$

$$\Rightarrow OD^2 + OE^2 + OF^2 = 3R^2 + 1/4.(a^2 + b^2 + c^2) - 1/2.(ab + bc +$$

ac) (1)

$$\text{a) Ta có } 1/4.(a^2 + b^2 + c^2) \geq 1/4.(a + b + c)^2/3 = p^2/3$$

$$1/2.(ab + bc + ac) \leq 1/2.(a + b + c)^2/3 = 2p^2/3$$

$$(1) \Rightarrow OD^2 + OE^2 + OF^2 \geq 3R^2 + p^2/3 - 2p^2/3 = 3R^2 - p^2/3 \text{ (đpcm)}$$

$$\text{b) } OD^2 + OE^2 + OF^2 = 3R^2 + 1/4.(a + b + c)^2 - (ab + bc + ac)$$

$$\text{Từ đẳng thức quen thuộc: } ab + bc + ac = p^2 + r^2 + 4Rr$$

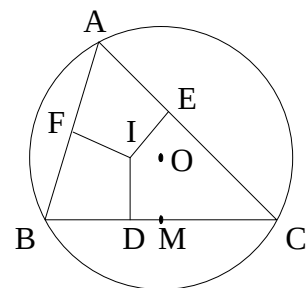
$$\Rightarrow OD^2 + OE^2 + OF^2 = 3R^2 + p^2 - (p^2 + r^2 + 4Rr) = 3R^2 - R^2 - 4Rr$$

$$\text{Như vậy } OD^2 + OE^2 + OF^2 \leq 3(R - r)^2 + 1/4.R^2$$

$$\Leftrightarrow 3R^2 - r^2 - 4Rr \leq 3R^2 + 3r^2 - 6Rr + 1/4.R^2$$

$$\Leftrightarrow 2Rr \leq 4r^2 + 1/4.R^2 \text{ (đúng theo bất đẳng thức Cauchy)}$$

$$\Rightarrow \text{đpcm}$$



Bài 5:

Trước hết ta chứng minh:

$$S = d(1) + d(2) + \dots + d(n) = 1.[n/1] + 2.[n/2] + \dots + n.[n/n]$$

Xét số nguyên dương $k \leq n$, số các số trong $\{1, 2, \dots, n\}$ chia hết cho k là $[n/k]$

$$\Rightarrow \text{Tổng tất cả các ước này là } k.[n/k] \Rightarrow \text{đpcm}$$

$$\text{Bây giờ ta chứng minh } S \leq n.(7n + 2)/8$$

$$\forall \text{ Với } n = 2k + r \text{ (} r = 0, 1 \text{)}$$

$$\text{Ta có } i.[n/i] \leq n, \forall 1 \leq i \leq k$$

$$j.[n/j] = j \text{ với } k + 1 \leq j \leq n$$

$$\text{Do đó: } S \leq k.n + (k + 1) + \dots + n = kn + 1/2.(n.(n+1) - k.(k+1))$$

$$S \leq 1/2.n.(n - r) + 1/2.n.(n + 1) - (n - r)(n - r + 2)/8$$

$$S \leq [4.(2n^2 - n.r + n) - (n^2 - 2nr + r^2 + 2n - 2r)]/8$$

$$S \leq (7n^2 + (2 - 2r).n + 2r - r^2)/8$$

$$\text{Vì } 2r - r^2 - 2n.r \leq 0 \text{ nên } S \leq (7n^2 + 2n)/8 \text{ (đpcm)}$$

$$\text{Dấu "}" xảy ra } \Leftrightarrow 2r - r^2 - 2nr = 0 \text{ (1) } \wedge i.[n/i] = n, \forall i: 1 \leq i \leq k \text{ (2)}$$

$$\text{Từ (1) } \Rightarrow r = 0 \text{ hay } n = 2k$$

$$\text{Ta có } (k - 1).[n/(k - 1)] = n \Rightarrow n \mid (k - 1) \text{ (} k \geq 2 \text{)}$$

$$2k \mid (k - 1) \Rightarrow k - 1 = 1 \vee 2 \Rightarrow k = 2 \vee k = 3$$

$$\Rightarrow n = 4 \vee n = 6$$

$$\forall \text{ Dễ thấy với } n = 6: S = 23 \neq 6.(7.6 + 2)/8 \text{ (loại)}$$

$$\forall k = 1 \Rightarrow n = 2 \text{ thỏa}$$

$$\text{Vậy dấu "}" xảy ra khi } n = 2 \vee n = 4$$

Bài 6:

Gọi $a(i, j)$ là ô ở hàng i cột j . Để cho tiện ta chỉ nói “ô $*$ ” thay vì nói “ô được đánh dấu”

Do mỗi hàng mỗi cột số ô là chẵn nên số ô $*$ mỗi cột là 0, 2 hoặc 4

_ Nếu có 1 hàng 4 ô $*$, do chỉ có trong 8 ô $*$ trong bảng nên sẽ có ít nhất 1 hàng có 0 ô $*$.

Do vai trò của hàng và cột là như nhau nên giả sử hàng 1 có 4 ô $*$ và hàng 4 có 0 ô $*$

+ Xét 2 hàng 2 và 3 nếu có hàng nào có 4 ô $*$ hoặc 0 ô $*$ thì sẽ tồn tại 2 hàng giống nhau (mâu thuẫn)

Do đó hàng 2 và 3 mỗi hàng có 2 ô được đánh dấu và ta đã đánh dấu đủ 8 ô

Giả sử hàng 2 đánh dấu 2 ô $a(2, i)$ và $a(2, j)$ thì khi đó 2 cột i, j sẽ đánh dấu giống nhau (mâu thuẫn)

_ Như vậy mỗi hàng và mỗi cột có đúng 2 ô được đánh dấu

_ Ta đếm số cách đánh dấu

Xét hàng 1 số cách chọn 2 ô trong 4 ô là C_4^2 cách

Xét cách chọn 2 ô (1, 1) và (1, 2) các cách khác tương tự

(do ta có thể hoán đổi vị trí các hàng và cột)

Xét cột 1 chọn 1 trong 3 ô còn lại

$\Rightarrow$ chỉ có C_3^1 cách chọn

Xét trường hợp chọn ô (3, 1)

Xét hàng 3 ta không được chọn ô (3, 2) vì nếu không 2 cột 1 và 2 sẽ giống nhau.

Vì vậy ta có C_2^1 cách chọn ô ở hàng 3

Xét cách chọn ô (3, 4)

Xét cột 4 ta không được chọn ô (1, 4)

vì hàng 1 đã có 2 ô được chọn

Vậy ta có C_2^1 cách chọn ô ở cột 4

Xét cách chọn ô (2, 4)

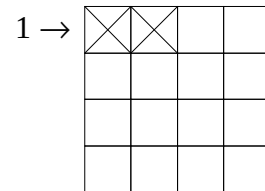
Lúc này chỉ còn 1 cách duy nhất chọn 3 ô còn lại

(vì có 1 cách chọn ở hàng 4 là 2 ô

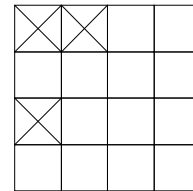
(4, 2) và (4, 3) $\rightarrow$ cách chọn ô cuối cùng là (2, 3))

Tóm lại số cách đánh dấu ô thoả ycđb là

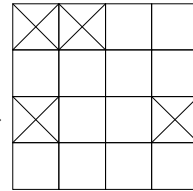
$$C_4^2 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1 = 72 \text{ (cách)}$$



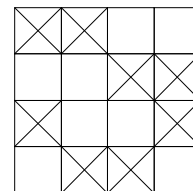
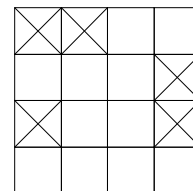
1
 $\downarrow$



3 $\rightarrow$



4
 $\downarrow$



Đề thi vùng BALKAN 2004

Bài 1: Cho $\{a_n\}$ là dãy số thực thỏa :

$$a_1 = 3$$

$$\forall m, n \geq 0 : a_{m+n} + a_{m-n} - m + n - 1 = \frac{a_{2m} + a_{2n}}{2}$$

Tìm a_{2004} .

Bài 2: Tìm mọi x, y là các số nguyên tố thỏa mãn:

$$x^y - y^x = xy^2 - 19$$

Bài 3: Cho O là một điểm nằm trong tam giác nhọn ABC . Các đường tròn có tâm lần lượt là các trung điểm các cạnh tam giác ABC và cùng qua O thì cắt nhau đôi một tại các điểm thứ hai khác O là K, L, M .

CMR: O là tâm nội tiếp tam giác $KLM \Leftrightarrow O$ là tâm ngoại tiếp tam giác ABC .

Bài 4: Một mặt phẳng được phân chia thành các miền bởi hữu hạn các đường thẳng mà không có 3 đường nào trong chúng là đồng quy. Hai miền được gọi là “láng giềng” nếu giao của các đường biên giới của chúng là 1 đường thẳng, hoặc là 1 đoạn thẳng hoặc là 1 tia nhưng không là một điểm. Mỗi miền được gán bởi 1 số nguyên theo quy tắc sau:

i) Tích các số nguyên gán cho 2 láng giềng nhỏ hơn tổng của chúng.

ii) Với mỗi đường thẳng cho trước và mỗi nửa mặt phẳng được xác định bởi nó; tổng các số gán lên tất cả các miền nằm trên nửa mặt phẳng này là 0.

CMR: việc gán số trên thực hiện được $\Leftrightarrow$ tất cả các đường thẳng ban đầu không cùng song song.

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN TRUNG QUỐC THAM DỰ IMO 2004

Ngày thứ nhất:

Bài 1 : Cho góc $XOY = \pi/2$ và P là một điểm nằm trong góc đó thỏa mãn $OP=1$, $\angle XOP = \pi/6$. Một đường thẳng qua P cắt các đoạn thẳng OX và OY tại M,N lần lượt. Tìm giá trị lớn nhất của $OM+ON-MN$.

Bài 2 : Cho u là một số nguyên dương cố định. Chứng minh rằng phương trình $n! = u^a - u^b$ chỉ có hữu hạn nghiệm nguyên dương (n,a,b).

Bài 3 : Cho k là số nguyên lớn hơn 1 và $1 < n_1 < \dots < n_k$ là các số nguyên dương. a,b là các số nguyên dương thỏa mãn:

$$\prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) \leq \frac{a}{b} < \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 - \frac{1}{n_i}\right)$$

Chứng minh rằng: $\prod_{i=1}^k n_i \geq (4a)^{2^{k-1}}$.

Ngày thứ hai:

Bài 4 : Các điểm D,E,F trên các cạnh BC,CA,AB tương ứng và $EF \parallel BC$, D_1 trên BC, E_1 trên AB, F_1 trên AC sao cho $D_1 E_1 \parallel DE$ và $D_1 F_1 \parallel DF$. Lấy P để PBC đồng dạng DEF trong đó A,P nằm cùng nửa mặt phẳng bờ BC. Chứng minh rằng EF, $E_1 F_1$, P D_1 đồng quy.

Bài 5 : Cho $p_1, \dots, p_{25}$ là các số nguyên tố không vượt quá 2004. Tìm số nguyên T lớn nhất sao cho với mọi số nguyên dương không vượt quá T thì đều có thể biểu diễn dưới dạng tổng của các ước khác nhau của $(p_1 \dots p_{25})^{2004}$

Bài 6 : Gọi a,b,c là chiều dài 3 cạnh của một tam giác có chu vi không vượt quá 2π . Chứng minh rằng $\sin a, \sin b, \sin c$ cũng là độ dài 3 cạnh của một tam giác nào đó.

Đề thi chọn đội tuyển Việt Nam tham dự IMO 2004

Ngày 1 :

Bài 1: Cho A là tập gồm 2004 số nguyên dương phân biệt $a_1, \dots, a_{2004}$. Đặt $f(a_i)$ là số các số $a_j \in A$ và $(a_i, a_j) = 1$. Biết rằng

$$\begin{cases} f(a_i) < 2003 \quad \forall i = \overline{1, 2004} \\ f(a_i) = f(a_j) \quad \forall i, j \end{cases}$$

Tìm số k bé nhất sao cho với 1 tập con gồm k phần tử bất kỳ của 1 tập A tùy ý thỏa tính chất trên đều tồn tại 2 số có UCLN > 1

Bài 2: Tìm tất cả $\lambda \in \mathbb{R}$ sao cho phương trình hàm sau có nghiệm duy nhất :

$$f(x^2 + y + f(y)) = (f(x))^2 + \lambda y$$

Bài 3: Cho (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A và B . Tiếp tuyến tại A và B của (O_1) ở K . 1 điểm M chuyển động trên (O_1) ($M \neq A, B$). KM cắt lại (O_1) ở C , AM cắt lại (O_2) ở P , AC cắt lại (O_2) ở Q .

Chứng minh:

a) KM đi qua trung điểm PQ .

b) Đường thẳng PQ luôn qua điểm cố định khi M điểm động trên (O_1)

Ngày 2 :

Bài 4: Cho dãy $x_1 = 603, x_2 = 102, x_{n+2} = x_{n+1} + x_n + 2\sqrt{x_n x_{n+1}} - 2 \quad \forall n \geq 1$

a) Dãy gồm các số nguyên dương

b) Có vô số số thuộc dãy có 4 chữ số tận cùng = 2003

b) Không có vô số số thuộc dãy có 4 chữ số tận cùng = 2004.

Bài 5 : Cho lục giác lồi $ABCDEF$. Gọi $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ là trung điểm AB, BC, CD, DE, EF, FA . Biết lục giác $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ có các góc bằng nhau. Đặt p, p_1 là chu vi của

các lục giác $ABCDEF$ và $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Chứng minh $p \geq \frac{2\sqrt{3}}{3} p_1$. Đẳng thức xảy ra khi

nào ?

Bài 6 : Cho S là tập hữu hạn số nguyên dương sao cho số lớn nhất và nhỏ nhất có UCLN = 1. Đặt S_n là tập hợp các số biểu diễn dưới dạng không quá tổng của n số trong S (không nhất thiết phân biệt). Quy ước $S_0 = 0$. Chứng minh tồn tại số nguyên dương không và số nguyên k sao cho $|S_n| = an + b \quad \forall n > k$ trong đó a là số lớn nhất của tập S ($|S_n|$: số phần tử của S_n)

Đề thi APMO 2004

Bài 1 : Tìm tất cả các tập hợp S khác rỗng và có hữu hạn phần tử gồm các số nguyên dương thỏa nếu m, n thuộc S thì $(m+n)/\gcd(m, n)$ cũng thuộc S .

Bài 2 : Tam giác ABC nội có tâm ngoại tiếp O không trùng với trọng tâm H .

CMR : 1 trong số 3 diện tích tam giác AOH , BOH , COH bằng tổng hai diện tích còn lại trong chuồng.

Bài 3 : Cho 2004 năm trên mặt phẳng và không có 3 năm nào thẳng hàng. S là tập tất cả các tổng khoảng cách qua 2 năm khác nhau trong 2004 năm đó.

CMR: các năm nào có thể là tổng hai năm sao cho bất cứ 2 năm cùng năm nào và chẵn nếu có lẻ tổng khoảng cách thuộc S mà mỗi một tổng khoảng cách trong số đó là bội của 2 nửa mặt phẳng nào khác nhau trong 2 năm đó.

Bài 4 : CMR: $\left[\frac{(n-1)!}{n^2 + n} \right]$ là số chẵn với mọi n nguyên dương.

Bài 5 : CMR: $(x^2 + 2)(y^2 + 2)(z^2 + 2) \geq 9(xy + yz + zx)$ với mọi x, y, z là các số thực dương.

Đề thi USAMO 2004

Bài 1 : Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn, các góc trong và ngoài ở mỗi đỉnh đều lớn hơn hoặc bằng 60 độ. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{3} |AB^3 - AD^3| \leq |BC^3 - CD^3| \leq 3 |AB^3 - AD^3|$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Bài 2 : Cho $a_1, \dots, a_n$ là những số nguyên có ước chung lớn nhất là 1. Gọi S là tập hợp những số nguyên thỏa tính chất :

a) $a_i \in S \quad \forall i = 1, \dots, n$

b) $(a_i - a_j) \in S, i, j = 1..n$ (i, j không nhất thiết phân biệt)

c) Với mọi $x, y \in S$, nếu $x+y \in S$ thì $x-y \in S$

Chứng minh rằng S phải bằng với tập hợp tất cả các số nguyên.

Bài 3 : Với giá trị k thực dương nào thì có thể chia hình chữ nhật $1 \times k$ thành hai đa giác đồng dạng nhưng không trùng nhau ?

Bài 4 : Alice và Bob chơi 1 trò chơi trên lưới ô vuông 6×6 . Đến lượt người nào thì người đó chọn 1 số hữu tỉ chưa xuất hiện trong lưới và viết số ấy vào ô trống của lưới. Alice bắt đầu trước và họ lần lượt thay phiên nhau. Khi tất cả các ô đã được điền thì tô đen số lớn nhất ở mỗi dòng. Alice thắng nếu có thể vẽ được 1 đường thẳng nằm trong những ô đen từ trên xuống dưới lưới ô vuông, nếu không thì Bob thắng. (Nếu 2 hình vuông có chung 1 đỉnh, Alice có thể vẽ 1 đường thẳng từ điểm này đến điểm khác nằm trong 2 hình vuông đó). Tìm một chiến thuật chiến thắng cho một trong 2 người chơi.

Bài 5 : a, b, c là những số thực dương. Chứng minh rằng :

$$(a^5 - a^2 + 3)(b^5 - b^2 + 3)(c^5 - c^2 + 3) \geq (a + b + c)^3$$

Bài 6 : Một đường tròn ω tâm I nội tiếp tứ giác ABCD. Giả sử $(AI + DI)^2 + (BI + CI)^2 = (AB + CD)^2$

Chứng minh rằng ABCD là hình thang cân.