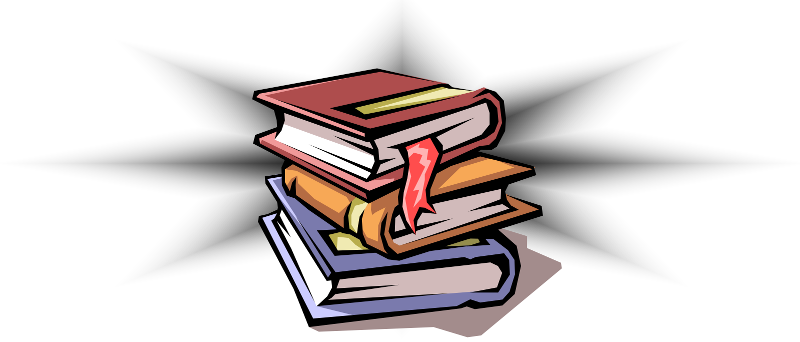
Tailieumontoan.com

Trịnh Bình Tổng hợp



TUYỂN TẬP ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI
MÔN TOÁN LỚP 9 TỈNH THANH HÓA

Thanh Hóa, tháng 12 năm 2019

TUYỂN TẬP ĐỀ THI
HỌC SINH GIỎI LỚP 9 TỈNH THANH HÓA

LỜI NÓI ĐẦU

Nhằm đáp ứng nhu cầu về của giáo viên toán THCS và học sinh luyện thi học sinh giỏi môn toán lớp 9, website tailieumontoan.com giới thiệu đến thầy cô và các em bộ đề thi học sinh giỏi toán lớp 9 tỉnh Thanh Hóa qua các năm có hướng dẫn một số đề. Đây là bộ đề thi mang tính chất thực tiễn cao, giúp các thầy cô và các em học sinh luyện thi học sinh giỏi lớp 9 có một tài liệu bám sát đề thi để đạt được thành tích cao, mang lại vinh dự cho bản thân, gia đình và nhà trường. Bộ đề gồm nhiều Câu toán hay được các thầy cô trên cả nước sưu tầm và sáng tác, ôn luyện qua sẽ giúp các em phát triển tư duy môn toán từ đó thêm yêu thích và học giỏi môn học này, tạo được nền tảng để có những kiến thức nền tốt đáp ứng cho việc tiếp nhận kiến thức ở các lớp, cấp học trên được nhẹ nhàng và hiệu quả hơn.

Các vị phụ huynh và các thầy cô dạy toán có thể dùng có thể dùng tuyển tập đề toán này để giúp con em mình học tập. Hy vọng Tuyển tập đề thi học sinh giỏi lớp 9 tỉnh Thanh Hóa này sẽ có thể giúp ích nhiều cho học sinh phát huy nội lực giải toán nói riêng và học toán nói chung.

Bộ đề này được viết theo hình thức Bộ đề ôn thi, gồm: đề thi và hướng dẫn giải đề ngay dưới đề thi đó dựa trên các đề thi chính thức đã từng được sử dụng trong các kì thi học sinh giỏi toán lớp 9 của tỉnh Thanh Hóa.

Mặc dù đã có sự đầu tư lớn về thời gian, trí tuệ song không thể tránh khỏi những hạn chế, sai sót. Mong được sự góp ý của các thầy, cô giáo và các em học!

Chúc các thầy, cô giáo và các em học sinh thu được kết quả cao nhất từ bộ đề này!

MỤC LỤC

Phần 1: Đề thi

Phần 2: Hướng dẫn giải

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH THANH HÓA

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 1
(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2018 – 2019
MÔN THI: TOÁN
Ngày thi: 22/3/2019
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(4,0 điểm)*

1. Rút gọn biểu thức $P=\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}-\frac{x-\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}}\right):\left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}-\frac{x-5}{x-\sqrt{x}-2}\right)$, với $x>0, x\neq 4$.

2. Cho $a=\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}$, $b=\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}$. Không dùng máy tính, hãy chứng minh các biểu thức $M=a+b$ và $N=a^7+b^7$ có giá trị đều là số chẵn.

Câu 2. *(4,0 điểm)*

1. Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2+2kx+4=0$ (k là tham số). Tìm tất cả các giá trị của k sao cho : $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2\leq 3$

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\sqrt{x^2+1}=2y+1 \\ y+\sqrt{y^2+1}=2x+1 \end{cases}$.

Câu 3. *(4,0 điểm)*

1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2y^2(x+y)+x=2+y(x-1)$

2. Cho $n\in\mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng nếu $2n+1$ và $3n+1$ là các số chính phương thì n chia hết cho 40.

Câu 4. *(6,0 điểm)*

Cho đường tròn (O,R) và một điểm A cố định ở bên ngoài đường tròn, $OA=2R$. Từ A kẻ các tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Đường thẳng OA cắt dây BC tại I. Gọi M là điểm di động trên cung nhỏ BC. Tiếp tuyến tại M của đường tròn (O) cắt AB, AC lần lượt ở E, F. Dây BC cắt OE, OF lần lượt tại các điểm P, Q

1. Chứng minh $\widehat{ABI}=60^0$ và tứ giác $OBEQ$ nội tiếp.

2. Chứng minh $EF=2PQ$.

3. Xác định vị trí điểm M trên cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$ sao cho tam giác OPQ có diện tích nhỏ nhất. Tính diện tích nhỏ nhất đó theo R.

Câu 5. *(2,0 điểm)*

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y-z+1=0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\frac{x^3y^3}{(x+yz)(y+xz)(z+xy)^2}$

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH THANH HÓA

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 2
(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2017 – 2018
MÔN THI: TOÁN
Ngày thi: 10/3/2018
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(4,0 điểm)*

1. Cho biểu thức $P=\dfrac{x-2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}+\dfrac{1+2x-2\sqrt{x}}{x^2-\sqrt{x}}$, với $x>0, x\neq 1$. Rút gọn P và tìm tất cả các giá trị của x sao cho giá trị của P là một số nguyên.

2. Tính giá trị của $P=\dfrac{4(x+1)x^{2018}-2x^{2017}+2x+1}{2x^2+3x}$ tại $x=\sqrt{\dfrac{1}{2\sqrt{3}-2}-\dfrac{3}{2\sqrt{3}+2}}$.

Câu 2. *(4,0 điểm)*

1. Biết phương trình $(m-2)x^2-2(m-1)x+m=0$ có hai nghiệm tương ứng là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông. Tìm m để độ dài đường cao ứng với cạnh huyền của tam giác vuông đó bằng $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+y)^2(8x^2+8y^2+4xy-13)+5=0\\ 2x+\dfrac{1}{x+y}=1\end{cases}$

Câu 3. *(4,0 điểm)*

1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $y^2-5y+62=(y-2)x^2+(y^2-6y+8)x$.

2. Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $p=a^2+b^2$ là số nguyên tố và $p-5$ chia hết cho 8. Giả sử x, y là các số nguyên thỏa mãn ax^2-by^2 chia hết cho p. Chứng minh rằng cả hai số x, y chia hết cho p.

Câu 4. *(6,0 điểm)*

Cho tam giác ABC có $(O),(I),(I_a)$ theo thứ tự là các đường tròn ngoại tiếp, đường tròn nội tiếp và đường tròn bàng tiếp đối diện đỉnh A của tam giác với các tâm tương ứng là O, I, I_a. Gọi D là tiếp điểm của (I) với BC, P là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BAC}$ của (O), PI_a cắt (O) tại điểm K. Gọi M là giao điểm của PO và BC, N là điểm đối xứng với P qua O.

1. Chứng minh IBI_aC là tứ giác nội tiếp.

2. Chứng minh NI_a là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác I_aMP.

3. Chứng minh $\widehat{DAI}=\widehat{KAI_a}$.

Câu 5. *(2,0 điểm)*

Cho $x, y, z>0$ thỏa mãn $x\geq z$. Chứng minh rằng: $\dfrac{xz}{y^2+yz}+\dfrac{y^2}{xz+yz}+\dfrac{x+2z}{x+z}\geq\dfrac{5}{2}$.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH THANH HÓA

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 3
(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2016 – 2017
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. (*4,0 điểm*)

Cho biểu thức: $P=\frac{x}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(1-\sqrt{y}\right)}-\frac{y}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}-\frac{xy}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(1-\sqrt{y}\right)}$

1. Rút gọn biểu thức *P*.
2. Tìm các giá trị x,y nguyên thỏa mãn $P=2$.

Câu 2. (*4,0 điểm*)

1. Tìm m để phương trình $\left(x^2-1\right)\left(x+3\right)\left(x+5\right)=m$ có 4 nghiệm phân biệt x_1,x_2,x_3,x_4 thỏa mãn $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=-1$

2. Giải hệ phương trình : $\begin{cases}x^2=2+xy^2\\ y^2=2+x^2y\end{cases}$

Bài 3. (*4 điểm*)

1. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh $p^{2016}-1$ chia hết cho 60.

2. Cho *x*, *y*, *z* là các số dương khác nhau đôi một và $x^3+y^3+z^3$ chia hết cho $x^2y^2z^2$. Tìm thương của phép chia $x^3+y^3+z^3:x^2y^2z^2$

Câu 4. (*6,0 điểm*)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) và $AB<AC$. Các tiếp tuyến tại B và C của (O) cắt nhau tại D. Qua D kẻ đường thẳng song song với AB, cắt BC và AC lần lượt tại M, N.

1) Chứng minh tứ giác $BONC$ nội tiếp và tam giác ANB cân.
2) Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại I, BI cắt DM tại K. Chứng minh K là trung điểm của DM.
3) Trên đoạn thẳng BD lấy điểm P sao cho $IP//DN$, AP cắt BC tại Q. Gọi G là trung điểm của DK. Chứng minh ba điểm Q,I,G thẳng hàng.

Câu 5. (*2,0 điểm*)

Cho các số thực *x*, *y*, *z* thỏa mãn : $0\le x,y,z\le 2$ và $x+y+z=5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $A=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH THANH HÓA

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 4

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH

LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2015 – 2016

MÔN THI: TOÁN

Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(4,0 điểm)*

Cho biểu thức $A=\left(\frac{a-3\sqrt{a}}{\sqrt{a}+3}-\frac{a+3\sqrt{a}}{\sqrt{a}-3}\right).\left(\sqrt{a}-\frac{9}{\sqrt{a}}\right)$ (với $a>0;a\neq 9$)

a) Rút gọn biểu thức A;

b) Tìm các giá trị biểu thức $M=A+a$.

Câu 2. *(4,0 điểm)*

a) Giải phương trình: $\frac{9}{x^2}+\frac{2x}{\sqrt{2x^2+9}}=1$.

b) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^3-y^3=4(4x-y) \\ y^2-5x^2=4 \end{cases}$.

Câu 3. *(4,0 điểm)*

a) Tìm các nghiệm nguyên $(x;y)$ của phương trình: $54x^3+1=y^3$.

b) Tìm các giá trị nguyên dương của m để phương trình $x^2-mxy+y^2+1=0$ có nghiệm nguyên dương với x,y là ẩn số.

Câu 4. *(6,0 điểm)*

Cho đường tròn tâm O bán kính R. Tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$ có B,C cố định. Đường cao AD, BE,CF của tam giác ABC cắt nhau tại H. Đường thẳng chứa các tia phân giác ngoài của góc BHC cắt AB, AC lần lượt tại điểm M,N.

a) Chứng minh tam giác AMN cân;

b) Xác định vị trí của A để chu vi tam giác DEF lớn nhất;

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt đường phân giác trong của góc BAC tại K (K khác A). Chứng minh rằng đường thẳng HK luôn đi qua một điểm cố định khi A thay đổi.

Câu 5. *(2,0 điểm)* Cho các số dương a,b,c thỏa mãn: $ab^2+bc^2+ca^2=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2a^5+3b^5}{ab}+\frac{2b^5+3c^5}{bc}+\frac{2c^5+3a^5}{ca}\geq 15\left(a^3+b^3+c^3-2\right).$$

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH THANH HÓA

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 5

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH

LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2014– 2015

MÔN THI: TOÁN

Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. (*4,0 điểm*) Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{2x-1+\sqrt{x}}{1-x}+\dfrac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}}\right).\dfrac{\left(x-\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}-1}-1$

1. Rút gọn biểu thức A

2. Tìm x để $A<-\dfrac{1}{7}$

Câu 2. *(4,0 điểm)*

1. Giải phương trình $\dfrac{x}{x^2-x-2}-\dfrac{3x}{x^2-5x-2}-2=0.$

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2=2x^2y^2\\(x+y)(1+xy)=4x^2y^2\end{cases}$

Câu 3. *(4,0 điểm)*

1. Tìm các nghiệm nguyên (x; y) của phương trình: $5\left(x^2+xy+y^2\right)=7\left(x+2y\right)$

2. Tìm tất cả các số nguyên tố *p, q* sao cho tồn tại số tự nhiên *m* thỏa mãn :

$\dfrac{pq}{p+q}=\dfrac{m^2+1}{m+1}.$

Câu 4. *(6,0 điểm)*

Cho 3 điểm A , B, C cố định nằm trên một đường thẳng d (B nằm giữa A và C).

Vẽ đường tròn tâm O thay đổi nhưng luôn đi qua B và C (O không thuộc đường thẳng d). Kẻ AM và AN là các tiếp tuyến với đường tròn tâm O tại M và N. Gọi I là trung điểm của BC, AO cắt MN tại H và cắt đường tròn tại các điểm P và Q (P nằm giữa A và O), BC cắt MN tại K.

1. Chứng minh 4 điểm O, M, N, I cùng nằm trên một đường tròn.

2. Chứng minh điểm K cố định khi đường tròn tâm O thay đổi.

3. Gọi D là trung điểm của HQ, từ H kẻ đường thẳng vuông góc với MD cắt đường thẳng MP tại E. Chứng minh P là trung điểm của ME.

Câu 5. *(2,0 điểm)*

Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $2\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)+c\left(\dfrac{a}{b^2}+\dfrac{b}{a^2}\right)=6.$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{bc}{a\left(2b+c\right)}+\dfrac{ca}{b\left(2a+c\right)}+\dfrac{4ab}{c\left(a+b\right)}.$

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH THANH HÓA

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 6
(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2013– 2014
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu I (*4,0 điểm*): Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1}+\dfrac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{1-\sqrt{xy}}+1\right):\left(1-\dfrac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{\sqrt{xy}-1}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1}\right)$.

1. Rút gọn biểu thức A.
2. Cho $\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}=6$. Tìm giá trị lớn nhất của A.

Câu II (*5,0 điểm*).

1.Cho phương trình $x^2+2(m-2)x+m^2-2m+4=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\dfrac{2}{x_1^2+x_2^2}-\dfrac{1}{x_1x_2}=\dfrac{1}{15m}$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+y+z=1\\ x^4+y^4+z^4=xyz\end{cases}$.

Câu III (*4,0 điểm*).

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a; b) sao cho ($a+b^2$) chia hết cho (a^2b-1).
2. Tìm $x,y,z\in N$ thỏa mãn $\sqrt{x+2\sqrt{3}}=\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

Câu IV (*6,0 điểm*) : Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Một điểm C cố định thuộc đoạn thẳng AO (C khác A và C khác O). Đường thẳng đi qua C và vuông góc với AO cắt nửa đường tròn đã cho tại D. Trên cung BD lấy điểm M (M khác B và M khác D). Tiếp tuyến của nửa đường tròn đã cho tại M cắt đường thẳng CD tại E. Gọi F là giao điểm của AM và CD.

1. Chứng minh tam giác EMF là tam giác cân.
2. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác FDM. Chứng minh ba điểm D, I, B thẳng hàng.
3. Chứng minh góc ABI có số đo không đổi khi M di chuyển trên cung BD.

Câu V (*1,0 điểm*) : Cho x, y là các số thực dương thoả mãn $x+y=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B=\dfrac{1}{x^3+y^3}+\dfrac{1}{xy}$.

Hết

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH THANH HÓA

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 7
(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2012– 2013
MÔN THI: TOÁN
Ngày thi: 15/3/2013
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu I. *(4,0 điểm):*

Cho biểu thức P = $\frac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3}-\frac{2\left(\sqrt{x}-3\right)}{\sqrt{x}+1}+\frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$

1. Rút gọn P
2. Tìm giá trị nhỏ nhất của P và giá trị tương ứng của x.

Câu II. *(5,0 điểm):*

1. Tìm tất cả các giá trị của m sao cho phương trình $x^4 - 4x^3 + 8x + m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2+3x=\dfrac{8}{y^3} \\ x^3-2=\dfrac{6}{y}. \end{cases}$

Câu III. *(4,0 điểm):*

1. Tìm tất cả các số tự nhiên n dương sao cho $2^n - 15$ là bình phương của số tự nhiên.
2. Cho m, n là các số tự nhiên thoả mãn $\sqrt{6}-\frac{m}{n}>0$. Chứng minh rằng

   $\sqrt{6}-\frac{m}{n}>\frac{1}{2mn}$

Câu IV. *(6,0 điểm):* Cho tam giác ABC nhọn có AB < AC, nội tiếp đường tròn tâm (Ω). Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, (ω) là đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. Đường tròn (ω) cắt (Ω) tại hai điểm A, N (A $\neq$ N), Đường thẳng AM cắt đường tròn (ω) tại hai điểm A, K (K $\neq$ A).

1. Chứng minh rằng ba điểm N, H, M thẳng hàng.
2. Chứng minh góc NDE = góc FDK
3. Chứng minh rằng tứ giác BHKC nội tiếp.

Câu V. *(1,0 điểm):* Cho một bảng kẻ ô vuông kích thước 7 x 7 (gồm 49 ô vuông đơn vị). Đặt 22đấu thủ vào bảng sao cho mỗi ô vuông đơn vị có không quá một đấu thủ. Hai đấu thủ được gọi là tấn công lẫn nhau nếu họ cùng trên một hàng hoặc cùng trên một cột. Chứng minh rằng với mỗi cách đặt bất kì luôn tồn tại ít nhất 4 đấu thủ đôi một không tấn công lẫn nhau.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH THANH HÓA

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 8

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2011– 2012
MÔN THI: TOÁN
Ngày thi: 23/3/2012
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu I *(4 điểm)*

Cho biểu thức P = $\left(\frac{\sqrt{x-1}}{3+\sqrt{x-1}}+\frac{x+8}{10-x}\right):\left(\frac{3\sqrt{x-1}+1}{x-3\sqrt{x-1}-1}-\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)$

1) Rút gọn P
2) Tính giá trị của P khi x = $\sqrt[4]{\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}}-\sqrt[4]{\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}$

Câu II *(4 điểm)*

Trong cùng một hệ toạ độ, cho đường thẳng d: y = x – 2 và parabol (P): y = - x^2. Gọi A và B là giao điểm của d và (P).

1) Tính độ dài AB.
2) Tìm m để đường thẳng d': y =- x +m cắt (P) tại hai điểm C và D sao cho CD = AB.

Câu III *(4 điểm)*

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\frac{x^2}{y}+x=2\\ \frac{y^2}{x}+y=\frac{1}{2}.\end{cases}$
2) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $2x^6 + y^2 - 2x^3y = 320$

Câu IV *(6 điểm)*

Cho tam giác nhọn ABC có AB > AC. Gọi M là trung điểm của BC; H là trực tâm; AD, BE, CF là các đường cao của tam giác ABC. Kí hiệu (C_1) và (C_2) lần lượt là đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và DKE, với K là giao điểm của EF và BC. Chứng minh rằng:

1) ME là tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2).
2) KH $\perp$ AM.

Câu V *(2 điểm)*

Với $0\le x;y;z\le 1$. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình:

$$\frac{x}{1+y+zx}+\frac{y}{1+z+xy}+\frac{z}{1+x+yz}=\frac{3}{x+y+z}$$

(Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

Họ và tên thí sinh .... SDB ....

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH THANH HÓA

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 9

(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2010– 2011
MÔN THI: TOÁN
Ngày thi: 24/03/2011
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu I. (*5,0 điểm*).

1) Cho phương trình: $x^2-2mx+2m-1=0$. Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm x_1,x_2 với mọi *m*. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{2x_1x_2+3}{x_1^2+x_2^2+2(1+x_1x_2)}$ khi *m* thay đổi.

2) (a). Cho ba số hữu tỉ a, b, c thoả mãn $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}$. Chứng minh rằng $A=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ là số hữu tỉ.

(b). Cho ba số hữu tỉ x,y,z đôi một phân biệt.

Chứng minh rằng: $B=\sqrt{\dfrac{1}{(x-y)^2}+\dfrac{1}{(y-z)^2}+\dfrac{1}{(z-x)^2}}$ là số hữu tỉ.

Câu II. (*5,0 điểm*).

1) Giải phương trình: $\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2+\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2=\dfrac{10}{9}$.

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+x+\dfrac{1}{y}\left(1+\dfrac{1}{y}\right)=4 \\ x^3+\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{1}{y^3}=4. \end{cases}$

Câu III. (*2,0 điểm*).

Cho tam giác đều ABC, các điểm D, E lần lượt thuộc các cạnh AC, AB, sao cho BD, CE cắt nhau tại P và diện tích tứ giác ADPE bằng diện tích tam giác BPC.

Tính $\widehat{BPE}$.

Câu IV. *(4,0 điểm).*

Cho đường tròn tâm O và dây cung AB cố định ($O\notin AB$). P là điểm di động trên đoạn thẳng AB ($P\neq A,B$ và P khác trung điểm AB). Đường tròn tâm C đi qua điểm P tiếp xúc với đường tròn (O) tại A. Đường tròn tâm D đi qua điểm P tiếp xúc với đường tròn (O) tại B. Hai đường tròn (C) và (D) cắt nhau tại N ($N \neq P$).

1) Chứng minh rằng $\widehat{ANP} = \widehat{BNP}$ và bốn điểm O, D, C, N cùng nằm trên một đường tròn.

2) Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn ON luôn đi qua điểm cố định khi P di động.

Câu V. (4,*0 điểm*).

1) Cho $a_1, a_2, ..., a_{45}$ là 45 số tự nhiên dương thoả mãn $a_1 < a_2 < .... < a_{45} \leq 130$. Đặt $d_j = a_{j+1} - a_j,\ (j = 1, 2, ..., 44)$. Chứng minh rằng ít nhất một trong 44 hiệu d_j xuất hiện ít nhất 10 lần.

2) Cho ba số dương a, b, c thoả mãn: $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} = \sqrt{2011}$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{a^2}{b+c} + \dfrac{b^2}{c+a} + \dfrac{c^2}{a+b} \geq \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2011}{2}}$.

.... **HẾT** ....

Thí sinh không được sử dụng tài liệu.

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH THANH HÓA

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 10
(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2009– 2010
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(4,0 điểm)*

Cho biểu thức: $P=\left(\dfrac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1}-\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-1}\right).\dfrac{x-1}{2x+\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1}$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tính giá trị biểu thức P khi $\dfrac{x}{4}=\dfrac{\left(5+2\sqrt{6}\right)\left(49-20\sqrt{6}\right)\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}}$

Câu 2. *(5,0 điểm)*

a. Giải phương trình $\dfrac{2x}{3x^2-5x+2}+\dfrac{13x}{3x^2+x+2}=6$

b. Tìm a để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x\left(x+3y\right)=4 \\ 4y^2=5-xy \end{cases}$

Câu 3. *(3,0 điểm)*

a. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=\sqrt{\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)}.\left(\frac{\sqrt{y+z}}{x}+\frac{\sqrt{z+x}}{y}+\frac{\sqrt{x+y}}{z}\right)$$

Với x, y, z là ba số thực dương thay đổi có tổng bằng $\sqrt{2}$

Câu 4. *(6,0 điểm)*

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Một đường thẳng d thay đổi nhưng luôn đi qua A cắt hai tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) tương ứng tại M và N. Đường thẳng d cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là E khác A. MC cắt NB tại F. Chứng minh rằng:

a) Hai tam giác CAN và MBA đồng dạng; hai tam giác MBC và BCN đồng dạng

b) Tứ giác BMEF nội tiếp được đường tròn

c) Khi d thay đổi nhưng luôn đi qua A thì đường thẳng EF luôn luôn đi qua một điểm cố định

Bài 5. *(2,0 điểm)*

Trên một đường tròn cho 6 điểm phân biệt. Hai điểm bất kì trong 6 điểm này đều được nối với nhau bằng một đoạn thẳng màu xanh hoặc màu đỏ. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có ba cạnh cùng màu.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH THANH HÓA

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 11
(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2008– 2009
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Bài 1: *(4,0 điểm)*

Cho biểu thức: P=$\left(\dfrac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}+2}{3+\sqrt{x}}-\dfrac{9-x}{x+\sqrt{x}-6}\right):\left(1-\dfrac{3\sqrt{x}-9}{x-9}\right)$

1, Rút gọn P.

2, Tính giá trị cuă P khi: x=$\dfrac{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}}$

Bài 2: *(5,0 điểm).*

1, Giải phương trình: $(x^2 - 3x + 2)(x^2 +15x + 56) + 8 = 0$

2, Giải hệ phương trình : $\begin{cases}(x^2+1)(y^2+1)=10\\(x+y)(xy-1)=3\end{cases}$

Bài 3: *(3,0 điểm)* Cho x,y,z là các số nguyên thoả mãn : (x - y)(y - z)(z - x) = x + y + z.

Chứng minh: x + y + z chia hết cho 27.

Bài 4: *(6,0 điểm).*

1, Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (0). Gọi I là giao điểm của AC và BD. Biết đường tròn (K) tâm K ngoại tiếp tam giác IAD cắt các cạnh AB,CD của tứ giác lần lượt tại Evà F (E$\neq A, F\neq D$).Đường thẳng EF cắt AC, BD lần lượt tại M,N.

a, Chứng minh tứ giác AMND nội tiếp trong đường tròn .

b, Chứng minh KI vuông góc với BC.

2, Cho tam giác ABC cân tại A và có góc A bằng 36^0. Tính tỉ số $\dfrac{AB}{BC}$

Bài 5: *(2,0 điểm)*

Cho a,b,c là các số dương và có tổng bằng 1. Chứng minh rằng :

$$\frac{19b^3-a^3}{ba+5b^2}+\frac{19c^3-b^3}{cb+5c^2}+\frac{19a^3-c^3}{ac+5a^2}\le 3$$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH THANH HÓA

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 12
(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2007– 2008
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1: *(6,0 điểm)*

1) Rút gọn biểu thức: A = $\dfrac{x^2+5x+x\sqrt{9-x^2}+6}{3x-x^2+(x+2)\sqrt{9-x^2}}$
2) Cho các số thực x,y,z thoả mãn điều kiện: $x^2+y^2+z^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}=6$
3) Tính giá trị của biểu thức: P = $x^{2006}+y^{2007}+z^{2008}$

Câu 2: *(4,0 điểm)*

Cho tứ giác ABCD có góc A vuông, góc D = 120^0 và các cạnh AB = $2\sqrt{3}$ cm, AD = 4 cm, DC = 2 cm . Gọi M là trung điểm của cạnh AD.

1) Chứng minh BM $\perp$ MC
2) Tính độ dài cạnh BC.

Câu 3: (6,0 điểm)

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 6(x+y)=5xy \\ 12(y+z)=7yz \\ 4(x+z)=3zx \end{cases}$
2) Cho số thực dương thoả mãn điều kiện : x + y + z = 2008

Chứng minh rằng: $\dfrac{x^4+y^4}{x^3+y^3}+\dfrac{y^4+z^4}{y^3+z^3}+\dfrac{z^4+x^4}{z^3+x^3}\ge 2008$

Câu 4: *(3,0 điểm)*

Cho tam giác ABC , gọi M là trung điểm của cạnh BC , đường phân giác ngoài của góc A cắt đường thẳng BC tại D. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM cắt tia AB tại E và tia đối của tia AC tại F . Gọi N là trung điểm của EF. Chứng minh MN // AD.

Câu 5: *(1,0 điểm)*

Cho hai tập hợp A và B thoả mãn đồng thời 2 điều kiện a, b sau :

a) Trong mỗi tập hợp, các phần tử của nó đều là các số nguyên dương phân biệt và nhỏ hơn 2008.

b) Tổng số các phần tử của hai tập hợp lớn hơn 2008.

Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một phần tử của tập hợp A và một phần tử của tập hợp B có tổng bằng 2008.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH THANH HÓA

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề số 13
(Đề thi có một trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2006– 2007
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. *(8,0 điểm)*

1) Cho $A=\sqrt{\frac{2a-b}{3a-b}+\frac{5b-a}{3a+b}}$ với *a, b* thỏa mãn $6a^2-15ab+b^2=0$.
Chứng minh rằng: $A = 1$.

2) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2-2x-1=0\left(x_1<0\right)$. Tính giá trị biểu thức $B=\frac{3}{2}\sqrt{x_1^4-8x_1}-\sqrt{x^5-3x_2^2+x_2+1}$.

3) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+y=2 \\ y^3+x=2 \end{cases}$.

Câu 2. *(4,0 điểm)*

Cho parabol *(P)*: $y=\frac{x^2}{4}$ và đường thẳng *(d)*: $y=(m-1)x+1$.

1) Chứng minh rằng *(P)* và *(d)* luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt *M,N* với mọi giá trị của *m*.
2) Tìm các giá trị của *m* để *OM = ON*.

Câu 3. *(3,0 điểm)*

Cho đường tròn (O) nội tiếp tam giác *ABC*, các tiếp điểm với *BC, CA, AB* lần lượt tại *D, E, F*. Gọi *M* là điểm bất kỳ trên (O) và *N, H, K* lần lượt là hình chiếu vuông góc của *M* trên *EF, AB, AC*. Chứng minh rằng:

1. Các tam giác *MEN, MFH* đồng dạng.
2. Tích các khoảng cách từ M đến các cạnh của tam giác *ABC* bằng tích các khoảng cách từ *M* đến các cạnh của tam giác *DEF.*

Câu 4. *(3,0 điểm)*

Cho tam giác *ABC. O* là điểm bất kỳ nằm trong tam giác, các tia *AO, BO, CO* cắt các cạnh *BC, CA, AB* lần lượt tại các điểm *P, Q, R.*

Chứng minh rằng: $\sqrt{\frac{OA}{OP}}+\sqrt{\frac{OB}{OQ}}+\sqrt{\frac{OC}{OR}}\ge 3\sqrt{2}$

HƯỚNG DẪN GIẢI

ĐỀ SỐ 1 (2018-2019)

Câu 1. 1) Với điều kiện $x>0, x\neq 4$, ta có:

$$P=\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}-\frac{x-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}\right):\left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}-\frac{x-5}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}\right)$$

$$=\frac{x-\left(x-\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}:\frac{(x-4)-(x-5)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}.\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{1}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\sqrt{x}}$$

Vậy $P=\dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\sqrt{x}}\quad (x>0, x\neq 4)$

2) - Chứng minh M là số chẵn

$$a=\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}=\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{2}\right)^3}=1+\sqrt{2}$$

$$b=\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}=\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}=\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{2}\right)^3}=1-\sqrt{2})$$

$$M=a+b=\left(1+\sqrt{2}\right)+\left(1-\sqrt{2}\right)=2$$

- Chứng minh N là số chẵn

$$a+b=2\,;\,a.b=\left(1+\sqrt{2}\right).\left(1-\sqrt{2}\right)=-1\,;\,a^2+b^2=\left(a+b\right)^2-2ab=6$$

$$N=a^7+b^7=\left(a^7+a^4b^3\right)+\left(b^7+a^3b^4\right)-\left(a^4b^3+a^3b^4\right)$$

$$=a^4\left(a^3+b^3\right)+b^4\left(a^3+b^3\right)-a^3b^3\left(a+b\right)$$

$$=\left(a^3+b^3\right).\left(a^4+b^4\right)+2$$

$$=\left(a+b\right)\left(a^2+b^2-ab\right)\left[\left(a^2+b^2\right)^2-2a^2b^2\right]+2=2\left(7.34+1\right)\vdots 2$$

Vậy M, N là các số chẵn.

Chú ý :

- Học sinh có thể tính M bằng cách đưa về phương trình bậc 3: $M^3+3M-14=0$*, giải ra được nghiệm M = 2. Mỗi ý dưới đây cho 0,5 điểm.*

$$M^3=\left(\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}+\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}\right)^3=14+3.\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}.\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}\left(\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}+\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}\right)$$

$$M^3=14-3M\Leftrightarrow(M-2)\left(M^2+2M+7\right)=0$$

$$\Leftrightarrow M=2 \text{ vì } M^2+2M+7=(M+1)^2+6>0$$

- Học sinh có thể chứng minh N là số chẵn bằng cách đặt :

$S_n=\left(1+\sqrt{2}\right)^n+\left(1-\sqrt{2}\right)^n$ *rồi xây dựng công thức* $S_{n+1}=2S_n+S_{n-1}$ *để chỉ ra* S_7 *là số chẵn hoặc có thể khai triển* $\left(1+\sqrt{2}\right)^7+\left(1-\sqrt{2}\right)^7$ *để tính N thì đều cho 0,5đ.*

Câu 2.

1) Vì Phương trình $x^2+2kx+4=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 nên $\Delta'\ge 0$.

$\Leftrightarrow k^2-4\ge 0\Leftrightarrow k^2\ge 4$ (1); Theo hệ thức Vi-et ta có : $\begin{cases}x_1+x_2=-2k\\ x_1.x_2=4\end{cases}$.

Do đó :

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2\le 3\Leftrightarrow\frac{x_1^4+x_2^4}{x_1^2x_2^2}\le 3\Leftrightarrow\frac{\left(x_1^2+x_2^2\right)^2}{x_1^2x_2^2}\le 5\Leftrightarrow\left(\frac{\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}\right)^2\le 5$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{4k^2-8}{4}\right)^2\le 5\Leftrightarrow\left(k^2-2\right)^2\le 5\Leftrightarrow-\sqrt{5}\le k^2-2\le\sqrt{5}\Leftrightarrow 0\le k^2\le 2+\sqrt{5}\ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $4\le k^2\le 2+\sqrt{5}\Leftrightarrow-\sqrt{2+\sqrt{5}}\le k\le -2$

Hoặc $2\le k\le\sqrt{2+\sqrt{5}}$

Vậy tất cả các giá trị của k cần tìm là : $-\sqrt{2+\sqrt{5}}\le k\le -2$ và $2\le k\le\sqrt{2+\sqrt{5}}$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất: $x=y=0$.

2) Trừ theo vế các phương trình (1) và (2) ta được:

$$\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1}\right)+3(x-y)=0\Leftrightarrow(x-y)\left(\frac{x+y}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}+3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x-y=0 \text{ hoặc } \frac{x+y}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}+3=0 \qquad (*)$$

Trường hợp 1: $x-y=0\Leftrightarrow x=y$. Thay $y=x$ vào (1) ta được phương trình:

$$\sqrt{x^2+1}=x+1\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+1=(x+1)^2\\ x\ge -1\end{cases}$$

Giải hệ ta được: $x=0\Rightarrow x=y=0$.

Trường hợp 2: $\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}+3=0$.

Xét $A = \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}} + 3 = \dfrac{\left(3\sqrt{x^2+1}+x\right)+\left(3\sqrt{y^2+1}+y\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}$.

Ta có: $3\sqrt{x^2+1}+x > 3\sqrt{x^2}+x = 3|x|+x = 2|x|+\left(|x|+x\right) \geq 0$.

Tương tự: $3\sqrt{y^2+1}+y > 0$

Suy ra: $A > 0$. Trường hợp 2 không xảy ra.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất: $x = y = 0$.

Cách 2 :

$$\begin{cases} x+\sqrt{x^2+1} = 2y+1 \\ y+\sqrt{y^2+1} = 2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+1} = 2y-x+1 \\ \sqrt{y^2+1} = 2x-y+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2y-x+1 \geq 1 \quad (1) \\ 2x-y+1 \geq 1 \quad (2) \\ x^2+1 = 4y^2+4y+1-4xy-2x+x^2 \quad (3) \\ y^2+1 = 4x^2+4x+1-4xy-2y+y^2 \quad (4) \end{cases}$$

Trừ theo vế các phương trình (3) và (4) ta được phương trình :

$$(x-y)\left[4(x+y)+6\right] = 0 \Leftrightarrow x = y \text{ hoặc } 4(x+y)+6 = 0 :$$

Cộng theo vế các bất phương trình (1) và (2) ta được : $x+y \geq 0$, suy ra trường hợp $4(x+y)+6=0$ không xảy ra.

Trường hợp $x = y$, thay vào (3) ta được: $x = y = 0$.

Câu 3.

1. Đặt $a = xy, b = x+y \Rightarrow a \in Z, b \in Z, b^2 \geq 4a \qquad (*)$

Phương trình (1) trở thành: $a^2b + b = a+2$.

$$\Leftrightarrow b = \frac{a+2}{a^2+1}$$

$$\Rightarrow a+2 \vdots a^2+1 \Rightarrow a^2-4 \vdots a^2+1 \Rightarrow \left(a^2+1\right)-5 \vdots a^2+1 \Rightarrow 5 \vdots a^2+1$$

$$\Rightarrow a^2+1 \in \{1;5\} \Rightarrow a^2 \in \{0;4\} \Rightarrow a \in \{0;-2;2\}$$

Nếu $a = 0 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ x+y = 2 \end{cases} \Rightarrow (x,y) \in \{(0;2),(2;0)\}$

Nếu $a = -2 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow \begin{cases} xy = -2 \\ x+y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right.$ (loại vì không thỏa mãn $x, y \in Z$)

Nếu $a = 2 \Rightarrow b = \dfrac{4}{5}$, loại vì không thỏa mãn $b \in Z$.

Vậy nghiệm nguyên (x, y) của phương trình đã cho là: $(0;2),(2;0)$.

Cách khác: Đưa phương trình về dạng : $(x+y)(xy)^2 - xy + (x+y-2) = 0$

Đặt $t = xy, t \in Z$ ta được phương trình ẩn t: $(x+y)t^2 - t + (x+y-2) = 0$ (1)

Nếu $x+y=0 \Rightarrow xy=-2 \Leftrightarrow \begin{cases} xy=-2 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases}$ Hoặc $\begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$ (Loại)

*) Nếu $x+y \neq 0$, ta có phương trình bậc 2 ẩn *t*:

$$(x+y)t^2 - t + (x+y-2) = 0 \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \Delta = 1 - 4(x+y)(x+y-2) \geq 0 \Leftrightarrow (x+y-1)^2 \leq \frac{5}{4}$$

$\Leftrightarrow (x+y-1)^2 \in \{0;1\} \Leftrightarrow (x+y-1) \in \{-1;0;1\} \Leftrightarrow x+y \in \{1;2\}$

*) Nếu $x+y=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} xy=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ xy=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$ (loại)

*) Nếu $x+y=2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} xy=0 \\ xy=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow (x,y) \in \{(0;2),(2;0)\}$ (thỏa mãn)

Vậy nghiệm nguyên (x, y) của phương trình đã cho là: $(0;2),(2;0)$.

2. Cho $n \in N^*$. Chứng minh rằng nếu 2*n* + 1 và 3*n* + 1 là các số chính phương thì *n* chia hết cho 40.

Giả sử $2n+1=m^2$, $3n+1=k^2$ $\left(m,k \in N^*\right)$ $\Rightarrow m^2$ là số lẻ $\Rightarrow m$ là số lẻ.

$\Rightarrow 2n = m^2 - 1 = (m-1)(m+1) \vdots 4$, Suy ra : n chẵn, k lẻ

Vì k là số lẻ nên $k-1, k+1$ là hai số chẵn liên tiếp và (3, 8) = 1 nên

Từ $3n+1=k^2 \Rightarrow 3n = k^2-1 = (k-1)(k+1) \vdots 8 \Rightarrow n \vdots 8$ (1)

Khi chia một số chính phương cho 5 thì số dư chỉ có thể là 0 ; 1 ; 4. Ta xét các trường hợp:

Nếu n chia cho 5 dư 1 thì 2n + 1 chia cho 5 dư 3. (vô lí)

Nếu n chia cho 5 dư 2 thì 3n + 1 chia cho 5 dư 2. (vô lí)

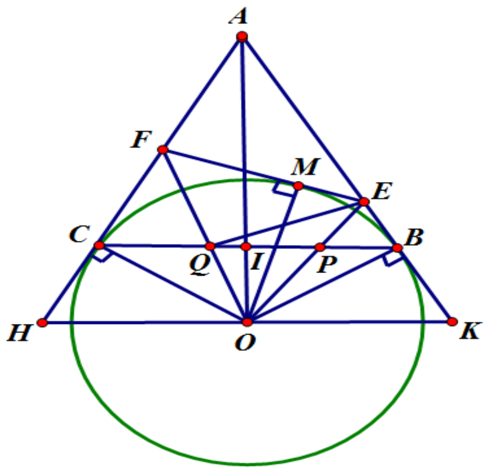
Nếu n chia cho 5 dư 3 thì 2n + 1 chia cho 5 dư 2. (vô lí)

Nếu n chia cho 5 dư 4 thì 3n + 1 chia cho 5 dư 3. (vô lí)

Vì (5, 8) = 1 nên từ (1) và (2) suy ra n chia hết cho 40.

Vậy $n \vdots 5$ (2)

Câu 4.



1. Từ tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, suy ra : $OI \perp BC$.

$\Rightarrow \widehat{ABI} = \widehat{BOI}$ (vì cùng phụ với $\widehat{BAO}$).

$\Rightarrow \cos \widehat{ABI} = \cos \widehat{BOI} = \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{R}{2R} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{ABI} = \widehat{BOI} = 60^0$ (1)

Từ tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau suy ra OF, OE lần lượt là các tia phân giác của các góc COM và MOB. Suy ra:

$\widehat{FOM} = \dfrac{\widehat{COM}}{2}; \widehat{MOE} = \dfrac{\widehat{MOB}}{2} \Rightarrow \widehat{EOF} = \widehat{FOM} + \widehat{MOE} = \dfrac{\widehat{COM} + \widehat{MOB}}{2} = \dfrac{\widehat{BOC}}{2} = \widehat{BOI}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $\widehat{ABI} = \widehat{EOF} = 60^0$ hay $\widehat{QBE} = \widehat{QOE} \Rightarrow$ Tứ giác $OBEQ$ nội tiếp.

2. Ta có: $\widehat{OQB} = \widehat{OEB}$ (cùng chắn cung OB của đường tròn $(OBEQ)$).

$\widehat{OEF} = \widehat{OEB}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

$\Rightarrow \widehat{OQB} = \widehat{OEF}$ hay $\widehat{OQP} = \widehat{OEF}$

$\Rightarrow \Delta OQP \sim \Delta OEF$ $(g.g)$ (vì có $\widehat{OQP} = \widehat{OEF}, \widehat{QOP}$ là góc chung) $\Rightarrow \dfrac{PQ}{EF} = \dfrac{OQ}{OE}$ (3)

Vì tứ giác $OBEQ$ nội tiếp và $\widehat{OBE} = 90^0, \widehat{QBE} = 60^0$ nên:

$\widehat{OQE} = 180^0 - \widehat{OBE} = 90^0$; $\widehat{OEQ} = \widehat{OBQ} = \widehat{OBE} - \widehat{QBE} = 30^0$

$\Rightarrow \Delta OQE$ vuông tại Q và $\widehat{OEQ} = 30^0$.

$\Rightarrow \dfrac{OQ}{OE} = \sin \widehat{OEQ} = \sin 30^0 = \dfrac{1}{2}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra : $\dfrac{PQ}{EF} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow EF = 2PQ$.

3. Vì $\Delta OQP \sim \Delta OEF$ theo tỉ số đồng dạng $\dfrac{EF}{PQ} = 2$ nên

$\dfrac{S_{OPQ}}{S_{OEF}} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow S_{OPQ} = \dfrac{S_{OEF}}{4} = \dfrac{OM.EF}{8} = \dfrac{R.EF}{8}$ (5).

Kẻ qua O một đường thẳng vuông góc với OA, cắt AC, AB theo thứ tự tại H, K. Ta có:

$\widehat{BKO} = \widehat{BOI} = 60^0$ (Vì cùng phụ với $\widehat{BAO}$)

$HC = KB = OB.\cot\widehat{BKO} = OB.\cot 60^0 = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$

$EF = FM + EM = FC + EB = (HF - HC) + (KE - KB) = (HF + KE) - (HC + KB)$

$= (HF + KE) - 2HC \ge 2\sqrt{HF.KE} - \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$ (6)

Mặt khác , $\widehat{FHO} = \widehat{AOC} = 60^0$, $\widehat{EKO} = \widehat{AOB} = 60^0$ nên dễ chứng minh được

$\Delta HFO \sim \Delta KOE$ (vì cùng đồng dạng với tam giác OFE)

$\Rightarrow \dfrac{HF}{OK} = \dfrac{HO}{KE} \Leftrightarrow HF.KE = OK.OH = OK^2 = \left(\dfrac{R}{\sin 60^0}\right) = \left(\dfrac{2R}{\sqrt{3}}\right)^2$ (7)

Từ (5), (6), (7) suy ra : $S_{OPQ} = \dfrac{R.EF}{8} \ge \dfrac{R\left(\dfrac{4R}{\sqrt{3}} - \dfrac{2R}{\sqrt{3}}\right)}{8} = \dfrac{R^2}{4\sqrt{3}}$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $KE = HF = OH = OK \Leftrightarrow FM = EM \Leftrightarrow \overset{\frown}{MC} = \overset{\frown}{MB} \Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa cung BC.

Vậy để tam giác OPQ có diện tích nhỏ nhất thì M là điểm chính giữa cung nhỏ BC.

Giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{R^2}{4\sqrt{3}}$.

Cách khác: Vì $\Delta OQP \sim \Delta OEF$ theo tỉ số đồng dạng $\dfrac{EF}{PQ} = 2$ nên

$$\frac{S_{OPQ}}{S_{OEF}} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow S_{OPQ} = \frac{S_{OEF}}{4} = \frac{1}{8}(S_{ABOC} - S_{AEF}) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}OA.BC - S_{AEF}\right) = \frac{1}{8}\left(R^2\sqrt{3} - S_{AEF}\right)$$

Sử dụng công thức : Hê-Rông. Tính diện tích S của tam giác có độ dài ba cạnh a, b, c.

$$\Rightarrow S^2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{16}$$

$$\le \frac{(a+b+c)\left[(a+b-c)+(b+c-a)+(c+a-b)\right]^3}{16.27} = \left(\frac{(a+b+c)^2}{4.3\sqrt{3}}\right)^2 \Leftrightarrow S \le \frac{(a+b+c)^2}{4.3\sqrt{3}}$$

$$S_{OPQ} = \frac{1}{8}\left(R^2\sqrt{3} - S_{AEF}\right) \ge \frac{1}{8}\left(R^2\sqrt{3} - \frac{(AE+EF+FA)^2}{4.3\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(R^2\sqrt{3} - \frac{\left[AE + (EM+MF) + AF\right]^2}{4.3\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{8}\left(R^2\sqrt{3} - \frac{\left[AE + (EB+FC) + AF\right]^2}{4.3\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(R^2\sqrt{3} - \frac{\left[(AE+EB)+(AF+FC)\right]^2}{4.3\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{8}\left(R^2\sqrt{3} - \frac{\left[AB+AC\right]^2}{4.3\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(R^2\sqrt{3} - \frac{(2AB)^2}{4.3\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{8}\left(R^2\sqrt{3} - \frac{\left(2.2R.\sin\widehat{AOB}\right)^2}{4.3\sqrt{3}}\right) = \frac{R^2}{4\sqrt{3}}$$

Câu 5. Ta có $x + y + 1 = z \Leftrightarrow z + xy = x + y + 1 + xy = (x+1)(y+1)$

$$x+yz=x+y(x+y+1)=x+xy+y^2+y=(x+y)(y+1)$$

$$y+xz=y+x(x+y+1)=(x+y)(x+1)$$

$$\Rightarrow P=\frac{x^3y^3}{(x+y)^2(x+1)^3(y+1)^3}.$$

Vì $\begin{cases}(x+y)^2\ge 4xy\\ x>0\\ y>0\end{cases}\Rightarrow P\le\frac{x^3y^3}{4xy(x+1)^3(y+1)^3}=\frac{x^2y^2}{4(x+1)^3(y+1)^3}.$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho ba số thực dương, ta có:

$x+1=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+1\ge 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{4}}\Leftrightarrow(x+1)^3\ge\frac{27x^2}{4}\Leftrightarrow 0<\frac{x^2}{(x+1)^3}\le\frac{4}{27}.$

Tương tự: $0<\frac{y^2}{(y+1)^3}\le\frac{4}{27}$.

$P=\frac{x^2y^2}{4(x+1)^3(y+1)^3}\le\frac{1}{4}.\frac{4}{27}.\frac{4}{27}=\frac{4}{729}$. Dấu “ = ” xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=1\\ z=x+y+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y=2\\ z=5\end{cases}$

Vậy MaxP=$\frac{4}{729}$, đạt được tại $\begin{cases}x=y=2\\ z=5\end{cases}$.

Cách khác :

$$\frac{1}{P}=\frac{(x+yz)(y+xz)(z+xy)^2}{x^3y^3}=\frac{x+yz}{y}.\frac{y+xz}{x}.\frac{(z+xy)^2}{x^2y^2}=\left(\frac{x}{y}+z\right)\left(\frac{y}{x}+z\right)\left(\frac{z}{xy}+1\right)^2$$

$$\frac{1}{P}=\left(1+\frac{zy}{x}+\frac{zx}{y}+z^2\right)\left(\frac{z}{xy}+1\right)^2=\left[1+\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)z+z^2\right]\left(\frac{z}{xy}+1\right)^2$$

Vì $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\ge 2;\quad \frac{1}{xy}\ge\frac{4}{(x+y)^2};\quad x+y=z-1$ nên:

$$\frac{1}{P}\ge(1+2z+z^2)\left(\frac{4z}{(x+y)^2}+1\right)^2=(1+z)^2\left(\frac{4z}{(z-1)^2}+1\right)^2=\left(\frac{4z(z+1)}{(z-1)^2}+z+1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{P}\ge\left(\frac{4z(z+1)}{(z-1)^2}+z+1\right)^2=\left[6+\frac{12}{z-1}+\frac{8}{(z-1)^2}+(z-1)\right]^2$$

Đặt $t=z-1$,

$$\Rightarrow\frac{1}{P}\ge\left(6+\frac{12}{t}+\frac{8}{t^2}+t\right)^2=\left[6+\left(\frac{12}{t}+\frac{3t}{4}\right)+\left(\frac{8}{t^2}+\frac{t}{8}+\frac{t}{8}\right)\right]^2$$

$$\ge\left(6+2\sqrt{\frac{12}{t}.\frac{3t}{4}}+3\sqrt[3]{\frac{8}{t^2}.\frac{t}{8}.\frac{t}{8}}\right)^2=\frac{729}{4}\Leftrightarrow P\le\frac{4}{729}$$

Dấu “ = ” xảy ra $\Leftrightarrow t=4, x=y\Leftrightarrow x=y=2, z=5.$

Vậy $\text{MaxP} = \frac{4}{729}$, đạt được tại $\begin{cases} x = y = 2 \\ z = 5 \end{cases}$.

ĐỀ SỐ 2 (2017-2018)

Câu 1.

1. Với điều kiện $x > 0, x \neq 1$, ta có:

$$P = \frac{x - 2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(x+\sqrt{x}+1\right)} + \frac{2x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}\left(x-2\sqrt{x}\right)+\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)+2x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}\left(x+\sqrt{x}-2\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)} = \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}.$$

Ta có với điều kiện $x > 0, x \neq 1 \Rightarrow x + \sqrt{x} + 1 > \sqrt{x} + 1 > 1$

$$\Rightarrow 0 < P = \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} < \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}+1} < 2$$

Do P nguyên nên suy ra $P = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ (loại).

Vậy không có giá trị của x để P nhận giá trị nguyên.

Chú ý: ***Có thể làm theo cách sau***

$P = \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow Px + \left(P-1\right)\sqrt{x} + P - 2 = 0$, coi đây là phương trình bậc hai của $\sqrt{x}$.

Nếu $P = 0 \Rightarrow -\sqrt{x} - 2 = 0$ vô lí, suy ra $P \neq 0$ nên để tồn tại x thì phương trình trên có

$$\Delta = \left(P-1\right)^2 - 4P\left(P-2\right) \geq 0 \Leftrightarrow -3P^2 + 6P + 1 \geq 0 \Leftrightarrow P^2 - 2P + 1 \leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow \left(P-1\right)^2 \leq \frac{4}{3}$$

Do P nguyên nên $\left(P-1\right)^2$ bằng 0 hoặc 1

+) Nếu $\left(P-1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow P = 1 \Leftrightarrow x = 1$ không thỏa mãn.

+) Nếu $\left(P-1\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} P = 2 \\ P = 0 \end{array}\right. \Rightarrow P = 2 \Leftrightarrow 2x + \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ không thỏa mãn

Vậy không có giá trị nào của x thỏa mãn

2. Vì $x = \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{3}-2} - \frac{3}{2\sqrt{3}+2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

nên $x=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ là nghiệm của đa thức $2x^2+2x-1$.

Do đó $P=\frac{2x^{2017}\left(2x^2+2x-1\right)+2x+1}{\left(2x^2+2x-1\right)+x+1}=\frac{2x+1}{x+1}=3-\sqrt{3}.$

Câu 2.

1. Phương trình $(m-2)x^2-2(m-1)x+m=0\Leftrightarrow(x-1)\left((m-2)x-m\right)=0$ có hai nghiệm khi và chỉ khi $m\neq 2$. Khi đó 2 nghiệm của phương trình là $a=1$và $b=\frac{m}{m-2}$.

Hai nghiệm đó là độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác vuông suy ra $\frac{m}{m-2}>0\Leftrightarrow m<0$ hoặc $m>2$.

Từ hệ thức $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{h^2}$ trong tam giác vuông ta có $\frac{1}{1^2}+\frac{(m-2)^2}{m^2}=\frac{5}{4}\Leftrightarrow\frac{m-2}{m}=\pm\frac{1}{2}$

Với $\frac{m-2}{m}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2m-4=m\Rightarrow m=4$ (thỏa mãn)

Với $\frac{m-2}{m}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2m-4=-m\Rightarrow m=\frac{4}{3}$ (loại)

Vậy $m=4$ là giá trị cần tìm.

2. ĐKXĐ: $x+y\neq 0$

Chia phương trình (1) cho $(x+y)^2$ ta được hệ $\begin{cases}8(x^2+y^2)+4xy+\frac{5}{(x+y)^2}=13\\2x+\frac{1}{x+y}=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}5\left[(x+y)^2+\frac{1}{(x+y)^2}\right]+3(x-y)^2=13\\\left(x+y+\frac{1}{x+y}\right)+(x-y)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5\left(x+y+\frac{1}{x+y}\right)^2+3(x-y)^2=23\\\left(x+y+\frac{1}{x+y}\right)+(x-y)=1\end{cases}$

Đặt $u=x+y+\frac{1}{x+y}, v=x-y$ (ĐK: $|u|\geq 2$), ta có hệ $\begin{cases}5u^2+3v^2=23 & (3)\\u+v=1 & (4)\end{cases}$

Từ (4) rút $u=1-v$, thế vào (3) ta được

$5u^2+3(1-u)^2=23\Leftrightarrow 4u^2-3u-10=0\Leftrightarrow u=2$ hoặc $u=-\frac{5}{4}$.

Trường hợp $u=-\frac{5}{4}$ loại vì $|u|<2$.

Với $u=2\Rightarrow v=-1$ (thỏa mãn). Khi đó ta có hệ $\begin{cases}x+y+\frac{1}{x+y}=2\\x-y=-1\end{cases}$

Giải hệ trên bằng cách thế $x=-1+y$ vào phương trình đầu ta được

$2y-1+\dfrac{1}{2y-1}=2 \Leftrightarrow y=1$. Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x,y)=(0;1)$.

Câu 3.

1. Ta có $(1) \Leftrightarrow (y-2)(y-3)+56=(y-2)x^2+(y-2)(y-4)x$

$\Leftrightarrow (y-2)\left[x^2+(y-4)x-(y-3)\right]=56$

$\Leftrightarrow (x-1)(y-2)(x+y-3)=56.$

Nhận thấy $(y-2)+(x-1)=x+y-3,$ nên ta phải phân tích số 56 thành tích của ba số nguyên mà tổng hai số đầu bằng số còn lại.

Như vậy ta có

+) $56=1.7.8 \Rightarrow (x;y)=(2;9).$

+) $56=7.1.8 \Rightarrow (x;y)=(8;3).$

+) $56=(-8).1.(-7) \Rightarrow (x;y)=(-7;3).$

+) $56=1.(-8).(-7) \Rightarrow (x;y)=(2;-6).$

+) $56=(-8).7.(-1) \Rightarrow (x;y)=(-7;9).$

+) $56=7.(-8).(-1) \Rightarrow (x;y)=(8;-6).$

Vậy phương trình có 6 nghiệm nguyên như trên.

2. Do $p-5 \vdots 8$ nên $p=8k+5\ (k \in \mathbb{N})$

Vì $\left(ax^2\right)^{4k+2}-\left(by^2\right)^{4k+2} \vdots \left(ax^2-by^2\right) \vdots p$ nên $a^{4k+2}\cdot x^{8k+4}-b^{4k+2}\cdot y^{8k+4} \vdots p$

Nhận thấy $a^{4k+2}\cdot x^{8k+4}-b^{4k+2}\cdot y^{8k+4}=\left(a^{4k+2}+b^{4k+2}\right)x^{8k+4}-b^{4k+2}\left(x^{8k+4}+y^{8k+4}\right)$

Do $a^{4k+2}+b^{4k+2}=\left(a^2\right)^{2k+1}+\left(b^2\right)^{2k+1} \vdots \left(a^2+b^2\right)=p$ và $b<p$ nên $x^{8k+4}+y^{8k+4} \vdots p$ (*)

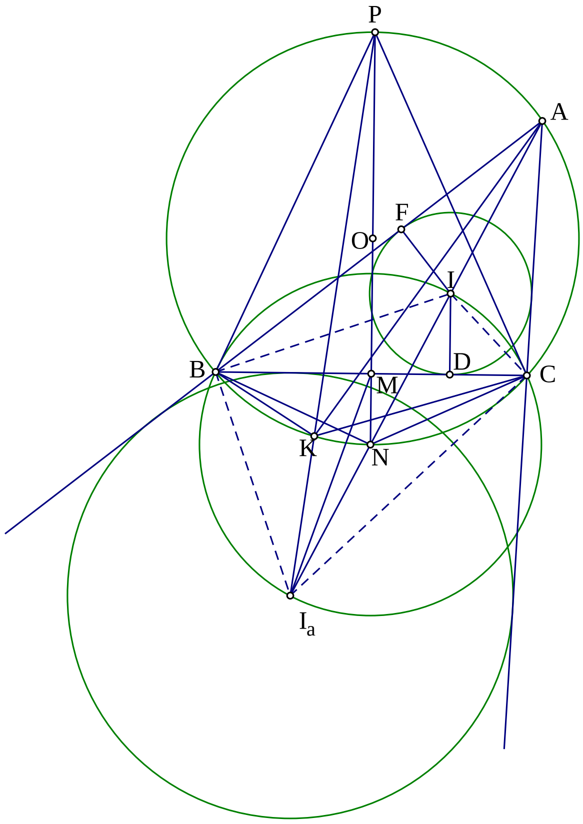
Nếu trong hai số x,y có một số chia hết cho p thì từ (*) suy ra số thứ hai cũng chia hết cho p.

Nếu cả hai số x,y đều không chia hết cho p thì theo định lí Fecma ta có :

$x^{8k+4}=x^{p-1}\equiv 1(\text{mod } p),\ \ y^{8k+4}=y^{p-1}\equiv 1(\text{mod } p)$

$\Rightarrow x^{8k+4}+y^{8k+4}\equiv 2(\text{mod } p)$. Mâu thuẫn với (*).Vậy cả hai số x và y chia hết cho p.

Câu 4.



1. Chứng minh: IBI_aC là tứ giác nội tiếp

I_a là tâm đường tròn bàng tiếp đối diện đỉnh A và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC , từ đó suy ra $BI_a \perp BI, CI_a \perp CI$

(Phân giác trong và phân giác ngoài cùng một góc thì vuông góc với nhau).

Xét tứ giác IBI_aC có $\widehat{IBI_a} + \widehat{ICI_a} = 180^0$

Từ đó suy ra tứ giác IBI_aC là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính II_a .

2. Chứng minh NI_a là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác

Nhận thấy bốn điểm A, I, N, I_a thẳng hàng (vì cùng thuộc tia phân giác của $\widehat{BAC}$).

Do NP là đường kính của (O) nên $\widehat{NBP} = 90^0$, M là trung điểm của BC nên $PN \perp BC$ tại M

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông PBN ta có $NB^2 = NM.NP$

Vì $\widehat{BIN}$ là góc ngoài tại đỉnh I của tam giác ABI nên $\widehat{BIN} = \frac{1}{2}\left(\widehat{ABC} + \widehat{BAC}\right)$ (1)

Xét (O): $\widehat{NBC} = \widehat{NAC} = \frac{\widehat{BAC}}{2}$ (cùng chắn cung NC)

$\Rightarrow \widehat{NBI} = \widehat{NBC} + \widehat{CBI} = \frac{1}{2}\left(\widehat{BAC} + \widehat{ABC}\right)$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{BIN} = \widehat{NBI}$ nên tam giác NIB cân tại N

Chứng minh tương tự tam giác NIC cân tại N

Từ đó suy ra N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC, cũng chính là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $IBI_aC \Rightarrow NI_a^2 = NB^2 = NM.NP$

Vậy NI_a là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác I_aMP

3. Chứng minh $\widehat{DAI} = \widehat{KAI_a}$

Gọi F là tiếp điểm của đường tròn (I) với AB.

Xét hai tam giác ΔMNB và ΔFIA có: $\widehat{NBM} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \widehat{IAF}$

$\Rightarrow \Delta MNB$ đồng dạng với ΔFIA.

Suy ra $\frac{NM}{FI} = \frac{NB}{IA}$ mà: ID = IF, NI = NB nên $\frac{NM}{ID} = \frac{NI_a}{IA}$

Ta có:

MN // ID nên $\angle MNI_a = DIA$ suy ra ΔNMI_a đồng dạng với ΔIDA

$\Rightarrow \angle NI_aM = \angle DAI$ (1).

Do NI_a là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác I_aMP nên

$\widehat{KAI_a} = \widehat{KAN} = \widehat{KPN} = \widehat{I_aPN} = \widehat{NI_aM}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{DAI} = \widehat{KAI_a}$

Câu 5. Ta có $P = \frac{xz}{y^2+yz} + \frac{y^2}{xz+yz} + \frac{x+2z}{x+z} = \frac{\frac{xz}{yz}}{\frac{y^2}{yz}+1} + \frac{\frac{y^2}{yz}}{\frac{xz}{yz}+1} + \frac{1+\frac{2z}{x}}{1+\frac{z}{x}}$

$$= \frac{\frac{x}{y}}{\frac{y}{z}+1} + \frac{\frac{y}{z}}{\frac{x}{y}+1} + \frac{1+\frac{2z}{x}}{1+\frac{z}{x}} = \frac{a^2}{b^2+1} + \frac{b^2}{a^2+1} + \frac{1+2c^2}{1+c^2},$$

trong đó $a^2 = \frac{x}{y}, b^2 = \frac{y}{z}, c^2 = \frac{z}{x}$ $(a,b,c>0)$

Nhận xét rằng $a^2.b^2 = \frac{x}{z} = \frac{1}{c^2} \ge 1$ $(do\ x \ge z)$.

Xét $\frac{a^2}{b^2+1} + \frac{b^2}{a^2+1} - \frac{2ab}{ab+1} = \frac{a^2(a^2+1)(ab+1)+b^2(b^2+1)(ab+1)-2aba^2(a^2+1)(b^2+1)}{(a^2+1)(b^2+1)(ab+1)}$

$$= \frac{ab(a^2-b^2)^2+(a-b)(a^3-b^3)+(a-b)^2}{(a^2+1)(b^2+1)(ab+1)} \ge 0$$

Do đó $\frac{a^2}{b^2+1} + \frac{b^2}{a^2+1} \ge \frac{2ab}{ab+1} = \frac{\frac{2}{c}}{\frac{1}{c}+1} = \frac{2}{1+c}$ (1). Đẳng thức xảy ra khi $a=b$.

Khi đó $\frac{2}{1+c}+\frac{1+2c^2}{c^2+1}-\frac{5}{2}=\frac{2\left(2\left(1+c^2\right)+\left(1+c\right)\left(1+2c^2\right)\right)-5\left(1+c\right)\left(1+c^2\right)}{2\left(1+c\right)\left(1+c^2\right)}$

$=\frac{1-3c+3c^2-c^3}{2\left(1+c\right)\left(1+c^2\right)}=\frac{\left(1-c\right)^3}{2\left(1+c\right)\left(1+c^2\right)}\geq 0 \quad \left(do\ c\leq 1\right)\ \left(2\right)$

Từ $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ suy ra điều phải chứng minh.Đẳng thức xảy ra khi $a=b,\ c=1 \Leftrightarrow x=y=z.$

ĐỀ SỐ 3 (2016-2017)

Câu 1.

1. Điều kiện để P xác định là : $x\geq 0$; $y\geq 0$; $y\neq 1$; $x+y\neq 0$.

$$P=\frac{x(1+\sqrt{x})-y(1-\sqrt{y})-xy\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{y}\right)}=\frac{(x-y)+\left(x\sqrt{x}+y\sqrt{y}\right)-xy\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{y}\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}+x-\sqrt{xy}+y-xy\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{y}\right)}=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)-\sqrt{y}\left(\sqrt{x}+1\right)+y\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{x}\right)}{\left(1+\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt{y}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}+y-y\sqrt{x}}{\left(1-\sqrt{y}\right)}=\frac{\sqrt{x}\left(1-\sqrt{y}\right)\left(1+\sqrt{y}\right)-\sqrt{y}\left(1-\sqrt{y}\right)}{\left(1-\sqrt{y}\right)}$$

$$=\sqrt{x}+\sqrt{xy}-\sqrt{y}$$

2. P = 2 $\Leftrightarrow$ $\sqrt{x}+\sqrt{xy}-\sqrt{y}=2$ với $x\geq 0$; $y\geq 0$; $y\neq 1$; $x+y\neq 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}\left(1+\sqrt{y}\right)-\left(\sqrt{y}+1\right)=1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-1\right)\left(1+\sqrt{y}\right)=1$$

Ta cã: $1+\sqrt{y}\geq 1 \Rightarrow \sqrt{x}-1\leq 1 \Leftrightarrow 0\leq x\leq 4 \Rightarrow$ x = 0; 1; 2; 3 ; 4

Thay vào P ta có các cặp giá trị (4; 0) và (2 ; 2) thỏa mãn

Câu 2.

1. Ta có :

$(x^2-1)(x+3)(x+5)=m$ (1)

$\Leftrightarrow (x+1)(x+3)(x-1)(x+5)=m$

$\Leftrightarrow (x^2+4x+3)(x^2+4x-5)=m$ (2)

Đặt $y=x^2+4x+4=(x+2)^2\geq 0 \quad (\forall x\in R)$. Khi đó (2) có dạng :

$(y-1)(y-9)=m$ hay $y^2-10y+9-m=0$ (3)

Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt tương đương với phương trình (3) có hai nghiệm dương phân biệt $y_1>y_2>0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 16 + m > 0 \\ S = y_1 + y_2 = 10 > 0 \\ P = y_1.y_2 = 9 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -16 < m < 9 \qquad (4)$$

Khi y_1, y_2 là hai nghiệm dương phân biệt của phương trình (3) thì phương trình (2) tương đương với :

$x^2 + 4x + 4 - y_1 = 0$ hoặc $x^2 + 4x + 4 - y_2 = 0$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình : $x^2 + 4x + 4 - y_1 = 0$

Gọi x_3, x_4 là hai nghiệm phân biệt của phương trình : $x^2 + 4x + 4 - y_2 = 0$

Áp dụng định lý vi-et cho các phương trình (3), (5), (6) ta có :

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} + \frac{x_3 + x_4}{x_3x_4} = \frac{-4}{4 - y_1} + \frac{-4}{4 - y_2} = \frac{4(y_1 + y_2) - 32}{16 - 4(y_1 + y_2) + y_1y_2}$$

$$= \frac{40 - 32}{16 - 40 + 9 - m} = \frac{8}{-15 - m} = -1$$

$\Leftrightarrow m = -7$ (thỏa mãn)

2. Giải hệ : $\begin{cases} x^2 = 2 + xy^2 & (1) \\ y^2 = 2 + x^2y & (2) \end{cases}$

- Trừ từng vế hai phương trình của hệ ta được ;

$$x^2 - y^2 = xy^2 - x^2y \Leftrightarrow (x - y)(xy + x + y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = y & (3) \\ xy + x + y = 0 & (4) \end{array}\right.$$

- Thay y = x từ (3) vào (1) ta được phương trình :

$$x^2 = 2 + x^3 \Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - 2x + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 - \sqrt{2} \\ x = 1 + \sqrt{2} \end{array}\right.$$

Vậy ta được các nghiệm (x; y) là :

$(-1; -1); \quad (1 - \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}); \quad (1 + \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2})$

- Từ (4) suy ra $y = \dfrac{-x}{x + 1}$ (vì x = -1 không phải là nghiệm của (4)). Thay y vào (2), ta có : $\dfrac{x^2}{(x + 1)^2} = 2 + \dfrac{-x^3}{x + 1} \Leftrightarrow x^4 + x^3 - x^2 - 4x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 2x + 2)(x^2 - x - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$ (Vì $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 > 0$)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 - \sqrt{5} \\ x = 1 + \sqrt{5} \end{array}\right.$$

- Với $x=1-\sqrt{5}\Rightarrow y=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2-\sqrt{5}}=-3-\sqrt{5}$. Ta được $(x;y)=(1-\sqrt{5};-3-\sqrt{5})$ là nghiệm của hệ.

- Với $x=1+\sqrt{5}\Rightarrow y=\dfrac{-\sqrt{5}-1}{2+\sqrt{5}}=-3+\sqrt{5}$. Ta được $(x;y)=(1+\sqrt{5};-3+\sqrt{5})$ là nghiệm của hệ.

Vậy hệ đã cho có 5 nghiệm :

$(-1;-1)$; $(1-\sqrt{2};1-\sqrt{2})$; $(1+\sqrt{2};1+\sqrt{2})$; $(1-\sqrt{5};-3-\sqrt{5})$;

$(1+\sqrt{5};-3+\sqrt{5})$

Câu 3.

1.Ta có :

$$p^{2016}-1=(p^4)^{504}-1^{504}=(p^4-1).A=(p-1)(p+1)(p^2+1).A \quad (1) \quad (A\in N)$$

Vì P là số nguyên tố lớn hơn 5 nên p là số lẻ, suy ra p – 1, p +1 là hai số chẵn liên tiếp

$$\Rightarrow (p-1)(p+1)\,\vdots\,4 \qquad (2)$$

Vì p – 1, p, p+1 là ba số tự nhiên liên tiếp nên $(p-1)p(p+1)\,\vdots\,3$. Nhưng p không chia hết cho 3 nên $(p-1)(p+1)\,\vdots\,3$ (3)

Vì p không chia hết cho 5 nên p có một trong các dạng $5k\pm1$; $5k\pm2$

- Nếu $p=5k\pm1$ thì $p^2=25k^2\pm10k+1=5n+1$

- Nếu $p=5k\pm2$ thì $p^2=25k^2\pm20k+4=5l-1$

Cả hai trường hợp trên đều cho ta $p^4-1=5q\,\vdots\,5$ (4) ($(n,l,q\in N)$

Vì 3, 4, 5 là các số nguyên tố cùng nhau từng đôi một nên từ (1), (2), (3), (4) suy ra $p^{2016}-1$ chia hết cho 4.3.5 tức là chia hết cho 60

2. Vì vai trò của x, y, z bình đẳng nhau, khác nhau đôi một nên ta có thể giả sử $x<y<z$. Khi đó , gọi t là thương của phép chia $x^3+y^3+z^3 : x^2y^2z^2$. Suy ra :

$$x^3+y^3+z^3=tx^2y^2z^2 \Leftrightarrow z=tx^2y^2-\frac{x^3+y^3}{z^2}>tx^2y^2-\frac{x^3+y^3}{x^2y^2}=tx^2y^2-x-y \quad (1)$$

- Nếu $tx^2y^2-x-y<0$ (*) thì $t<\dfrac{1}{xy^2}+\dfrac{1}{x^2y}<2\Rightarrow t=1$

Thay t = 1 vào (*), ta được $x^2y^2-x-y<0\Rightarrow xy-x-y<0\Rightarrow (x-1)(y-1)<1$

$\Rightarrow x=1$

$\Rightarrow y^2-y<0\Leftrightarrow y(y-1)<0$ (vô lý)

Vậy $tx^2y^2-x-y\ge 0$ (2)

- Từ (1), (2) suy ra : $z^2 \geq (tx^2y^2 - x - y)^2$ (3)

- Mặt khác vì $x^3 + y^3 + z^3 = tx^2y^2z^2$ nên $x^3 + y^3 \vdots z^2 \Rightarrow x^3 + y^3 \geq z^2$ (4)

- Từ (3) và (4) suy ra :

$$x^3 + y^3 \geq (tx^2y^2 - x - y)^2$$

$$\Leftrightarrow x^3 + y^3 \geq t^2x^4y^4 - 2tx^2y^2(x+y) + x^2 + 2xy + y^2$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 + 2tx^2y^2(x+y) > t^2x^4y^4$$

$$\Leftrightarrow txy < \frac{x^3 + y^3 + 2tx^2y^2(x+y)}{tx^3y^3}$$

$$\Leftrightarrow txy < 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{1}{tx^3} + \frac{1}{ty^3} \qquad (5)$$

- Nếu $x \geq 2$ thì $y \geq 3 \Rightarrow txy \geq 6 > 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{t.2^3} + \frac{1}{t.2^3} > 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{1}{t.x^3} + \frac{1}{t.y^3}$

Điều này mâu thuẫn với (5).

Vậy x = 1. Khi đó (5) trở thành :

$$ty < 2 + \frac{2}{y} + \frac{1}{t} + \frac{1}{ty^3} \qquad (6)$$

- Nếu $y \geq 4$ thì $ty \geq 4 > 2 + \frac{2}{4} + \frac{1}{t} + \frac{1}{t.4^3} \geq 2 + \frac{2}{y} + \frac{1}{t} + \frac{1}{ty^3}$. Điều này mâu thuẫn với (6).

Vậy $y \in \{2;3\}$ (Vì y > x = 1)

+ Nếu y = 2 thì $\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \vdots z^2 \\ x \leq y \leq z \\ x = 1; y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1; y = 2; z = 3$.

+ Nếu y = 3 thì $\begin{cases} x^3 + y^3 = 28 \vdots z^2 \\ x \leq y \leq z \\ x = 1; y = 3 \end{cases}$.(Loại)

- Thử lại ta thấy (x, y, z) = (1, 2, 3) và các hoán vị của nó thỏa mãn.

Vậy thương của phép chia $x^3 + y^3 + z^3 : x^2y^2z^2$ là t = 1.

Câu 4.

a) + Chứng minh tứ giác BONC nội tiếp.

- Vì BD, DC là các tiếp tuyến của đường tròn (O) nên ta có :

$$\widehat{OBD} = \widehat{OCD} = 90^0$$

$$\Rightarrow \widehat{OBD} + \widehat{OCD} = 90^0 + 90^0 = 180^0$$

Suy ra, tứ giác OBDC nội tiếp (1)

Mặt khác :

$\widehat{BAC} = \widehat{DBC}$ (Cùng chắn cung BC)

$\widehat{BAC} = \widehat{DNC}$ (Vì DN // AB)

$\Rightarrow \widehat{DBC} = \widehat{DNC}$

Suy ra tứ giác BDCN nội tiếp (2)

- Từ (1) và (2) suy ra 5 điểm B, O, N, C, D cùng thuộc một đường tròn.

Vậy tứ giác BONC là tứ giác nội tiếp

+ Chứng minh tam giác ABN cân

Ta có :

$\widehat{ANO} = \widehat{OBC}$ (Vì cùng bù với góc ONC)

$\widehat{OBC} = \widehat{OCB}$ (Vì tam giác OBC cân tại O)

$\widehat{OCB} = \widehat{ONB}$ (Vì cùng chắn cung OB)

$\Rightarrow \widehat{ANO} = \widehat{ONB}$

Suy ra NO là tia phân giác của góc ANB. (3)

Mặt khác :

$ON \perp DN$ (Vì $\widehat{OND} = 90^0$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

DN // AB (giả thiết)

$\Rightarrow ON \perp AB$ (4)

Từ (3), (4) suy ra tam giác ANB có đường phân giác góc N đồng thời là đường cao.

Vậy tam giác ANB cân tại N.

b) - Xét tam giác DBM và tam giác DNB, ta có :

$\widehat{BDN}$ là góc chung

$\widehat{BND} = \widehat{MBD}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

$\Rightarrow \Delta DBM \sim \Delta DNB \quad (g.g)$

$$\Rightarrow \frac{DB}{DN} = \frac{DM}{DB} \Leftrightarrow DB^2 = DM.DN \quad (5)$$

- - Xét tam giác DIB và tam giác DBA, ta có :

$\widehat{ADB}$ là góc chung

$\widehat{DBI} = \widehat{BAD}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

$\Rightarrow \Delta DIB \sim \Delta DBA \quad (g.g)$

$$\Rightarrow \frac{DB}{DA} = \frac{DI}{DB} \Leftrightarrow DB^2 = DI.DA \quad (5)$$

Từ (4) và (5) suy ra : $DI.DA = DM.DN \Leftrightarrow \frac{DM}{DI} = \frac{DA}{DN}$.

Từ đó kết hợp với ADN là góc chung suy ra :

$\Delta DIM \sim DNA \quad (c.g.c)$

$\Rightarrow \widehat{DIM} = \widehat{DNA}$

Suy ra tứ giác ANMI nội tiếp

Ta có :

$\widehat{NAD} = \widehat{IMD}$ (cùng bù với góc IMN)

$\widehat{NAD} = \widehat{CBI}$ (cùng chắn cung CI)

$\Rightarrow \widehat{CBI} = \widehat{IMD}$

Kết hợp với góc KBM chung, suy ra :

$\Delta KMI \sim \Delta KBM \quad (c.g.c)$

$\Rightarrow \frac{KM}{KI} = \frac{KB}{KM}$

$\Rightarrow KM^2 = KI.KB \quad (6)$

Mặt khác :

$\widehat{KDI} = \widehat{BAI}$ (Hai góc so le trong)

$\widehat{DBI} = \widehat{BAI}$ (Cùng chắn cung BI)

$\Rightarrow \widehat{KDI} = \widehat{BDI}$

Kết hợp với góc BKD chung, suy ra :

$\Delta KDI \sim \Delta KBD \quad (g.g)$

$\Rightarrow \frac{KD}{KI} = \frac{KB}{KD}$

$\Rightarrow KD^2 = KI.KB \quad (7)$

Từ (6) và (7) suy ra : KM = KD

Vậy K là trung điểm của DM.

c) Giả sử PI cắt BC tại L, IQ cắt AB tại S.

Ta có :

$\frac{PI}{DK} = \frac{BI}{BK} = \frac{IL}{KM}$ (vì PI // MN ; định lí ta let) (8)

$\frac{PI}{AS} = \frac{QI}{QS} = \frac{IL}{BS}$ (vì AB // PL ; định lí ta let) (9)

Vì DK = KM nên từ (8) suy ra : PI = IL

Vì PI = IL nên từ (9) suy ra : AS = BS

Giả sử SI cắt DK tại T, suy ra : $\dfrac{AS}{DT}=\dfrac{SI}{TI}=\dfrac{BS}{KT}$ (Định lý Talets ; AB // DK) (10)

Vì AS = BS nên từ (10) suy ra : T là trung điểm của DK, hay G trùng với K.

Vậy ba điểm Q, I, G thẳng hàng.

Câu 5.

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a\ge b\ge c$. Khi đó :

$$5=a+b+c\le 3a\le 6\Leftrightarrow \frac{5}{3}\le a\le 2\Rightarrow (a-1)(2-a)\ge 0 \qquad (*)$$

Mặt khác, vì $0\le b,c\le 2$ nên

$$(b-2)(c-2)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow bc\ge 2(b+c)-4$$
$$\Leftrightarrow bc\ge 2(5-a)-4=6-2a \qquad (**)$$

Do đó

$$A=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=\sqrt{a}+\sqrt{b+c+2\sqrt{bc}}\ge \sqrt{a}+\sqrt{5-a+2\sqrt{6-2a}} \qquad \left(\text{Theo } (**)\right)$$

$$\Leftrightarrow A\ge \sqrt{a}+\sqrt{3-a+2\sqrt{2}\sqrt{3-a}+2}=\sqrt{a}+\sqrt{(\sqrt{3-a}+\sqrt{2})^2}=\sqrt{a}+\sqrt{3-a}+\sqrt{2}$$

vì $\left(\sqrt{a}+\sqrt{3-a}\right)^2=a+2\sqrt{a(3-a)}+3-a=3+2\sqrt{3a-a^2}=3+2\sqrt{(a-1)(2-a)+2}$

$\ge 3+2\sqrt{2}=(\sqrt{2}+1)^2$ (vì $(a-1)(2-a)\ge 0$, theo (*))

Nên $\sqrt{a}+\sqrt{3-a}\ge \sqrt{2}+1$

Vậy $A\ge 2\sqrt{2}+1$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} 0\le a,b,c\le 2\ ;\ a+b+c=5\\ (a-1)(2-a)=0\\ bc=6-2a \end{cases} \Leftrightarrow a=b=2\ ;\ c=1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức A là $2\sqrt{2}+1$. Đạt được khi (a, b, c) = (2, 2, 1) và các hoán vị.

ĐỀ SỐ 4 (2015-2016)

Câu 1.

$a)\quad A=\left(\dfrac{a-3\sqrt{a}}{\sqrt{a}+3}-\dfrac{a+3\sqrt{a}}{\sqrt{a}-3}\right).\left(\sqrt{a}-\dfrac{9}{\sqrt{a}}\right)=\sqrt{a}\dfrac{\left(\sqrt{a}-3\right)^2-\left(\sqrt{a}+3\right)^2}{\left(\sqrt{a}-3\right).\left(\sqrt{a}+3\right)}.\dfrac{a-9}{\sqrt{a}}$

$=a-6\sqrt{a}+9-\left(a+6\sqrt{a}+9\right)=12\sqrt{a}.$

b) Có $M=A+a=a-12\sqrt{a}=\left(\sqrt{a}-6\right)^2-36\ge -36.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{a}-6=0\Leftrightarrow a=36.$

Vậy $MinM=-36\Leftrightarrow a=36.$

Câu 2.

a) Điều kiện $x \neq 0$

Ta có $\dfrac{9}{x^2} + \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+9}} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2+9}{x^2} + \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+9}} - 3 = 0 \quad (*)$

Đặt $t = \dfrac{x}{\sqrt{2x^2+9}}\,(t \neq 0) \Rightarrow t^2 = \dfrac{x^2}{2x^2+9} \Rightarrow \dfrac{1}{t^2} = \dfrac{2x^2+9}{x^2}$

Khi đó phương trình (*) có dạng

$$\frac{1}{t^2} + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow 2t^3 - 3t^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)^2(2t+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

- Với $t = 1 \Rightarrow x = \sqrt{2x^2+9} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2x^2 + 9 = 0 \end{cases}$ phương trình vô nghiệm

- Với $t = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow -2x = \sqrt{2x^2+9} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 4x^2 = 2x^2 + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 2x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

b) Thay (2) vào (1) ta được

$$x^3 - y^3 = (y^2 - 5y^2)(4x - y) \Leftrightarrow 21x^3 - 5x^2y - 4xy^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(7x-4y)(3x+y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{4}{7}y \\ x = -\dfrac{y}{3} \end{array}\right.$$

- Với $x = 0$ thay vào (2) ta được $y = \pm 2$

- Với $x = \dfrac{4}{7}y$ thay vào (2) ta được $-\dfrac{31}{49}y^2 = 4$ phương trình vô nghiệm

- Với $x = -\dfrac{y}{3}$ thay vào (2) ta được $y^2 = 9 \Leftrightarrow y = \pm 3$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm

$(x;y) = (0;2);(0;-2);(-1;3);(1;-3)$

Câu 3.

a) Nếu $x = 0 \Rightarrow y = 1$ thỏa mãn

Nếu $y = 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$ không thỏa mãn

Xét $x \neq 0; y \neq 0$ phương trình đã cho có dạng

$$4.54x^3(54x^3+1) = 4.54x^3.y^3 \Leftrightarrow (4.27x^3+1)^2 = (6xy)^3 + 1$$

Đặt $4.27x^3 = a; 6xy = b$ ta được phương trình

$$(a+1)^2 = (b+1)(b^2 - b + 1) \quad (*)$$

Từ $(*)$ ta thấy $b+1>0$. Gọi ƯCLN$(b+1;b^2-b+1)=d$

$$\Rightarrow \begin{cases} b+1 \vdots d \\ b^2-b+1 \vdots d \end{cases} \Rightarrow b^2-b+1=b(b+1)-2(b+1)+3 \vdots d \Rightarrow 3 \vdots d$$

Mặt khác $(a+1)^2=(4.27x^3+1)$ không chia hết cho 3 nên 3 không chia hết $d \Rightarrow d=1 \Rightarrow (b+1;b^2-b+1)=1$

Từ $(*)$ nhận thấy tích hai số nguyên tố cùng nhau là một số chính phương nên phải có $\begin{cases} b+1=m^2 \\ b^2-b+1=n^2 \end{cases} \quad (m;n \in \mathbb{N}^*; m \geq 2; m^2 \geq 4)$

Ta có $n^2=(m^2-1)^2-(m^2-1)+1$

$\Leftrightarrow n^2=(m^2-1)^2-(m^2-2) \quad (1); n^2=(m^2-2)^2+(m^2-1) \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow (m^2-2)^2<n^2<(m^2-1)^2$ vô lý suy ra phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(0;1)$.

b) Giả sử phương trình đã cho có nghiệm nguyên dương, xét $(x_0;y_0)$ là nghiệm mà (x_0+y_0) là nhỏ nhất.

Do vai trò của $x_0;y_0$ bình đẳng nên không mất tính tổng quát ta giả sử $x_0 \leq y_0$.

Ta có $x_0^2-mx_0y+y_0^2+1=0 \Rightarrow y_0$ là một nghiệm của phương trình

$y^2-mx_0y+x_0^2+1=0 \quad (1)$

Suy ra phương trình còn một nghiệm y_1 thỏa mãn $\begin{cases} y_0+y_1=mx_0 & (2) \\ y_0.y_1=x_0^2+1 & (3) \end{cases} \Rightarrow y_1$ nguyên dương $\Rightarrow x_0+y_0 \leq x_0+y_1 \Rightarrow y_0 \leq y_1$

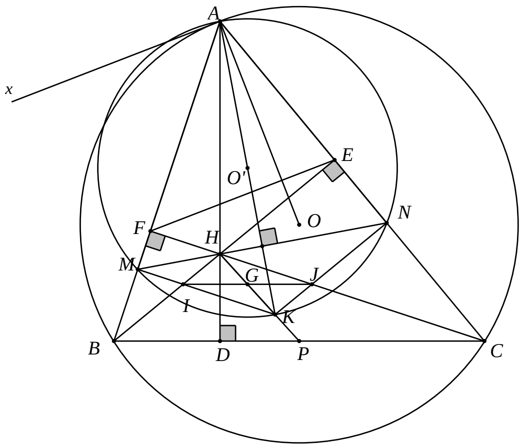
- Nếu $x_0=y_0$ thay vào phương trình đã cho ta được $m=\dfrac{2y_0^2+1}{y_0^2}=2+\dfrac{1}{y_0^2} \Rightarrow y_0=1$ (do $m;y_0$ nguyên dương) suy ra $m=3$.

- Nếu $x_0<y_0=y_1$ thì từ (3) suy ra $y_0^2=x_0^2+1 \Leftrightarrow (y_0-x_0)(y_0+x_0)=1$ (vô lí)

- Nếu $x_0<y_0<y_1$ thì $\begin{cases} y_0 \geq x_0+1 \\ y_1 \geq x_0+2 \end{cases}$ nên từ (3) suy ra $(x_0+1)(x_0+2) \leq x_0^2+1 \Leftrightarrow 3x_0+1 \leq 0$ vô lí

Vậy $m=3$ là giá trị cần tìm.

Câu 4.



a) Ta có $\widehat{AMN} = \widehat{MBH} + \widehat{MHB}; \widehat{ANM} = \widehat{NCH} + \widehat{NHC}$

Mà $\widehat{MBH} = \widehat{MCH}; \widehat{MHB} = \widehat{NHC}$

Suy ra $\widehat{AMN} = \widehat{ANM} \Rightarrow \Delta AMN$ cân tại A.

b) Kẻ tiếp tuyến Ax của (O) $\Rightarrow \widehat{xAB} = \widehat{ACB}$

Mà $\widehat{ACB} = \widehat{AFE}$ (vì tứ giác $BFEC$ nội tiếp);

$\Rightarrow \widehat{xAB} = \widehat{AFE} \Rightarrow Ax//EF \Rightarrow OA \perp EF$.

Tương tự $OB \perp FD; OC \perp ED$.

Lại có

$$S_{ABC} = S_{AEOF} + S_{BDOF} + S_{CDOE} = \frac{1}{2}OA.EF + \frac{1}{2}OB.DF + \frac{1}{2}OC.DE$$

$$= \frac{1}{2}R\left(EF + DF + DE\right) = \frac{1}{2}AD.BC$$

Suy ra chu vi tam giác DEF là $\dfrac{AD.BC}{R}$.

Mà R, BC không đổi , suy ra chu vi tam giác DEF lớn nhất khi AD lớn nhất $\Leftrightarrow A$ là điểm chính giữa của cung BC lớn.

c) Theo a) ΔAMN cân tại $A \Rightarrow AK$ là đường trung trực của MN.

Tâm O' của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN là trung điểm của AK

$\Rightarrow \widehat{AMK} = \widehat{ANK} = 90^0$

Chứng minh được tứ giác $HIKJ$ là hình bình hành $\Rightarrow HK$ đi qua trung điểm G của IJ.

Nhận thấy $\widehat{IMH} = \widehat{MHF} = \widehat{MHI} \Rightarrow \Delta IMH$ cân tại $I \Rightarrow MI = IH$

Tương tự: $JN = JH$

Chứng minh được

ΔBIM đồng dạng với $\Delta CJN\left(g-g\right) \Rightarrow \dfrac{MI}{BI} = \dfrac{NJ}{JC} \Rightarrow \dfrac{IH}{BI} = \dfrac{JH}{JC} \Rightarrow IJ//BC$.

Mà HK đi qua trung điểm G của IJ nên cũng đi qua trung điểm P của BC.

Mà B, C định nên P cố định.

Câu 5.

$$\frac{2a^5+3b^5}{ab}+\frac{2b^5+3c^5}{bc}+\frac{2c^5+3a^5}{ca}\ge 15\left(a^3+b^3+c^3-2\right).$$

Ta chứng minh $\frac{2a^5+3b^5}{ab}\ge 5a^3-10ab^2+10b^3\ \forall a,b>0\quad (1)$

Thật vậy

$$\frac{2a^5+3b^5}{ab}\ge 5a^3-10ab^2+10b^3 \Leftrightarrow 2a^5+3b^5-ab\left(5a^3-10ab^2+10b^3\right)\ge 0$$

$$2a^5-5a^4b+10a^2b^3-10ab^4+3b^5\ge 0 \Leftrightarrow (a-b)^4(2a+3b)\ge 0\,\forall a,b>0$$

Tương tự ta có: $\frac{2b^5+3c^5}{bc}\ge 5b^3-10bc^2+10c^3\ (2);\frac{2c^5+3a^5}{ca}\ge 5c^3-10ca^2+10a^3\ (3)$

Cộng theo các vế của bất đẳng thức (1); (2); (3) ta được

$$\frac{2a^5+3b^5}{ab}+\frac{2b^5+3c^5}{bc}+\frac{2c^5+3a^5}{ca}\ge 15\left(a^3+b^3+c^3\right)-10\left(ab^2+bc^2+ca^2\right).$$

Mà $ab^2+bc^2+ca^2=3$

$$\Rightarrow \frac{2a^5+3b^5}{ab}+\frac{2b^5+3c^5}{bc}+\frac{2c^5+3a^5}{ca}\ge 15\left(a^3+b^3+c^3\right)-30=15\left(a^3+b^3+c^3-2\right).$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

ĐỀ SỐ 5 (2014-2015)

Câu 1.

1) Điều kiện: $x\ge 0; x\ne \frac{1}{4}; x\ne 1$

Đặt $\sqrt{x}=a; a\ge 0 \Rightarrow x=a^2$, ta có:

$$A=\left(\frac{2a^2-1+a}{1-a^2}+\frac{2a^3+a^2-a}{1+a^3}\right).\frac{\left(a^2-a\right)(1-a)}{2a-1}-1$$

$$A=\left[\frac{(a+1)(2a-1)}{(1-a)(a+1)}+\frac{a(a+1)(2a-1)}{(a+1)\left(a^2-a+1\right)}\right].\frac{a(a-1)(1-a)}{2a-1}-1$$

$$A=\left[\frac{(2a-1)}{(1-a)}+\frac{a(2a-1)}{\left(a^2-a+1\right)}\right].\frac{a(a-1)(1-a)}{2a-1}-1$$

$$A=\left[\frac{1}{(1-a)}+\frac{a}{\left(a^2-a+1\right)}\right].(2a-1).\frac{a(a-1)(1-a)}{2a-1}-1$$

$A=\frac{-1}{a^2-a+1}$. Vậy: $A=\frac{-1}{x-\sqrt{x}+1}$.

2) Ta có:

$$A=\frac{-1}{x-\sqrt{x}+1}<-\frac{1}{7}\Leftrightarrow\frac{1}{x-\sqrt{x}+1}>\frac{1}{7}$$

$$\Leftrightarrow x-\sqrt{x}+1<7\quad (\text{do } x-\sqrt{x}+1=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0)$$

$$\Leftrightarrow x-\sqrt{x}-6<0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+2\right)<0\Leftrightarrow\sqrt{x}-3<0$$

$$\Leftrightarrow 0\le x<9$$

Đối chiếu với điều kiện ta được: $\begin{cases}0\le x<9\\ x\ne\frac{1}{4},x\ne 1\end{cases}$

Câu 2.

1) ĐKXĐ: $\begin{cases}x^2-x-2\ne 0\\ x^2-5x-2\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne -1\\ x\ne 2\\ x\ne\frac{5\pm\sqrt{33}}{2}\end{cases}$

Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình.
Khi $x\ne 0$ thì

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow\dfrac{1}{x-1-\frac{2}{x}}-\dfrac{3}{x-5-\frac{2}{x}}-2=0.$

Đặt $t=x-\frac{2}{x}$, ta được phương trình biểu thị theo t là $\dfrac{1}{t-1}-\dfrac{3}{t-5}=2$

$\Leftrightarrow t^2-5t+6=0\Leftrightarrow t=2;\ t=3$

Với $t=2\Rightarrow x-\frac{2}{x}=2\Leftrightarrow x^2-2x-2=0\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{3}$ (thỏa mãn)

Với $t=3\Rightarrow x-\frac{2}{x}=3\Leftrightarrow x^2-3x-2=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S=\left\{1\pm\sqrt{3};\ \dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}\right\}.$

2) Với x = y = 0 là nghiệm của hệ phương trình
Nhận thấy nếu x $\ne$ 0 thì y $\ne$ 0 và ngược lại
Xét x $\ne$ 0 ; y $\ne$ 0 hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=2\\ (\frac{1}{x}+\frac{1}{y})(1+\frac{1}{xy})=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=2 & (1)\\ (\frac{1}{x}+\frac{1}{y})(2+\frac{2}{xy}) & (2)\end{cases}$$

Thay (1) vào (2) ta được $(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})^3=8$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2 \\ \frac{1}{xy}=1 \end{cases} \Rightarrow x=y=1$$

Vậy hệ có nghiệm (x ; y) là (0 ; 0) ; (1 ; 1)

Câu 3.

1) Ta có: $5(x^2+xy+y^2)=7(x+2y)$ (1)

$\Rightarrow 7(x+2y)\vdots 5 \Rightarrow (x+2y)\vdots 5$. Đặt $x+2y=5t$ (2) $(t\in Z)$ thì

(1) trở thành $x^2+xy+y^2=7t$ (3).

Từ (2)$\Rightarrow x=5t-2y$ thay vào (3) ta được $3y^2-15ty+25t^2-7t=0$ (*), coi đây là PT bậc hai đối với y có: $\Delta=84t-75t^2$

Để (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta\ge 0 \Leftrightarrow 84t-75t^2\ge 0 \quad \Leftrightarrow 0\le t\le \frac{28}{25}$

Vì $t\in Z \Rightarrow t=0$ hoặc $t=1$. Thay vào (*) :

+ Với $t=0 \Rightarrow y_1=0 \Rightarrow x_1=0$

+ Với $t=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_2=3 \Rightarrow x_2=-1 \\ y_3=2 \Rightarrow x_3=1 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có 3 nghiệm nguyên (x, y) là (0; 0), (-1; 3) và (1; 2)

2) Nếu $p=q$ thì $p=\frac{2(m^2+1)}{m+1}=2m-2+\frac{4}{m+1}$.

Do $m\in\mathbb{N}$ và p là số nguyên tố nên $4\vdots(m+1) \Rightarrow m=0; m=1; m=3 \Rightarrow p=2;\ p=5$.

Nếu $p\ne q$ thì pq và $p+q$ là nguyên tố cùng nhau vì pq chỉ chia hết cho các ước nguyên tố là p và q còn $p+q$ thì không chia hết cho p và không chia hết cho q.

Gọi r là một ước chung của m^2+1 và $m+1 \Rightarrow \left[(m+1)(m-1)\right]\vdots r \Rightarrow (m^2-1)\vdots r$

$\Rightarrow \left[(m^2+1)-(m^2-1)\right]\vdots r \Rightarrow 2\vdots r \Rightarrow r=1$ hoặc $r=2$.

+) $r=1$ suy ra $p+q=m+1$, $pq=m^2+1 \Rightarrow p,q$ là hai nghiệm của phương trình $x^2-(m+1)x+m^2+1=0$ vô nghiệm do

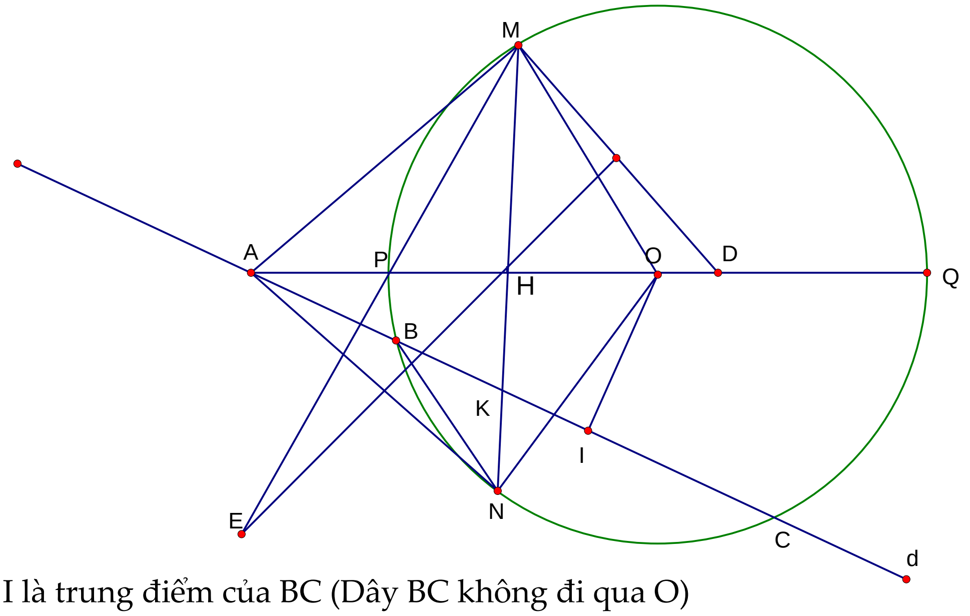
$\Delta=-3m^2+2m-3=-(m-1)^2-(2m^2+2)<0$

+) $r=2$ suy ra $2pq=m^2+1$ và $2(p+q)=m+1 \Rightarrow p,\ q$ là hai nghiệm của phương trình $2x^2-(m+1)x+m^2+1=0$ vô nghiệm do

$\Delta=-7m^2+2m-7=-(m-1)^2-(6m^2+6)<0$.

Vậy bộ các số nguyên tố $(p;\ q)$ cần tìm là $(p;q)=(2;2)$; $(p;q)=(5;5)$.

Câu 4.



1) I là trung điểm của BC (Dây BC không đi qua O)

$\Rightarrow$ OI $\perp$ BC $\Rightarrow$ $\angle$OIA = 90^0

Ta có $\angle$AMO = 90^0

$\angle$ANO = 90^0

Suy ra 4 điểm O, M, N, I cùng thuộc đường tròn đường kinh OA

2) AM, AN là hai tiếp tuyến của (O) nên OA là phân giác $\angle$MON mà ΔMON cân ở O nên OA $\perp$ MN

ΔABN đồng dạng với ΔANC (Vì $\angle$ANB = $\angle$ACN, $\angle$CAN chung)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AN} = \frac{AN}{AC} \quad \Rightarrow AB \,.\, AC = AN^2$$

ΔANO vuông tại N đường cao NH nên AH . AO = AN^2

$\Rightarrow$ AB . AC = AH . AO

ΔAHK đồng dạng với ΔAIO (g-g)

Nên $\dfrac{AH}{AI} = \dfrac{AK}{AO} \Rightarrow AI \cdot AK = AH \cdot AO$

$$\Rightarrow AI \cdot AK = AB.AC$$

$$\Rightarrow AK = \frac{AB \cdot AC}{AI}$$

Ta có A, B, C cố định nên I cố định $\Rightarrow$ AK cố định

Mà A cố định, K là giao điểm của dây BC và dây MN nên K thuộc tia AB $\Rightarrow$ K cố định

3) Ta có $\angle$PMQ = 90^0

ΔMHE ΔQDM (g-g) $\Rightarrow \dfrac{ME}{MQ} = \dfrac{MH}{DQ}$

$\Delta PMH \qquad \Delta MQH \Rightarrow \dfrac{MP}{MQ} = \dfrac{MH}{QH} = \dfrac{MH}{2DQ}$

$\Rightarrow \dfrac{MP}{MQ} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{ME}{MQ}$

$\Rightarrow$ ME = 2 MP $\Rightarrow$ P là trung điểm ME

Câu 5.

Từ: $2\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)+c\left(\dfrac{a}{b^2}+\dfrac{b}{a^2}\right)=6 \Rightarrow 6=\dfrac{c(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a^2b^2}+\dfrac{2(a^2+b^2)}{ab}$

ta có:

$a^2+b^2 \ge 2ab \Rightarrow 6=\dfrac{c(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a^2b^2}+\dfrac{2(a^2+b^2)}{ab} \ge \dfrac{c(a+b)}{ab}+4 \Rightarrow 0<\dfrac{c(a+b)}{ab} \le 2.$

Lại có

$$\frac{bc}{a(2b+c)}+\frac{ac}{b(2a+c)}=\frac{(bc)^2}{abc(2b+c)}+\frac{(ac)^2}{abc(2a+c)} \ge \frac{(bc+ac)^2}{2abc(a+b+c)}=\frac{\left(c(a+b)\right)^2}{2abc(a+b+c)}$$

và $abc(a+b+c)=ab.bc+bc.ca+ab.ca \le \dfrac{(ab+bc+ca)^2}{3}$

$$\Rightarrow \frac{bc}{a(2b+c)}+\frac{ac}{b(2a+c)} \ge \frac{3}{2}\left(\frac{c(a+b)}{ab+bc+ca}\right)^2=\frac{3}{2}\left(\frac{\frac{c(a+b)}{ab}}{1+\frac{c(a+b)}{ab}}\right)^2$$

Đặt $t=\dfrac{c(a+b)}{ab} \Rightarrow P \ge \dfrac{3t^2}{2(1+t)^2}+\dfrac{4}{t}$ (với $0<t\le 2$).

Có $\dfrac{3t^2}{2(1+t)^2}+\dfrac{4}{t}=\left(\dfrac{3t^2}{2(1+t)^2}+\dfrac{4}{t}-\dfrac{8}{3}\right)+\dfrac{8}{3}=\dfrac{-7t^3-8t^2+32t+24}{6t(1+t)^2}+\dfrac{8}{3}$

$=\dfrac{(t-2)(-7t^2-22t-12)}{6t(1+t)^2}+\dfrac{8}{3}$

mà $\dfrac{(t-2)(-7t^2-22t-12)}{6t(1+t)^2} \ge 0 \quad \forall t \in (0;2] \Rightarrow \dfrac{(t-2)(-7t^2-22t-12)}{6t(1+t)^2}+\dfrac{8}{3} \ge \dfrac{8}{3} \quad \forall t \in (0;2]$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi t = 2 hay $a=b=c$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{8}{3}$ khi $a=b=c$.

ĐỀ SỐ 6 (2013-2014)

Câu I.

1) Điều kiện: $\sqrt{xy} \ne 1$.

$$A=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)+\left(\sqrt{xy}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{xy}+1\right)+\left(\sqrt{xy}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)}{\left(\sqrt{xy}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)}:$$

$$\frac{\left(\sqrt{xy}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)+\left(\sqrt{xy}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{xy}+1\right)-\left(\sqrt{x}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)}{\left(\sqrt{xy}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)+\left(\sqrt{xy}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{xy}+1\right)+\left(\sqrt{xy}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)}{\left(\sqrt{xy}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)+\left(\sqrt{xy}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{xy}+1\right)-\left(\sqrt{x}+1\right)\left(1-\sqrt{xy}\right)}=$$

$$=\frac{1+\sqrt{x}}{x\sqrt{y}+\sqrt{xy}}=\frac{1}{\sqrt{xy}}.$$

2) Theo Côsi, ta có: $6=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\ge 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{xy}}}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{xy}}\le 9$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{y}}\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{9}$.

Vậy: maxA = 9, đạt được khi : $x=y=\frac{1}{9}$.

Câu II.

1) PT đã cho có hai nghiệm phân biệt có điều kiện:
$\Delta'>0\Leftrightarrow(m-2)^2-\left(m^2-2m+4\right)>0\Leftrightarrow m<0$ (*)

Với $m<0$ theo Vi- et ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=4-2m\\x_1.x_2=m^2-2m+4\end{cases}$.

Ta có:

$$\frac{2}{x_1^2+x_2^2}-\frac{1}{x_1x_2}=\frac{1}{15m}\Leftrightarrow\frac{2}{\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2}-\frac{1}{x_1x_2}=\frac{1}{15m}\quad(1)$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{m^2-6m+4}-\frac{1}{m^2-2m+4}=\frac{1}{15m}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{m+\frac{4}{m}-6}-\frac{1}{m+\frac{4}{m}-2}=\frac{1}{15}$$

Đặt $m+\frac{4}{m}=t$ do $m<0\Rightarrow t<0$

Ta có (1) trở thành $\frac{1}{t-6}-\frac{1}{t-2}=\frac{1}{15}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-4\\t=12\end{array}\right.\Rightarrow t=-4$ (do $t<0$)

Với $t=-4$ ta có $m+\frac{4}{m}=-4\Leftrightarrow m=-2$ thỏa mãn (*)

2) Ta có:

$$x^4+y^4+z^4=\frac{x^4+y^4}{2}+\frac{y^4+z^4}{2}+\frac{z^4+x^4}{2}\ge x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=$$

$$=\frac{x^2y^2+y^2z^2}{2}+\frac{y^2z^2+z^2x^2}{2}+\frac{z^2x^2+x^2y^2}{2}\ge xyyz+yzzx+zxxy=$$

$=$ xyz $(x+y+z)$ = xyz (vì $x+y+z=1$).

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x=y=z \\ x+y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{1}{3}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $\left(x=\dfrac{1}{3}; y=\dfrac{1}{3}; z=\dfrac{1}{3}\right)$

Câu III.

1) Giả sử $(a+b^2) \vdots (a^2b-1)$, tức là: $a+b^2 = k(a^2b-1)$, với $k \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a+k = b(ka^2-b) \Leftrightarrow a+k = mb \qquad (1)$

Ở đó $m \in \mathbb{Z}$ mà: $m = ka^2 - b \Leftrightarrow m+b = ka^2 \qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $(m-1)(b-1) = mb - b - m + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (m-1)(b-1) = (a+1)(k+1-ka) \qquad (3)$

Do $m > 0$ (điều này suy ra từ (1) do $a, k, b > 0$) nên $m \geq 1$ (vì $m \in \mathbb{Z}$).

Do $b > 0$ nên $b - 1 \geq 0$ (do $b \in \mathbb{Z}$) $\Rightarrow (m-1)(b-1) \geq 0$.

Vì thế từ (3) suy ra: $(a+1)(k+1-ka) \geq 0$.

Lại do $a > 0$ nên suy ra: $k+1-ka \geq 0 \Rightarrow k+1 \geq ka \Rightarrow 1 \geq k(a-1) \qquad (4)$

Vì $a-1 \geq 0$ (do $a \in \mathbb{Z}, a > 0$) và $k \in \mathbb{Z}, k > 0$ nên từ (4) có: $\left[\begin{array}{l} k(a-1)=0 \\ k(a-1)=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ \begin{cases} a=2 \\ k=1 \end{cases} \end{array}\right.$

- Với $a = 1$. Thay vào (3) ta được: $(m-1)(b-1) = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m-1=2 \\ b-1=1 \end{cases} \\ \begin{cases} m-1=1 \\ b-1=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=2 \\ b=3 \end{array}\right.$

Vậy, trường hợp này ta có: $a = 1, b = 2$ hoặc $a = 1, b = 3$.

- Với $a = 2$ (vì $k = 1$). Thay vào (3) ta có: $(m-1)(b-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ m=1 \end{array}\right.$.

Khi $b = 1$, ta được: $a = 2, b = 1$.

Khi $m = 1$: Từ (1) suy ra $a + k = b \Rightarrow b = 3$. Lúc này được: $a = 2, b = 3$.

Tóm lại, có 4 cặp số $(a; b)$ thỏa mãn bài toán là: $(1; 2), (1; 3), (2; 3), (2; 1)$.

2) Ta có $\sqrt{x+2\sqrt{3}} = \sqrt{y}+\sqrt{z} \Leftrightarrow x+2\sqrt{3} = y+z+2\sqrt{yz}$

$\Leftrightarrow (x-y-z)+2\sqrt{3} = 2\sqrt{yz} \Rightarrow (x-y-z)^2+4\sqrt{3}(x-y-z)+12 = 4yz \ (1)$

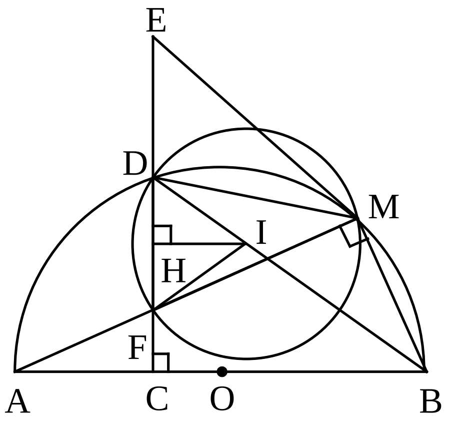
TH1. Nếu $x-y-z \neq 0$ Ta có $\sqrt{3} = \dfrac{4yz-(x-y-z)^2-12}{4(x-y-z)}$ (2) vô lý

(do $x, y, z \in N$ nên vế phải của (2) là số hữu tỷ).

TH2. $x-y-z=0$ khi đó $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-z=0 \\ yz=3 \end{cases}$ (3)

Giải (3) ra ta được $\begin{cases} x=4 \\ y=1 \\ z=3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \\ z=1 \end{cases}$ thử lại thỏa mãn.

Câu IV.



1) Ta có M thuộc đường tròn tâm O đường kính AB (giả thiết) nên $\widehat{AMB}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

hay $\widehat{FMB}=90^0$.

Mặt khác $\widehat{FCB}=90^0$ (giả thiết).Do đó $\widehat{FMB}+\widehat{FCB}=180^0$.

Suy ra BCFM là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CBM}=\widehat{EFM}\ (1)$ (vì cùng bù với $\widehat{CFM}$).

Mặt khác $\widehat{CBM}=\widehat{EMF}\ (2)$ (góc nội tiếp; góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn $\overset{\frown}{AM}$). Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{EFM}=\widehat{EMF}$.

Suy ra tam giác EMF là tam giác cân tại E.

(Có thể nhận ra ngay $\widehat{EMF}=\widehat{MBA}=\widehat{MFE}$ nên suy ra EMF cân)

2) Gọi H là trung điểm của DF. Suy ra $IH\perp DF$ và $\widehat{DIH}=\dfrac{\widehat{DIF}}{2}\ (3)$

Trong đường tròn (I) ta có: $\widehat{DMF}$ và $\widehat{DIF}$ lần lượt là góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung DF. Suy ra $\widehat{DMF}=\dfrac{\widehat{DIF}}{2}\ (4)$

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{DMF}=\widehat{DIH}$ hay $\widehat{DMA}=\widehat{DIH}$.

Trong đường tròn (O) ta có: $\widehat{DMA}=\widehat{DBA}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{DA}$)

Suy ra: $\widehat{DBA}=\widehat{DIH}$.

Vì IH và BC cùng vuông góc với EC nên suy ra IH // BC. Do đó $\widehat{DBA}+\widehat{HIB}=180^o$

$\Rightarrow \widehat{DIH}+\widehat{HIB}=180^o \Rightarrow$ Ba điểm D, I, B thẳng hàng.

3) Vì ba điểm D, I, B thẳng hàng $\Rightarrow \widehat{ABI}=\widehat{ABD}=\dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{AD}$.

Mà C cố định nên D cố định $\Rightarrow \dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{AD}$ không đổi

Do đó góc $\widehat{ABI}$ có số đo không đổi khi M thay đổi trên cung $\overset{\frown}{BD}$.

Câu V.

Ta có: $B=\dfrac{1}{(x+y)^3-3xy(x+y)}+\dfrac{1}{xy}=\dfrac{1}{1-3xy}+\dfrac{1}{xy}=\dfrac{1-2xy}{xy(1-3xy)}$.

Theo Côsi: $xy \le \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{1}{4}$.

Gọi B_o là một giá trị của B, khi đó, ∃x, y để:

$B_o = \frac{1-2xy}{xy(1-3xy)} \Leftrightarrow 3B_o(xy)^2 - (2 + B_o)xy + 1 = 0$ (1)

Để tồn tại x, y thì (1) phải có nghiệm xy $\Leftrightarrow \Delta = B_o^2 - 8B_o + 4 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B_o \ge 4+2\sqrt{3} \\ B_o \le 4-2\sqrt{3} \end{array}\right.$

Để ý rằng với giả thiết bài toán thì B > 0. Do đó ta có: $B_o \ge 4+2\sqrt{3}$.

Với $B_o = 4+2\sqrt{3} \Rightarrow xy = \frac{2+B_o}{6B_o} = \frac{3+\sqrt{3}}{6\left(2+\sqrt{3}\right)} \Rightarrow x(1-x) = \frac{3+\sqrt{3}}{6\left(2+\sqrt{3}\right)}$

$\Leftrightarrow x^2 - x + \frac{3+\sqrt{3}}{6\left(2+\sqrt{3}\right)} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2}, x = \frac{1-\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2}$.

Vậy, $B_{min} = 4+2\sqrt{3}$, đạt được khi $x = \frac{1+\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2}$, $y = \frac{1-\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2}$ hoặc

$x = \frac{1-\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2}$, $y = \frac{1+\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2}$.

ĐỀ SỐ 7 (2012-2013)

(Đỗ Tiến Hải – THCS Vĩnh Tân – Vĩnh Lộc)

Câu I. *(4,0 điểm):*

- ĐKXĐ : $x \ge 0, x \ne 9$

1. Với $x \ge 0, x \ne 9$ thì

$$P = \frac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3} - \frac{2\left(\sqrt{x}-3\right)}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x}-3}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)} - \frac{2\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)} - \frac{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}$$

$$= \frac{x\sqrt{x}-3x+8\sqrt{x}-24}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)} = \frac{x+8}{\sqrt{x}+1}$$

2. * Cách 1: Với $x \ge 0, x \ne 9$ thì $P = \frac{x+8}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}+1 + \frac{9}{\sqrt{x}+1} - 2$

$$\ge 2\sqrt{\frac{9}{\sqrt{x}+1}\left(\sqrt{x}+1\right)} - 2 = 6 - 2 = 4$$

$\Rightarrow$ giá trị nhỏ nhất của P = 4 $\Leftrightarrow$ x = 4 (thỏa mãn đkxđ)

* Cách 2: đặt y = $\sqrt{x}$ ($y \ge 0, y \ne 3$) . P = $\frac{y^2+8}{y+1}$, tìm gtnn của P bằng phương pháp miền xác định .....

Câu II. *(5,0 điểm):*

1. *** Cách 1** ta có : $x^4 - 4x^3 + 8x + m = 0$ (1) $\Leftrightarrow (x-1)^4 - 6(x-1)^2 + m + 6 = 0$

Đặt y = $(x-1)^2, y \ge 0$. Pt trở thành : $y^2 - 6y + m + 6 = 0$ (2)

- phương trình $x^4 - 4x^3 + 8x + m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi pt (2) có 2 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ s > 0 \\ p > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -6 < m < 3$

* **Cách 2**: $x^4 - 4x^3 + 8x + m = 0$ (1) $\Leftrightarrow$ $(x^2-2x)^2 - 4(x^2-2x) + m = 0$; đặt ẩn phụ giải như cách 1

* **Cách 3**: Đặt $x = a + 1$ khi đó $x^4 - 4x^3 + 8x + m = 0$ (1) $\Leftrightarrow$ $a^4 - 6a^2 + 5 + m = 0$;.....

2. $\begin{cases} 2+3x = \dfrac{8}{y^3} \\ x^3 - 2 = \dfrac{6}{y}. \end{cases}$ (I) ĐKXĐ: $y \neq 0$, đặt $t = \dfrac{2}{y} \neq 0$ hệ pt trở thành $\begin{cases} t^3 - 3x - 2 = 0 \\ x^3 - 3t - 2 = 0 \end{cases}$

Cách 1 : - trừ vế với vế hai pt, đưa về pt tích, ta được : $(x-t)(x^2+xt+t^2-3) = 0 \Leftrightarrow x - t = 0$ hoặc $x^2+xt+t^2-3=0 \Leftrightarrow x = t$ hoặc $x = t = 2$

....

$\Rightarrow$ (x ;y) = (-1 ;-2) ; (2 ; 1)

* **Cách 2** $\begin{cases} t^3 - 3x - 2 = 0 \\ x^3 - 3t - 2 = 0 \end{cases}$ là hpt đối xứng loại 1, biến đổi đặt x + t = a và xt = b ,.......

Câu III. *(4,0 điểm)*

1. vì n là số tự nhiên dương:

+ để $2^n - 15$ là số chính phương, dễ dàng chứng minh được $n \geq 4$ và nếu n lẻ thì $2^n - 15$ không là số chính phương .

+ n chẵn đặt n = 2k ($k \in N, k \geq 2$) khi đó $2^n - 15 = a^2 \left(a \in N^*\right) \Leftrightarrow (2^k - a)(2^k + a) = 15$

mà $0 < 2^k - a < 2^k + a$ $\Rightarrow k = 2;3$ thỏa mãn đk $\Rightarrow$ n = 4;6 thỏa mãn đk .

Vậy n = 4;6 là các giá trị cần tìm.

2. * **Cách 1** do $\left(m, n \in N^*\right)$

+ $\sqrt{6} - \dfrac{m}{n} > \dfrac{1}{2mn} \Leftrightarrow 6n^2 > m^2 \Rightarrow 6n^2 \geq m^2 + 1$

nếu $6n^2 = m^2 + 1$ mà $6n^2$ chia hết cho 3 nên $m^2 + 1 \equiv 0 \pmod 3$ vô lý vì $m^2 \equiv 0,1 \pmod 3$

vậy $6n^2 \geq m^2 + 2$ (1)

mặt khác $(m + \dfrac{1}{2m})^2 = m^2 + 1 + \dfrac{1}{4m^2} < m^2 + 2$ (2)

từ (1) và (2) suy ra $\left(m + \dfrac{1}{2m}\right)^2 < 6n^2 \Leftrightarrow \sqrt{6} - \dfrac{m}{n} > \dfrac{1}{2mn}$ đpcm

* **Cách 2** chứng minh : $6n^2 \geq m^2 + 2$ (1)

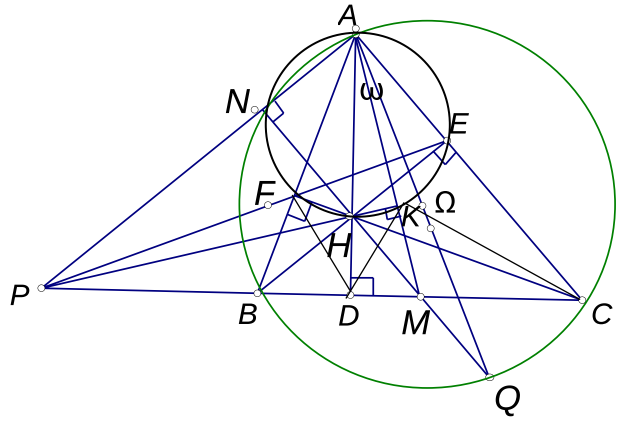
Mà $\sqrt{6} - \dfrac{m}{n} > \dfrac{1}{2mn} \Leftrightarrow 24m^2n^4 > 4m^4 + 4m^2 + 1 (2)$

Mặt khác : $\Leftrightarrow 24m^2n^4 = 4m^2n^2.6n^2 > 4m^2.(m^2+2) = 4m^4 + 8m^2 > 4m^4 + 4m^2 + 1 \Rightarrow$ đpcm

* **Cách 3:** do $(m,n \in N^*)$nên $\sqrt{6} - \frac{m}{n} > \frac{1}{2mn}$

$\Leftrightarrow 2m^2 - 2\sqrt{6}nm + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{n\sqrt{6} - \sqrt{6n^2-2}}{2} < m < \frac{n\sqrt{6} + \sqrt{6n^2-2}}{2} < n\sqrt{6}(*)$ bất đẳng thức * luôn đúng vì $\sqrt{6} - \frac{m}{n} > 0$

Câu IV. *(6,0 điểm):*



a) **Cách 1**: Chứng minh các điểm A,E,H,F,N thuộc (ω, $\frac{AH}{2}$) $\Rightarrow HN \perp NA$, NH cắt đường tròn O tại Q suy ra => AQ là đường kính của (Ω) $\Rightarrow$ QC $\perp$ AC => QC//BH (1)

+ Chứng minh tương tự ta suy ra: QB//HC(2) kết hợp với (1) $\Rightarrow$ BHCP là hình bình hành => NH đi qua trung điểm M của BC, hay N, H, M thẳng hàng.

Cách 2:

+ Chứng minh các điểm A,E,H,F,N thuộc (ω, $\frac{AH}{2}$)

+ Chứng minh tứ giác AMDN nội tiếp $\Rightarrow \angle ANM = ADM = 90^0 \Rightarrow$MN $\perp$ AN mà HN $\perp$ NA

$\Rightarrow$ M,N,H thẳng hàng

b) **Cách 1**: + do ANDM và ABDE là các tứ giác nội tiếp nên $\angle NDA = \angle NMA; \angle ABE = \angle ADE$

mà $\angle NDE = \angle NDA + \angle ADE \Rightarrow \angle NDE = \angle NMA + \angle ABE$ (3)

+ chứng minh : ..... $\angle FDK = \angle ACF + \angle NMA$ (4)

+ mà $\angle ABE = \angle ACF$ (cùng phụ $\angle BAC$) (5) . Từ (3),(4),(5) $\Rightarrow$ góc NDE = góc FDK

Cách 2:

ΔPAM có AD, MN là hai đường cao cắt nhau tại H , nên H là trực tâm của ΔPAN =>

$PH \perp AM$ tại K . Ta có $\angle$HDK = $\angle$HMK (cùng chắn cung HK) mà $\angle$HMK = $\angle$APH (cùng phụ $\angle$KHM), do tứ giác GNHD nội tiếp nên $\angle$NPH = $\angle$NDH (cùng chắn cung NH).

Suy ra: $\angle$ HDK = $\angle$NDH ,AD là phân giác của $\angle$NDK

$\angle$ FDA = $\angle$ADE ,AD là phân giác của $\angle$FDE

=> $\angle$FDK = $\angle$NDE

c) + tứ giác ANHK nội tiếp suy ra: ΔPHAđồng dạng ΔPNK(g-g) $\Rightarrow$PN.PA = PH.PK

+chứng minh tương tự : PN.PA = PB.PC nên suy ra: PH.PK= PB.PC $\Rightarrow$ ΔPHC đồng dạng ΔPBK (c-g-c) $\Rightarrow$ $\angle$PKB = $\angle$PCH $\Rightarrow$ giác BHKC nội tiếp

Câu V. *(1,0 điểm):* ***B**ảng* ô vuông có 7.7 = 49 ô vuông . Ta điền các số 1,2,3,4,5,6,7 vào mỗi ô vuông như bảng : (theo đường chéo)
- xem các ô điền số giống nhau là 1 chuồng thỏ $\Rightarrow$có 7 chuồng thỏ , mà 22 = 3.7 +1 , theo nguyên tắc đirrichle mỗi cách đặt bất kỳ thỏa mãn yêu cầu bài toán, mỗi chuồng thỏ luôn có ít nhất 4 đấu thủ không tấn công nhau (Hai đấu thủ tấn công lẫn nhau nếu họ cùng trên một hàng hoặc cùng trên một cột.còn trên đường chéo thì không tấn công nhau) $\Rightarrow$đpcm

1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	1
3	4	5	6	7	1	2
4	5	6	7	1	2	3
5	6	7	1	2	3	4
6	7	1	2	3	4	5
7	1	2	3	4	5	6

ĐỀ SỐ 8 (2011-2012)

Câu I (4.0 điểm)

1/ Rút gọn P : P = $\left(\dfrac{\sqrt{x-1}}{3+\sqrt{x-1}}+\dfrac{x+8}{10-x}\right):\left(\dfrac{3\sqrt{x-1}+1}{x-3\sqrt{x-1}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}\right)$ Đ/k: x > 1,x $\neq$ 10, x $\neq$ 5

Đặt y = $\sqrt{x-1}$. Ta có

P = $\left(\dfrac{y}{3+y}+\dfrac{y^2+9}{9-y^2}\right):\left(\dfrac{3y+1}{y^2-3y}-\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{y(3-y)+y^2+9}{(3+y)(3-y)}:\dfrac{3y+1-(y-3)}{y(y-3)}$

P = $\frac{3y-y^2+y^2+9}{(3+y)(3-y)}:\frac{3y+1-y+3}{y(y-3)}=\frac{3(y+3)}{(3+y)(3-y)}.\frac{y(y-3)}{2(y+2)}=\frac{-3y}{2(y+2)}$ Thay y = $\sqrt{x-1}$

P = $\frac{-3\sqrt{x-1}}{2(\sqrt{x-1}-2)}=\frac{-3\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{2(x-5)}$

2/ Tính giá trị của P khi x = $\sqrt[4]{\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}}-\sqrt[4]{\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}$

$$x=\sqrt[4]{\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}}-\sqrt[4]{\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}=\sqrt[4]{\left(3+2\sqrt{2}\right)^2}-\sqrt[4]{\left(3-2\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt[4]{\left(\sqrt{2}+1\right)^4}-\sqrt[4]{\left(\sqrt{2}-1\right)^4}=\sqrt{2}+1-\left(\sqrt{2}-1\right)=2$$

(Thoả mãn điều kiện), thay vào ta có.

P= $\frac{-3\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{2(x-5)}=\frac{-3\sqrt{2-1}\left(\sqrt{2-1}+2\right)}{2(2-5)}=\frac{-3.3}{2.(-3)}=\frac{3}{2}$

Câu II(4.0 đi ểm)

1/ Hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) : y = x – 2 và parabol (P): y = - x^2 là nghiệm của phương trình : -x^2 = x – 2 <=> x^2 + x – 2 = 0, Phương trình có hai nghiệm : x_1 = 1 và x_2 = -2

Với x_1 = 1 => y_1 = -1 => A (1 ; -1)

Với x_2 = -2 => y_2 = -4 => B (-2 ; -4)

Khi đó : $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (-3)^2 + (-3)^2 = 9 + 9 = 18$ => AB = $3\sqrt{2}$

2/ Hoành độ giao điểm đường thẳng d': y =- x = m và Parabol (P) : y = -x^2 là nghiệm của phương trình : -x^2 = -x + m <=> x^2 – x + m = 0

Để có hai giao điểm C và D thì Δ = 1 – 4m > 0 => m < $\frac{1}{4}$

Khi đó phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 mà $\begin{cases}x_1+x_2=1\\x_1.x_2=-m\end{cases}$

Ta có : $CD^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + [(-x_1)^2 -(- x_2^2)]^2$

$CD^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 + [(x_1 + x_2) (x_1 - x_2)]^2$

$CD^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 + (x_1 + x_2)^2 [(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2]$

$CD^2 = 1 + 4m + 1 (1 + 4m) = 8m + 2$

AB = CD => 8m + 2 = 18 => m = -2 (Thoả mãn đ/k). Vậy m = -2

Câu III (4.0 điểm)

1/ Giải hệ phương trình $\begin{cases}\frac{x^2}{y}+x=2\\\frac{y^2}{x}+y=\frac{1}{2}.\end{cases}$ Điều kiện : x, y ≠ 0

Từ PT (1) : $\frac{x^2}{y}+x=2 \Rightarrow x^2+xy=2y \Rightarrow y(2-x)=x^2$

Xét x = 2 phương trình vô nghiệm => Hệ vô nghiệm

Xét x ≠ 2 => y = $\frac{x^2}{2-x}$ (*) thay vào phương trình (2), ta có

$\frac{x^3}{(2-x)^2}+\frac{x^2}{2-x}=\frac{1}{2}$ <=> $2x^3+2x^2(2-x)=(2-x)^2 \Rightarrow 3x^2+4x-4=0$

Phương trình có hai nghiệm : $x_1 = \frac{2}{3}$ => $y_1 = \frac{1}{3}$ và $x_1 = -2$ => $y_1 = 1$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$ và $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$

2/ Tìm nghiệm nguyên của phương trình $2x^6 + y^2 - 2x^3y = 320$

Ta có : $2x^6 + y^2 - 2x^3y = 320 \Leftrightarrow y^2 - 2x^3y + 2x^6 - 320 = 0$. Xem đây là PT bậc hai ẩn y

$\Rightarrow \Delta' = (-x^3)^2 - 1.(2x^6 - 320) = x^6 - 2x^6 + 320 = 320 - x^6$

PT có nghiệm x , khi $\Delta \geq 0 \Rightarrow 320 - x^6 \geq 0 \Rightarrow x^6 \leq 320 \Rightarrow |x| \leq 2 \Rightarrow x = 0 ; \pm 1 ; \pm 2$

Khi đó phương trình có hai nghiệm $\begin{cases} y_1 = x^3 + \sqrt{320 - x^6} \\ y_1 = x^3 - \sqrt{320 - x^6} \end{cases}$

+ Với x = 0, $\begin{cases} y_1 = x^3 + \sqrt{320 - x^6} = \sqrt{320} \\ y_1 = x^3 - \sqrt{320 - x^6} = -\sqrt{320} \end{cases}$ (là số vô tỷ) loại

+ Với x = -1, $\begin{cases} y_1 = x^3 + \sqrt{320 - x^6} = -1 + \sqrt{319} \\ y_1 = x^3 - \sqrt{320 - x^6} = -1 - \sqrt{319} \end{cases}$ (là số vô tỷ) loại

+ Với x = 1, $\begin{cases} y_1 = x^3 + \sqrt{320 - x^6} = 1 + \sqrt{319} \\ y_1 = x^3 - \sqrt{320 - x^6} = 1 - \sqrt{319} \end{cases}$ (là số vô tỷ) loại

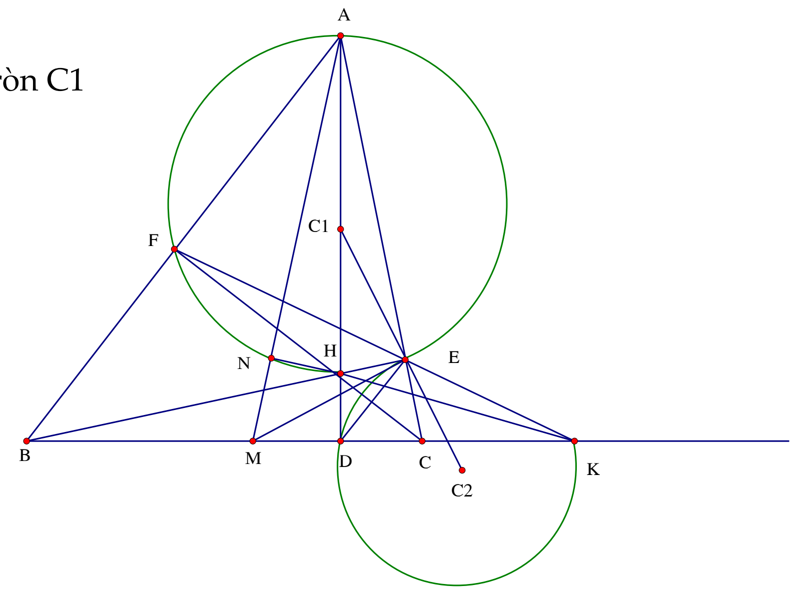
+ Với x = -2, $\begin{cases} y_1 = x^3 + \sqrt{320 - x^6} = -8 + \sqrt{256} = 8 \\ y_1 = x^3 - \sqrt{320 - x^6} = -8 - \sqrt{256} = -24 \end{cases}$ (thoả mãn)

+ Với x = -2, $\begin{cases} y_1 = x^3 + \sqrt{320 - x^6} = 8 + \sqrt{256} = 24 \\ y_1 = x^3 - \sqrt{320 - x^6} = 8 - \sqrt{256} = -8 \end{cases}$ (thoả mãn)

Kết luận : Phương trình có 4 nghiệm nguyên : (x ; y) = (-2 ; -24) , (-2 ; 8) , (2 ; 24) , (2 ; -8)

Câu IV (6.0 điểm)

1/ ME là tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2).



+ Chứng minh ME là tiếp tuyến của đường tròn C1

Vì $\widehat{E} = \widehat{F} = 90^o$ => Tứ giác AEHF nội tiếp

=> C1 là đường tròn nội tiếp tứ giác AEHF

(Tâm C1 là trung điểm của AH)

ME = MB => $\widehat{MEB} = \widehat{MBE}$ (1)

Vì $\widehat{D} = \widehat{E} = 90^o$ => Tứ giác ABDE nội tiếp

=> $\widehat{MBE} = \widehat{C_1AE}$ (Cùng chắn cung DE) (2)

ΔEAH vuông tại E , mà C1A = C1H

=> C1A = C1H = C1E => $\widehat{C_1EA} = \widehat{C_1AE}$ (3)

Ta có : $\widehat{C_1EA} + \widehat{C_1EB} = 90^o$ (Kề b ù) (4)

Từ (1) , (2) , (3) và (4)

=> $\widehat{MEB} + \widehat{C_1EB} = 90^o$ => $\widehat{MEC_1} = 90^o$ => $ME \perp C_1E$

=> ME là tiếp tuyến của đường tròn C1

+ Chứng minh ME là tiếp tuyến của đường tròn C2

Ta có : $\widehat{MCE} = \widehat{DKE} + \widehat{CEK}$ (Góc ngoài của ΔCEK) (1′)

$\widehat{CEK} = \widehat{AEF}$ (Đối đỉnh) (2′)

$\widehat{AEF} = \widehat{AHF}$ (Góc nội tiếp cùng chắn cung AF) (3′)

$\widehat{AHF} = \widehat{DHC}$ (Đối đỉnh) (4′)

Vì $\widehat{D} = \widehat{E} = 90^o$ => Tứ giác CDHE nội tiếp => $\widehat{DHC} = \widehat{DEC}$ (Cùng chắn cung DC) (5′)

ME = MC => $\widehat{MED} + \widehat{DEC} = \widehat{MEC} = \widehat{MCE}$ (6′)

Từ (1′) , (2′) , (3′) , (4′), (5′) và (6′) => $\widehat{MED} = \widehat{DKE}$

=> ME là tiếp tuyến của đường tròn C2

2/ KH ⊥ AM.

Gọi giao điểm của AM và (C1) l à N

Vì ME là TT của đường tròn (C1) => ME² = MN.MA

Vì ME là TT của đường tròn (C2) => ME² = MD.MK

=> MB.MA = MD.MK => Tứ giác ANDK nội tiếp

=> $\widehat{KNA} = \widehat{KDA} = 90^o$ (Cùng chắn cung KA) => KN⊥AM(1′′)

Mà $\widehat{HNA} = 90^o$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn C1) => HN⊥ AM (2′′)

Từ (1′′) và (2′′) => K, H , N thẳng hàng => KH ⊥AM

Câu V (2.0 điểm) Với $0 \le x; y; z \le 1$. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình:

$$\frac{x}{1+y+zx} + \frac{y}{1+z+xy} + \frac{z}{1+x+yz} = \frac{3}{x+y+z}$$

Vì vai trò của x, y , z như nhau nên $0 \le x \le y \le z \le 1$

+ Xét trường hợp x = 0 => $\frac{y}{1+z} + \frac{z}{1+yz} = \frac{3}{y+z}$

Ta có : $\frac{y}{1+z} + \frac{z}{1+yz} \le \frac{y}{y+z} + \frac{z}{y+z} = 1$ mà $\frac{3}{y+z} > \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2}$

(Do 1 + z > y + z ; 1 + yz > y + z <=> 1 – y + z(y – 1) ≥ 0 <=> (y – 1)(z – 1) ≥ 0)

Nên phương trình : $\frac{y}{1+z} + \frac{z}{1+yz} = \frac{3}{y+z}$ Vô nghiệm

+ Xét trường hợp x ≠ 0 => $0 < x; y; z \le 1$

Ta có $\frac{x}{1+y+zx} \le \frac{x}{x^2+yx+zx} = \frac{1}{x+y+z}$ (Dấu = xảy ra khi x = 1)

$\frac{y}{1+z+xy} \le \frac{y}{y^2+zy+xy} = \frac{1}{x+y+z}$ (Dấu = xảy ra khi y = 1)

$\frac{z}{1+x+yz} \le \frac{z}{z^2+xz+yz} = \frac{1}{x+y+z}$ (Dấu = xảy ra khi z = 1)

Suy ra : $\frac{x}{1+y+zx} + \frac{y}{1+z+xy} + \frac{z}{1+x+yz} \le \frac{3}{x+y+z}$ (Dấu = xảy ra khi x = y = z = 1)

=> $\frac{x}{1+y+zx} + \frac{y}{1+z+xy} + \frac{z}{1+x+yz} = \frac{3}{x+y+z}$ khi x = y = z = 1

Vậy phương trình có một nghiệm x = y = z = 1

ĐỀ SỐ 9 (2010-2011)

Câu 1:

1) Ta có $\Delta' = (m-1)^2 \geq 0, \forall m$ nên phương trình có hai nghiệm với mọi m.

Theo định lí viet, ta có $x_1 + x_2 = 2m, x_1x_2 = 2m-1$, suy ra $P = \dfrac{4m+1}{4m^2+2}$

$= 1 - \dfrac{(2m-1)^2}{4m^2+2} \leq 1$. $Max\,P = 1$, khi $m = \dfrac{1}{2}$.

2) a) Từ giả thiết suy ra $2ab - 2bc - 2ca = 0$

Suy ra $A = \sqrt{(a+b-c)^2} = |a+b-c|$ là số hữu tỉ

b) Đặt $a = \dfrac{1}{x-y}, b = \dfrac{1}{y-z}, c = \dfrac{1}{x-z}$ suy ra $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c}$.

Áp dụng câu 2a) suy ra $B = \sqrt{\dfrac{1}{(x-y)^2} + \dfrac{1}{(y-z)^2} + \dfrac{1}{(z-x)^2}}$ là số hữu tỉ.

Câu 2:

1) Đk: $x \neq \pm 1$. Phương trình tương đương với

$$\left(\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1}\right)^2 - 2\frac{x^2}{x^2-1} = \frac{10}{9} \Leftrightarrow \left(\frac{2x^2}{x^2-1}\right)^2 - \frac{2x^2}{x^2-1} - \frac{10}{9} = 0.$$

Đặt $t = \dfrac{2x^2}{x^2-1}$, ta được phương trình $t^2 - t - \dfrac{10}{9} = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{5}{3}$ hoặc $t = \dfrac{-2}{3}$

Với $t = \dfrac{5}{3}$, ta được $\dfrac{2x^2}{x^2-1} = \dfrac{5}{3}$ (vô nghiệm)

Với $t = -\dfrac{2}{3}$, ta được $\dfrac{2x^2}{x^2-1} = -\dfrac{2}{3}$ suy ra $x = \pm\dfrac{1}{2}$.

2) Đk: $y \neq 0$. Hệ tương đương với $\begin{cases} x^2 + \dfrac{1}{y^2} + x + \dfrac{1}{y} = 4 \\ x^3 + \dfrac{1}{y^3} + \dfrac{x}{y}\left(x + \dfrac{1}{y}\right) = 4. \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} u = x + \dfrac{1}{y} \\ v = \dfrac{x}{y}, \end{cases}$ ta được hệ $\begin{cases} u^2 + u - 2v = 4 \\ u^3 - 2uv = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - 4u + 4 = 0 \\ u^2 + u - 4 = 2v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 1. \end{cases}$

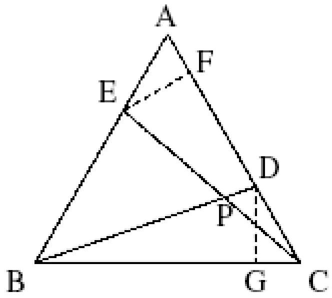
Với $\begin{cases} u = 2 \\ v = 1, \end{cases}$ ta được $\begin{cases} x + \dfrac{1}{y} = 2 \\ \dfrac{x}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện)

Câu 3:

Kẻ $EF \perp AC$ tại F, $DG \perp BC$ tại G.

Theo giả thiết $S_{(ADPE)} = S_{(BPC)}$

$\Rightarrow S_{(ACE)} = S_{(BCD)}$.



Mà $AC = BC \Rightarrow EF = DG$ và $\widehat{A} = \widehat{C}$

Suy ra $\Delta AEF = \Delta CDG \Rightarrow AE = CG$.

Do đó $\Delta AEC = \Delta CDB(c-g-c) \Rightarrow \widehat{DBC} = \widehat{ECA}$

$\Rightarrow \widehat{BPE} = \widehat{PBC} + \widehat{PCB} = \widehat{PCD} + \widehat{PCB} = 60^0$

Câu 4:

1) Gọi Q là giao điểm của các tiếp tuyến chung của (O) với (C), (D) tại A, B tương ứng.

Suy ra $\widehat{ANP} = \widehat{QAP} = \widehat{QBP} = \widehat{BNP}$.

Ta có

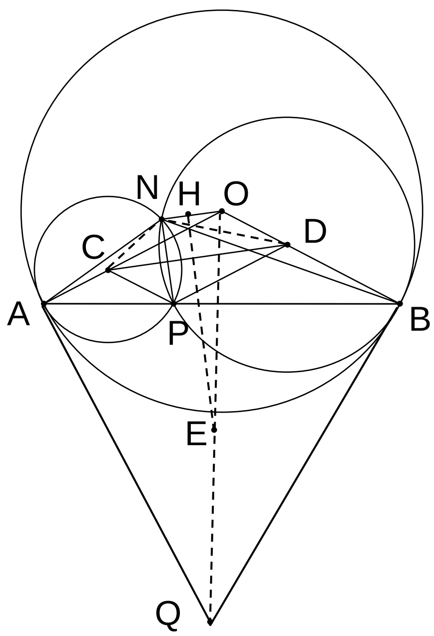
$\widehat{ANB} = \widehat{ANP} + \widehat{BNP} = \widehat{QAP} + \widehat{QBP}$

$= 180^0 - \widehat{AQB}$, suy ra NAQB nội tiếp (1).

Dễ thấy tứ giác OAQB nội tiếp (2)

Từ (1) và (2) suy ra 5 điểm O, N, A, Q, B cùng nằm trên một đường tròn.

Suy ra các điểm O, N, A, B cùng nằm trên một đường tròn.



Ta có $\widehat{OCN} = 2\widehat{OAN} = 2\widehat{OBN} = \widehat{ODN}$,

suy ra bốn điểm O, D, C, N cùng nằm trên một đường tròn.

2) Gọi E là trung điểm OQ, suy ra E cố định và E là tâm đường tròn đi qua các điểm N, O, D, C. Suy ra đường trung trực của ON luôn đi qua điểm E cố định.

Câu 5.

1) $d_1 + d_2 + ... + d_{44} = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + ... + (a_{45} - a_{44}) = a_{45} - a_1 \le 130 - 1 = 129.$ (1)

Nếu mỗi hiệu d_j $(j = 1, 2, ..., 44)$ xuất hiện không quá 10 lần thì

$d_1 + d_2 + ... + d_{44} \geq 9(1+2+3+4) + 8.5 = 130$ mâu thuẫn với (1).

Vậy phải có ít nhất một hiêụ d_j $(j = 1,...,44)$ xuất hiện không ít hơn 10 lần

2) Ta có $2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2$.

Suy ra $\dfrac{a^2}{b+c} + \dfrac{b^2}{c+a} + \dfrac{c^2}{a+b} \geq \dfrac{a^2}{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}} + \dfrac{b^2}{\sqrt{2\left(c^2+a^2\right)}} + \dfrac{c^2}{\sqrt{2\left(c^2+a^2\right)}}$

Đặt $x = \sqrt{b^2+c^2}$, $y = \sqrt{c^2+a^2}$, $z = \sqrt{a^2+b^2}$,

suy ra $VT \geq \dfrac{y^2+z^2-x^2}{2\sqrt{2}x} + \dfrac{z^2+x^2-y^2}{2\sqrt{2}y} + \dfrac{x^2+y^2-z^2}{2\sqrt{2}z}$

$$\geq \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(\frac{(y+z)^2}{2x} - x\right) + \left(\frac{(z+x)^2}{2y} - y\right) + \left(\frac{(x+y)^2}{2z} - z\right)\right]$$

$$\geq \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(\frac{(y+z)^2}{2x} + 2x - 3x\right) + \left(\frac{(z+x)^2}{2y} + 2y - 3y\right) + \left(\frac{(x+y)^2}{2z} + 2z - 3z\right)\right]$$

$$\geq \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(2(y+z) - 3x\right) + \left(2(z+x) - 3y\right) + \left(2(x+y-3z\right)\right]$$

Suy ra $VT \geq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}(x+y+z) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2011}{2}}$