MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ HẠNG CỦA MA TRẬN

§1 TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Khái niệm về hạng của ma trận

Định nghĩa 1. Cho ma trận khác ma trận không $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$. Khi đó tồn tại một số nguyên dương r $(1 \le r \le \min\{m,n\})$ thỏa mãn hai điều kiện

i) Ma trận A có một định thức con cấp r khác không, giả sử định thức con cấp r đó là $\Delta_r \ne 0.$

ii) Nếu ma trận A có các định thức con cấp lớn hơn r thì các định thức này đều bằng không.

Khi đó ta gọi số nguyên r là hạng của ma trận A và ký hiệu là $rank(A)=r.$

Trường hợp A là ma trận không ta quy ước $rank(A)=0.$

2. Cách tìm hạng của ma trận

a) Các phép biến đổi sơ cấp

+) Đổi chỗ hai hàng hoặc hai cột cho nhau.

+) Nhân một hàng hoặc một cột với một số khác không.

+) Thêm vào một hàng hoặc một cột một tổ hợp tuyến tính của các hàng hoặc các cột khác.

Định lý 1. Các phép biến đổi sơ cấp trên hàng hoặc trên cột không làm thay đổi hạng của ma trận.

Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp ta đưa ma trận A về dạng như sau

$$A \to \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} & \dots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ với } b_{11} \ne 0, \dots, b_{rr} \ne 0. \text{ Từ đó suy ra } rank(A)=r.$$

Ví dụ 1. (IMC - 2005) Cho ma trận vuông $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$, có $a_{ij}=i+j, \forall i,j=1,2,\dots,n.$ Tính $rank(A).$

Giải.

Tel 0983046407. Email: longhv08@gmail.com

$$A=\begin{bmatrix}2&3&\dots&n+1\\3&4&\dots&n+2\\\dots&\dots&\dots&\dots\\n+1&n+2&\dots&2n\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{-H_{n-2}+H_{n-1}\to H_{n-1}\\ \dots\dots\dots\\ -H_1+H_2\to H_2}]{-H_{n-1}+H_n\to H_n}\begin{bmatrix}2&3&\dots&n+1\\1&1&\dots&1\\\dots&\dots&\dots&\dots\\1&1&\dots&1\end{bmatrix}\xrightarrow[-H_2+H_n\to H_n]{-H_2+H_3\to H_3}\begin{bmatrix}2&3&\dots&n+1\\1&1&\dots&1\\0&0&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&0\end{bmatrix}$$

Vậy $rank(A)=2.$

b. Một số chú ý.

i) Việc thực hiện một phép biến đổi sơ cấp trên hàng của ma trận $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ tương đương với việc nhân vào bên trái của ma trận A một ma trận vuông cấp m không suy biến

ii) Việc thực hiện một phép biến đổi sơ cấp trên cột của ma trận $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ tương đương với việc nhân vào bên phải của ma trận A một ma trận vuông cấp n không suy biến

iii) Nếu $rank(A)=r,$ thì tồn tại các ma trận vuông không suy biến B và C sao cho $BAC=\begin{pmatrix}I_r&O\\O&O\end{pmatrix}.$

3. Định thức con cơ sở

Nếu ma trận A có hạng bằng r thì ta gọi các định thức con cấp r khác không là các định thức con cơ sở. Khi đó ta có các khẳng định sau

+) Các hàng của ma trận A tham gia vào định thức con cơ sở độc lập tuyến tính.

+) Các cột của ma trận A tham gia vào định thức con cơ sở độc lập tuyến tính.

4. Cho hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=0\\\dots\dots\dots\dots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=0\end{cases}\Leftrightarrow\underbrace{\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\dots\\x_n\end{bmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\\dots\\0\end{bmatrix}}_{O}$$

Nếu $rank(A)=r$ thì tập nghiệm của hệ thuần nhất $AX=O$ là một không gian con $n-r$ chiều của không gian tuyến tính $\mathbb{R}^n$.

Ví dụ. Tìm hạng của ma trận $B=\begin{bmatrix}a&\dots&a&b\\a&\dots&b&a\\\dots&\dots&\dots&\dots\\b&\dots&a&a\end{bmatrix}.$

Giải. Xét hệ tuyến tính thuần nhất

$$BX=O \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & \dots & a & b \\ a & \dots & b & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & \dots & a & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ax_1+\dots+ax_{n-1}+bx_n=0 \\ ax_1+\dots+bx_{n-1}+ax_n=0 \\ \dots \\ bx_1+\dots+ax_{n-1}+bx_n=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x_1+\dots+x_n)+(b-a)x_n=0 \\ a(x_1+\dots+x_n)+(b-a)x_{n-1}=0 \\ \dots \\ a(x_1+\dots+x_n)+(b-a)x_1=0 \end{cases}$$

+) Trường hợp 1. Nếu $a=b$ thì $B=aI$. Vậy $\begin{cases} rank(A)=0, & a=0 \\ rank(A)=1, & \mathrm{a}\neq 0. \end{cases}$

+) Trường hợp 2. Nếu $a\neq b$ thì suy ra $\begin{cases} x_1=\dots=x_n=\dfrac{b}{b-a}(x_1+\dots+x_n) \\ (na+b-a)(x_1+\dots+x_n)=0 \end{cases}$ (1)

*) Nếu $na+b-a\neq 0$ thì từ hệ (1) suy ra $x_1=x_2=\dots=x_n=0$ là nghiệm duy nhất của hệ $BX=O$, vậy $rank(B)=0.$

*) Nếu $na+b-a=0$ thì từ hệ (1) suy ra $x_1=x_2=\dots=x_n$. Khi đó nghiệm của hệ có dạng $X=t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}, t\in\mathbb{R}$. Không gian nghiệm của hệ là không gian con 1 chiều, vậy $rank(B)=n-1.$

§ 2 MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC VỀ HẠNG CỦA MA TRẬN

1. Cho A và B là hai ma trận vuông cùng cấp khi đó
   i) $rank(A+B)\leq rank(A)+rank(B).$
   ii) $rank(A)+rank(B)-n\leq rank(AB)\leq \min\{rank(A),rank(B)\}.$
   iii) Nếu ma trận B khả nghịch thì $rank(AB)=rank(BA)=rank(A).$
2. Cho A và B là hai ma trận có cấp thích hợp sao cho ta thực hiện được phép nhân AB. Khi đó $rank(AB)\leq \min\{rank(A),rank(B)\}.$

§ 3 MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ TÌM HẠNG CỦA MA TRẬN.

Bài 1. Cho A là ma trận vuông cấp $n.$ Hãy tìm hạng của ma trận phụ hợp của ma trận A.

Giải. Ký hiệu A^* là ma trận phụ hợp của ma trận A.

+) Trường hợp 1. Nếu ma trận A không suy biến, tức là $rank(A)=n$, thì từ đẳng thức $AA^*=\det(A).I$, ta có $\det(A).\det(A^*)=(\det A)^n \Rightarrow \det(A^*)=[\det(A)]^{n-1}\neq 0.$ Vậy $rank(A^*)=n.$

+) Trường hợp 2. Nếu $rank(A) \le n-2$, theo định nghĩa hạng của ma trận ta thấy mọi định thức con cấp $n-1$ của ma trận A đều bằng không, do đó $A^* = O$. Vậy $rank(A^*) = 0$.

+) Trường hợp 3. Nếu $rank(A) = n-1$, thì ma trận A có một định thức con cấp $n-1$ khác không, do đó $rank(A^*) \ge 1$. Từ đẳng thức $AA^* = \det(A).I = O$, ta có $rank(A^*) + rank(A) - n \le rank(AA^*) = O \Rightarrow rank(A^*) \le 1$. Vậy $rank(A^*) = 1$.

Bài 2. (Đề thi QG - 1999) Cho A là ma trận có 1999 hàng và 2000 cột. Gọi A^T là ma trận chuyển vị của A và B là ma trận phụ hợp của ma trận AA^T. Biết rằng $\det(AA^T) \ne 0$ và $B \ne O$. Tìm hạng của ma trận B.

Bài 3. (Đề DTQG - 2010) Cho A là ma trận vuông cấp n có các phần tử trên đường chéo là 0. Các phần tử khác là 1 hoặc 2010. Hãy chứng minh rằng hạng của ma trận A hoặc là $n-1$ hoặc là n.

Giải. Cho B là ma trận vuông cấp n có tất cả các phần tử đều bằng 1. Khi đó

$$C = A - B = \begin{bmatrix} -1 & c_{12} & \dots & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & -1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & -1 & \dots \\ c_{n1} & \dots & \dots & \dots & -1 \end{bmatrix},$$
trong đó các phần tử ngoài đường chéo của ma trận $A-B$ là 0 hoặc 2009. Vì các phần tử của ma trận $A-B$ là các số nguyên, nên hai triển định thức $\Delta_n = \det(A-B)$ theo hàng thứ nhất ta có $\Delta_n = \Delta_{n-1} + 2009k$, trong đó k là số nguyên nào đó còn Δ_{n-1} là định thức cấp $n-1$ được tạo bởi $n-1$ hàng cuối và $n-1$ cột cuối của ma trận C (Δ_{n-1} là phần bù đại số của c_{11}). Làm tương tự như trên đối với Δ_{n-1} rồi $\Delta_{n-1}, \dots,$ với chú ý $\Delta_1 = -1$. Vậy $\Delta_n = \Delta_1 + 2009K = -1 + 2009K$, trong đó K là số nguyên nào đó. Từ đó ta có $\det(A-B) = \Delta_n \ne 0$. Áp dụng bất đẳng thức hạng ta có $n = rank(A-B) \le rank(A) + rank(B) = rank(A) + 1$. Từ đó ta có $rank(A) \ge n-1$.

Bài 4. (IMC - 2007) Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & \dots & n^2 \end{bmatrix}$.

a) Tìm $rank(A)$.

b) Ta có thể hoán vị các phần tử trong A để nhận được ma trận B sao cho $rank(B) = n$ hay không ?

Giải.

a) Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp để tìm hạng

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ n+1 & n+2 & \dots & 2n\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & \dots & n^2\end{bmatrix}\xrightarrow[-C_1+C_2\to C_2]{-C_{n-1}+C_n\to C_n \atop \dots\dots}\begin{bmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ n+1 & 1 & \dots & 1\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ n^2-n+1 & 1 & \dots & 1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-C_2+C_n\to C_n]{-C_2+C_3\to C_3 \atop \dots\dots}\begin{bmatrix}1 & 1 & \dots & 0\\ n+1 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ n^2-n+1 & 1 & \dots & 0\end{bmatrix}$$

Vậy $rank(A)=2.$

b) Ta thiết lập ma trận B với các số lẻ nằm trên đường chéo chính, các phần tử nằm trên đường chéo chính là các số chẵn, các số còn lại sắp vào các phần tử phía dưới đường chéo chính tùy ý. Khi đó $\det(B)\neq 0.$ Thật vậy $B=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn}\end{bmatrix}$, trong đó b_{ii} $(i=1,2,...,n)$ là những số lẻ b_{ij} $(j>i)$ là những số chẵn.

Khai triển định thức của B theo hàng thứ nhất ta có $\det B=b_{11}B_{11}+2K_1$, $K_1\in\mathbb{Z}$, còn $B_{11}=\begin{vmatrix}b_{22} & \dots & b_{2n}\\ \dots & \dots & \dots\\ b_{n2} & \dots & b_{nn}\end{vmatrix}$ là phần bù đại số của b_{11}. Tiếp tục khai triển định thức B_{11} theo hàng thứ nhất ta có $\det B=b_{11}b_{22}C_{22}+2K_2$, trong đó $K_1\in\mathbb{Z}$, còn C_{22} là phần bù đại số của b_{22} trong ma trận $B_{11}=\begin{bmatrix}b_{22} & \dots & b_{2n}\\ \dots & \dots & \dots\\ b_{n2} & \dots & b_{nn}\end{bmatrix}$. Cứ tiếp tục như vậy sau n lần ta có $\det B=b_{11}b_{22}...b_{nn}+2K$, $K\in\mathbb{Z}$. Ta có $b_{11}b_{22}...b_{nn}$ là số lẻ còn $2K$ là số chẵn nên $\det B\neq 0.$

Vậy $rank(B)=n.$

Bài 5. (IMC - 2005) Cho $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$, trong đó $a_{ij}=i+j,\ \forall i,j=1,...,n.$ Tìm hạng của ma trận $A.$ (ĐS. $rank(A)=1$ nếu $n=1.$ $rank(A)=2$ nếu $n\geq 2.$)

§3 MỘT SỐ BÀI TOÁN CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC HẠNG.

Bài 1. (Đề thi QG - 2003) Cho A là ma trận vuông thỏa mãn điều kiện $A^{2003}=O$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta đều có

$$rank(A)=rank(A+A^2+...+A^n).$$

Giải. Để chứng minh $rank(A)=rank(A+A^2+...+A^n)$, ta chỉ cần chứng minh tập nghiệm của hai hệ thuần nhất sau trùng nhau

$AX = O$ (1) và $(A + A^2 + ... + A^n)X = O$ (2)

+) Giả sử X_0 là nghiệm của hệ (1) tức là $AX_0 = O$, do đó ta có $A^2X_0 = ... = A^nX_0 = O$. Vậy $(A + A^2 + ... + A^n)X_0 = O$.

+) Ngược lại, giả sử $(A + A^2 + ... + A^n)X_0 = O$, suy ra

$$AX_0 = -A^2X_0 - ... - A^nX_0 = A^2\left(-I - ... - A^{n-2}\right)X_0.$$

Đặt $B = -I - ... - A^{n-2}$, do B là hàm đa thức của ma trận A nên $AB = BA$. Ta có

$AX_0 = A^2BX_0 = AB(AX_0) = AB(A^2BX_0) = (AB)^2(AX_0) = ... = (AB)^{2003}(AX_0) = A^{2003}B^{2003}(AX_0) = O.$

Bài 2. (Đề DTQG - 2009) Cho A là ma trận thực vuông và có hạng bằng r. Chứng minh rằng các ma trận $r(A^TA) = r(AA^T) = r.$

Giải. Giả sử A là ma trận cấp $m\times n$. Khi ấy A^TA là ma trận cấp $n\times n$. Ta xét hai hệ phương trình tuyến tính thuần nhất n ẩn

$\mathrm{AX} = O$ (1) $\quad A^T\mathrm{AX} = O$, (2)

với $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ và $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times 1}$. Ta đi chứng minh hai hệ này có tập nghiệm trùng nhau, khi đó số chiều của hai không gian nghiệm của hai hệ là bằng nhau hay $r(A) = r(A^TA) = r.$ Thậy vậy

+) Giả sử X_0 là một nghiệm của phương trình (1), khi đó $\mathrm{AX}_0 = O \Rightarrow A^T\mathrm{AX}_0 = A^T(\mathrm{AX}_0) = O$, đó đó X_0 cũng là một nghiệm của phương trình (2).

+) Ngược lại giả sử X_0 là một nghiệm của phương trình (2), tức là $A^T\mathrm{AX}_0 = 0 \Rightarrow X_0^TA^T\mathrm{AX}_0 = 0 \Rightarrow (\mathrm{AX}_0)^T\mathrm{AX}_0 = 0$ hay $\mathrm{AX}_0 = O$, đó đó X_0 cũng là một nghiệm của phương trình (2).

Bài 3. (Đề thi QG - 2009) Cho A, B, C là các ma trận vuông cấp n sao cho C giao hoán với A và B, $C^2 = I$ (ma trận đơn vị) và $AB = 2(A+B)C$.

a) Chứng minh rằng $AB = BA.$
b) Nếu có thêm điều kiện $A + B + C = 0$, hãy chứng tỏ rằng

$$r(A-C) + r(B-C) = n.$$

Bài 4. (Đề DTQG - 2009) Cho A, B là hai ma trận thực vuông cấp n và thỏa mãn $AB + A + B = O.$ Chứng minh rằng $r(A) = r(B).$

Giải. Từ giả thiết ta có $(A+I)(B+I) = I.$ Đặt $X = A + I \Rightarrow X^{-1} = B + I$. Ta có

$$r(A) = r(X-I) = r(X^{-1}(X-I)) = r(I - X^{-1}) = r(X^{-1} - I) = r(B).$$

Bài 5. (Đề thi QG - 1997) Cho ma trận thực A vuông cấp n. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương N sao cho $rank(A^k) = rank(A^{k+1}), \forall k \geq N.$

Bài 6. (Đề thi QG - 2002) Cho P và Q là hai ma trận vuông cấp n thỏa mãn điều kiện $P^2 = P, Q^2 = Q$ và $I - P - Q$ khả nghịch. Chứng minh rằng $rank(P) = rank(Q)$.

Bài 7. Cho A là ma trận vuông cấp n sao cho $A^2 = I$. Chứng minh rằng $rank(A+I) + rank(A-I) = n$.

Định lý. Cho A, B, C là các ma trận vuông cùng cấp thì $rank\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} = rank\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix} = rank(A) + rank(B)$.

Bài 8. (Đề DTQG - 2009) Cho ma trận vuông A vuông cấp n và $\lambda \neq 0$. Chứng minh rằng: $rank(A) + rank(A+\lambda I) = n + rank(A^2 + \lambda A)$.

Giải. Sử dụng định lý trên ta có

$$rank(A) + rank(A+\lambda I) = rank\begin{pmatrix} A & O \\ O & A+\lambda I \end{pmatrix} = rank\begin{pmatrix} A & A+\lambda I \\ O & A+\lambda I \end{pmatrix}_{H_2+H_1\to H_1} = rank\begin{pmatrix} A & \lambda I \\ O & A+\lambda I \end{pmatrix}_{-C_1+C_2\to C_2}$$

$$= rank\begin{pmatrix} O & \lambda I \\ -\frac{1}{\lambda}(A^2+\lambda A) & A+\lambda I \end{pmatrix}_{-\frac{1}{\lambda}AC_2+C_1\to C_1} = rank(\lambda I) + rank(-\frac{1}{\lambda}(A^2+\lambda A)) = n + rank(A^2+\lambda A).$$

Bài 9. (Đề DTQG - 2011) Cho A và B là các ma trận vuông cùng cấp trong đó ma trận B khả nghịch. Chứng minh rằng

$rank(A-B) + rank(A+B) = rank(B) + rank((A-B)(A+B))$

Giải. Áp dụng Định lý trên ta có

$$rank(A-B) + rank(A+B) = rank\begin{pmatrix} A-B & O \\ O & A+B \end{pmatrix} = rank\begin{pmatrix} A-B & A+B \\ O & A+B \end{pmatrix}_{H_2+H_1\to H_1}$$

$$= rank\begin{pmatrix} A-B & 2B \\ O & A+B \end{pmatrix}_{-C_1+C_2\to C_2} = rank\begin{pmatrix} O & 2B \\ -\frac{1}{2}B^{-1}(A-B)(A+B) & A+B \end{pmatrix}_{-\frac{1}{2}B^{-1}(A-B)C_2+C_1\to C_1}$$

$$= rank(2B) + rank(-\frac{1}{2}B^{-1}(A-B)(A+B)) = rank(B) + rank((A-B)(A+B)).$$

Bài 10. (RMC 2006 P. 41) Cho $n, p \geq 2$ là hai số nguyên dương và A là ma trận vuông cấp n sao cho $A^{p+1} = A$.

a) Chứng minh rằng $ramk(A) + rank(I - A^p) = n$.

b) Chứng minh rằng nếu p là một số nguyên tố thì

$$rank(I-A) = rank(I-A^2) = \ldots = rank(I-A^{p-1})$$

§ 4 MỘT SỐ BÀI TOÁN CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC HẠNG

Bài 1. (Đề DTQG - 2011) Cho A,B và C là hai ma trận vuông cùng cấp chứng minh các bất đẳng thức

a) $rank(A+B)\geq \left|rank(A)+rank\left(B\right)\right|$.

b) $rank(AB)+rank(BC)\leq rank(B)+rank(ABC)$.

Bài 2. (Đề DTQG - 2010) Cho A và B là hai ma trận vuông cấp n và n là số lẻ. Chứng minh rằng nếu $AB=O$ thì một trong hai bất đẳng thức sau đúng $rank(A+A^T)<n$ hoặc $rank(B+B^T)<n$.

Bài 3. Giả sử $A_1,...,A_N$ là các ma trận thực đối xứng cấp n sao cho $A_iA_j=O,\forall i\neq j.$ Chứng minh rằng $rank(A_1)+rank(A_2)+...+rank(A_N)\leq n.$

Giải. Đặt $rank(A_i)=r_i$ (i=1,2,...,N), $r_0=rank(A_1+...+A_N)$. Giả sử giá trị riêng $\lambda=0$ của ma trận A_i có bội là k_i (đa thức đặc trưng của ma trận A_i có dạng $P_{A_i}(\lambda)=\det(A_i-\lambda I)=\lambda^{k_i}Q_i(\lambda)$). Do các ma trận A_i là thực và đối xứng nên chéo hóa được, nghĩa là $r_i=rank(A_i)=rank(A_i-0I)=n-k_i$ $(i=1,2,...,N)$. Bây giờ ta có

$$P_{A_1}(\lambda)...P_{A_N}(\lambda)=\det\left[(A_1-\lambda I)...(A_N-\lambda I)\right]=\det\left[\left(-\lambda\right)^{N-1}(A_1+...+A_N)+(-\lambda)^N I\right]\quad (1)$$

$$=(-\lambda)^{(N-1)n}\det\left[A_1+...+A_N-\lambda I\right]$$

Vì $A_1+...+A_N$ cũng là ma trận đối xứng nên nó chéo hóa được, và do đó bội của giá trị riêng $\lambda=0$ của ma trận $A_1+...+A_N$ là $n-r_0$. Đối chiếu bậc của thừa số λ ở hai vế của phương trình (1) ta có $k_1+...+k_N=n(N-1)+n-r_0$. Hay suy ra $n-r_1+...+n-r_N=n(N-1)+n-r_0\Leftrightarrow r_1+...+r_N=r_0\leq n.$ Ta có điều cần chứng minh.

Bài 4. (Đề DTQG - 2011) Cho A và B là các ma trận vuông cùng cấp. Chứng minh rằng $rank\begin{pmatrix}AB & O\\ B & B\end{pmatrix}\leq rank\begin{pmatrix}A-B & 2012A-2011B\\ B & 2011B\end{pmatrix}$. Khi nào dấu đẳng thức xảy ra.

Giải.

$$rank(AB)+rank(B)=rank\begin{pmatrix}AB & O\\ B & B\end{pmatrix}\leq rank\begin{pmatrix}A & O\\ B & B\end{pmatrix}=rank\begin{pmatrix}A-B & -B\\ B & B\end{pmatrix}_{-H_2+H_1\to H_1}$$

$$=rank\begin{pmatrix}A-B & -A\\ B & O\end{pmatrix}_{-C_1+C_2\to C_2}=rank\begin{pmatrix}A-B & A\\ B & O\end{pmatrix}_{-C_2\to C_2}=rank\begin{pmatrix}A-B & 2A-B\\ B & B\end{pmatrix}_{C_1+C_2\to C_2}$$

$$=rank\begin{pmatrix}A-B & 3A-2B\\ B & B\end{pmatrix}_{C_1+C_2\to C_2}=...=rank\begin{pmatrix}A-B & 2012A-2011B\\ B & 2011B\end{pmatrix}_{C_1+C_2\to C_2}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi B là ma trận khả nghịch.

Bài 5. (RMC 2008 P. 52) Cho A và B là hai ma trận thực vuông cấp $n.$ Chứng minh rằng $rank(A)+rank(B)\leq n$ khi và chỉ khi tồn tại ma trận không suy biến X sao cho $AXB=O.$

Bài 6. (RMC 2004 P. 60) Cho số nguyên dương $n\geq 2.$

a) Chứng minh rằng tồn tại hai ma trận A và B vuông cấp n, sao cho thỏa mãn đẳng thức $rank(AB)-rank(BA)=\left[\frac{n}{2}\right].$

b) Chứng minh rằng với mọi ma trận X và Y vuông cấp n ta đều có bất đẳng thức $rank(XY)-rank(\mathrm{YX})\le\left[\frac{n}{2}\right].$

§ 5 MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUA ĐẾN HẠNG CỦA MA TRẬN

Bài 1. (Đề DTQG - 2010) Cho A là ma trận cấp 3×4, B là ma trận cấp 4×2, C là ma trận cấp 2×3 thỏa mãn $ABC=\begin{bmatrix}0&-1&-1\\-1&0&-1\\1&1&2\end{bmatrix}$. Tính CAB và chứng minh rằng $(BCA)^2=BCA.$

Giải.

Đặt $M=\begin{bmatrix}0&-1&-1\\-1&0&-1\\1&1&2\end{bmatrix}$ suy ra $M^2=M$ và $rank(M)=2$. Mặt khác do CAB là ma trận vuông cấp 2 nên ta có

$2=rank(M)=rank(M^2)=rank((ABC)^2)\le rank(AB(CAB)C)\le rank(ABC)\le 2.$

Vậy $rank(CAB)=2$ và do đó CAB là ma trận không suy biến. Hơn nữa $(CAB)^2=C(ABC)AB=C(ABC)^2AB=CAB.CAB.CAB=(CAB)^3$, từ đó suy ra $CAB=I.$

Bài 2. (IMC - 2004) Cho A là ma trận cấp 4×2 và B là ma trận cấp 2×4, sao cho $AB=\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{bmatrix}$. Tìm ma trận $BA.$

Bài 3. (Đề DTQG - 2010) Cho ma trận vuông $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ sao cho $\det(A)=0$. Gọi A_{ij} là phần bù đại số của a_{ij} $(i,j=1,2,...,n)$. Biết rằng $A_{11}\ne0$. Hãy tìm một hệ nghiệm cơ bản của hệ thuần nhất $\sum_{j=1}^{n}A_{ij}x_j=0 \quad (i=1,...,n).$

Giải. Từ giả thiết ta có $rank(A)\le n-1$. Đặt $B=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&\dots&A_{1n}\\A_{21}&A_{22}&\dots&A_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\A_{n1}&A_{n2}&\dots&A_{nn}\end{bmatrix}$, thì B^T chính là ma trận chuyển vị của ma trận phụ hợp của ma trận A. Từ giả thiết $A_{11}\ne0$ ta suy ra

$rank(B) \geq 1$. Theo Bài ... trong **§ 2** ta có $rank(B) = 1$. Vậy hệ thuần nhất cần giải tương đương với phương trình $A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + ... + A_{1n}x_n = 0$ (do $A_{11} \neq 0$), suy ra

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{A_{12}}{A_{11}}x_2 - ... - \frac{A_{1n}}{A_{11}}x_n \\ x_2 = x_2 \\ ... \\ x_n = x_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{A_{12}}{A_{11}} \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}}_{a_1} x_2 + ... + \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{A_{1n}}{A_{11}} \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{bmatrix}}_{a_{n-1}} x_n$$

Vậy một hệ nghiệm cơ bản của hệ là $a_1, ..., a_{n-1}$.

Tel 0983046407. Email: longhv08@gmail.com