

SỞ CHỖ CHÍNH THỨC

MÔN: TOÁN

Lớp 9 THCS

Thời gian làm bài 150 phút không kể thời gian phát đề

Ngày thi: 23 tháng 3 năm 2012

Câu I (4đ)

Cho biểu thức $P = \frac{x\sqrt{x-1}}{x^2+3\sqrt{x-1}} + \frac{x+8}{10-x} \cdot \frac{3\sqrt{x-1}+1}{x-3\sqrt{x-1}-1} - \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

1) Rút gọn P

2) Tính giá trị của P khi $x = \sqrt[4]{\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}} - \sqrt[4]{\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}$

Câu II (4đ)

Trong cùng một hệ toạ độ, cho đường thẳng d: $y = x - 2$ và parabol (P): $y = -x^2$. Gọi A và B là giao điểm của d và (P).

1) Tính độ dài AB.

2) Tìm m để đường thẳng d': $y = -x + m$ cắt (P) tại hai điểm C và D sao cho $CD = AB$.

Câu III (4đ)

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{x}{y} + x = 2 \\ \frac{y}{x} + y = \frac{1}{2} \end{cases}$

2) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $2x^6 + y^2 - 2x^3y = 320$

Câu IV (6đ)

Cho tam giác nhọn ABC có $AB > AC$. Gọi M là trung điểm của BC; H là trực tâm; AD, BE, CF là các đường cao của tam giác ABC. Kí hiệu (C_1) và (C_2) lần lượt là đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và DKE, với K là giao điểm của EF và BC. Chứng minh rằng:

1) ME là tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) .

2) $KH \perp AM$.

Câu V (2đ)

Với $0 \leq x, y, z \leq 1$. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình:

$$\frac{x}{1+y+zx} + \frac{y}{1+z+xy} + \frac{z}{1+x+yz} = \frac{3}{x+y+z}$$

(Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

Họ và tên thí sinh

SDB

Câu I:

1,

C₁,

$$a, P = \frac{x+8}{10-x} \cdot \frac{3\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-1}-1} - \frac{1}{\sqrt{x-1}} \quad (\text{ĐK: } x > 1; x \neq 10; x \neq 5)$$

$$\text{Đặt } \sqrt{x-1} = a \quad (a \geq 0)$$

$$P = \frac{3a+9}{(a+3)(3-a)} \cdot \frac{2a+4}{a-3} = \frac{3(a+3)}{(a+3)(3-a)} \cdot \frac{a(a-3)}{2(a+2)} = -\frac{3a}{2(a+2)}$$

$$P = -\frac{3\sqrt{x-1}}{2(\sqrt{x-1}+2)} = -\frac{3\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}-2)}{2(x-5)}$$

b,

$$x = \sqrt[4]{\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}} - \sqrt[4]{\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}} = \sqrt[4]{(3+2\sqrt{2})^2} - \sqrt[4]{(3-2\sqrt{2})^2} = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$$

$$= 1 + \sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1) = 2 \quad (\text{T/M})$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{x-1} = \sqrt{2-1} = 1 \quad (\text{T/m})$$

$$P = -\frac{3a}{2(a+2)} = -\frac{3 \cdot 1}{2(1+2)} = -\frac{1}{2}$$

C₂,

$$a, P = \frac{3\sqrt{x-1}+9}{10-x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}} \cdot \frac{2\sqrt{x-1}+4}{\sqrt{x-1}-3} \quad (\text{ĐK: } x > 1; x \neq 10)$$

$$P = \frac{3(\sqrt{x-1}+3)}{10-x} \cdot \frac{\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}-3)}{2\sqrt{x-1}+4}$$

$$P = \frac{3\sqrt{x-1}(x-10)(\sqrt{x-1}-2)}{2(10-x)(x-1-4)} = -\frac{3\sqrt{x-1}}{2(\sqrt{x-1}+2)} = -\frac{3\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}-2)}{2(x-5)}$$

$$b) x = \sqrt[4]{\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}} - \sqrt[4]{\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}} = \sqrt[4]{(3+2\sqrt{2})^2} - \sqrt[4]{(3-2\sqrt{2})^2} = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x = 1 + \sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1) = 2 \quad \text{vì } x > 1 \Rightarrow P = \dots \Rightarrow P = -\frac{1}{2}$$

Câu II:

1) Hoàn thành độ giao điểm là nghiệm phương trình

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = -2$$

$$\text{Vậy } A(1; -1) \text{ và } B(-2; -4) \text{ hoặc } A(-2; -4) \text{ và } B(1; -1) \Rightarrow AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 18$$

$$\Rightarrow AB = 3\sqrt{2}$$

2) Để (d') cắt (P) tại 2 điểm phân biệt thì phương trình $x^2 - x + m = 0$ (1)

có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow D > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{4}$

Ta có $CD^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ mà $y_2 - y_1 = (-x_2 + m) - (-x_1 + m) = x_1 - x_2$

nên: $(y_2 - y_1)^2 = [(-x_2 + m) - (-x_1 + m)]^2 = (x_1 - x_2)^2$

Ta có $AB^2 = 18$

nên $CD = AB \Leftrightarrow CD^2 = AB^2 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 18 (*)$
 $\Leftrightarrow 2(x_1 - x_2)^2 = 18 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 9$
 $\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 9$
 $\Leftrightarrow 1 - 4m - 9 = 0$ (Theo Viet)
 $\Leftrightarrow m = -2$ (TM)

Câu III

1, ĐK $x \neq 0, y \neq 0$

C₁,

Dùng phương pháp thế rút y theo x từ (1) thay vào pt (2) ta có pt:

$$3x^3 + 4x^2 - 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(3x^2 + 4x - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & (0 \text{ t/m}) \\ 3x^2 + 4x - 4 = 0 & (*) \end{cases}$$

$$(*) \begin{cases} x_1 = -2 \Rightarrow y_1 = 1 \\ x_2 = \frac{2}{3} \Rightarrow y_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

C₂,

Nhân vế của hai PT được: $(x+y)^2 = 1 \Leftrightarrow x+y = \pm 1$ (1)

Chia vế của hai PT được: $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2y$ (2)

Từ 4 PT trên giải được $(x;y) = (1/3; 2/3); (2;-1); (-2/3; -1/3); (-2;1)$

Thử lại: Chỉ có hai nghiệm thỏa mãn HPT là: $(-2;1)$ và $(1/3; 2/3)$

2, GPT: $2x^6 + y^2 - x^3y = 320$

C₁,

$$y^2 - 2x^3y + (2x^6 - 320) = 0$$

$$\Delta' = x^6 - 2x^6 + 320 = 320 - x^6 \geq 0 \Leftrightarrow x^6 \leq 320 \Leftrightarrow |x| \leq 2 \quad (\text{vì } x \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow x = 0; \pm 1; \pm 2$$

$$* \quad x = 0 \Rightarrow y \in \mathbb{I} \Rightarrow y \notin \mathbb{Z}$$

$$* \quad x = \pm 1 \Rightarrow y \in \mathbb{I} \Rightarrow y \notin \mathbb{Z}$$

$$* \quad x = \pm 2 \Rightarrow \Delta' = 320 - (\pm 2)^6 = 256 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 16 \Rightarrow y = \frac{(\pm 2)^3 \pm 16}{1} = \dots$$

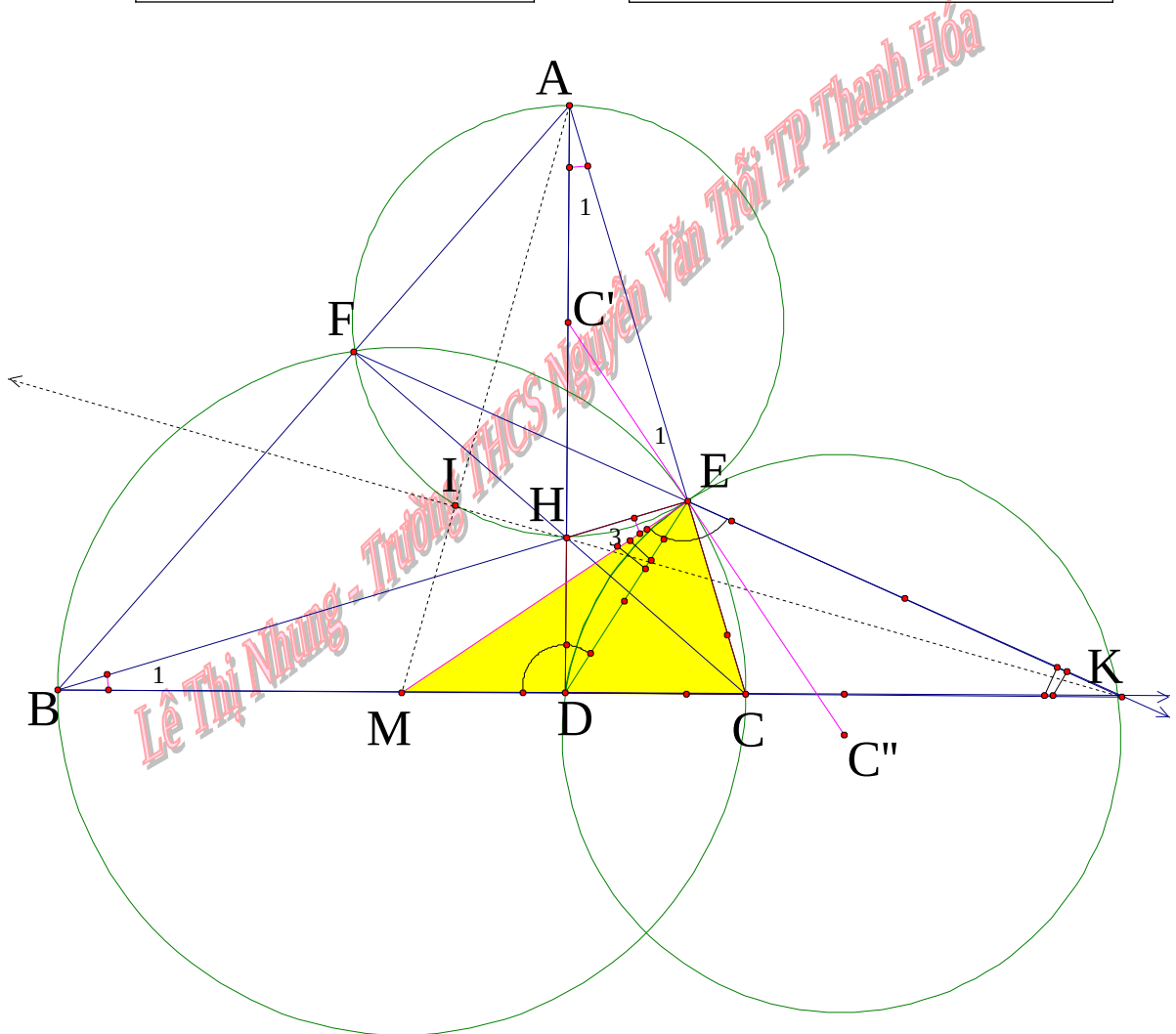
$$\text{KL: } (x;y) = (-2;-24); (-2;8); (2;-8); (2;24)$$

Câu IV: (Đổi điểm C₁ thành C', C₂ thành C'' cho dễ đánh máy và vẽ hình)

1) Ta có $RE = RF = 90^\circ$ nên tứ giác AEHF nội tiếp một đường tròn tâm chính là (C₁) là trung điểm AH

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \angle AEC' = \angle BEM \\ \uparrow \\ ME \perp C'E \\ \uparrow \\ ME \text{ là tt của } (C') \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \uparrow\uparrow \\ \angle \text{MEK} = \angle \text{MDE} \\ \uparrow\uparrow \\ \angle \text{MED} = \angle \text{MKE} \\ \uparrow\uparrow \\ \text{ME là tt của (C'')} \end{array}$$



ME là tt của (C'') $\Rightarrow ME^2 = MI \cdot MA$

$$\Rightarrow \text{MI. MA} = \text{MD. MK} \Rightarrow \dots \Rightarrow \bullet \text{ AIDR}$$

Ta lại có: $\angle AIH = 1v$ (góc nt chắn nửa (C')) $\Rightarrow HI \perp AM$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ I; H; K thẳng hàng $\Rightarrow KH \perp AM$ (Đpcm)

Câu V: GPT $\frac{x}{1+y+zx} + \frac{y}{1+z+xy} + \frac{z}{1+x+yz} = \frac{3}{x+y+z}$ (1)

* **TH1:** Nếu $x = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\frac{y}{1+z} + \frac{z}{1+zy} &= \frac{3}{y+z} \\ \Rightarrow \left(\frac{y}{1+z} - \frac{1}{y+z}\right) + \left(\frac{z}{1+zy} - \frac{1}{y+z}\right) &= \frac{1}{y+z} \\ \Rightarrow \frac{(y-1)(y+1+z)}{(1+z)(y+z)} + \frac{z^2-1}{(1+yz)(y+z)} &= \frac{1}{y+z}\end{aligned}$$

Ta có VT < 0 mà VP³ = 0 nên trong trường hợp này không có nghiệm

* **TH2:** Nếu x khác 0 mà $0 \neq x \neq y \neq z \neq 1 \Rightarrow (z-1)(1-x) \leq 0 \Leftrightarrow xz - x - z + 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow 1 + zx \geq x + z$ Dấu “=” xảy ra khi: x=1 hoặc z=1.

+ Ta lại có: $1 + zx \geq x + z \Leftrightarrow 1 + y + zx \geq x + y + z$

$$\Rightarrow \frac{x}{1+y+zx} \leq \frac{x}{x+y+z}$$

+ Tương tự: $\frac{y}{1+z+xy} \leq \frac{y}{x+y+z}$

$$\frac{z}{1+x+yz} \leq \frac{z}{x+y+z}$$

$$\Rightarrow VT = \frac{x}{1+y+zx} + \frac{y}{1+z+xy} + \frac{z}{1+x+yz} \leq \frac{x+y+z}{x+y+z} = 1. \quad (2)$$

+ Mặt khác, vì: $0 \leq x, y, z \leq 1 \Rightarrow x + y + z \leq 3$. Dấu “=” xảy ra khi: x = y = z = 1

$$\Rightarrow VP = \frac{3}{x+y+z} \geq \frac{3}{3} = 1 \quad \text{Dấu “=” xảy ra khi: } x = y = z = 1 \quad (3)$$

+ Từ (2) và (3) $\Rightarrow VT = VP$ chỉ đúng khi: VT = VP = 1. Khi đó x = y = z = 1.

* Vậy phương trình có nghiệm duy nhất: (x; y; z) = (1; 1; 1).