

ĐS6. CHUYÊN ĐỀ 7 - SỐ NGUYÊN.

CHỦ ĐỀ 1: SỐ NGUYÊN VÀ TẬP HỢP SỐ NGUYÊN.

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. TẬP HỢP SỐ NGUYÊN.

- Các số tự nhiên (khác 0) $1; 2; 3; 4; \dots$ còn được gọi là các số nguyên dương.
- Các số $-1; -2; -3; \dots$ gọi là các số nguyên âm.
- Tập hợp $\mathbb{Z}$ gồm các số nguyên âm, số 0, số nguyên dương gọi là tập hợp số nguyên.

$$\mathbb{Z} = \{ \dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots \}$$

- Tập hợp các số nguyên được biểu diễn trên trục số.
- Cho $a, b \in \mathbb{Z}$. Trên trục số, các điểm $a; b$ cách đều điểm 0 thì a được gọi là số đối của b và ngược lại b cũng là số đối của a , số đối của 0 là 0.

2. THỨ TỰ TRONG $\mathbb{Z}$

- Trên trục số nằm ngang, chiều dương của trục số hướng từ trái qua phải, chiều ngược lại là chiều âm.
- Điểm biểu diễn số nguyên a gọi là điểm a .
- Cho $a, b \in \mathbb{Z}$ nếu điểm a nằm trước điểm b thì số nguyên a nhỏ hơn số nguyên b (ký hiệu là $a < b$).
- Mọi số nguyên âm đều nhỏ hơn 0, do đó nhỏ hơn mọi số nguyên dương.
- Nếu a, b là hai số nguyên dương và $a > b$ thì $-a < -b$.

* Nâng cao: Với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ nếu $a < b$; $b < c$ thì $a < c$ (tính chất bắc cầu).

3. PHÉP CỘNG VÀ PHÉP TRỪ SỐ NGUYÊN.

- Muốn cộng hai số nguyên âm, ta cộng phần số tự nhiên của chúng với nhau rồi đặt dấu "-" trước kết quả.
- Hai số nguyên đối nhau thì có tổng bằng 0.
- Muốn cộng hai số nguyên khác dấu (không đối nhau), ta tìm hiệu hai phần số tự nhiên của chúng (số lớn trừ số nhỏ) rồi đặt trước hiệu tìm được dấu của số có phần số tự nhiên lớn hơn.
- Phép cộng số nguyên có các tính chất:

* Giao hoán: $a + b = b + a$

* Kết hợp: $(a + b) + c = a + (b + c)$

* Cộng với 0: $a + 0 = 0 + a = a$

- Muốn trừ số nguyên a cho số nguyên b , ta cộng a với số đối của b .

$$a - b = a + (-b)$$

- Quy tắc dấu ngoặc:

* Khi bỏ dấu ngoặc có dấu "+" đằng trước, ta *giữ nguyên dấu của các số hạng* trong ngoặc.

* Khi bỏ dấu ngoặc có dấu "-" đằng trước, ta phải *đổi dấu tất cả các số hạng* trong dấu ngoặc: dấu "+" đổi thành dấu "-" và dấu "-" đổi thành dấu "+"

4. PHÉP NHÂN SỐ NGUYÊN.

- Nhân hai số nguyên khác dấu: Nếu $m, n \in \mathbb{N}^*$ thì $m.(-n) = (-n).m = -(m.n)$

- Nhân hai số nguyên cùng dấu:

+) Nhân hai số nguyên dương chính là nhân hai số tự nhiên khác 0.

+) Nhân hai số nguyên âm: Nếu $m, n \in \mathbb{N}^*$ thì $(-m).(-n) = (-n).(-m) = m.n$

- Phép nhân số nguyên có các tính chất:

* Giao hoán: $a.b = b.a$

* Kết hợp: $a.(b.c) = (a.b).c$

* Nhân với 1: $a.1 = 1.a = a$

* Phân phối của phép nhân đối với phép cộng: $a.(b+c) = a.b + a.c$

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI.

Dạng 1: Viết tập hợp.

Dạng 2: Thực hiện phép tính

Dạng 3: Tìm x

Dạng 1: Viết tập hợp.

I. Phương pháp giải

- Dựa vào các kiến thức về tập hợp, tập hợp số nguyên, thứ tự trong tập $\mathbb{Z}$ để làm bài.

II. Bài toán

Bài 1: Viết tập hợp 3 số nguyên liên tiếp trong đó có số 0.

Lời giải:

- Nếu số 0 đứng vị trí thứ nhất ta có tập hợp $\{0; 1; 2\}$

- Nếu số 0 đứng vị trí thứ hai ta có tập hợp $\{-1; 0; 1\}$

- Nếu số 0 đứng vị trí thứ ba ta có tập hợp $\{-2; -1; 0\}$

Bài 2: Viết các tập hợp sau bằng hai cách:

- a) Tập hợp A các số tự nhiên nhỏ hơn 5.
- b) Tập hợp B các số nguyên nhỏ hơn 5.
- c) Tập hợp C các số nguyên lớn hơn -5.

Lời giải:

a) Cách 1: $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$

Cách 2: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$

b) Cách 1: $B = \{\dots; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$

Cách 2: $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 5\}$

c) Cách 1: $C = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$

Cách 2: $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > -5\}$

Bài 3: Viết các tập hợp sau bằng hai cách:

- a) Tập hợp A các số nguyên lớn hơn -100 và nhỏ hơn 100.
- b) Tập hợp B các số nguyên có 1 chữ số.

Lời giải:

a) Cách 1: $A = \{-99; -98; -97; \dots; 97; 98; 99\}$

Cách 2: $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -100 < x < 100\}$

b) Cách 1: $B = \{-9; -8; -7; \dots; 7; 8; 9\}$

Cách 2: $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -10 < x < 10\}$

Bài 4: Các phần tử của các tập hợp sau được viết theo quy luật nào? Viết tập hợp bằng cách chỉ ra tính chất đặc trưng của các phần tử của tập hợp.

a) $A = \{1; 3; 5; 7; 9; \dots\}$

b) $B = \{-2; -7; -12; -17; \dots\}$

Lời giải:

- a) Tập hợp A gồm các số tự nhiên khác 0; các phần tử lập thành dãy số: $1; 3; 5; 7; 9; \dots$

Đây là dãy số cách đều, số hạng đầu là 1, khoảng cách là 2. Các số hạng của dãy là các số tự nhiên lẻ (chia 2 dư 1) nên có dạng $2n+1$ với $n \in \mathbb{N}$

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2n+1; n \in \mathbb{N}\}$$

b) Tập hợp B gồm các số nguyên âm; các phần tử lập thành dãy số: $-2; -7; -12; -17; \dots$ (1)

Xét dãy số $2; 7; 12; 17; \dots$ (2)

Dãy (2) là dãy số cách đều, số hạng đầu là 2, khoảng cách là 5. Các số này đều chia 5 dư 2 nên có dạng $5n+2$ với $n \in \mathbb{N}$.

Vậy các số hạng của dãy (1) có dạng là $-(5n+2)$ với $n \in \mathbb{N}$.

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = -(5n+2); n \in \mathbb{N}\}$$

Bài 5: Các phần tử của các tập hợp sau được viết theo quy luật nào? Viết tập hợp bằng cách chỉ ra tính chất đặc trưng của các phần tử của tập hợp.

a) $A = \{1; -5; 9; -13; \dots\}$

b) $B = \{-1; 4; -7; 10; \dots\}$

Lời giải:

a) Các phần tử của tập A lập thành dãy số $1; -5; 9; -13; \dots$ (1)

Trong dãy (1), các số đứng ở vị trí lẻ mang dấu $(+)$, các số đứng ở vị trí chẵn mang dấu $(-)$

Xét dãy số (gồm các số hạng là phần số tự nhiên của các số trên) $1; 5; 9; 13; \dots$ (2)

Dãy (2) là dãy số cách đều, số hạng đầu là 1; khoảng cách là 4. Các số này đều chia 4 dư 1 nên có dạng $4n+1$ với $n \in \mathbb{N}$

Từ quy luật về dấu cho các số hạng của dãy (1), ta có dạng tổng quát cho các số hạng của dãy (1) là $(-1)^n \cdot (4n+1)$ với $n \in \mathbb{N}$

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = (-1)^n \cdot (4n+1); n \in \mathbb{N}\}$$

b) Các phần tử của tập B lập thành dãy số $-1; 4; -7; 10; \dots$ (3)

Trong dãy (3), các số đứng ở vị trí lẻ mang dấu $(-)$, các số đứng ở vị trí chẵn mang dấu $(+)$

Xét dãy số (gồm các số hạng là phần số tự nhiên của các số trên) $1; 4; 7; 10; \dots$ (4)

Dãy ⁽⁴⁾ là dãy số cách đều, số hạng đầu là 1; khoảng cách là 3. Các số này đều chia 3 dư 1 nên có dạng $3n+1$ với $n \in \mathbb{N}$

Từ quy luật về dấu cho các số hạng của dãy ⁽³⁾, ta có dạng tổng quát cho các số hạng của dãy ⁽³⁾ là $(-1)^{n+1} \cdot (3n+1)$ với $n \in \mathbb{N}$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = (-1)^{n+1} \cdot (3n+1); n \in \mathbb{N}\}$$

Dạng 2: Thực hiện phép tính

I. Phương pháp giải

- Áp dụng các tính chất của phép cộng, phép nhân số nguyên; quy tắc dấu ngoặc.
- Áp dụng các công thức, cách tính dãy số có quy luật.

II. Bài toán

Bài 1: Thực hiện phép tính:

- $-(-319) + (-127) - 312 + 20$
- $1152 - (374 + 1152) + (-65 + 374)$
- $(-42) \cdot 56 + 28 \cdot (-316) \cdot (-1)^{2n}$ với $n \in \mathbb{N}^*$
- $5^3 \cdot 5678910 - 5^3 \cdot 5678909$

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & -(-319) + (-127) - 312 + 20 \\ & = 319 - 127 - 312 + 20 \\ & = 319 - 312 + 20 - 127 \\ & = 27 - 127 \\ & = -100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & 1152 - (374 + 1152) + (-65 + 374) \\ & = 1152 - 374 - 1152 - 65 + 374 \\ & = 1152 - 1152 + 374 - 374 - 65 \\ & = (1152 - 1152) + (374 - 374) - 65 \\ & = -65 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & (-42) \cdot 56 + 28 \cdot (-316) \cdot (-1)^{2n} \text{ với } n \in \mathbb{N}^* \\ & = (-42) \cdot 56 + 28 \cdot (-316) \cdot 1 \\ & = (-42) \cdot 56 + 28 \cdot (-316) \\ & = (-42) \cdot 2 \cdot 28 + 28 \cdot (-316) \\ & = (-84) \cdot 28 + 28 \cdot (-316) \\ & = 28 \cdot [(-84) + (-316)] \\ & = 28 \cdot (-400) \\ & = -11200 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad & 5^3 \cdot 5678910 - 5^3 \cdot 5678909 \\ & = 5^3 \cdot (5678910 - 5678909) \\ & = 5^3 \cdot 1 \end{aligned}$$

Bài 2: Tính giá trị các biểu thức sau:

- a) $2021.(2020 + 2022) - 2020.(2021 + 2022)$
 b) $2021.(2022 - 179) - 2022.(2021 - 179)$
 c) $2.31.12 + 4.6.42 + 8.27.3$
 d) $- 2021.74 - 2021.27 + 2021$

Lời giải:

- | | |
|--|---|
| <p>a) $2021.(2020 + 2022) - 2020.(2021 + 2022)$
 $= 2021.2020 + 2021.2022 - 2020.2021 - 2020.2022$
 $= 2021.2020 - 2020.2021 + 2021.2022 - 2020.2022$
 $= 2022.(2021 - 2020)$
 $= 2022$</p> | <p>c) $2.31.12 + 4.6.42 + 8.27.3$
 $= 2.12.31 + 4.6.42 + 8.3.27$
 $= 24.31 + 24.42 + 24.27$
 $= 24.(31 + 42 + 27)$
 $= 24.100 = 2400$</p> |
| <p>b) $2021.(2022 - 179) - 2022.(2021 - 179)$
 $= 2021.2022 - 2021.179 - 2022.2021 + 2022.179$
 $= 2021.2022 - 2022.2021 + 2022.179 - 2021.179$
 $= 179.(2022 - 2021)$
 $= 179$</p> | <p>d) $- 2021.74 - 2021.27 + 2021$
 $= - (2021.74 + 2021.27 - 2021)$
 $= - (2021.74 + 2021.27 - 2021.1)$
 $= - 2021(74 + 27 - 1)$
 $= - 2021.100 = - 202100$</p> |

Bài 3: Thực hiện phép tính:

- a) $1.2.3...9 - 1.2.3...8 - 1.2.3...7.8^2$
 b) $(- 25).68 + (- 34).(- 250)$
 c) $x - 6 + x - 6 + x - 6 + x - 6 + x - 6$ với $x = - 7$
 d) $20212021.(- 2022) - 20222022.(- 2021)$

Lời giải:

- | | |
|--|--|
| <p>a) $1.2.3...9 - 1.2.3...8 - 1.2.3...8^2$
 $= 1.2.3...8.9 - 1.2.3...8.1 - 1.2.3...8.8$
 $= 1.2.3...8.(9 - 1 - 8)$</p> | <p>c) $x - 6 + x - 6 + x - 6 + x - 6 + x - 6$
 $= (x - 6) + (x - 6) + (x - 6) + (x - 6) + (x - 6)$</p> |
|--|--|

$$=0$$

$$=5.(x - 6)$$

$$\begin{aligned} & (-25).68 + (-34).(-250) \\ \text{b)} \quad & = (-25).2.34 + (-34).(-250) \\ & = (-50).34 + 34.250 \\ & = 34. [(-50) + 250] \\ & = 34.200 = 6800 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 5.(-7 - 6) = -65 \\ \text{Thay } x = -7 \text{ vào ta có} \\ & 2021.2021.(-2022) - 2022.2022.(-2021) \\ \text{d)} \quad & = 2021.10001.(-2022) - 2022.10001.(-2021) \\ & = -2021.10001.2022 + 2022.10001.2021 \\ & = 0 \end{aligned}$$

Bài 4: Thực hiện phép tính:

$$\begin{aligned} & A = (1 + 2 + 3 + \dots + 2021).(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2).(2020.111 - 3.5.37.404) \\ \text{a)} \quad & B = (-1) + (-5) + (-9) + \dots + (-101) \\ \text{b)} \quad & C = (-1) + 3 + (-5) + 7 + \dots + (-2021) + 2023 \\ \text{c)} \quad & D = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + 99 - 100 \\ \text{d)} \quad & \end{aligned}$$

Lời giải:

$$\begin{aligned} & A = (1 + 2 + 3 + \dots + 2021).(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2).(2020.111 - 3.5.37.404) \\ \text{a)} \quad & = (1 + 2 + 3 + \dots + 2021).(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2).[2020.111 - (3.37).(5.404)] \\ & = (1 + 2 + 3 + \dots + 2021).(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2).[2020.111 - 111.2020] \\ & = (1 + 2 + 3 + \dots + 2021).(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2).0 \\ & = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & B = (-1) + (-5) + (-9) + \dots + (-101) \\ \text{b)} \quad & = -(1 + 5 + 9 + \dots + 101) \end{aligned}$$

Xét tổng $1 + 5 + 9 + \dots + 101$

Số số hạng của tổng là $(101 - 1) : 4 + 1 = 26$

$$(101 + 1).26 : 2 = 1326$$

Tổng là:

$$\text{Vậy } B = -1326$$

$$\begin{aligned} & C = (-1) + 3 + (-5) + 7 + \dots + (-2021) + 2023 \\ \text{c)} \quad & \end{aligned}$$

Số số hạng của C bằng số số hạng của dãy số $1; 3; 5; 7; \dots; 2023$ (*)

Số số hạng của dãy (*) là $(2023 - 1) : 2 + 1 = 1012$

Tổng C có 1012 số hạng, khi nhóm 2 số hạng vào một nhóm ta được 506 nhóm.

$$C = [(-1) + 3] + [(-5) + 7] + \dots + [(-2021) + 2023]$$

Ta có

$$= 2 + 2 + \dots + 2$$

$$= 2.506$$

$$= 1012$$

d) $D = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + 99 - 100$

Số số hạng của D bằng số số hạng của dãy số $1; 2; 3; 4; \dots; 100$ (**)

Số số hạng của dãy (*) là $(100 - 1) : 1 + 1 = 100$

Tổng D có 100 số hạng, khi nhóm 2 số hạng vào một nhóm ta được 50 nhóm.

$$D = (1 - 2) + (3 - 4) + \dots + (99 - 100)$$

Ta có

$$= (-1) + (-1) + \dots + (-1)$$

$$= -1.50$$

$$= -50$$

Bài 5: Tính:

a) $A = 1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + \dots - 2019 - 2020 + 2021 + 2022$

b) $B = 100 + 98 + 96 + 94 + \dots + 2 - 99 - 97 - 95 - 93 - \dots - 1$

Lời giải:

a) $A = 1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + \dots - 2019 - 2020 + 2021 + 2022$

$$= 1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + \dots + 2018 - 2019 - 2020 + 2021 + 2022$$

$$= 1 + (2 - 3 - 4 + 5) + (6 - 7 - 8 + 9) + \dots + (2018 - 2019 - 2020 + 2021) + 2022$$

Dãy các số tự nhiên liên tiếp $2; 3; 4; 5; \dots; 2021$ có $2021 - 2 + 1 = 2020$ số hạng, khi nhóm 4 số vào một nhóm ta được 505 nhóm.

$$A = 1 + (2 - 3 - 4 + 5) + (6 - 7 - 8 + 9) + \dots + (2018 - 2019 - 2020 + 2021) + 2022$$

Ta có

$$= 1 + 0 + 0 + \dots + 0 + 2022$$

$$= 1 + 0.505 + 2022$$

$$= 2023$$

b) $B = 100 + 98 + 96 + 94 + \dots + 2 - 99 - 97 - 95 - 93 - \dots - 1$

$$= 100 - 99 + 98 - 97 + 96 - 95 + \dots + 2 - 1$$

$$=(100 - 99)+(98 - 97)+(96 - 95)+...+(2 - 1)$$

Từ 1 đến 100 có 100 số, khi nhóm 2 số vào một nhóm ta được 50 nhóm.

Vậy $B = 1 + 1 + 1 + ... + 1 = 1.50 = 50$

Bài 6: Tính

a) $A = 2 + (-4) + 6 + (-8) + ... + 2018 + (-2020) + 2022$

b) $B = 2022 + 2020 + 2018 + 2016 + ... + 2 - 2019 - 2017 - 2015 - ... - 1$

Lời giải:

a) $A = 2 + (-4) + 6 + (-8) + ... + 2018 + (-2020) + 2022$

Số số hạng của A bằng số số hạng của dãy 2; 4; 6; ...; 2022

$$\Rightarrow A \text{ có } (2022 - 2) : 2 + 1 = 1011$$

số hạng. Kể từ số hạng đầu tiên, khi nhóm hai số vào một nhóm thì ta được 505 nhóm và dư số 2022 đứng một mình.

$$A = 2 + (-4) + 6 + (-8) + ... + 2018 + (-2020) + 2022$$

Ta có

$$A = [2 + (-4)] + [6 + (-8)] + ... + [2018 + (-2020)] + 2022$$

$$= (-2) + (-2) + ... + (-2) + 2022$$

$$= (-2).505 + 2022$$

$$= 1012$$

b) $B = 2022 + 2020 + 2018 + 2016 + ... + 2 - 2019 - 2017 - 2015 - ... - 1$

$$= 2022 + (2020 - 2019) + (2018 - 2017) + (2016 - 2015) + ... + (2 - 1)$$

Từ 1 đến 2020 có 2020 số, khi nhóm 2 số vào một nhóm ta được 1010 nhóm.

Vậy $B = 2022 + 1 + 1 + 1 + ... + 1$

$$= 2022 + 1.1010 = 3032$$

Bài 7: Thực hiện phép tính:

a) $A = 1 - 2 + 2^2 - 2^3 + ... - 2^{99} + 2^{100}$

b) $B = 2^{2018} - 2^{2017} - 2^{2016} + 2^{2015} - 2^{2014} - 2^{2013} + ... + 2^2 - 2 - 1$

c) $C = 1 - 2 + 3 + 4 - 5 - 6 + 7 + 8 - 9 - ... + 2007 + 2008 - 2009 - 2010$

d) $D = 2^3 + 4^3 + 6^3 + ... + 18^3$ với $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 9^3 = 2025$

Lời giải:

a) $A = 1 - 2 + 2^2 - 2^3 + ... - 2^{99} + 2^{100}$

$$= (1 - 2) + (2^2 - 2^3) + ... + (2^{98} - 2^{99}) + 2^{100}$$

$$=(1-2)+2^2(1-2)+\dots+2^{98}(1-2)+2^{100}$$

$$=(-1)+2^2(-1)+\dots+2^{98}(-1)+2^{100}$$

$$=2^{100}-2^{98}-2^{96}-\dots-2^2-1$$

$$=2^{100}-(2^{98}+2^{96}+\dots+2^2+1)$$

Đặt $S=2^{98}+2^{96}+\dots+2^2+1$

Ta có $2^2 S=2^2 \cdot (2^{98}+2^{96}+\dots+2^2+1)=2^{100}+2^{98}+\dots+2^4+2^2$

$$2^2 S - S = (2^{100} + 2^{98} + \dots + 2^4 + 2^2) - (2^{98} + 2^{96} + \dots + 2^2 + 1)$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow 3S = 2^{100} - 1 \Rightarrow S = \frac{2^{100} - 1}{3}$$

$$A = 2^{100} - S = 2^{100} - \frac{2^{100} - 1}{3} = \frac{2^{101} + 1}{3}$$

Vậy

b) $B = 2^{2018} - 2^{2017} - 2^{2016} + 2^{2015} - 2^{2014} - 2^{2013} + \dots + 2^2 - 2 - 1$

$$= (2^{2018} - 2^{2017} - 2^{2016}) + (2^{2015} - 2^{2014} - 2^{2013}) + (2^{2012} - 2^{2011} - 2^{2010}) + \dots + (2^5 - 2^4 - 2^3) + (2^2 - 2 - 1)$$

$$= 2^{2016} (2^2 - 2 - 1) + 2^{2013} (2^2 - 2 - 1) + 2^{2010} (2^2 - 2 - 1) + \dots + 2^3 (2^2 - 2 - 1) + 1 (2^2 - 2 - 1)$$

$$= (2^2 - 2 - 1) \cdot (2^{2016} + 2^{2013} + 2^{2010} + \dots + 2^3 + 1)$$

$$= 2^{2016} + 2^{2013} + 2^{2010} + \dots + 2^3 + 1$$

Ta có $2^3 B = 2^3 \cdot (2^{2016} + 2^{2013} + 2^{2010} + \dots + 2^3 + 1) = 2^{2019} + 2^{2016} + 2^{2013} + \dots + 2^6 + 2^3$

$$\Rightarrow 2^3 B - B = (2^{2019} + 2^{2016} + 2^{2013} + \dots + 2^6 + 2^3) - (2^{2016} + 2^{2013} + 2^{2010} + \dots + 2^3 + 1)$$

$$\Rightarrow 7B = 2^{2019} - 1 \Rightarrow B = \frac{2^{2019} - 1}{7}$$

c) $C = 1 - 2 + 3 + 4 - 5 - 6 + 7 + 8 - 9 - \dots + 2007 + 2008 - 2009 - 2010$

$$= 1 - 2 + 3 + 4 - 5 - 6 + 7 + 8 - 9 - \dots - 2006 + 2007 + 2008 - 2009 - 2010$$

$$= 1 - (2 - 3 - 4 + 5) - (6 - 7 - 8 + 9) - \dots - (2006 - 2007 - 2008 + 2009) - 2010 \quad (*)$$

Từ 2 đến 2009 có $2009 - 2 + 1 = 2008$ số, khi nhóm 4 số vào một nhóm ta được 502 nhóm, mỗi nhóm ở (*) đều có tổng bằng 0.

Vậy ta có $C = 1 - 0 - 0 - \dots - 0 - 2010 = 1 - 0.502 \cdot 2010 = -2009$

d) $D = 2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + 18^3$

$$= (2.1)^3 + (2.2)^3 + (2.3)^3 + \dots + (2.9)^3$$

$$= 2^3 \cdot 1^3 + 2^3 \cdot 2^3 + 2^3 \cdot 3^3 + \dots + 2^3 \cdot 9^3$$

$$= 2^3 \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 9^3) \quad (**)$$

Vì $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 9^3 = 2025$ nên thay vào $(**)$ ta có $D = 2^3 \cdot 2025 = 16200$

Vậy $D = 16200$

Bài 8: Cho $A = 5^{50} - 5^{48} + 5^{46} - 5^{44} + \dots + 5^6 - 5^4 + 5^2 - 1$

- Thu gọn A .
- Tìm số tự nhiên n biết $26.A + 1 = 5^n$.
- Tìm số dư trong phép chia A cho 100.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad A &= 5^{50} - 5^{48} + 5^{46} - 5^{44} + \dots + 5^6 - 5^4 + 5^2 - 1 \\ &= (5^{50} - 5^{48}) + (5^{46} - 5^{44}) + \dots + (5^6 - 5^4) + (5^2 - 1) \\ &= 5^{48}(5^2 - 1) + 5^{44}(5^2 - 1) + \dots + 5^4(5^2 - 1) + 1(5^2 - 1) \\ &= 24 \cdot (5^{48} + 5^{44} + \dots + 5^4 + 1) \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } S = 5^{48} + 5^{44} + \dots + 5^4 + 1$$

$$\text{Ta có } 5^4 \cdot S = 5^4 \cdot (5^{48} + 5^{44} + \dots + 5^4 + 1) = 5^{52} + 5^{48} + \dots + 5^8 + 5^4$$

$$\Rightarrow 5^4 S - S = (5^{52} + 5^{48} + \dots + 5^8 + 5^4) - (5^{48} + 5^{44} + \dots + 5^4 + 1)$$

$$\Rightarrow 624 \cdot S = 5^{52} - 1 \Rightarrow S = \frac{5^{52} - 1}{624}$$

$$\text{Vậy } A = 24 \cdot \frac{5^{52} - 1}{624} = \frac{5^{52} - 1}{26}$$

$$\text{b)} \text{ Theo ý a ta có } A = \frac{5^{52} - 1}{26} \Rightarrow 26A = 5^{52} - 1 \Rightarrow 26A + 1 = 5^{52}$$

Mặt khác theo đề bài ta có $26.A + 1 = 5^n$ nên suy ra $5^n = 5^{52} \Rightarrow n = 52$

Vậy $n = 52$

$$\begin{aligned} \text{c)} \text{ Theo ý a ta có } A &= 24 \cdot (5^{48} + 5^{44} + \dots + 5^4 + 1) \\ &= 24 \cdot (5^{48} + 5^{44} + \dots + 5^4) + 24 \end{aligned}$$

$$= 6 \cdot 4 \cdot 5^2 (5^{46} + 5^{42} + \dots + 5^2) + 24$$

$$= 100 \cdot 6 \cdot (5^{46} + 5^{42} + \dots + 5^2) + 24$$

$\Rightarrow A$ có dạng $100k + 24$; $k \in \mathbb{N} \Rightarrow A$ chia 100 dư 24

Bài 9: Cho x là tổng của tất cả các số nguyên có 2 chữ số; y là số nguyên âm lớn nhất. Tính $S = 2020.x^{2021} - 2021.y^{2020}$

Lời giải:

Các số nguyên có 2 chữ số là: $-99; -98; -97; \dots; 97; 98; 99$

Vì x là tổng của tất cả các số nguyên có 2 chữ số nên $x = (-99) + (-98) + (-97) + \dots + 97 + 98 + 99$
 $= [(-99) + 99] + [(-98) + 98] + [(-97) + 97] + \dots + [(-1) + 1] + 0 = 0$

Vì y là số nguyên âm lớn nhất nên $y = -1$.

Thay $x = 0$, $y = -1$ vào S ta được $S = 2020.0^{2021} - 2021.(-1)^{2020} = 0 - 2021.1 = -2021$

Vậy $S = -2021$

Bài 10: Tính giá trị của $M = a_1 + a_2 + a_{2021}$ biết $a_1; a_2; a_3; \dots; a_{2021} \in \mathbb{Z}$ và thỏa mãn $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2021} = 0$ và $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = \dots = a_{2019} + a_{2020} = a_{2021} + a_1 = 2$

Lời giải:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2021} = 0$$

Ta có

$$(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \dots + (a_{2019} + a_{2020}) + a_{2021} = 0 \quad (*)$$

Với 2020 số $a_1; a_2; a_3; a_4; \dots; a_{2020}$ khi nhóm 2 số vào một nhóm ta được 1010 nhóm.

Thay $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = \dots = a_{2019} + a_{2020} = 2$ vào (*) ta được

$$2 + 2 + \dots + 2 + a_{2021} = 0$$

$$2.1010 + a_{2021} = 0$$

$$2020 + a_{2021} = 0$$

$$a_{2021} = -2020$$

Ta có $a_1 + a_2 = 2$; $a_{2021} = -2020$ thay vào M ta được:

$$M = a_1 + a_2 + a_{2021} = 2 + (-2020) = -2018$$

Vậy $M = -2018$

Dạng 3: Tìm x

I. Phương pháp giải

- Áp dụng các kiến thức về số nguyên, thứ tự thực hiện phép tính, lũy thừa.
- Áp dụng các công thức, cách tính dãy số có quy luật.

II. Bài toán

Bài 1: Tìm $x \in \mathbb{Z}$ biết:

a) $(1 - 2 + 3 - 4 + \dots - 98 + 99)x = -100$

b) $2016 : [25 - (3x + 2)] = 3^2 \cdot 7$

c) $(x + 2)(x - 3) = 0$

d) $(x - 2)^2 + 5(x - 2) = 0$

Lời giải:

a) $(1 - 2 + 3 - 4 + \dots - 98 + 99)x = -100$

$\Rightarrow [(1 - 2) + (3 - 4) + \dots + (97 - 98) + 99]x = -100$

$\Rightarrow [(-1) + (-1) + \dots + (-1) + 99]x = -100$

$\Rightarrow [(-1) \cdot 49 + 99]x = -100$

$\Rightarrow 50x = -100$

$\Rightarrow x = -2$

Vậy $x = -2$

b) $2016 : [25 - (3x + 2)] = 3^2 \cdot 7$

$\Rightarrow 2016 : [25 - (3x + 2)] = 63$

$\Rightarrow 25 - (3x + 2) = 2016 : 63$

$\Rightarrow 25 - (3x + 2) = 32$

$\Rightarrow 3x + 2 = 25 - 32$

$\Rightarrow 3x + 2 = -7$

$\Rightarrow 3x = -9$

$\Rightarrow x = -3$

Vậy $x = -3$

c) $(x + 2)(x - 3) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ x-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=3 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x \in \{-2; 3\}$$

d) $(x-2)^2 + 5(x-2) = 0$

$$\Rightarrow (x-2) \cdot [(x-2) + 5] = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x+3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ x+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-3 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x \in \{2; -3\}$$

Bài 2: Tìm $x \in \mathbb{Z}$ biết:

a) $(x+5) + (x+10) + (x+15) + \dots + (x+60) = 450$

b) $(6x-11)^3 = (-3)^2 \cdot 15 + 208$

c) $(x+1)^2 - 5x - 5 = 0$

Lời giải:

a) $(x+5) + (x+10) + (x+15) + \dots + (x+60) = 450$

$$\Rightarrow (x+x+x+\dots+x) + (5+10+15+\dots+60) = 450 \quad (*)$$

$$S = 5 + 10 + 15 + \dots + 60$$

Tính

$$(60 - 5) : 5 + 1 = 12$$

Số số hạng của S là

$$S = (60 + 5) \cdot 12 : 2 = 390$$

Tổng

Theo đề bài, mỗi một x cộng với một số cụ thể nên có 12 số cụ thể thì cũng có 12 số x

Thay các kết quả trên vào (*) ta được:

$$12x + 390 = 450$$

$$\Rightarrow 12x = 450 - 390$$

$$\Rightarrow 12x = 60$$

$$\Rightarrow x = 5$$

$$\text{Vậy } x = 5$$

b) $(6x-11)^3 = (-3)^2 \cdot 15 + 208$

$$\Rightarrow (6x - 11)^3 = 343$$

$$\Rightarrow (6x - 11)^3 = 7^3$$

$$\Rightarrow 6x - 11 = 7$$

$$\Rightarrow x = 3$$

Vậy $x = 3$

c) $(x+1)^2 - 5x - 5 = 0$

$$\Rightarrow (x+1)^2 - (5x+5) = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 - 5(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow (x+1) \cdot [(x+1) - 5] = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x-4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=4 \end{cases}$$

Vậy $x \in \{-1; 4\}$

Bài 3: Tìm $x \in \mathbb{Z}$ biết:

a) $(2x-15)^5 = (2x-15)^3$

b) $x + (x+1) + (x+2) + \dots + 2020 + 2021 = 2021$

Lời giải:

a) $(2x-15)^5 = (2x-15)^3$

$$\Rightarrow (2x-15)^5 - (2x-15)^3 = 0$$

$$\Rightarrow (2x-15)^3 \cdot (2x-15)^2 - (2x-15)^3 \cdot 1 = 0$$

$$\Rightarrow (2x-15)^3 \cdot [(2x-15)^2 - 1] = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2x-15)^3 = 0 \\ (2x-15)^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-15=0 \\ (2x-15)^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-15=0 \\ 2x-15=1 \\ 2x-15=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=7,5 \\ x=8 \\ x=7 \end{cases}$$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x=7$ hoặc $x=8$

Vậy $x \in \{7; 8\}$

b) $x + (x+1) + (x+2) + \dots + 2020 + 2021 = 2021$

Cách 1:

$$x + (x+1) + (x+2) + \dots + 2020 + 2021 = 2021$$

$$\Rightarrow x + (x+1) + (x+2) + \dots + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + \dots + 2020 = 0 \quad (*)$$

$$\Rightarrow (x+2020) + [(x+1)+2019] + [(x+2)+2018] + \dots + [(-2)+2] + [(-1)+1] + 0 = 0$$

$$\Rightarrow (x+2020) + (x+2020) + (x+2020) + \dots + [(-2)+2] + [(-1)+1] + 0 = 0$$

Ta có vế trái của (*) là tổng các số nguyên liên tiếp viết theo thứ tự tăng dần, khi nhóm như trên, trong từng ngoặc là các cặp số đối nhau $\Rightarrow x+2020=0 \Rightarrow x=-2020$

Vậy $x = -2020$

Cách 2:

$$x + (x+1) + (x+2) + \dots + 2020 + 2021 = 2021$$

$$\Rightarrow x + (x+1) + (x+2) + \dots + 2020 = 0 \quad (1)$$

Vì $x + (x+1) + (x+2) + \dots + 2020$ là tổng của các số nguyên liên tiếp nên áp dụng công thức tính tổng của dãy số cách đều ta có tổng này bằng $\frac{(2020+x).n}{2}$ (2) trong đó n là số các số hạng của tổng.

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{(2020+x).n}{2} = 0$.

Lại có $n \neq 0$ suy ra $2020+x=0$, do đó $x = -2020$

Vậy $x = -2020$

Bài 4: Tìm $x \in \mathbb{Z}$ biết:

$$2^x \cdot 2^{x+1} \cdot 2^{x+2} = 1000 \cdot 0 : 5^{18}$$

18 chữ số

a)

$$(x-3) + (x-2) + (x-1) + \dots + 10 + 11 = 11$$

b)

Lời giải:

$$2^x \cdot 2^{x+1} \cdot 2^{x+2} = 1000 \cdot 0 : 5^{18}$$

18 chữ số

a)

$$\Rightarrow 2^{x+(x+1)+(x+2)} = 10^{18} : 5^{18}$$

$$\Rightarrow 2^{3x+3} = 2^{18}$$

$$\Rightarrow 3x+3=18$$

$$\Rightarrow 3x=15$$

$$\Rightarrow x=5$$

$$x=5$$

Vậy

b) $(x-3)+(x-2)+(x-1)+\dots+10+11=11$

$$\Rightarrow (x-3)+(x-2)+(x-1)+\dots+(-2)+(-1)+0+1+2+\dots+10=0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow [(x-3)+10] + [(x-2)+9] + [(x-1)+8] + \dots + [(-2)+2] + [(-1)+1] + 0 = 0$$

$$\Rightarrow (x+7)+(x+7)+(x+7)+\dots+[-2+2]+[-1+1]+0=0$$

(1)
Ta có vế trái của (1) là tổng các số nguyên liên tiếp viết theo thứ tự tăng dần, khi nhóm như trên, trong từng ngoặc là các cặp số đối nhau $\Rightarrow x+7=0 \Rightarrow x=-7$

Vậy $x=-7$

Bài 5: Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn $2x+3y=14 \quad (1)$

Lời giải: Vì x, y là các số nguyên dương nên $2x, 3y$ cũng là các số nguyên dương

Mặt khác $2x+3y=14$ nên $0 < 2x < 14, 0 < 3y < 14$

Vì $y \in \mathbb{Z}, 0 < 3y < 14$ nên $y \in \{1; 2; 3; 4\} \quad (*)$

Lại có $2x+3y=14$ mà $2x$ và 14 chẵn nên $3y$ chẵn $\Rightarrow y$ chẵn. Kết hợp với (*) suy ra $y \in \{2; 4\}$

- Nếu $y=2$ thay vào (1) ta có $2x+6=14 \Rightarrow x=4$

- Nếu $y=4$ thay vào (1) ta có $2x+12=14 \Rightarrow x=1$

Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn đề bài là $(4; 2) (1; 4)$;

Bài 6: Tìm các số nguyên x, y, z biết $x+y=2, y+z=3, z+x=-5$

Lời giải:

Ta có $x+y=2, y+z=3, z+x=-5 \Rightarrow (x+y)+(y+z)+(z+x)=2+3+(-5) \Rightarrow 2x+2y+2z=0$
 $\Rightarrow x+y+z=0$

+) Vì $x+y+z=0$ và $x+y=2$ nên suy ra $z=0-(x+y)=0-2=-2$

+) Vì $x+y+z=0$ và $y+z=3$ nên suy ra $x=0-(y+z)=0-3=-3$

+) Vì $x+y+z=0$ và $z+x=-5$ nên suy ra $y=0-(z+x)=0-(-5)=5$

Vậy $x=-3$, $y=5$, $z=-2$

Bài 7: Tìm các số nguyên x , y , z biết $x-y=2011$, $y-z=-2012$, $z+x=2013$

Lời giải:

Ta có $x-y=2011$, $y-z=-2012$, $z+x=2013 \Rightarrow (x-y)+(y-z)+(z+x)=2011+(-2012)+2013$
 $\Rightarrow x-y+y-z+z+x=2012 \Rightarrow 2x=2012 \Rightarrow x=1006$

+) Vì $x-y=2011$, $x=1006$ nên suy ra $y=x-2011=1006-2011=-1005$

+) Vì $y-z=-2012$, $y=-1005$ nên suy ra $z=y-(-2012)=-1005-(-2012)=1007$

Vậy $x=1006$, $y=-1005$, $z=1007$

Bài 8: Tìm các số nguyên x , y thỏa mãn $(x+3)^{2020}+(y-2)^{2020}=0$

Lời giải:

Ta có $(x+3)^{2020} \geq 0$, $(y-2)^{2020} \geq 0$ với mọi $x, y \in \mathbb{Z}$

Lại có $(x+3)^{2020}+(y-2)^{2020}=0$ nên suy ra $\begin{cases} (x+3)^{2020}=0 \\ (y-2)^{2020}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3=0 \\ y-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=2 \end{cases}$

Vậy $x=-3$, $y=2$

Bài 9: Cho 10 ô liên tiếp sau:

	-1					-2			
--	----	--	--	--	--	----	--	--	--

Hãy điền số vào các ô trống để tổng 3 số ở các ô liên tiếp bất kỳ đều bằng 6.

Lời giải:

Gọi 4 số ở 4 ô liên tiếp bất kỳ là x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4 .

Vì tổng 3 số ở các ô liên tiếp bằng nhau nên ta có $x_1+x_2+x_3=x_2+x_3+x_4 \Rightarrow x_1=x_4$. Như vậy các số cách nhau 2 ô thì bằng nhau, vậy ta điền được như sau:

-2	-1		-2	-1		-2	-1		-2
----	----	--	----	----	--	----	----	--	----

Vì tổng 3 số ở các ô liên tiếp bất kỳ đều bằng 6 nên suy ra số ở các ô còn lại là 9.

-2	-1	9	-2	-1	9	-2	-1	9	-2
----	----	---	----	----	---	----	----	---	----

Bài 10: Cho bảng vuông 3×3 ô. Có thể điền được hay không chín số nguyên vào chín ô của bảng sao cho tổng các số ở ba dòng lần lượt bằng 5; -3; 2 và tổng các số ở ba cột lần lượt bằng -1; 2; 2?

Lời giải:

Không thể điền được như vậy, vì không có 9 số nào mà cộng theo các dòng được $5 + (-3) + 2 = 4$, cộng theo các cột được $(-1) + 2 + 2 = 3$.

PHẦN III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG.

Bài 1: Tính:

$$S = 1 + 2 + 3 - 4 - 5 + 6 + 7 + 8 - 9 - 10 + 11 + 12 + 13 - 14 - 15 + \dots + 2011 + 2012 + 2013 - 2014 - 2015$$

Lời giải:

$$S = 1 + 2 + 3 - 4 - 5 + 6 + 7 + 8 - 9 - 10 + 11 + 12 + 13 - 14 - 15 + \dots + 2011 + 2012 + 2013 - 2014 - 2015$$

$$= 1 + 2 + [(3 - 4 - 5 + 6 + 7) + (8 - 9 - 10 + 11 + 12) + (13 - 14 - 15 + 16 + 17) + \dots + (2008 - 2009 - 2010 + 2011 + 2012)] + 2013 - 2014 - 2015$$

$$= 1 + 2 + (7 + 12 + 17 + \dots + 2012) + 2013 - 2014 - 2015$$

$$= 1 + 2 + 2013 - 2014 - 2015 + (7 + 12 + 17 + \dots + 2012)$$

$$= -2013 + (7 + 12 + 17 + \dots + 2012)$$

Đặt $T = 7 + 12 + 17 + \dots + 2012$

Số các số hạng của T là: $(2012 - 7) : 5 + 1 = 402$

Tổng là: $T = (2012 + 7) \cdot 402 : 2 = 405819$

Vậy $S = -2013 + T = -2013 + 405819 = 403806$

Bài 2: Thực hiện phép tính:

a) $A = (1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100) \cdot (68.8686 - 86.6868)$

$$b) \quad B = 1 + (-2) + (-3) + 4 + 5 + (-6) + (-7) + 8 + \dots + 2017 + (-2018) + (-2019)$$

Lời giải:

$$\begin{aligned} a) \quad A &= (1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100). (68.8686 - 86.6868) \\ &= (1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100). (68.86.101 - 86.68.101) \\ &= (1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100). 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad B &= 1 + (-2) + (-3) + 4 + 5 + (-6) + (-7) + 8 + \dots + 2017 + (-2018) + (-2019) \\ &= [1 + (-2) + (-3) + 4] + [5 + (-6) + (-7) + 8] + \dots + [2013 + (-2014) + (-2015) + 2016] \\ &\quad + 2017 + (-2018) + (-2019) \end{aligned} \quad (1)$$

Từ 1 đến 2016 có 2016 số, nhóm 4 số vào một nhóm ta được 504 nhóm, mỗi nhóm ở ⁽¹⁾ có tổng bằng 0, vậy ta có:

$$B = 0.504 + 2017 + (-2018) + (-2019) = -2020$$

$$S = (2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2020) - (3 + 5 + 7 + 9 + \dots + 2023)$$

Bài 3: Tính

Lời giải:

$$\begin{aligned} S &= (2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2020) - (3 + 5 + 7 + 9 + \dots + 2023) \\ &= 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2020 - 3 - 5 - 7 - 9 - \dots - 2023 \\ &= 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + 8 - 9 + \dots + 2020 - 2021 - 2022 - 2023 \\ &= (2 - 3) + (4 - 5) + (6 - 7) + (8 - 9) + \dots + (2020 - 2021) - 2022 - 2023 \quad (*) \end{aligned}$$

Từ 2 đến 2021 có $\frac{2021 - 2 + 1}{2} = 1010$ số, nhóm hai số vào một nhóm ta được 1010 nhóm, ở ^(*) mỗi nhóm có giá trị bằng ⁽⁻¹⁾.

$$\text{Vậy } S = (-1).1010 - 2022 - 2023 = -5055$$

Bài 4: Tính:

$$\begin{aligned} a) \quad A &= 13 - 12 + 11 + 10 - 9 + 8 - 7 - 6 + 5 - 4 + 3 + 2 - 1 \\ b) \quad B &= 2 - 4 - 6 + 8 + 10 - 12 - 14 + \dots - 2014 + 2016 + 2018 - 2020 \end{aligned}$$

Lời giải:

$$a) \quad A = 13 - 12 + 11 + 10 - 9 + 8 - 7 - 6 + 5 - 4 + 3 + 2 - 1$$

$$=13 - (12 - 11 - 10 + 9) + (8 - 7 - 6 + 5) - (4 - 3 - 2 + 1)$$

$$=13 - 0 + 0 - 0$$

$$=13$$

$$b) \quad B = 2 - 4 - 6 + 8 + 10 - 12 - 14 + \dots - 2014 + 2016 + 2018 - 2020$$

$$= 2 - 4 - 6 + 8 + 10 - 12 - 14 + 16 + \dots + 2010 - 2012 - 2014 + 2016 + 2018 - 2020$$

$$= (2 - 4 - 6 + 8) + (10 - 12 - 14 + 16) + \dots + (2010 - 2012 - 2014 + 2016) + 2018 - 2020$$

Dãy các số $2; 4; 6; 8; \dots; 2016$ có $(2016 - 2) : 2 + 1 = 1008$ số hạng, khi nhóm 4 số vào một nhóm ta được 252 nhóm.

$$\text{Ta có} \quad B = (2 - 4 - 6 + 8) + (10 - 12 - 14 + 16) + \dots + (2010 - 2012 - 2014 + 2016) + 2018 - 2020$$

$$= 0 + 0 + \dots + 0 + 2018 - 2020$$

$$= -2$$

Bài 5: Tính:

$$a) \quad S = (-1)^1 \cdot (-1)^2 \cdot (-1)^3 \cdot (-1)^4 \cdot \dots \cdot (-1)^{2021}$$

$$b) \quad T = 2^{100} - 2^{99} - 2^{98} - \dots - 2^2 - 2 - 1$$

Lời giải:

$$a) \quad S = (-1)^1 \cdot (-1)^2 \cdot (-1)^3 \cdot (-1)^4 \cdot \dots \cdot (-1)^{2021}$$

$$S = (-1)^{1+2+3+4+\dots+2021}$$

$$\text{Tính} \quad A = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2021$$

Tổng A có 2021 số hạng.

$$A = (2021 + 1) \cdot 2021 : 2 = 2043231$$

$$\text{Vậy} \quad S = (-1)^{2043231} = -1$$

$$b) \quad T = 2^{100} - 2^{99} - 2^{98} - \dots - 2^2 - 2 - 1$$

$$= 2^{100} - (2^{99} + 2^{98} + \dots + 2^2 + 2 + 1)$$

$$\text{Đặt} \quad B = 2^{99} + 2^{98} + \dots + 2^2 + 2 + 1$$

$$\text{Ta có} \quad 2B = 2 \cdot (2^{99} + 2^{98} + \dots + 2^2 + 2 + 1) = 2^{100} + 2^{99} + \dots + 2^3 + 2^2 + 2$$

$$2B - B = (2^{100} + 2^{99} + \dots + 2^3 + 2^2 + 2) - (2^{99} + 2^{98} + \dots + 2^2 + 2 + 1)$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow B = 2^{100} - 1$$

$$T = 2^{100} - B = 2^{100} - (2^{100} - 1) = 1$$

Vậy

Bài 6: Cho $A = 2 - 5 + 8 - 11 + \dots + 98 - 101$. Viết dạng tổng quát các số hạng của A. Tính A.

Lời giải:

$$A = 2 - 5 + 8 - 11 + \dots + 98 - 101$$

Ta có

$$= 2 + (-5) + 8 + (-11) + \dots + 98 + (-101)$$

Trong tổng A, các số hạng ở vị trí lẻ mang dấu "+", các số hạng ở vị trí chẵn mang dấu "-"; phần số tự nhiên của các số hạng này lập thành dãy cộng: $2; 5; 8; 11; \dots; 98; 101$ (1)

Các số hạng của dãy (1) đều chia 3 dư 2 nên có dạng tổng quát là $3n + 2, n \in \mathbb{N}$.

Từ quy luật về dấu của các số hạng của A ta suy ra dạng tổng quát cho các số hạng của A là $(-1)^n \cdot (3n + 2)$ với $n \in \mathbb{N}$.

* Tính A

$$A = 2 + (-5) + 8 + (-11) + \dots + 98 + (-101)$$

$$= [2 + (-5)] + [8 + (-11)] + \dots + [98 + (-101)] \quad (2)$$

Vì dãy $2; 5; 8; \dots; 101$ có $(101 - 2) : 3 + 1 = 34$ số hạng $\Rightarrow$ tổng A cũng có 34 số hạng, nhóm 2 số vào một nhóm ta có 17 nhóm, mỗi nhóm có tổng bằng (-3)

$$A = 17 \cdot (-3) = -51$$

Vậy

Bài 7: Chứng tỏ rằng số $M = 0,8 \cdot (1983^{1983} - 1917^{1917})$ là số nguyên.

Lời giải:

$$1983^{1983} = 1983^{4 \cdot 495 + 3} = 1983^{4 \cdot 495} \cdot 1983^3 = (1983^4)^{495} \cdot 1983^3 = \overline{1 \dots 1} \overline{7} = \overline{1 \dots 7}$$

Ta có

$$1917^{1917} = 1917^{4 \cdot 479 + 1} = 1917^{4 \cdot 479} \cdot 1917^1 = (1917^4)^{479} \cdot 1917^1 = \overline{1 \dots 1} \overline{7} = \overline{1 \dots 7}$$

Suy ra $1983^{1983} - 1917^{1917}$ có chữ số tận cùng là 0 $\Rightarrow M$ là số nguyên.

Bài 8: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $(x+1)^{2^n} + (y-1)^{2^n} = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

Lời giải:

Ta có $(x+1)^{2^n} \geq 0$ và $(y-1)^{2^n} \geq 0$ với mọi $x, y \in \mathbb{Z}$; $(n \in \mathbb{N}^*)$

Lại có $(x+1)^{2^n} + (y-1)^{2^n} = 0$ nên suy ra
$$\begin{cases} (x+1)^{2^n} = 0 \\ (y-1)^{2^n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy $x=-1, y=1$

Bài 9: Tìm các số nguyên x và y biết $(x-2)(xy-1)=5$

Lời giải: Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $x-2, xy-1 \in \mathbb{Z}$.

Lại có $(x-2)(xy-1)=5$ mà $5=1.5=5.1=(-1).(-5)=(-5).(-1)$ nên ta có các trường hợp sau:

+) TH1:
$$\begin{cases} x-2=1 \\ xy-1=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ 3y-1=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

+) TH2:
$$\begin{cases} x-2=5 \\ xy-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=7 \\ 7y-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=\frac{2}{7} \end{cases} \quad (\text{loại})$$

+) TH3:
$$\begin{cases} x-2=-1 \\ xy-1=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y-1=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases}$$

+) TH4:
$$\begin{cases} x-2=-5 \\ xy-1=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ -3y-1=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=0 \end{cases}$$

Vậy các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn đề bài là: $(3; 2), (1; -4), (-3; 0)$.

Bài 10: Tìm số nguyên dương a, b, c biết $a^3 - b^3 - c^3 = 3abc$ và $a^2 = 2(b+c)$

Lời giải:

Do $a^2 = 2(b+c) \Rightarrow a^2 : 2 \Rightarrow a : 2 \quad (1)$

Mà a là số nguyên dương nên từ $a^3 - b^3 - c^3 = 3abc > 0 \Rightarrow a > b, a > c$

Do $a > b, a > c \Rightarrow 2a > b+c \Rightarrow 4a > 2(b+c)$

mà $a^2 = 2(b+c) \Rightarrow 4a > a^2 > 0 \Rightarrow a < 4 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $a=2$.

Do $a^2 = 2(b+c)$ và $a=2$ nên $b+c=2^2:2=2$, lại có b, c nguyên dương nên suy ra $b=c=1$

Thử lại với $a=2; b=c=1$ có $a^3 - b^3 - c^3 = 2^3 - 1^3 - 1^3 = 6$; $3abc = 3.2.1.1 = 6 \Rightarrow a^3 - b^3 - c^3 = 3abc$

Vậy $a=2, b=1, c=1$.

❗ HẾT ❗

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>

Hướng dẫn tìm và tải các tài liệu ở đây

<https://forms.gle/LzVNwfMpYB9qH4JU6>