Chuyên đề Giới hạn dãy số

Trong chương Dãy số và Giới hạn liên tục, chúng ta đã trình bày một số định nghĩa, tính chất và định lý cơ bản về dãy số và giới hạn dãy số. Đây là những kiến thức căn bản trong chương trình phổ thông, chủ yếu phục vụ cho việc xây dựng khái niệm giới hạn hàm số và tiếp sau đó là khái niệm đạo hàm. Trong chuyên đề này, chúng ta sẽ trình bày những kiến thức chuyên sâu hơn về giới hạn dãy số, các phương pháp để chứng minh sự hội tụ của một dãy số và tìm giới hạn của dãy số ở mức độ nâng cao.

Để độc giả dễ theo dõi và nghiên cứu nội dung chuyên đề, chúng tôi sẽ lặp lại một số định nghĩa và kết quả (không chứng minh) đã nhắc tới ở các chương trước.

1. Định nghĩa và các định lý cơ bản

Ta nhắc lại định nghĩa khái niệm dãy số và một số đặc tính liên quan.

Định nghĩa 1.

Dãy số là một hàm số từ $\mathbb{N}$ vào một tập hợp số ($\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ hay một tập con nào đó của các tập hợp trên). Các số hạng của dãy số thường được ký hiệu là u_n, v_n, x_n, y_n, ... thay vì $u(n)$, $v(n)$, $x(n)$, $y(n)$, ...
Bản thân dãy số thì được ký hiệu là $\{x_n\}$.

Vì dãy số là một trường hợp đặc biệt của hàm số nên nó cũng có các tính chất của một hàm số.

Định nghĩa 2.

Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là *dãy tăng* (giảm) nếu với mọi n ta có $x_{n+1} \geq x_n$ $(x_{n+1} \leq x_n)$. Dãy số tăng hoặc dãy số giảm được gọi chung là *dãy đơn điệu*.

Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là *bị chặn trên* nếu tồn tại số thực M sao cho với mọi n ta có $x_n \leq M$.

Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là *bị chặn dưới* nếu tồn tại số thực m sao cho với mọi n ta có $x_n \geq m$.

Một dãy số vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới được gọi là *dãy bị chặn*.
Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là *tuần hoàn* với chu kỳ k nếu $x_{n+k} = x_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.
Dãy số tuần hoàn với chu kỳ 1 gọi là dãy hằng.

Khái niệm giới hạn dãy số đã được đưa ra ở chương … Ta nhắc lại định nghĩa hình thức cho khái niệm này.

Định nghĩa 3.

Ta nói dãy số $\{x_n\}$ có *giới hạn hữu hạn* a *khi n dẫn đến vô cùng* nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại số tự nhiên N_0 (phụ thuộc vào dãy số x_n và ε) sao cho với mọi $n > N_0$ ta có $|x_n - a|$ nhỏ hơn ε.

$$\lim x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n > N_0 : |x_n - a| < \varepsilon .$$

Ta nói dãy số $\{x_n\}$ *dần đến vô cùng khi n dần đến vô cùng* nếu với mọi số thực dương M lớn tuỳ ý, tồn tại số tự nhiên N_0 (phụ thuộc vào dãy số x_n và M) sao cho với mọi $n > N_0$, ta có $|x_n|$ lớn hơn M.

$$\lim x_n = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0 : \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n > N_0 : |x_n| > M$$

Dãy số có giới hạn hữu hạn được gọi là dãy *hội tụ*. Dãy số không có giới hạn hoặc dần đến vô cùng khi n dần đến vô cùng gọi là dãy *phân kỳ*.

Để tính giới hạn dãy số, ta có thể dùng định nghĩa (nếu đã biết giá trị của giới hạn) hoặc sử dụng các định lý và tính chất dưới đây.

Định lý 1. (Tổng, hiệu, tích, thương các dãy hội tụ)

Nếu $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ là các dãy hội tụ và có giới hạn tương ứng là a, b thì các dãy số $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n . y_n\}$, $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ cũng hội tụ và có giới hạn tương ứng là $a+b,\ a-b,\ a.b,\ \dfrac{a}{b}$. (Trong trường hợp dãy số thương, ta giả sử $y_n \neq 0$ và $b \neq 0$).

Định lý 2. (Chuyển qua giới hạn trong bất đẳng thức)

Cho dãy số $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn ℓ, nếu $\exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n > N_0$ ta có $a \le x_n \le b$ thì $a \le \ell \le b$.

Định lý 3. (Định lý kẹp)

Cho ba dãy số $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ trong đó $\{x_n\}$ và $\{z_n\}$ có cùng giới hạn hữu hạn L, và $\exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n > N_0$ ta có $x_n \le y_n \le z_n$. Khi đó $\{y_n\}$ cũng có giới hạn là L.

Các định lý trên đã được trình bày ở các chương trước cùng với các ví dụ áp dụng. Vì thế, trong chuyên đề này chúng ta sẽ chỉ sử dụng chúng trong lời giải các bài toán và ví dụ.

Việc tìm giới hạn của một dãy số, đương nhiên, không đơn giản chỉ dừng lại ở mức độ áp dụng định nghĩa hoặc các định lý 1, 2, 3 nói trên. Trong khá nhiều trường hợp, việc tìm giới hạn của một dãy số được chia thành 2 công đoạn:

1) Chứng minh dãy số đó hội tụ;
2) Trên cơ sở sự hội tụ đó, tìm giới hạn của dãy số.

Chúng ta hãy cùng tìm hiểu rõ điều đó qua ví dụ cụ thể sau:

Ví dụ 1. Với dãy số $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$ (1), nếu ta chứng minh được dãy hội tụ và có giới hạn là L thì rõ ràng, bằng cách **chuyển đẳng thức** (1) **qua giới hạn,** ta có $L = \sqrt{L+2}$, từ đó suy ra $L = 2$.

Việc chứng minh sự tồn tại giới hạn trước khi chuyển sang giới hạn là cần thiết. Ví dụ, với dãy số $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \dfrac{2}{x_n}, n = 1, 2, 3, ...$ Nếu ta bỏ qua bước chứng minh tồn tại giới hạn $\lim x_n = L$ mà hấp tấp chuyển công thức truy hồi qua giới hạn, ta sẽ đưa ra kết luận sai lầm là $\lim x_n = \sqrt{2}$. Trên thực tế thì dãy không hội tụ vì nó là dãy tuần hoàn dạng 1, 2, 1, 2, 1, 2, …

Chính vì những lý do nói trên, việc tìm ra các điều kiện để một dãy số hội tụ là rất quan trọng. Các định lý tiếp sau sẽ nên lên các điều kiện cần, điều kiện đủ, điều kiện cần và đủ để một dãy hội tụ.

Trước hết, ta có một điều kiện cần đơn giản:

Mệnh đề 4. Nếu dãy số $\{x_n\}$ hội tụ thì $\{x_n\}$ bị chặn.

Chứng minh. Giả sử $\{x_n\}$ hội tụ và $\lim x_n = L$. Theo định nghĩa, với $\varepsilon = 1$, tồn tại N_0 sao cho với mọi $n > N_0$ thì $-1 < x_n - L < 1$, suy ra $L - 1 < x_n < L + 1$. Bây giờ nếu đặt $M = \max\{x_1,\ x_2,\ ...,\ x_{N_0},\ L+1\}$, $m = \min\{x_1,\ x_2,\ ...,\ x_{N_0},\ L-1\}$ thì ta có:

$$m \le x_n \le M$$

với mọi n = 1, 2, 3, … Như vậy $\{x_n\}$ bị chặn.

Dễ thấy rằng đây không phải là điều kiện đủ. Chẳng hạn dãy 1, 2, 1, 2, 1, 2, … vừa nói tới ở trên là bị chặn nhưng không hội tụ.

Tuy nhiên, nếu bổ sung thêm điều kiện đơn điệu thì ta sẽ có một dãy hội tụ. Đó chính là nội dung của định lý quan trọng sau.

Định lý 5. (Dãy đơn điệu)

Một dãy tăng và bị chặn trên hay một dãy giảm và bị chặn dưới thì hội tụ. Nói ngắn gọn hơn, một dãy số đơn điệu và bị chặn thì hội tụ.

Phép chứng minh định lý nền tảng này dựa vào một tính chất quan trọng của tập các số thực: Một tập bị chặn trên thì có chặn trên đúng, một tập bị chặn dưới thì có chặn dưới đúng. Ta bỏ qua phép chứng minh định lý này.

Chẳng hạn ta có thể sử dụng định lý này để chứng minh dãy số ở ví dụ 1 là hội tụ. Thật vậy, ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng:

i) $x_{n+1} > x_n$ với mọi $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots$

ii) $x_n < 2$ với mọi $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots$

Câu hỏi. *Hãy thực hiện các chứng minh trên.*

Như thế, áp dụng định lý 5, ta suy ra $\{x_n\}$ hội tụ. Và, bằng cách chuyển qua giới hạn như đã nêu ở trên, ta tìm được giới hạn của dãy số đã cho là 2.

Định lý 5, ngược lại, chỉ là điều kiện đủ để một dãy số là hội tụ. Một dãy số hội tụ thì nhất thiết bị chặn nhưng không nhất thiết đơn điệu. Ví dụ dãy số $x_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$ hội tụ về 0 khi $n \to +\infty$ nhưng không phải là dãy đơn điệu.

Mệnh đề dưới đây đơn giản nhưng khá hữu ích trong các bài toán về tính giới hạn của dãy số.

Mệnh đề 6.

a) Nếu dãy $\{x_n\}$ tăng và có giới hạn khi n dần đến vô cùng là L thì ta có $x_n \le L$ với mọi n.

b) Nếu dãy $\{x_n\}$ giảm và có giới hạn khi n dần đến vô cùng là L thì ta có $x_n \ge L$ với mọi n.

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh a), vì b) hoàn toàn tương tự.
Giả sử ngược lại, tồn tại k sao cho $x_k > L$. Khi đó, vì dãy số a_n tăng nên ta có $x_n \ge x_k$ với mọi $n > k$. Áp dụng định lý 2, ta có $L = \lim x_n \ge x_k > L$, mâu thuẫn.

Định lý dưới đây là một kết quả quan trọng khác, xuất hiện nhiều trong việc chứng minh các tính chất của hàm số liên tục.

Định lý 7. (Về dãy các đoạn thẳng lồng nhau)
Cho hai dãy số thực $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ sao cho:

a) $\forall n \in \mathbb{N}^* : a_n \le b_n$;

b) $\forall n \in \mathbb{N}^* : [a_n; b_n] \subset [a_{n+1}; b_{n+1}]$;

c) $b_n - a_n \to 0$ khi $n \to +\infty$.

Khi đó tồn tại duy nhất số thực L sao cho $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n] = \{L\}$.

Chứng minh.
Theo điều kiện b) thì $a_{n+1} \ge a_n$ và $b_{n+1} \le b_n$ suy ra $\{a_n\}$ là dãy tăng, còn $\{b_n\}$ là dãy giảm. Từ đây, kết hợp với a) ta có $a_n \le b_1$ với mọi n và $b_n \ge a_1$ với mọi n. Như vậy $\{a_n\}$ là dãy tăng và bị chặn trên, còn $\{b_n\}$ là dãy giảm và bị chặn dưới.

Theo định lý 5, tồn tại $\lim a_n = A$ và $\lim b_n = B$. Do $b_n - a_n \to 0$ khi $n \to +\infty$ nên $A = B = L$. Theo mệnh đề 6 thì $a_n \le L \le b_n$ với mọi n, suy ra $L \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n]$.

Tính duy nhất của L là hiển nhiên.

Định lý 8. (Bolzano-Weierstrass)

Từ một dãy bị chặn luôn có thể trích ra một dãy con hội tụ.

<u>Chứng minh.</u>

Xét dãy $\{a_n\}$ bị chặn, tức là tồn tại m và M sao cho đoạn $[m; M]$ chứa tất cả các số hạng của $\{a_n\}$.

Ta xây dựng dãy các đoạn thẳng $[x_n; y_n]$ theo quy tắc sau: $x_1 = m,\ y_1 = M$.

Đặt $t = \dfrac{x_1 + y_1}{2}$. Vì $[x_1; y_1]$ chứa tất cả các số hạng của $\{a_n\}$ nên một trong hai đoạn $[x_1; t]$, $[t; y_1]$ phải chứa vô số các số hạng của $\{a_n\}$. Nếu đoạn $[x_1; t]$ chứa vô số các số hạng của $\{a_n\}$ thì ta đặt $x_2 = x_1,\ y_2 = t$. Nếu $[x_1; t]$ chỉ chứa hữu hạn các số hạng của $\{a_n\}$ (khi đó $[t; y_1]$ chứa vô số các số hạng của $\{a_n\}$) thì ta đặt $x_2 = t,\ y_2 = y_1$. Tương tự như thế, nếu ta đã xây dựng được đoạn $[x_k; y_k]$ chứa vô số các số hạng của $\{a_n\}$ thì sẽ xây dựng được đoạn $[x_{k+1}; y_{k+1}]$ là một trong hai nửa của $[x_k; y_k]$ và cũng chứa vô số các số hạng của $\{a_n\}$.

Như thế, ta xây dựng được dãy các đoạn thẳng $[x_k; y_k]$ lồng nhau, có $y_k - x_k = \dfrac{M - m}{2^k} \to 0$ và mỗi đoạn $[x_k; y_k]$ chứa vô số các số hạng của $\{a_n\}$. Bây giờ ta chọn dãy con $\{a_{i_j}\}$ của $\{a_n\}$ như sau $a_{i_1} = a_1$. Giả sử $a_{i_1}, \ldots, a_{i_j}$ đã được chọn thì ta sẽ chọn chỉ số i_{j+1} sao cho:

1) $i_{j+1} > i_j$;
2) $a_{i_{j+1}} \in [x_{k+1}; y_{k+1}]$.

Việc chọn này luôn thực hiện được vì $[x_{k+1}; y_{k+1}]$ chứa vô số các số hạng của $\{a_n\}$.

Theo định lý về dãy các đoạn thẳng lồng nhau thì tồn tại duy nhất số thực L là giao của tất cả các đoạn thẳng $[x_k; y_k]$ và dễ thấy theo cách chọn, L chính là giới hạn của dãy con $\{a_{i_j}\}$, tức là ta đã trích ra được một dãy con hội tụ từ $\{a_n\}$.

Định nghĩa 4.

Dãy $\{x_n\}$ được gọi là dãy Cauchy nếu $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} :\ \forall m, n > N_0$ thì $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

<u>Câu hỏi</u>**.** *Chứng minh rằng nếu* $\{x_n\}$ *là dãy Cauchy thì* $\{x_n\}$ *bị chặn.*

Định lý 9. (Tiêu chuẩn Cauchy)
Dãy số $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi nó là dãy Cauchy.

Chứng minh. Nếu dãy $\{x_n\}$ hội tụ về giới hạn hữu hạn L thì $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N}$ sao cho $m > N_0$ ta có $|x_m - L| < \frac{\varepsilon}{2}$. Khi đó với mọi $m, n > N_0$, ta có:

$$\left|x_m - x_n\right| = |(x_m - L) - (x_n - L)| \leq |(x_m - L)| + |(x_n - L)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Suy ra $\{x_n\}$ là dãy Cauchy.

Ngược lại, giả sử $\{x_n\}$ là dãy Cauchy. Khi đó dãy $\{x_n\}$ bị chặn. Theo định lý Bolzano-Weierstrass, tồn tại dãy con $\{x_{i_k}\}$ của $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn L.

Ta chứng minh L cũng chính là giới hạn của $\{x_n\}$. Thật vậy, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại k_0 sao cho với mọi $k > k_0$, ta có $|x_{i_k} - L| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Mặt khác, do $\{x_n\}$ là dãy Cauchy nên tồn tại N_0 sao cho với mọi $m, n > N_0$, ta có

$$\left|x_m - x_n\right| < \varepsilon$$

Do $i_k \to +\infty$ nên tồn tại $k > k_0$ sao cho $i_k > N_0$. Bây giờ xét $m > N_0$ bất kỳ, ta có:

$$\left|x_m - L\right| = \left|(x_m - x_{i_k}) + (x_{i_k} - L)\right| \leq \left|x_m - x_{i_k}\right| + \left|x_{i_k} - L\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Suy ra $\lim x_n = L$.

Tiêu chuẩn Cauchy dùng để khảo sát sự hội tụ của một dãy số mà ta không tính được (hoặc dự đoán được) giới hạn (và do đó không thể dùng định nghĩa).

Ví dụ 2. Chứng minh rằng dãy số x_n xác định bởi $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ hội tụ.

Giải. Ta có với m > n thì :

$$\left|x_m - x_n\right| = \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{m^2} < \frac{1}{n(n+1)} + \ldots + \frac{1}{(m-1)m}$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n}.$$

Do đó với mọi $\varepsilon > 0$, nếu chọn N là số nguyên lớn hơn $\frac{1}{\varepsilon}$ thì ta có với mọi $m, n > N_0$, ta có:

$$\left|x_m - x_n\right| < \frac{1}{\min\{m,\ n\}} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Như vậy dãy $\{x_n\}$ là dãy Cauchy và do đó hội tụ.

2. Một số dạng dãy số đặc biệt

2.1. Dãy số dạng $x_{n+1} = f(x_n)$

Đây là dạng dãy số thường gặp nhất trong các bài toán về giới hạn dãy số. Dãy số này sẽ hoàn toàn xác định khi biết f và giá trị ban đầu x_0. Do vậy sự hội tụ của dãy số sẽ phụ thuộc vào tính chất của hàm số $f(x)$ và x_0. Một đặc điểm quan trọng khác của dãy số dạng này là nếu a là giới hạn của dãy số thì a phải là nghiệm của phương trình $x = f(x)$.

Từ đây, chúng ta có thể sử dụng hai "kịch bản" sau để tìm giới hạn của dãy số:

1) Chứng minh sự hội tụ của dãy số, sau đó giải phương trình $x = f(x)$ để tìm giới hạn.
2) Giải phương trình $x = f(x)$ để tìm nghiệm (chẳng hạn L), sau đó chứng minh $\lim x_n = L$ bằng cách sử dụng định nghĩa.

Theo "kịch bản" thứ nhất, chúng ta có một số kết quả cơ bản như sau:

Định lý 1. Cho I là một khoảng đóng của R và hàm số $f : I \to I$. Xét dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi: $x_0 = a \in \mathrm{I}, x_{n+1} = f(x_n)$ với mọi $n = 0,1,2,3,...$

1) Nếu f là hàm số tăng trên I thì $\{x_n\}$ sẽ là dãy đơn điệu. Dãy số này tăng hay giảm tuỳ theo vị trí của x_0 so với x_1.
2) Nếu f là hàm giảm trên D thì các dãy con $\{x_{2k}\},\{x_{2k+1}\}$ là các dãy đơn điệu (và ngược chiều nhau).
3) Giả sử f liên tục trên I. Nếu $\lim x_n = L$ thì $L \in I$, chuyển qua giới hạn trong biểu thức $x_{n+1} = f(x_n)$, ta suy ra $L = f(L)$.

Ta nói một phần tử x của I là **một điểm bất động** của f khi và chỉ khi: $x = f(x)$.

<u>Chứng minh</u>.

1) Giả sử f là hàm số tăng trên I. Khi đó nếu $x_0 \le x_1$ thì ta có $f(x_0) \le f(x_1)$, tức là $x_1 \le x_2$. Tiếp tục như thế, bằng quy nạp ta dễ dàng chứng minh được rằng $x_n \le x_{n+1}$ với mọi n, suy ra dãy $\{x_n\}$ tăng.
   Trường hợp $x_0 > x_1$, chứng minh tương tự ta được dãy $\{x_n\}$ giảm.
2) Nếu f là hàm số giảm trên I thì $f_o f$ là hàm số tăng trên I, do đó $\{x_{2k}\}$ và $\{x_{2k+1}\}$ là các dãy đơn điệu. Ngoài ra, nếu chẳng hạn $x_0 \le x_2$ thì ta có $f(x_0) \ge f(x_2)$, tức là $x_1 \ge x_3$ suy ra dãy $\{x_{2k+1}\}$ tăng còn dãy $\{x_{2k}\}$ giảm.
3) Hiển nhiên.

<u>Ví dụ 1.</u> (Vô địch sinh viên Moskva, 1982) Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi $x_0 = 1982,\ x_{n+1} = \dfrac{1}{4-3x_n}, n = 0,1,2,\ldots$. Hãy tìm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

<u>Giải:</u> Tính toán trực tiếp ta thấy $0 < x_2 < 1,\ x_3 > x_2$. Vì $f(x) = \dfrac{1}{4-3x}$ là một hàm số tăng từ $[0,1]$ vào $[0,1]$ nên từ đây, $\{x_n\}_{n\geq 2}$ là một dãy số tăng và bị chặn trên bởi 1 do đó có giới hạn. Giả sử giới hạn là a thì ta có $a = \dfrac{1}{4-3a} \Leftrightarrow a = 1$ (giá trị $a = \dfrac{1}{3}$ loại do dãy tăng).

<u>Câu hỏi</u>**.** Với những giá trị nào của x_0 thì dãy số xác định với mọi x và có giới hạn? Khi nào thì giới hạn là 1? Khi nào thì giới hạn là $\dfrac{1}{3}$?

<u>Ví dụ 2.</u> Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi $x_0 = \sqrt{2}$ và $x_{n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{x_n}$ với $n = 0,1,2,\ldots$
Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

<u>Giải.</u> Đặt $f(x) = (\sqrt{2})^{x_n}$ thì dãy số có dạng $x_0 = \sqrt{2}$ và $x_{n+1} = f(x_n)$. Ta thấy $f(x)$ là hàm số tăng và $x_1 = \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}} > \sqrt{2} = x_0$. Từ đó, do $f(x)$ là hàm số tăng nên ta có
$x_2 = f(x_1) > f(x_0) = x_1,\ x_3 = f(x_2) > f(x_1) = x_2, \ldots$
Suy ra $\{x_n\}$ là dãy số tăng.

Tiếp theo, ta chứng minh bằng quy nạp rằng $x_n < 2$ với mọi n.
Thật vậy, điều này đúng với n = 0.
Giả sử ta đã có $x_k < 2$ thì rõ ràng $x_{k+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{x_k} < \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2.$
Theo nguyên lý quy nạp, ta có $x_n < 2$ với mọi n.

Vậy dãy $\{x_n\}$ tăng và bị chặn trên bởi 2 nên dãy có giới hạn hữu hạn.
Gọi a là giới hạn đó thì chuyển đẳng thức truy hồi: $x_{n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{x_n}$ sang giới hạn, ta được $a = \left(\sqrt{2}\right)^a$. Ngoài ra ta cũng có $a \leq 2$.

Xét phương trình $x = \left(\sqrt{2}\right)^x \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{x} = \ln(\sqrt{2})$. Khảo sát hàm số $y = \dfrac{\ln x}{x}$ ta thấy rằng phương trình trên chỉ có 1 nghiệm bé hơn e và một nghiệm lớn hơn e.

Vì 2 là một nghiệm của phương trình nên rõ ràng chỉ có một nghiệm duy nhất của phương trình thoả mãn điều kiện không vượt quá 2. Từ đó suy ra $a = 2$.

Vậy giới hạn của $\{x_n\}$ khi n dần đến vô cùng là 2.

Trong trường hợp $f(x)$ là hàm giảm, ta có thể chứng minh dãy hội tụ bằng cách chứng minh hai dãy con trên cùng hội tụ về một giới hạn như định lí 1.

Ví dụ 3. Khảo sát sự hội tụ của dãy số $\{u_n\}$ xác định bởi $u_0 = a \geq 0, u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n^2}$.

Giải.
Một phép quy nạp đơn giản chỉ ra rằng $u_n \geq 0$ với mọi n.

Xét hàm số $f:[0;+\infty) \to [0;+\infty)$, $f(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$ là hàm liên tục. Ta có:

$\forall x \in [0;+\infty), f(x) = x \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Do đó, nếu $\{u_n\}$ hội tụ thì nó chỉ có thể hội tụ đến 1.

Hàm số f khả vi trên [0; +∞) và $\forall x \in [0;+\infty), f'(x) = -\dfrac{4x}{(1+x^2)^2} \leq 0$, suy ra f giảm.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh $\lim u_{2k} = 1$ và $\lim u_{2k+1} = 1$.

Xét $g = f_o f:[0;+\infty) \to [0;+\infty)$, $g(x) = \dfrac{2(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2+4}$ thì g là một hàm tăng vì f giảm.

Ta tính:

$$g(x) - x = -\frac{x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{(1+x^2)^2+4} = -\frac{(x-1)^3(x^2+x+2)}{(1+x^2)^2+4}$$

Ta xét các trường hợp sau:

**Trường hợp 1:* $u_0 = a \in [0,1]$. Khi ấy với mọi $k \in \mathbb{N}$, ($u_{2k} \in [0,1]$ và $u_{2k+1} \in [1;\infty]$)

Vậy với mọi $k \in \mathbb{N}$, ta có

$$u_{2k+2} - u_{2k} = g(u_{2k}) - u_{2k} \geq 0$$
$$u_{2k+3} - u_{2k+1} = g(u_{2k+1}) - u_{2k+1} \leq 0$$

Do đó $\{u_{2k}\}$ tăng và $\{u_{2k+1}\}$ giảm.

Hơn nữa, vì ($\forall p \in \mathbb{N}$, $u_{2k} \leq 1 \leq u_{2k+1}$), nên ta suy ra rằng $\{u_{2k}\}$ hội tụ đến một giới hạn L_1 thuộc $[0;\infty)$ và $\{u_{2k+1}\}$ hội tụ đến một giới hạn L_2 thuộc $[0;\infty)$.

Vì g liên tục trên $[0;\infty)$ và vì phương trình $g(x) = x$ có nghiệm duy nhất $x = 1$ trên $[0;\infty)$ nên ta suy ra $L_1 = L_2 = 1$.

Cuối cùng ta được $\lim u_n = 1$.

Trường hợp 2: $u_0 = a \in [1,\infty]$:

Vì $u_1 = f(u_0) = f(a) \in [0,1]$ ta quy về trường hợp trên (bằng cách thay u_0 bởi u_1) và có cùng một kết luận $\lim u_n = 1$.

Trong một số trường hợp, hàm số đã cho không đơn điệu trên cả tập xác định mà chỉ đơn điệu trên miền giá trị mà các số hạng của dãy nhận được. Ta cần xác định miền đó càng hẹp càng tốt để trên đó, hàm số đã cho đơn điệu và áp dụng phương pháp đánh giá này trên dãy số đã cho.

Ví dụ 4. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 4u_n + 1}{u_n^2 + u_n + 1}, n \ge 1 \end{cases}$

Chứng minh dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

Giải: Ta thấy $u_n > 0, \forall n$ và từ: $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 4u_n + 1}{u_n^2 + u_n + 1} = 1 + \dfrac{3u_n}{u_n^2 + u_n + 1} = 2 - \dfrac{(u_n - 1)^2}{u_n^2 + u_n + 1}$,

ta có: $1 < u_n < 2, \forall n$.

Xét hàm số: $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + x + 1}, x \in (1;2) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{3(1 - x^2)}{x^2 + x + 1} < 0$.

Suy ra là hàm này nghịch biến trên $(1;2)$.

Dãy số đó cho có thể viết dưới dạng: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n), n \ge 1 \end{cases}$

Ta thấy: $u_1 = 1 < u_3 \Rightarrow f(u_1) > f(u_3) \Rightarrow u_2 < u_4 \Rightarrow f(u_2) < f(u_4) \Rightarrow u_3 < u_5$.

Tiến hành tương tự, suy ra:

$u_1 < u_3 < u_5 < .... \Rightarrow$ Dãy u_{2n+1} tăng và bị chặn trên bởi 2 nên có giới hạn, giả sử là $\alpha \in [1;2]$.

$u_2 > u_4 > u_6 > ... \Rightarrow$ Dãy u_{2n} giảm và bị chặn dưới bởi 1 nên có giới hạn, giả sử là $\beta \in [1;2]$.

Ta có: $\begin{cases} u_{2n+1} = f(u_{2n}) \\ u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) \end{cases}$ .Chuyển qua giới hạn, ta có: $\begin{cases} \alpha = f(\beta) \\ \beta = f(\alpha) \end{cases}$.

$$\Rightarrow \alpha - \beta = f(\beta) - f(\alpha) \Leftrightarrow \alpha - \beta = \frac{\beta^2 + 4\beta + 1}{\beta^2 + \beta + 1} - \frac{\alpha^2 + 4\alpha + 1}{\alpha^2 + \alpha + 1}$$

$$\Leftrightarrow \alpha - \beta = 3\left(\frac{\beta}{\beta^2 + \beta + 1} - \frac{\alpha}{\alpha^2 + \alpha + 1}\right) \Leftrightarrow \alpha - \beta = \frac{3(\alpha - \beta)(\alpha\beta - 1)}{(\alpha^2 + \alpha + 1)(\beta^2 + \beta + 1)}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha - \beta = 0 \\ 3(\alpha\beta - 1) = (\alpha^2 + \alpha + 1)(\beta^2 + \beta + 1) \end{array}\right.$$

Ta thấy phương trình thứ hai không có giá trị $\alpha, \beta \in [1;2]$ thỏa mãn $\alpha = \beta = t$.

Do đó, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n} = t$, hai dãy con đó có cùng giới hạn là t.

Ta thấy, t phải thỏa mãn đẳng thức: $t=\frac{t^2+4t+1}{t^2+t+1}\Leftrightarrow t^3-3t=1$ (*).

Ta sẽ chứng minh rằng nghiệm $|t|\le 2$. Đặt $t=2\cos\varphi,\ \varphi\in[0;2\pi]$, thay vào phương trình (*) ở trên:

$8\cos^3\varphi-6\cos\varphi=1\Leftrightarrow\cos 3\varphi=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\varphi=\pm\frac{\pi}{9}+k\frac{2\pi}{3}$. Do $\varphi\in[0;2\pi]$ nên:

$\varphi=\frac{\pi}{9};\frac{5\pi}{9};\frac{7\pi}{9}$, tương ứng với các nghiệm của (*) là: $t=2\cos\frac{\pi}{9};2\cos\frac{5\pi}{9};2\cos\frac{7\pi}{9}$.

Phương trình (*) đó có đủ 3 nghiệm nên nó không có nghiệm $|t|>2$.

Trong các nghiệm này, chỉ có $t=2\cos\frac{\pi}{9}\in[1;2]$ thỏa mãn và đây cũng chính là giới hạn cần tìm.

Vậy dãy số u_n có giới hạn hữu hạn và $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2\cos\frac{\pi}{9}$.

Khó khăn nhất là gặp các hàm số không đơn điệu. Trong trường hợp này, ta phải xét từng khoảng đơn điệu của nó và sự hội tụ của hàm số sẽ tuỳ thuộc vào giá trị ban đầu.

Ví dụ 5. Tìm tất cả các giá trị của a để dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi:
$x_0=a, x_{n+1}=2-x_n^2$ có giới hạn hữu hạn.

Giải. Hàm số $f(x)=2-x^2$ tăng trên $(-\infty,0)$ và giảm trên $(0,+\infty)$. Phương trình $f(x)=x$ có hai nghiệm là $x=-2$ và $x=1$. Đó là những dữ kiện quan trọng trong lời giải bài toán này.

+ Đầu tiên, ta nhận xét rằng nếu $a<-2$ thì do $f:(-\infty,-2)\to(-\infty,-2)$ và là hàm tăng, $x_1=2-a^2<x_0$ nên dãy số $\{x_n\}$ giảm. Nếu dãy $\{x_n\}$ bị chặn dưới thì nó hội tụ về nghiệm của phương trình $f(x)=x$, điều này mâu thuẫn vì dãy giảm và $x_0<-2$. Vậy $\{x_n\}$ không bị chặn dưới, tức không có giới hạn hữu hạn.

Nếu $a>2$ thì $x_1<-2$ và ta cũng suy $\{x_n\}$ không có giới hạn hữu hạn.

+ Với $a=-2$ hoặc $a=1$ thì dãy số có giới hạn. Xét $x_0\in[-2,2]$. Ta chứng minh dãy số có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi tồn tại n sao cho $x_n=-2$ hoặc $x_n=1$.

Thật vậy, giả sử x_n có giới hạn hữu hạn là b và $x_n\notin\{-2,1\}$ với mọi n. Khi đó $b=-2$ hoặc $b=1$. Giả sử $b=-2$ thì tồn tại N_0 sao cho x_n nằm trong lân cận - 2 với mọi n ≥ N_0. Nhưng nếu $x_n=-2+\varepsilon$ thì $x_{n+1}=-2+4\varepsilon-\varepsilon^2>x_n$, suy ra dãy $\{x_n\}$ tăng kể từ N_0 và không thể dần về 2. Nếu $b=1$ kể từ $n\ge N_0$ nào đó x_n thuộc lân cận 1. Ta có:

$$x_{n+2}-x_n=2-(2-x_n^2)^2-x_n=(2-x_n-x_n^2)(x_n^2-x_1-1)$$

Tại lân cận 1 thì $x_n^2-x_1-1<0$. Vì nếu $x_n<1$ thì $x_{n+1}>1$ (và ngược lại $x_n>1$ thì $x_n<1$, chúng ta đang xét trong lân cận điểm 1!) nên có thể giả sử $x_n>1$.

Khi đó $2-x_n-x_n^2<0$ suy ra $x_{n+2}>x_n$. Tiếp tục như vậy, suy ra:

$1<x_n<x_{n+2}<...<x_{n+2k}<...$, mâu thuẫn với giả thiết $b=1$. Vậy điều giả sử là 2, tức là dãy số chỉ có giới hạn khi tồn tại n sao cho $x_n=-2$ hoặc $x_n=1$.

Sau khi thu được kết quả này, ta sử dụng hàm ngược $f^{-1}(x)=\pm\sqrt{2-x}$ để xây dựng tất cả các giá trị a thoả mãn điều kiện đầu bài.

Trong ví dụ trên, ta đã sử dụng giả thiết tồn tại giới hạn để thu gọn miền D, từ đó một hàm có biến thiên phức tạp trở thành một hàm đơn điệu.

Như vậy, tính đơn điệu đã giúp chúng ta giải quyết khá nhiều các trường hợp cho dãy số dạng $x_{n+1}=f(x_n)$. Tuy nhiên, gặp một số dãy số có sự biến thiên phức tạp, phương pháp hàm đơn điệu có thể sẽ không áp dụng được. Trong trường hợp đó ta có thể nghĩ đến **nguyên lý ánh xạ co**.

Định nghĩa 1. Cho I là một khoảng đóng. Hàm số $f:I\to I$ được gọi là một hàm số co trên I nếu tồn tại số thực q, $0<q<1$ sao cho $|f(x)-f(y)|\le q.|x-y|$ với mọi x, y thuộc I.

Định lý 2. Cho I là một khoảng đóng bị chặn. Nếu $f(x)$ là một hàm số co trên I thì dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi $x_0=a\in I$, $x_{n+1}=f(x_n)$ hội tụ. Giới hạn của dãy số là nghiệm duy nhất trên I của phương trình $x=f(x)$.

<u>Chứng minh:</u>

Với mọi $n>m$ thì áp dụng định nghĩa hàm số co, ta có:

$$|x_n-x_m|=|f(x_{n-1})-f(x_{m-1})|\le q.|x_{n-1}-x_{m-1}|\le ...\le q^m.|x_{n-m}-x_0| \quad (*)$$

Từ đây $|x_n-x_0|\le|x_n-x_{n-1}|+|x_{n-1}-x_{n-2}|+...+|x_1-x_0|\le(q^{n-1}+q^{n-2}+...+q+1)|x_1-x_0|$, suy ra $\{x_n\}$ bị chặn. Xét $\varepsilon>0$.

Từ (*), do $q<1$ và $|x_{n-m}-x_0|$ bị chặn nên ta suy ra tồn tại N sao cho $q^n|x_{n-m}-x_0|<\varepsilon$. Suy ra $\{x_n\}$ là dãy Cauchy và do đó nó hội tụ.

<u>Ví dụ 6.</u> (Đề dự bị VMO 2008) Cho số thực a và dãy số thực $\{x_n\}$ xác định bởi:

$$x_1=a, x_{n+1}=\ln(3+\cos x_n+\sin x_n)-2008 \text{ với mọi } n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ...$$

Chứng minh rằng dãy số $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn khi n tiến đến dương vô cùng.

Giải. Đặt $f(x)=\ln(3+\cos x+\sin x)-2008$ thì:

$$f'(x)=\frac{\cos x-\sin x}{3+\sin x+\cos x}$$

Từ đó, sử dụng đánh giá $|\cos x-\sin x|\le\sqrt{2},\quad |\sin x+\cos x|\le\sqrt{2}$ ta suy ra

$$|f'(x)|\le\frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}=q<1$$

Áp dụng dụng định lý Lagrange cho x, y thuộc $\mathbb{R}$, do hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên tồn tại z thuộc $\mathbb{R}$ sao cho:

$$f(x)-f(y)=f'(z)(x-y)$$

Từ đó suy ra $\left|f(x)-f(y)\right|\le q.\left|x-y\right|$ với mọi x, y thuộc $\mathbb{R}$.

Bây giờ áp dụng định lý 2, ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 7. (Việt Nam, 2000) Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định như sau:

$$x_0=0, x_{n+1}=\sqrt{c-\sqrt{c+x_n}}, n=0,1,2,...$$

Tìm tất cả các giá trị của c để với mọi giá trị $x_0\in(0,c)$, x_n xác định với mọi n và tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim x_n$.

Giải. Để x_1 tồn tại thì ta thì $c-\sqrt{c+x_n}\ge 0$ với mọi $x_0\in(0,c)\Leftrightarrow c(c-1)\ge x_0$ với mọi $x_0\in(0,c)$, suy ra $c\ge 2$. Với $c\ge 2$ thì $0<x_1<\sqrt{c}$. Nếu $0<x_n<\sqrt{c}$ thì $c-\sqrt{c+x_n}>c-\sqrt{2c}>0$, suy ra x_{n+1} tồn tại và ta cũng có $0<x_{n+1}<\sqrt{c}$.

Đặt $f(x)=\sqrt{c-\sqrt{c+x}}$ thì $f'(x)=\frac{-1}{4}\sqrt{c+x}\sqrt{c-\sqrt{c+x}}$.

Với mọi $x\in(0,\sqrt{c})$ ta có $(c+x)(c-\sqrt{c+x})>c(c-\sqrt{c+\sqrt{c}})\ge 2(2-\sqrt{2+\sqrt{2}})>\frac{1}{4}$.

Từ đó suy ra $|f'(x)|<q<1$ với mọi $x\in(0,\sqrt{c})$, tức $f(x)$ là hàm số co trên $(0,\sqrt{c})$, suy ra dãy số đã cho hội tụ. Vậy tất cả các giá trị c cần tìm là c ≥ 2.

Với kịch bản thứ hai, ta giải phương trình $f(x)=x$ rồi chọn nghiệm L phù hợp và xét hiệu $|x_n-L|$, tìm cách sử dụng hệ thức truy hồi để đánh giá hiệu số này và chứng minh $\lim x_n=L$ bằng định nghĩa.

Ví dụ 8. Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi $x_1\in(1,2)$ và $x_{n+1}=1+x_n-\frac{x_n^2}{2}$.

Chứng minh rằng $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn khi n dần đến vô cực. Tìm giới hạn đó.

Giải. Giả sử x_n có giới hạn là a thì $a=1+a-\frac{a^2}{2}\Rightarrow a=\sqrt{2}$. Ta sẽ dùng định nghĩa để chứng minh $\lim x_n=\sqrt{2}$.

Ta có $|x_{n+1}-\sqrt{2}|=|1+x_n-\frac{x_n^2}{2}-\sqrt{2}|=|x_n-\sqrt{2}||\frac{\sqrt{2}+x_n-1}{2}|$.

Tiếp theo ta có thể chứng minh bằng quy nạp rằng $1<x_n<\frac{3}{2}$ với mọi $n=2,\ 3,\ ...$

Từ đó, suy ra:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}<|\frac{\sqrt{2}+x_n-1}{2}|<\frac{\sqrt{2}+\frac{1}{2}}{2}=q<1.$$

Như thế ta luôn có $|x_{n+1}-\sqrt{2}|<q|x_n-\sqrt{2}|$

Suy ra $|x_{n+1}-\sqrt{2}|<q^n|x_1-\sqrt{2}|$

Vì $0<q<1$ nên với n đủ lớn thì q^n nhỏ tùy ý, suy ra $\lim x_n=\sqrt{2}$.

(Thêm một số ví dụ và phân tích)

Ví dụ 9. Cho dãy số xác định bởi: $u_1=a\in(0,1),\ u_{n+1}=\sqrt[9]{\frac{u_n+k}{k.u_n+1}}, k>1, n=1,2,3,...$

Chứng minh rằng $\lim u_n=1$.

Giải: Từ công thức xác định của dãy số, bằng quy nạp, ta có được: $u_n\in(0,1),\forall n$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt[9]{\frac{x+k}{kx+1}}, k>1, x\in[0,1]$. Ta có:

$$f'(x)=\frac{1}{9}.\frac{1-k^2}{(kx+1)^2}.\sqrt[9]{\left(\frac{kx+1}{x+k}\right)^8}=\frac{1-k^2}{9(kx+1)\sqrt[9]{(kx+1)(x+k)^8}}\Rightarrow|f'(x)|<\frac{1}{9},\forall x\in[0,1]$$

Nếu dãy đã cho hội tụ thì giới hạn của nó phải là nghiệm của phương trình

$$f(x)=x\Leftrightarrow x=\sqrt[9]{\frac{x+k}{kx+1}}\Leftrightarrow kx^{10}+x^9=x+k\Leftrightarrow k(x^{10}-1)+x(x^8-1)=0\Leftrightarrow x=1>0.$$

Theo định lí Lagrange thì tồn tại c thuộc $(0,1)$ sao cho:

$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(c)\Rightarrow|f(x)-1|<\frac{1}{9}|x-1|$, ta cũng có $f(1)=1$ nên:

$$|u_{n+1}-1|=|f(u_n)-1|<\frac{1}{9}|u_n-1|<...<\frac{1}{9^n}|a-1|.$$

Theo nguyên lí kẹp thì $\lim(u_n-1)=0$ hay $\lim u_n=1$.

2.2. Dãy số dạng $x_{n+1} = x_n \pm (x_n)^{\alpha}$ và định lý trung bình Cesaro

Đây là trường hợp đặc biệt của dãy số dạng $x_{n+1} = f(x_n)$. Tuy nhiên, với dãy số dạng này vấn đề hội tụ của $\{x_n\}$ thường không được đặt ra (vì quá đơn giản và giới hạn chỉ có thể là 0 hoặc ∞). Ở đây, ta sẽ có một yêu cầu cao hơn là tìm bậc tiệm cận của $\{x_n\}$, cụ thể là tìm β sao cho $x_n = O(n^{\beta})$. Với các dãy số có dạng này, định lý trung bình Cesaro sẽ tỏ ra rất hữu hiệu.

Định lý 3. (Định lý trung bình Cesaro) Nếu dãy số $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn là a thì dãy số các trung bình cộng $\left\{\dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right\}$ cũng có giới hạn là a.

Định lý này có thể phát biểu dưới dạng tương đương như sau:
Nếu $\lim(x_{n+1} - x_n) = a$ thì $\lim \dfrac{x_n}{n} = a$.

Ta chứng minh định lý ở cách phát biểu 2. Rõ ràng chỉ cần chứng minh cho trường hợp a = 0.

Vì $\lim(x_{n+1} - x_n) = 0$ nên với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại, N_0 sao cho với mọi $n \geq N_0$, ta có $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$. Khi đó, với mọi $n > N_0$:

$$\left|\frac{x_n}{n}\right| \leq \frac{|x_{N_0}| + |x_{N_0+1} - x_{N_0}| + ... + |x_n - x_{n-1}|}{n} < \frac{|x_{N_0}|}{n} + \frac{(n - N_0)\varepsilon}{n}$$

Giữ cố định N_0, ta có thể tìm được $N_1 > N_0$ sao cho $\dfrac{|x_{N_0}|}{N_1} < \varepsilon$. Khi đó với mọi $n > N_1$ ta sẽ có $\left|\dfrac{x_n}{n}\right| < 2\varepsilon$. Vậy $\lim \dfrac{x_n}{n} = 0$.

Định lý trung bình Cesaro có nhiều ứng dụng quan trọng trong việc tìm giới hạn dãy số và có thể phát biểu cho các trung bình khác như trung bình nhân, trung bình điều hòa, trung bình lũy thừa. Về các ứng dụng này chúng ta sẽ đề cập tới ở cuối phần này. Trước hết ta khai thác cách phát biểu 2 của định lý để áp dụng cho các dãy số có dạng $x_{n+1} = x_n \pm (x_n)^{\alpha}$: Để tìm số β sao cho $\dfrac{x_n}{n^{\beta}}$ có giới hạn hữu hạn, theo định lý trung bình Cesaro, ta chỉ cần tìm γ sao cho $x_{n+1}^{\gamma} - x_n^{\gamma}$ có giới hạn hữu hạn a. Khi đó, $\lim \dfrac{x_n^{\gamma}}{n} = a$, suy ra $\lim \dfrac{x_n}{n^{\frac{1}{\gamma}}} = a^{\frac{1}{\gamma}}$, tức là $\beta = \dfrac{1}{\gamma}$.

Ví dụ 1. Cho dãy số $\{x_n\}$ được xác định bởi $x_0 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = x_n - x_n^2$.

Chứng minh rằng $\lim nx_n = 1$.

Giải. Trong bài này, $\beta = -1$ do đó ta sẽ thử với $\gamma = -1$. Dễ dàng chứng minh được $\lim x_n = 0$. Ta có:

$$\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{x_n - x_{n+1}}{x_{n+1}x_n} = \frac{x_n^2}{(x_n - x_n^2)x_n} = \frac{1}{1 - x_n} \to 1$$

Từ đó áp dụng định lý trung bình Cesaro, suy ra $\lim \frac{1}{nx_n} = 1$.

Từ đó $\lim nx_n = 1$ (đpcm).

Ví dụ 2. Cho dãy số $\{x_n\}$ được xác định bởi $x_0 = 1, x_{n+1} = \sin(x_n)$.

Chứng minh rằng $\lim\left(\sqrt{n}x_n\right) = \sqrt{3}$.

Giải: Dãy số đã cho không trực tiếp có dạng $x_{n+1} = x_n \pm (x_n)^\alpha$ nhưng kết luận của bài toán gợi cho chúng ta đến định lý trung bình Cesaro. Vì $\beta = -1$ nên ta sẽ thử với $\gamma = -2$. Dễ dàng chứng minh được rằng $\lim x_n = 0$. Xét

$$\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} = \frac{x_n^2 - \sin^2 x_n}{x_n^2 \sin^2 x_n} \to \frac{1}{3}$$

(áp dụng quy tắc L'Hopitale cho giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}$)

Từ đó, theo định lý trung bình Cesaro $\lim \frac{1}{nx_n^2} = \frac{1}{3}$, suy ra $\lim \sqrt{n}x_n = \sqrt{3}$.

Như vậy, ta có thể tìm γ nếu biết β. Trong trường hợp không biết β thì ta phải dự đoán.

Ví dụ 3. (Chọn đội tuyển Việt Nam, 1993) Dãy số $\{a_n\}$ được xác định bởi $a_1 = 1$ và $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{\sqrt{a_n}}$.

Hãy tìm tất cả các số thực β để dãy số $\frac{a_n^\beta}{n}$ có giới hạn hữu hạn khác 0.

Giải: Trước hết ta chứng minh a_n dần tới vô cùng khi n dần tới vô cùng. Thật vật, ta có

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2\sqrt{a_n} + \frac{1}{a_n} > a_n^2 + 2 \quad (\text{do } a_n \ge 1 \text{ với mọi n})$$

Từ đó $a_{n+1}^2 > 1 + 2n$ suy ra điều phải chứng minh.

Trở lại bài toán, xét biểu thức:

$$a_{n+1}^{\frac{3}{2}} - a_n^{\frac{3}{2}} = \left(a_n + \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)^{\frac{3}{2}} - a_n^{\frac{3}{2}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{a_n^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{3}{2}} - 1}{\frac{1}{a_n^{\frac{3}{2}}}}$$

Đặt $x_n = \frac{1}{a_n^{\frac{3}{2}}}$ thì $x_n \to \infty$ khi $n \to \infty$. Do đó:

$$\lim(a_{n+1}^{\frac{3}{2}} - a_n^{\frac{3}{2}}) = \lim \frac{(1+x_n)^{\frac{3}{2}} - 1}{x_n} = \lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}} - 1}{x} = \frac{3}{2} \text{ (Quy tắc L'Hopitale)}$$

Từ đó suy ra $\lim \frac{a_n^{\frac{3}{2}}}{n} = \frac{3}{2}$. Với $\beta > \frac{3}{2}$ suy ra giới hạn bằng ∞, với $\beta < \frac{3}{2}$ suy ra giới hạn bằng 0.

Vậy $\beta = \frac{3}{2}$ là giá trị duy nhất thoả mãn yêu cầu bài toán.

<u>Câu hỏi.</u>

1) Làm sao có thể dự đoán được giá trị β?

2) α và β có mối quan hệ gì?

Định lý trung bình Cesaro còn có thể mở rộng cho các trung bình khác như trung bình nhân, trung bình bình phương, trung bình điều hoàn. Dưới đây ta nêu ra phát biểu định lý trung bình Cesaro cho trung bình nhân và xem xét một ứng dụng nổi tiếng của định lý này.

Định lý 4. Nếu dãy số dương $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn là a thì dãy số các trung bình nhân $\{\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}\}$ cũng có giới hạn là a.

<u>Chứng minh</u>. Vì $\lim x_n = a$ và hàm số $y = \ln x$ liên tục trên $\mathbb{R}^+$ nên ta có

$$\lim(\ln x_n) = \ln a$$

Theo định lý 3, ta có

$$\lim \frac{\ln x_1 + \ln x_2 + ... + \ln x_n}{n} = \ln a \Leftrightarrow \lim \sqrt[n]{x_1x_2...x_n} = a$$

<u>Ví dụ 4.</u> Chứng minh rằng $\lim \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

Đây là một kết quả khá nổi tiếng. Từ kết quả này có thể suy ra công thức tiệm cận để tính n!, cụ thể ta có $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n$. Sự xuất hiện của hằng số e gợi cho chúng ta đến giới hạn đặc biệt $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$ Áp dụng định lý 4 cho dãy $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ta được điều phải chứng minh.

<u>Câu hỏi</u>**.**

1) *Hãy thực hiện chi tiết chứng minh trên.*
2) *Dựa theo chứng minh trên, hãy chứng minh* $\lim\left(\frac{a^n}{n!}\right) = 0$.

2.3. Dãy số dạng tổng và phương pháp sai phân.

Để tính tổng n số hạng đầu tiên của một dãy số, một trong những phương pháp hiệu quả nhất là phương pháp sai phân: Để tính tổng n số hạng đầu tiên của dãy số $\{a_n\}$, ta tìm hàm số $f(n)$ sao cho $a_n = f(n+1) - f(n)$.
Khi đó $a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n = f(n+1) - f(0)$.

Một trong những ví dụ kinh điển chính là phương pháp mà Bernoulli và các nhà toán học khác của thế kỷ XVIII đã đưa ra để tìm công thức tính tổng các lũy thừa mũ k bất kì $S(n,k) = \sum_{i=1}^{n} i^k = 1^k + 2^k + ... + n^k$.
Dùng phương pháp hệ số bất định, họ tìm đa thức $f_k(n)$ sao cho $n^k = f_k(n+1) - f_k(n)$ và từ đó tìm được $S(n,k) = f_k(n+1) - f_k(0)$. Phương pháp này hiệu quả hơn phương pháp xây dựng công thức truy hồi, vì để tính S_k ta không cần phải dùng đến các công thức tính $S_{k-1}, S_{k-2}, ...$

Khi dự đoán các hàm f, ta có thể sử dụng tích phân rồi tương tự hóa qua. Ví dụ tích phân của đa thức bậc k là đa thức bậc $k+1$. Vậy thì từ $\Delta f_k = n_k$ suy ra f_k phải có bậc $k+1$.

<u>Ví dụ 1.</u> Lập công thức tính tổng $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$.
<u>Giải.</u> Ta tìm hàm số $f(x)$ có dạng $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sao cho $f(n+1) - f(n) = n^2$ với mọi n.
Điều này tương đương với

$$\left[a(n+1)^3 + b(n+1)^2 + c(n+1) + d\right] - \left[an^3 + bn^2 + cn + d\right] = n^2, \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\Leftrightarrow 3an^2 + (3a+2b)n + (a+b+c) = n^2, \forall n \in \mathbb{N}$$

Đồng nhất hệ số hai vế, ta được $3a = 1,\ 3a + 2b = 0,\ a + b + c = 0$
Từ đó: $a = \frac{1}{3}, b = -\frac{1}{2}, c = \frac{1}{6}$
còn d có thể lấy bất kỳ. Để cho tiện, ta chọn $d = 0$.

Cuối cùng, ta có: $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 =$
$$= \left(f(2) - f(1)\right) + \left(f(3) - f(2)\right) + ... + \left(f(n+1) - f(n)\right) = f(n+1) - f(1) =$$

$$= \frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{6}(n+1) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Tuy nhiên, khác với tích phân, đôi khi các hàm rời rạc không có "nguyên hàm". Trong trường hợp đó ta không tính được tổng mà chỉ có thể đánh giá tổng bằng các bất đẳng thức.

Ví dụ 2. Tìm phần nguyên của tổng $S = \frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{100}}$.

Giải: Ta cần tìm một đánh giá cho S. Nhận xét rằng hàm $\frac{1}{\sqrt{x}}$ có nguyên hàm là $2\sqrt{x}$, ta xét hàm số: $f(n) = 2\sqrt{n}$. Khi đó:

$$f(n+1) - f(n) = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

Suy ra: $$\frac{1}{\sqrt{n+1}} < f(n+1) - f(n) < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Từ đó: $2(\sqrt{101} - 1) < S < 2(\sqrt{100} - 1) + 1$, suy ra $[S] = 18$.

Ví dụ 3. Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, đặt $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Chứng minh rằng: $\lim u_n = +\infty$.

Giải: Ta cần chứng minh BĐT: $x \geq \ln(x+1),\ \forall x > 0$. Thật vậy:

Xét hàm số: $f(x) = x - \ln(x+1),\ x > 0 \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} > 0, \forall x > 0$.

Do đó, hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Suy ra:

$f(x) > f(0) = 0 \Rightarrow x > \ln(x+1),\ \forall x > 0$.

Trong BĐT này, thay x bởi $\frac{1}{x} > 0$, ta cũng có:

$\frac{1}{x} \geq \ln(\frac{1}{x} + 1) \Leftrightarrow \frac{1}{x} \geq \ln(\frac{x+1}{x}) \Leftrightarrow \frac{1}{x} \geq \ln(x+1) - \ln x, \forall x > 0$.

Đưa vào tổng cần chứng minh, ta có:

$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} > \sum_{i=1}^{n} \left[\ln(n+1) - \ln(n)\right] = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1)$, mà $\lim\left[\ln(n+1)\right] = +\infty$ nên:

$\lim \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = +\infty$. Ta có đpcm.

Câu hỏi. Hãy chứng minh lại kết quả này bằng nhận xét $u_{2^{m+1}} - u_{2^m} \geq \frac{1}{2}, \forall m \in \mathbb{N}$.

Ví du 4. (Đề đề nghị Toán quốc tế 2001) Cho $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ là các số thực bất kỳ. Chứng minh rằng:

$$\frac{x_1}{1 + x_1^2} + \frac{x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2} + ... + \frac{x_n}{1 + x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} < \sqrt{n}$$

Giải: Đặt vế trái của bất đẳng là A. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopsky, ta có

$$A^2 \le n\left[\frac{x_1^2}{(1+x_1^2)^2}+\frac{x_2^2}{(1+x_1^2+x_2^2)^2}+\ldots+\frac{x_n^2}{(1+x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)^2}\right]$$

Để chứng minh bất đẳng thức đầu bài, ta chỉ cần chứng minh:

$$\frac{x_1^2}{(1+x_1^2)^2}+\frac{x_2^2}{(1+x_1^2+x_2^2)^2}+\ldots+\frac{x_n^2}{(1+x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)^2}<1$$

Nhưng điều này là hiển nhiên do bất đẳng thức:

$$\frac{x_k^2}{1+x_1^2+x_2^2+\ldots+x_k^2}\le\frac{1}{1+x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{k-1}^2}-\frac{1}{1+x_1^2+x_2^2+\ldots+x_k^2}$$

<u>Ví dụ 5.</u> Xét dãy số $\{x_n\}_{n=1}$ cho bởi: $x_{n+2}=\dfrac{(n-1)x_{n+1}+x_n}{n}$.

Chứng minh rằng với mọi giá trị ban đầu x_1, x_2 dãy số đã cho hội tụ.

Tìm giới hạn của dãy như một hàm số theo x_1, x_2.

<u>Giải:</u> Ta có từ công thức của dãy số, ta có:

$$x_{n+2}-x_{n+1}=-\frac{(x_{n+1}-x_n)}{n}=\frac{(x_n-x_{n-1})}{n(n-1)}=\ldots=\frac{(-1)^n(x_2-x_1)}{n!}\ .$$

Từ đó suy ra:

$x_{n+2}=(x_{n+2}-x_{n+1})+(x_{n+1}-x_n)+\ldots+(x_2-x_1)+x_1=x_1+(x_2-x_1).K_n$ trong đó

$K_n=1-\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}-\ldots+\dfrac{(-1)^n}{n!}$, ta thấy: $K_n\to\dfrac{1}{e}, n\to+\infty$. Từ đây suy ra dãy số có giới hạn và giới hạn đó bằng: $x_1+\dfrac{(x_2-x_1)}{e}$.

<u>Câu hỏi:</u>

1) Có thể tổng quát hóa bài toán trên như thế nào?

2) Hãy tìm sai phân của các hàm số $\arctan(n)$.

Từ đó đặt ra bài toán tính tổng tương ứng.

3) Từ công thức $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ có thể lập ra công thức tính tổng nào?

2.4. Bài tập áp dụng

Bài 1. Cho dãy số $\{x_n\}$ thỏa mãn $x_0 = 2, x_{n+1} = \dfrac{2x_n + 1}{x_n + 2}, n = 0,1,2,\dots$.

Tính phần nguyên của tổng $\sum_{k=1}^{n} x_k$.

Bài 2: Chứng minh rằng: $\lim a_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{k}{n^2}} - 1\right) = \dfrac{1}{4}$.

Bài 3 . Cho dãy số $\{a_n\}$ thỏa mãn: $\lim a_n \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$. Chứng minh rằng: $\lim \sqrt[3]{3n}.a_n = 1$

Bài 4. Cho dãy số $\{a_n\}$ thỏa mãn: $a_1 \in (0,1)$ và $a_{n+1} = a_n - a_n^2,\ n = 1,2,3,\dots$
Chứng minh rằng: $\lim na_n = 1$.

Bài 5. Cho dãy số thực $\{x_n\}$ xác định bởi : $x_0 = 0, x_1 = 2, x_{n+2} = 2^{-x_n} + \dfrac{1}{2}, n = 0,1,2,\dots$
Chứng minh $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$. Tìm giới hạn đó.

Bài 6. Xét tính hội tụ của dãy sau tùy theo giá trị của a:

$$\begin{cases} x_1 = a \neq -2 \\ x_{n+1} = \dfrac{3\sqrt{2x_n^2 + 2} + 2}{2x_n + \sqrt{2x_n^2 + 2}},\ n = 1,2,3,\dots \end{cases}$$

Bài 7. Cho $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Xét hàm số $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}, f : \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{-d}{c}\right\} \to \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{a}{c}\right\}$ và dãy $\{u_n\}$ thỏa : $u_0 = k \in \mathbb{R},\ u_{n+1} = f(u_n),\ n = 0,1,2,\dots$

1. Chứng minh rằng $f(x)$ là một song ánh và dãy $\{u_n\}$ đã cho xác định khi và chỉ khi $k \neq v_n, \forall n$, trong đó $\{v_n\}$ được xác định bởi :
   $v_0 = \dfrac{-d}{c}, v_{n+1} = f^{-1}(v_n), n = 0,1,2,\dots$ (lưu ý rằng dãy $\{v_n\}$ này có thể không xác định từ một số thứ tự nào đó).
2. Đặt $\Delta = (d-a)^2 + 4bc$. Biện luận theo Δ sự hội tụ của dãy $\{u_n\}$.

3. Một số phương pháp đặc biệt tìm giới hạn dãy số

3.1. Phương pháp dãy số phụ

Khi khảo sát sự hội tụ của một dãy số ta thường định lý về dãy đơn điệu và bị chặn. Nếu dãy không đơn điệu thì có thể thử xét dãy với chỉ số chẵn và với chỉ số lẻ. Tuy nhiên, có những dãy số có "hành vi" phức tạp hơn nhiều. Chúng tăng giảm rất bất thường. Trong một số trường hợp như thế, ta có thể xây dựng 1 (hoặc 2) dãy số phụ đơn điệu, chứng minh các dãy số phụ có giới hạn và sau đó chứng minh dãy số ban đầu có cùng giới hạn. Tất nhiên, dãy số phụ phải được xây dựng từ dãy số chính.

<u>Ví dụ 1:</u> Dãy số $\{a_n\}$ được xác định bởi $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ và $a_{n+1} = \dfrac{2}{a_n + a_{n-1}}$. Chứng minh rằng dãy số $\{a_n\}$ hội tụ và tìm giới hạn của dãy số đó.

<u>Giải:</u> Xét hai dãy $M_n = \max\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}\}$ và $m_n = \min\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}\}$. Ta chứng minh M_n là dãy số giảm và m_n là dãy số tăng. Thật vậy, ta sẽ chứng minh $a_{n+4} \le \max\{a_{n+1}, a_{n+3}\}$. Từ đây suy ra $M_{n+1} = a_{n+1}$ hoặc a_{n+2} hoặc a_{n+3} và rõ ràng khi đó $M_n = \max\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}\} \ge M_{n+1}$. Thật vật nếu $a_{n+4} \ge a_{n+3}$ thì $\dfrac{2}{a_{n+3} + a_{n+2}} \ge a_{n+3}$ suy ra $2 \ge (a_{n+3} + a_{n+2})a_{n+3}$. Khi đó $a_{n+1} = \dfrac{2}{a_{n+3}} - a_{n+2} = \dfrac{2}{a_{n+3}} - \dfrac{2}{a_{n+2} + a_{n+3}} - a_{n+2} + a_{n+4}$

$= 2.\dfrac{a_{n+2}}{(a_{n+3} + a_{n+2})a_{n+3}} - a_{n+2} + a_{n+4} \ge a_{n+4}$ suy ra đpcm.

Ta đã chứng minh được M_n giảm. Tương tự m_n tăng. Hai dãy số này đều bị chặn nên hội tụ. Cuối cùng, ta chỉ còn cần chứng minh hai giới hạn bằng nhau.
Suy ra dãy $\{a_n\}$ hội tụ và $\lim a_n = 1$.

<u>Ví dụ 2</u>. Cho $\{u_n\}$ là dãy bị chặn thỏa mãn: $2a_{n+2} \le a_n + a_{n+1}, \forall n$.
Chứng minh rằng dãy $\{a_n\}$ này hội tụ.

<u>Giải.</u> Đặt $A_n = \max\{a_n, a_{n+1}\}$. Ta sẽ chứng minh dãy này hội tụ. Thật vậy:

$a_{n+2} \le \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2} \le A_n \Rightarrow A_{n+1} = \max\{a_{n+1}, a_{n+2}\} \le \max\{A_{n+1}, A_n\} = A_{n+2}$.

Do dãy $\{a_n\}$ bị chặn nên dãy $\{A_n\}$ cũng bị chặn, đồng thời theo nhận xét trên thì dãy $\{A_n\}$ giảm nên nó hội tụ. Đặt $\lim A_n = \ell$.

Với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại N nguyên dương sao cho với mọi: $n > N$ thì:
$\ell - \frac{\varepsilon}{3} < A_n < \ell + \frac{\varepsilon}{3}$.

Theo định nghĩa của $\{A_n\}$, suy ra: $a_n \le A_n < \ell + \frac{\varepsilon}{3}$.

- Nếu $a_n \ge \ell - \frac{\varepsilon}{3}$ thì suy ra: $\ell - \frac{\varepsilon}{3} \le a_n < \ell + \frac{\varepsilon}{3}, \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \lim a_n = \ell$.
- Nếu: $a_n < \ell - \frac{\varepsilon}{3}$ thì theo định nghĩa của $\{A_n\}$, ta đợc $a_{n+1} > \ell - \frac{\varepsilon}{3}$. Suy ra:

  $a_n \ge 2a_{n+1} - a_{n-1} \ge 2\left(\ell + \frac{\varepsilon}{3}\right) - \left(\ell - \frac{\varepsilon}{3}\right) = \ell - \varepsilon$, tức là:

  $\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \lim a_n = \ell$.

Vậy trong mọi trường hợp, dãy đã cho đều có giới hạn.

3.2. Xây dựng dãy hội tụ bằng phương trình

Có thể xây dựng dãy số hội tụ về một số α xuất phát từ một phương trình có nghiệm là α theo cách sau:

Ví dụ 1: Xét $\alpha = \sqrt{2}$, α là nghiệm của phương trình $\alpha^2 = 2$. Ta viết lại dưới dạng $\alpha = \frac{2}{\alpha} \Leftrightarrow 2\alpha = \alpha + \frac{2}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\alpha + \frac{2}{\alpha}}{2}$ và ta thiết lập dãy số x_n thoả mãn $x_0 = a$, $x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2}$. Nếu dãy này hội tụ thì giới hạn sẽ là $\sqrt{2}$. Tương tự như vậy, ta có thể xây dựng được dãy số tiến về căn bậc k của m như sau:

$$x_0 = a\ ,\ x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{m}{x_n^{k-1}}}{2}$$

Cũng với giới hạn cần đến là $\sqrt{2}$, ta có thể xây dựng một dãy số khác theo "phong cách" như vậy:

$$x_0 = a\ ,\ x_{n+1} = 1 + x_n - \frac{x_n^2}{2}$$

Tất nhiên, trong tất cả các ví dụ trên, ta chỉ có được phương trình với nghiệm theo ý muốn khi đã chứng minh được sự hội tụ của dãy số. Vì vậy, cần cẩn thận với cách thiết lập bài toán kiểu này. Ví dụ, với dãy số $x_{n+1} = 1 + x_n - \frac{x_n^2}{2}$ thì không phải với x_0 nào dãy cũng hội tụ, và không phải lúc nào giới hạn cũng là $\sqrt{2}$.

Một cách tổng quát, ta có thể dùng phương pháp tìm nghiệm xấp xỉ Newton để xây dựng các dãy số. Để tìm nghiệm của phương trình $F(x)=0$, phương pháp Newton đề nghị chọn x_0 tương đối gần nghiệm đó và xây dựng dãy truy hồi:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$$

khi đó dãy x_n sẽ dần đến nghiệm của phương trình $F(x)=0$.

<u>Ví dụ 2:</u>

Xét hàm số $F(x)=x^2-2$, thì $\dfrac{F(x)}{F'(x)}=\dfrac{x^2-2}{2x}$ và ta được dãy số $x_{n+1}=\dfrac{x_n+\dfrac{2}{x_n}}{2}$

Xét hàm số $F(x)=x^3-x$ thì $\dfrac{F(x)}{F'(x)}=\dfrac{x^3-x}{3x^2-1}$ và ta được dãy số $x_{n+1}=2.\dfrac{x_n^3}{3x_n^2-1}$

3.3. Dãy số là nghiệm của một họ phương trình phụ thuộc biến n

Xét một họ phương trình $F(n,x)=0$. Nếu với mỗi n, phương trình $F(n,x)=0$ có nghiệm duy nhất trên một miền D nào đó thì dãy số x_n đã được xác định. Từ mối liên hệ giữa các hàm $F(n,x)=0$ dãy số này có thể có những tính chất rất thú vị.

<u>Ví dụ 1:</u> Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương, phương trình

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+...+\frac{1}{x-n}=0$$

có nghiệm duy nhất x_n thuộc khoảng (0, 1). Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

<u>Lời giải:</u> Do x_n được xác định duy nhất với hàm số $f_n(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}+...+\dfrac{1}{x-n}$ liên tục và đơn điệu trên $(0,1)$. Tuy nhiên, ta không thể xác định được giá trị cụ thể của nó. Rất may mắn, để chứng minh tính hội tụ của x_n, ta không cần đến điều đó. Chỉ cần chứng minh tính đơn điệu và bị chặn là đủ. Với tính bị chặn, mọi thứ đều ổn với $0<x_n<1$. Với tính đơn điệu, ta chú ý một chút đến mối liên hệ giữa $f_n(x)$ và $f_{n+1}(x)$ là: $f_{n+1}(x)=f_n(x)+\dfrac{1}{x-n-1}$.

Đây chính là chìa khóa để chứng minh tính đơn điệu của $\{x_n\}$.

*Lời giải cụ thể như sau:

Rõ ràng x_n được xác định 1 cách duy nhất, $0<x_n<1$. Ta có:

$f_{n+1}(x_n) = f_n(x_n) + \dfrac{1}{x_n - n - 1} = \dfrac{1}{x_n - n - 1} < 0$, trong khi đó $f_{n+1}(0^+) > 0$. Theo tính chất của hàm liên tục, trên khoảng $(0, x_n)$ có ít nhất 1 nghiệm của $f_{n+1}(x)$. Nghiệm đó chính là x_{n+1}. Như thế ta đó chứng minh được $x_{n+1} < x_n$. Tức là dãy số $\{x_n\}$ giảm. Do dãy này bị chặn dưới bởi 0 nên nó có giới hạn hữu hạn.

Ta sẽ chứng minh giới hạn này bằng 0. Để chứng minh điều này, ta cần đến kết quả quen thuộc sau:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} > \ln(n+1)$$

Khi đó với $n > N$, ta có:

$$0 = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_n - 1} + \ldots + \frac{1}{x_n - n} < \frac{1}{x_n} + \frac{1}{-1} + \frac{1}{-2} + \ldots + \frac{1}{-n} < \frac{1}{a} - \frac{1}{a} = 0$$

Mâu thuẫn. Vậy ta phải có $\lim x_n = 0$.

<u>Ví dụ 2.</u> (VMO 2007)

Cho số thực a > 2 và $f_n(x) = a^{10}x^{n+10} + x^n + \ldots + x + 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

a) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n, phương trình $f_n(x) = a$ luôn có đúng một nghiệm dương duy nhất.
b) Gọi nghiệm đó là x_n, chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn khi n dần đến vô cùng.

<u>Lời giải.</u> Kết quả của câu a) là hiển nhiên với hàm $f_n(x)$ tăng trên $(0, +\infty)$.

Dễ dàng nhận thấy $0 < x_n < 1$. Ta sẽ chứng minh $\{x_n\}$ tăng, tức là $x_{n+1} > x_n$.

Ta xét:

$$f_{n+1}(x_n) = a^{10}x_n^{\,n+11} + x_n^{\,n+1} + x_n^{\,n} + \ldots + x + 1 = x_n f_n(x_n) + 1 = ax_n + 1$$

Và ta cũng có $f_{n+1}(1) = a^{10} + n + 1 > a$ nên ta chỉ cần chứng minh $ax_n + 1 < a$ là sẽ suy ra $x_n < x_{n+1} < 1$. Như vậy, cần chứng minh $x_n < \dfrac{a-1}{a}$.

Thật vậy, nếu $x_n \geq \dfrac{a-1}{a}$ thì:

$$f_n(x_n) \geq a^{10}\left(\frac{a-1}{a}\right)^{n+10} + \frac{1 - \left(\frac{a-1}{a}\right)^{n+1}}{1 - \frac{a-1}{a}} = (a-1)^{10}\left(\frac{a-1}{a}\right)^n + a - (a-1)\left(\frac{a-1}{a}\right)^n > a$$

(do $a - 1 > 1$). Vậy dãy số $\{x_n\}$ tăng và bị chặn bởi 1 nên hội tụ.

Nhận xét: Một lần nữa mối liên hệ $f_{n+1}(x) = xf_n(x) + 1$ lại giúp chúng ta tính được mối quan hệ giữa x_n và x_{n+1}. Từ lời giải trên, ta có thể chứng minh được rằng $\lim x_n = \frac{a-1}{a}$. Thật vậy, đặt $c = \frac{a-1}{a} < 1$, theo tính toán ở trên:

$$f_n(c) - f_n(x_n) = kc^n \text{ (với } k = (a-1)\left((a-1)^9 - 1\right) > 0\text{)}$$

Theo định lý Lagrange thì:

$$f_n(c) - f_n(x_n) = f'(\xi)(c - x_n) \text{ với } \xi \text{ thuộc } (x_n,\ c).$$

Nhưng $f'(\xi) = (n+10)a^{10}\xi^{n+9} + n\xi^{n-1} + \ldots + \xi + 1 > 1$ nên từ đây suy ra:

$$kc^n > c - x_n$$

Do đó: $c - kc^n < x_n < c \Rightarrow \lim x_n = c$.

Ví dụ 3: Cho n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng phương trình $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4x-1} + \ldots + \frac{1}{n^2x-1} = \frac{1}{2}$ có một nghiệm duy nhất $x_n > 1$.

Chứng minh rằng khi n dần đến vô cùng, x_n dần đến 4.

Lời giải: Việc chứng minh phương trình có nghiệm duy nhất $x_n > 1$ là hiển nhiên. Mối liên hệ $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{(n+1)^2x-1}$ cho thấy x_n là dãy số tăng (ở đây $f_n(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4x-1} + \ldots + \frac{1}{n^2x-1} - \frac{1}{2}$). Đề bài cho sẵn giới hạn của x_n là 4 đó làm cho bài toán trở nên dễ hơn nhiều.

Tương tự như cách chứng minh $\lim x_n = c$ ở nhận xét trên, ta sẽ dùng định lý Lagrange để đánh giá khoảng cách giữa x_n và 4. Để làm điều này, ta cần tính $f_n(4)$ với $f_n(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4x-1} + \ldots + \frac{1}{n^2x-1} - \frac{1}{2}$.

Rất may mắn, bài toán $f_n(4)$ này liên quan đến 1 dạng tổng quen thuộc.

*Cụ thể như sau:

Đặt $f_n(x)$ như trên và gọi x_n là nghiệm lớn hơn 1 duy nhất của $f_n(x) = 0$.

Ta có:

$$f_n(4) = \frac{1}{4-1} + \frac{1}{16-1} + \ldots + \frac{1}{4n^2-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4n}$$

Sử dụng định lý Lagrange, ta có:

$$\frac{1}{4n} = |f_n(x_n) - f(4)| = |f'(c)|.|x_n - 4| \text{ với } c \in (x_n, 4).$$

Nhưng do $|f_n'(c)| = \frac{1}{(c-1)^2} + \frac{4}{(4c-1)^2} + \ldots > \frac{1}{9}$

Nờn từ đây $|x_n - 4| < \frac{9}{4n}$, suy ra $\lim x_n = 4$.

Để tạo ra các phương trình có nghiệm duy nhất trên một khoảng nào đó, có thể sử dụng tổng của các hàm đơn điệu. Riêng với hàm đa thức ta có thể sử dụng quy tắc Đề-các về số nghiệm dương của phương trình: Nếu dãy các hệ số của phương trình đổi dấu k lần thì phương trình có không quá k nghiệm dương.

Ví dụ phương trình $x^4 - x^2 - nx - 1 = 0$ có nghiệm dương duy nhất x_0, còn phương trình $x^4 - x^2 + nx - 1 = 0$ có nhiều nhất hai nghiệm dương.

Khi xây dựng các hàm $F(n,x)$, có thể sử dụng công thức truy hồi. Như trong ví dụ trên thì $F(n+1,x) = F(n,x) + \frac{1}{x-n-1}$. Xây dựng $F(n,x)$ kiểu này, dãy nghiệm x_n sẽ dễ có những quy luật thú vị hơn.

Ví dụ, với dãy số trên, ta có:
$F(n+1,x_n) = F(n,x_n) + \frac{1}{x_n - n - 1} < 0$. Từ đây, do $\lim F(n+1,0^+) = +\infty$ ta suy ra x_{n+1} nằm giữa 0 và x_n, tức dãy x_n giảm.

Câu hỏi:

1) Có thể xây dựng dãy số nào với họ hàm số $F(x) = x(x-1)...(x-n)$?

2) Cho $0 < a_1 < a_2 < ... < a_n < ...$ là một dãy số dương tăng nghiêm ngặt. Xét họ phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-a_1} + ... + \frac{1}{x-a_n} = 0$ có nghiệm duy nhất x_n thuộc $(0, a_1)$.

Khi nào thì x_n dần về 0 khi n dần đến vô cùng?

3.4. Bài tập áp dụng

Bài 1. Cho $\{u_n\}$ là dãy bị chặn thỏa: $F_{n+2}.a_{n+2} \le F_{n+1}a_{n+1} + F_n.a_n, \forall n = 1,2,3,...$trong đó $\{F_n\}$ là dãy Fibonacci. Chứng minh dãy $\{u_n\}$ hội tụ.

Bài 2: Dãy số $\{a_n\}$ được xác định bởi $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ và $a_{n+1} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}}$.
Chứng minh rằng dãy số $\{a_n\}$ hội tụ và tìm giới hạn của dãy số đó.

Bài 3. Cho trước bốn số thực dương a,b,A,B. Xét dãy số $\{x_n\}$:
$x_1 = a,\ x_2 = b,\ x_{n+2} = A\sqrt[3]{x_{n+1}^2} + B\sqrt[3]{x_n^2},\ n = 1,2,3,...$
Chứng minh rằng tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ và tìm giới hạn đó.

Bài 4. Tìm các giá trị $a \in \mathbb{R}$ sao cho dãy $\{x_n\}$ sau đây hội tụ.

$$x_0 = a,\ x_{n+1} = \frac{4x_n^5 + x_n^2 - x_n - 1}{5x_n^4 + x_n}, n = 0,1,2,...$$

Bài 5. Cho ba số thực dương a,b,c và các dãy số $\{a_k\},\{b_k\},\{c_k\}, k = 0,1,2,...$ được xác định như sau:
1) $a_0 = a,\ b_0 = b,\ c_0 = c$.
2) $a_{k+1} = a_k + \dfrac{2}{b_k + c_k},\ b_{k+1} = b_k + \dfrac{2}{c_k + a_k},\ c_{k+1} = c_k + \dfrac{2}{a_k + b_k}, k \ge 0$
Chứng minh các dãy $\{a_k\},\{b_k\},\{c_k\}$ này dần tới vô cực khi n tiến tới vô cực.

Bài 6. Cho n là một số nguyên dương lớn hơn 1. Chứng minh rằng phương trình $x^n = x + 1$ có một nghiệm dương duy nhất, ký hiệu là x_n.
Chứng minh rằng x_n dần về 1 khi n dần đến vô cùng và tính $\lim\limits_{n\to\infty} n(x_n - 1)$.

Bài 7. Cho n là một số nguyên dương > 1. Chứng minh rằng phương trình:
$x^n = x^2 + x + 1$ có một nghiệm dương duy nhất, ký hiệu là x_n.
Hãy tính số thực a sao cho giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} n^a (x_n - x_{n+1})$ tồn tại, hữu hạn và khác 0.

4. Lý thuyết dãy số dưới con mắt toán cao cấp

4.1. Rời rạc hóa các khái niệm và định lý của lý thuyết hàm biến số thực

Dãy số là hàm số, do đó nó có đầy đủ các tính chất chung của hàm số. Tuy nhiên, do tính chất đặc biệt của N, một số khái niệm như đạo hàm, tích phân không được định nghĩa cho các dãy số. Nhưng thực ra, dãy số cũng có các khái niệm tương ứng với các khái niệm này. Bằng cách so sánh và phép tương tự, ta có thể tìm được những định lý thú vị của lý thuyết dãy số. Đó là quá trình rời rạc hóa.

Rời rạc hóa của đạo hàm f'(x) chính là sai phân $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$ của dãy số. Cũng như đạo hàm của hàm biến số thực, sai phân dùng để xét tính tăng giảm của dãy số. Tương tự như vậy, ta định nghĩa sai phân cấp 2 và dùng để đo tính lồi lõm của dãy. Rời rạc hóa của khái niệm tích phân chính là khái niệm tổng: $s(x_n) = x_0 + x_1 + ... + x_n$. Hai khái niệm này ngược nhau: $\Delta(S(x_n)) = x_n, S(\Delta x_n) = x_n$.

<u>Ví dụ:</u> (Định lý Stolz)

Xét hai dãy số $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ trong đó $\{y_n\}$ là dãy số dương tăng và dần đến vô cùng. Thế thì $\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{(x_n - x_{n-1})}{(y_n - y_{n-1})}$ với giả thiết là giới hạn ở vế phải tồn tại.

(So sánh với quy tắc L'Hopitale)

<u>Chứng minh:</u> Đặt $\lim \frac{(x_n - x_{n-1})}{(y_n - y_{n-1})} = A$. Theo định nghĩa giới hạn, với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại N_1 sao cho với mọi $n > N_1$, ta có: $\left|\frac{(x_n - x_{n-1})}{(y_n - y_{n-1})} - A\right| < \varepsilon$, từ đó suy ra:

$A - \varepsilon < \frac{(x_n - x_{n-1})}{(y_n - y_{n-1})} < A + \varepsilon$. Từ đây, do y_n là dãy tăng nên ta có :

$$(A-\varepsilon)(y_{N_1} - y_{N_1-1}) < x_{N_1} - x_{N_1-1} < (A+\varepsilon)(y_{N_1} - y_{N_1-1})$$
$$...$$
$$(A-\varepsilon)(y_n - y_{n-1}) < x_n - x_{n-1} < (A+\varepsilon)(y_n - y_{n-1})$$

Cộng các bất đẳng thức trên lại, ta được:

$$(A-\varepsilon)(y_n - y_{N_1-1}) < x_n - x_{N_1-1} < (A+\varepsilon)(y_n - y_{N_1-1})$$

Chia hai vế cho y_n, ta được:

$$\frac{A-\varepsilon+[x_{N_1} - (A-\varepsilon)y_{N_1-1}]}{y_n} < \frac{x_n}{y_n} < \frac{A+\varepsilon+[x_{N_1} - (A+\varepsilon)y_{N_1-1}]}{y_n}$$

Vì y_n dần đến vô cùng nên tồn tại $N_2 > N_1$ sao cho:

$$\frac{[x_{N_1} - (A-\varepsilon)y_{N_1-1}]}{y_n} > -\varepsilon \text{ và } \frac{[x_{N_1} - (A+\varepsilon)y_{N_1-1}]}{y_n} < \varepsilon$$

với mọi $n > N_2$. Khi đó với mọi $n > N_2$ ta có $A - 2\varepsilon < \frac{x_n}{y_n} < A + 2\varepsilon$ và điều này có nghĩa là $\lim \frac{x_n}{y_n} = A$.

<u>Câu hỏi</u>: Điều kiện y_n tăng và dần đến vô cùng có cần thiết không?

<u>Ví dụ:</u> Chứng minh rằng nếu dãy số $\{x_n\}$ thoả mãn điều kiện $x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} \geq 0$ và $k_1, k_2, ..., k_r$ là các số tự nhiên thoả mãn điều kiện $k_1 + k_2 + ... + k_r = r.k$ thì:

$$x_{k_1} + x_{k_2} + ... + x_{k_r} \geq r.x_k$$

(So sánh với bất đẳng thức Jensen)

<u>Ví dụ:</u> Cho dãy số $\{x_n\}$ thoả mãn điều kiện $x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1} \geq 0$ với mọi $k = 1, 2, ..., n$ Ngoài ra $x_0 = x_{n+1} = 0$. Chứng minh rằng $x_k \leq 0$ với mọi $k = 1, 2, ..., n$.
(Đạo hàm bậc hai không âm, suy ra đạo hàm bậc nhất là hàm tăng và chỉ có nhiều nhất một nghiệm, suy ra chiều biến thiên của hàm số chỉ có thể là 0 giảm đến cực tiểu rồi tăng lên 0).

<u>Ví dụ:</u> Cho dãy số dương $\{a_n\}$. Biết rằng tồn tại giới hạn $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = A < +\infty$.

Đặt $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

Chứng minh rằng tổng $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2 a_k}{s_k^2}$ cũng có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$.

<u>Giải</u>: Dịch sang ngôn ngữ hàm số, ta có bài toán sau "Nếu $f(x)$ là hàm số tăng từ $\mathbb{R}^+$ vào $\mathbb{R}^+$ và tồn tại tích phân suy rộng $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{f(x)}$ thì cũng tồn tại tích phân $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 f(x)dx}{F^2(x)}$ trong đó $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$." Bài này có thể giải bằng phương pháp tích phân từng phần như sau:

$$\int_0^A \frac{xdx}{F(x)} = \frac{1}{2}\int_0^A \frac{d(x^2)}{F(x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{F(x)}\Bigg|_0^A + \int_0^A \frac{x^2 f(x)dx}{F^2(x)} \right)$$

như vậy chỉ cần chứng minh tồn tại $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{F(x)}$ và $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{F(x)}$.

<u>Câu hỏi:</u>
1) Định lý Rolle có dạng rời rạc như thế nào?
2) Công thức tính tích phân từng phần có dạng rời rạc như thế nào?

4.2. Sử dụng xấp xỉ trong dự đoán kết quả

Trong nhiều trường hợp, dự đoán được kết quả đã là một nửa, thậm chí 2/3 lời giải. Chúng ta đã gặp nhiều tình huống là lời giải đầu tiên thu được một cách rất khó khăn, nhưng sau đó thì hàng loạt lời giải đẹp hơn, gọn hơn xuất hiện. Vì sao chúng ta không nghĩ ngay được những lời giải đẹp? Vì chúng ta chưa biết đáp số. Khi biết rồi thì có thể định hướng dễ dàng hơn rất nhiều. Dưới đây, chúng ta sẽ xem xét một số ứng dụng của xấp xỉ trong việc dự đoán kết quả.

Trong ví dụ về dãy số $x_{n+1} = \sin(x_n)$, chúng ta đã áp dụng định lý trung bình Cesaro để tìm giới hạn $\sqrt{n}x_n$, mặc dù dãy số không có dạng quen thuộc $x_{n+1} = x_n \pm (x_n)^\alpha$. Thế nhưng, nếu để ý rằng $x_n \to 0$ khi $n \to \infty$, mà tại lân cận 0 thì $\sin x \sim x - \frac{x^3}{6}$ thì ta sẽ thấy tính quy luật của kết quả đã tìm được ở trên.

Với phương pháp tương tự, ta có thể thấy dãy dạng $x_{n+1} = x_n \pm (x_n)^\alpha$. ở hàng loạt các dãy số có bề ngoài khác hẳn như:
$x_{n+1} = \ln(1+x_n), x_{n+1} = x_n \cos x_n, x_{n+1} = \arctan(x_n)...$
(Dĩ nhiên, phải kiểm tra điều kiện $x_n \to 0$ khi $n \to \infty$)

Ta cũng có thể giải thích được vì sao trong bài toán $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{\sqrt{a_n}}$ ở phần trên, ta đã tìm được số $\frac{3}{2}$. Ta có $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{\sqrt{a_n}} = a_n\left(1 + \frac{1}{a_n^{\frac{3}{2}}}\right)$. Vì $a \to \infty$ khi $n \to \infty$ nên với mọi β ta có $a_{n+1}^\beta = a_n^\beta\left(1+\frac{1}{a_n^{\frac{3}{2}}}\right)^\beta \sim a_n^\beta\left(1+\frac{\beta}{a_n^{\frac{3}{2}}}\right) = a_n^\beta + \beta a_n^{\beta-\frac{3}{2}}$

Do đó để hiệu số này xấp xỉ hằng số, ta chọn $\beta = \frac{3}{2}$.

Ta xét một ví dụ khác :

<u>Ví dụ:</u> (ĐHSP, 2000) Cho dãy số $\{a_n\}$ xác định bởi: $a_1 = a_2 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{a_{n-1}}{n(n+1)}$

Chứng minh rằng dãy $\{a_n\}$ có giới hạn.

<u>Giải:</u> Dễ thấy $\{a_n\}$ là dãy tăng. Vì vậy ta chỉ cần chứng minh dãy $\{a_n\}$ bị chặn trên.
Ta có

$$a_{n+1} = a_n + \frac{a_{n-1}}{n(n+1)} < a_n\left[1 + \frac{1}{n(n+1)}\right]$$

Từ đây suy ra

$$a_{n+1} < \left[1+\frac{1}{n(n+1)}\right]...\left[1+\frac{1}{2.3}\right]a_2 = \left[1+\frac{1}{n(n+1)}\right]...\left[1+\frac{1}{2.3}\right]$$

Như vậy ta chỉ cần chứng minh tích $\left[1+\frac{1}{n(n+1)}\right]...\left[1+\frac{1}{2.3}\right]$ bị chặn. Kết quả này không phức tạp và có thể chứng minh hoàn toàn sơ cấp. Tuy nhiên, những kinh nghiệm về dãy số $\frac{1}{n(n+1)}$ gợi cho chúng ta tới mối quan hệ giữa tích trên và tổng $\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n+1)}$. Theo hướng đó, chúng ta có thể đưa ra một kết quả tổng quát hơn và kết quả đó được dự đoán từ việc sử dụng xấp xỉ.

Giả sử rằng $\{x_n\}$ là dãy số thực sao cho tổng $x_1+...+x_n$ có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$. Khi đó $x_n \to 0$ khi $n \to +\infty$. Vì vậy, với n đủ lớn thì $x_n \sim \ln(1+x_n)$. Do đó tổng $\ln(1+x_1)+...+\ln(1+x_n)$ cũng có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$ và có nghĩa là tích $(1+x_1)...(1+x_n)$ cũng vậy. Ta có định lý:

<u>Định lý:</u> Cho dãy số thực $\{x_n\}$. Khi đó nếu tổng $x_1+...+x_n$ có giới hạn hữu hạn khi $n \to \infty$ thì tích $(1+x_1)...(1+x_n)$ cũng có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$.

<u>Câu hỏi:</u>

1) Mệnh đề đảo của định lý trên có đúng không?

2) Cho $n > 3$ và x_n là nghiệm dương duy nhất của phương trình $x^n - x^2 - x - 1 = 0$. Có thể dự đoán được $\lim\limits_{n\to\infty} n(x_n - 1)$?

5. Bài tập áp dụng cuối chương

Bài 1. Cho dãy số $\{a_n\}$ thỏa: $a_1 = 5, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}, n = 1,2,3,...$

Chứng minh rằng: $45 < a_{1000} < 45,1$.

Bài 2. Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 1, \quad u_2 = 2 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n \end{cases}, n = 1,2,3,...$$

Đặt $x_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}, \quad n = 1,2,3,....$ Tính giới hạn : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Bài 3. Cho dãy số $\{u_n\}$ thỏa mãn $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{2n} + u_{2n+1}) = 2010$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{2n} + u_{2n-1}) = 2011$.

Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{2n}}{u_{2n+1}}$.

Bài 4. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = u_2 = 1, u_{n+1} = 4u_n - 5u_{n-1}$ với mọi $n \ge 2$.

Chứng minh rằng với mọi số thực $a > \sqrt{5}$, ta đều có: $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{u_n}{a^n}) = 0$.

Bài 5. Tính giới hạn sau: $\lim \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Bài 6. Cho dãy số thực $\{u_n\}$ thỏa: $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \ge 1 \\ \forall p,q \in \mathbb{N}^*, u_{p+q} \le u_p.u_q \end{cases}$

Xét $v_n = \frac{\ln u_n}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng: $\{v_n\}$ hội tụ.

Bài 7. Cho dãy số dương $\{a_n\}$ thỏa mãn: $a_1 > 0,\ a_{n+1}^p \ge a_1 + a_1 + ... + a_n, \forall n \ge 1$ với $0 < p < 2$.

Chứng minh rằng tồn tại $c > 0$ sao cho $a_n > nc, \forall n$.

Bài 8. Khảo sát sự hội tụ của dãy:

$$u_0 = a \in \mathbb{R}, u_{n+1} = \sqrt[3]{7u_n - 6}, n = 0,1,2,...$$

Bài 9. Cho $\alpha \in (0,2)$. Tính giới hạn của dãy sau theo các giá trị $u_0,\ u_1$ cho trước:

$$u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + (1-\alpha)u_n,\ n = 0,1,2,...$$

<u>Bài 10</u>. Cho a là số thực dương bất kì lớn hơn 1. Tính $\lim \frac{n}{a^{n+1}}\left(a+\frac{a^2}{2}+...+\frac{a^n}{n}\right)$.

<u>Bài 11</u>. Tìm tất cả các giá trị của a để dãy số $\{x_n\}$ được xác định bởi :

$$x_0=\sqrt{1996},\ x_{n+1}=\frac{a}{x_n^2+1},\ n=0,\ 1,\ 2,\ ...$$

có giới hạn hữu hạn khi n dần tới vô cùng.

<u>Bài 12</u>. Cho là dãy số thực $\{a_n\}$ thỏa mãn: $e^{a_n}+n.a_n=2,\forall n$.

Chứng minh rằng: $\lim n(1-n.a_n)=1$.

<u>Bài 13.</u> Cho dãy thực dương $\{x_n\}$ được xác định bởi:

$x_1=1,\ x_2=9,\ x_3=9,\ x_4=1,\ x_{n+4}=\sqrt[4]{x_n.x_{n+1}.x_{n+2}.x_{n+3}},\ n\ge 1$.

Chứng minh dãy này có giới hạn hữu hạn. Tìm tới hạn đó.

Tài liệu tham khảo

1) Jean-Marie Monier, Giải tích 1, 2, 3, 4, NXBGD 1999-2000.
2) Lê Hải Châu: Tuyển tập các đề thi toán quốc tế.
3) Titu Andreescu, Razvan Gelca: Mathematical Olympiad Challenges, Birkhauser 2000.
4) A. Gardiner, The Mathematical Olympiad Hanbook, Oxford, 1997.
5) Titu Andreescu, Zuming Feng: Mathematical Olympiads 1998-1999, 1999-2000, 2000-2001, MAA, 2000-2002
6) Arthur Engel: Problem-Solving Strategies, Springer 1997
7) G.Polya, G.Szego: Các bài tập và định lý của giải tích, Nauka 1977 (Tiếng Nga)
8) Cupsov, Nesterenko ...: Thi vô địch toán toàn Liên Xô, Prosvesenie, 1999 (Tiếng Nga)
9) 400 bài toán từ American Mathematical monthly, Mir, 1977 (Tiếng Nga)
10) Đề thi toán của Việt Nam, các nước và khu vực
11) Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ (THTT), Parabola, Kvant, American Mathematical monthly (AMM).

Trần Nam Dũng - ĐHKHTN TP Hồ Chí Minh
227 Nguyễn Văn Cừ, Quận 5, TP Hồ Chí Minh
Email: namdung@fpt.com.vn, namdung@fsoft.com.vn

http://www.unipd.it/en/doctorates/grants.htm

http://www.math.unipd.it/~daipra/Paolo%20Dai%20Pra.html