

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 19

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) = 3x^2 - 6x \int_0^1 |f(x)| dx$ và $\frac{2}{5} < \int_0^1 |f(x)| dx \leq \frac{1}{2}$. Giá trị của $f(3)$ bằng

- A. 6. B. - 6. C. 18. D. - 18.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\int_0^1 |f(x)| dx = m \Rightarrow \frac{2}{5} < m \leq \frac{1}{2}$

Khi đó $f(x) = 3x^2 - 6mx$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$

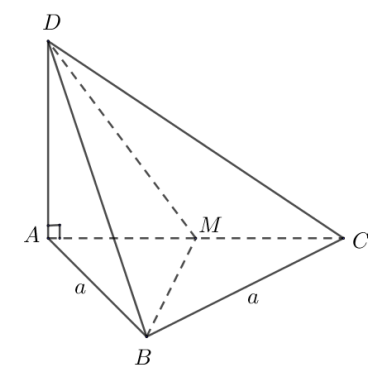
Do $\frac{2}{5} < m \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{4}{5} < 2m \leq 1$ nên $\int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 |3x^2 - 6mx| dx$

$\Rightarrow m = - \int_0^{2m} (3x^2 - 6mx) dx + \int_{2m}^1 (3x^2 - 6mx) dx \Rightarrow m = - (x^3 - 3mx^2) \Big|_0^{2m} + (x^3 - 3mx^2) \Big|_{2m}^1$

$\Rightarrow 8m^3 - 4m + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} (tm) \\ m = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} (loai) \end{cases}$

Vậy $f(x) = 3x^2 - 3x \Rightarrow f(3) = 18.$

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$, tam giác ABC vuông cân tại B , $DA \perp (ABC)$, M là trung điểm của cạnh AC , $AB = a$, góc giữa đường thẳng CD với mặt phẳng (BDM) bằng α biết $\sin \alpha = \frac{1}{3}$. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng



- A. $\frac{a^3}{6}$. B. $\frac{a^3}{3}$. C. $\frac{a^3 \sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Tam giác ABC vuông cân tại B có M là trung điểm của cạnh AC nên

$$BM \perp (ACD) \Rightarrow (BMD) \perp (ACD)$$

Mà $(BMD) \cap (ACD) = DM$ nên hình chiếu của đường thẳng CD lên mặt phẳng (BDM) là đường thẳng DM , suy ra góc giữa đường thẳng CD với mặt phẳng (BDM) là góc $\angle CDM \Rightarrow \angle CDM = \alpha$.

Giả sử $AD = x$

$$\frac{MC}{\sin \alpha} = \frac{DM}{\sin \angle BCM} \Rightarrow \frac{MC}{\frac{1}{3}} = \frac{DM}{\frac{AD}{DC}}$$

Ta có

$$\Rightarrow 3MC \cdot AD = DM \cdot DC \Rightarrow 3 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot x = \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{2}} \cdot \sqrt{x^2 + 2a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{9}{2}a^2x^2 = x^4 + \frac{5}{2}a^2x^2 + a^4 \Leftrightarrow x^4 - 2a^2x^2 + a^4 = 0 \Leftrightarrow x = a.$$

$$V_{D.ABC} = \frac{1}{3}AD \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}a \cdot \frac{1}{2}a^2 = \frac{a^3}{6}.$$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 2$ và điểm $A(1;2;3)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S) , M luôn thuộc mặt phẳng có phương trình là

A. $2x + 2y + 2z + 15 = 0$ **B.** $2x + 2y + 2z - 15 = 0$

C. $x + y + z + 7 = 0$ **D.** $x + y + z - 7 = 0$

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;4)$ bán kính $r = \sqrt{2}$.

Do AM là tiếp tuyến của mặt cầu (S) nên $IM \perp AM \Rightarrow AM = \sqrt{AI^2 - IM^2}$

Ta có $AI = \sqrt{3}; IM = \sqrt{2} \Rightarrow AM = 1$.

Gọi H là tâm đường tròn tạo bởi các tiếp điểm M khi đó ta có ΔAHM đồng dạng với ΔAMI

$$\text{Suy ra } \frac{AH}{AM} = \frac{AM}{AI} \Rightarrow AH = \frac{AM^2}{AI} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Gọi (α) là mặt phẳng chứa các tiếp điểm M . Khi đó (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = \vec{AI} = (1;1;1)$ nên phương trình có dạng $x + y + z + d = 0$

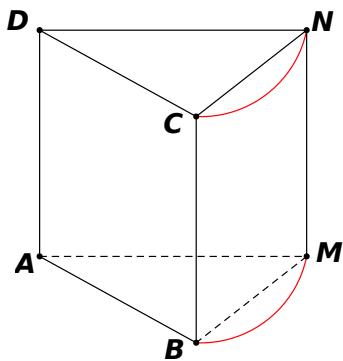
$$\text{Do } d(A, (\alpha)) = AH \Leftrightarrow \frac{|6+d|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow |6+d| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} d = -5 \\ d = -7 \end{cases}$$

Vậy $(\alpha_1): x + y + z - 5 = 0; (\alpha_2): x + y + z - 7 = 0$

Do $d(I, (\alpha_1)) = \frac{4}{\sqrt{3}} > \sqrt{2}$ nên (α_1) không cắt (S)

Và $d(I, (\alpha_2)) = \frac{2}{\sqrt{3}} < \sqrt{2}$ nên (α_2) cắt (S)

Câu 4: Cho hình vuông $ABCD$ quay quanh cạnh AD một góc 45° , tạo thành khối (T) như hình vẽ, biết $AB = 1$. Mặt phẳng $(BCNM)$ chia khối (T) thành hai khối có thể tích tương ứng V_1, V_2 .



Giá trị $\min\{V_1; V_2\}$ bằng

A. $\frac{\pi - \sqrt{2}}{8}$

B. $\frac{\pi(2 - \sqrt{2})}{12}$

C. $\frac{\pi - 2\sqrt{2}}{8}$

D. $\frac{\pi(\sqrt{2} - 1)}{12}$

Lời giải

Chọn C

Diện tích mặt của khối (T) là $S = \frac{\pi \cdot AB^2 \cdot 45}{360} = \frac{\pi}{8}$

Thể tích khối (T) là $V = S \cdot AD = \frac{\pi}{8}$

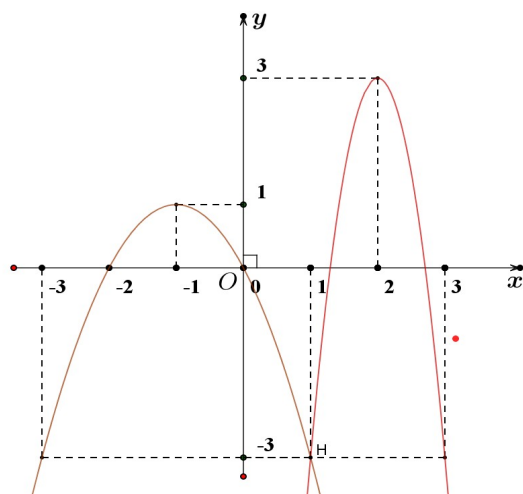
Xét khối lăng trụ $ABM.DCN$ với đáy có diện tích $S_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AM \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Khi đó khối lăng trụ $ABM.DCN$ có thể tích $V_1 = S_{ABM} \cdot AD = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Suy ra khối còn lại có thể tích $V_2 = V - V_1 = \frac{\pi}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\pi - 2\sqrt{2}}{8}$

Ta có $V_1 > V_2$ nên $\min\{V_1; V_2\} = V_2 = \frac{\pi - 2\sqrt{2}}{8}$

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$, đồ thị $y = f'(x)$ là đường cong trong hình dưới. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - 4x^2 - 6x - 2$ trên đoạn $[-1; 1]$.



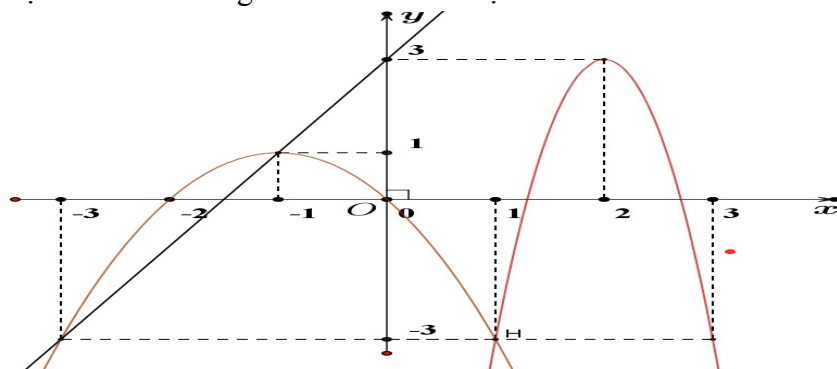
- A. $f(4) - 30$ B. $f(2) - 12$ C. $f(-1)$ D. $f(-2) - 12$

Lời giải

Chọn C

$$g'(x) = 2f'(2x) - 8x - 6; g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(2x) = 4x + 3 \Leftrightarrow f'(2x) = 2(2x) + 3(1)$$

Số nghiệm của ⁽¹⁾ là số giao điểm của đồ thị $y = f'(x)$ và $y = 2x + 3(d)$ trên $[-2; 2]$



Bảng biến thiên

x	-1	$-\frac{1}{2}$	1
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$f(-2)$ ↗ $f(-1)$ ↑ $f(2) - 12$ ↘		

Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - 4x^2 - 6x - 2$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng $f(-1)$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x+1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} \log_3(x+1) + x - 3 > 0 \\ \log_5 x - y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x+1) + x - 3 > 0 \\ y > \log_5 x \end{cases} \quad (I)$$

Xét bất phương trình $\log_3(x+1) + x - 3 > 0$ trên $(0; +\infty)$

Đặt $f(x) = \log_3(x+1) + x - 3$ với $x > 0$.

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)\ln 3} + 1, \forall x > 0$$

Ta có

Suy ra $f'(x) > 0, \forall x \in (0; +\infty)$ nên hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

Do đó $\log_3(x+1) + x - 3 > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(2) \Leftrightarrow x > 2$

và $\log_3(x+1) + x - 3 < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(2) \Leftrightarrow x < 2$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ y > \log_5 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \quad (*) \\ x < 5^y \quad (**) \end{cases} \quad (II)$$

Khi đó

Do y là số nguyên dương nên $5^y > 2$.

Khi đó $(II) \Leftrightarrow (*) \Leftrightarrow 2 < x < 5^y$ (vì $(**)$ vô nghiệm).

Suy ra cho ứng với mỗi y có không quá 10000 số nguyên x thỏa mãn bài toán $\Leftrightarrow 5^y \leq 10003$.

Vậy $1 \leq y \leq \log_5 10003$. Do y nguyên dương nên $y \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Câu 8: Cho $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ thỏa mãn $|z_1 + 2 - i| = |z_2 + 1 - i| = 1$ và $|z_1 - 2z_2 + i| = \sqrt{3}$. Giá trị nhỏ nhất của $|2z_1 + z_2 + 1| = a + b\sqrt{c}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}, c \leq 20$. Giá trị $a + b + c$ bằng

A. 10.

B. 11.

C. 7.

D. 12.

Lời giải

Chọn B

Đặt $w_1 = z_1 + 2 - i, w_2 = z_2 + 1 - i$. Từ giả thiết ta có: $|w_1| = |w_2| = 1$ và $|w_1 - 2w_2| = \sqrt{3}$. Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $P = |2z_1 + z_2 + 1| = |2w_1 + w_2 - 4 + 3i|$.

$$\text{Ta có: } |w_1 - 2w_2| = \sqrt{3} \Leftrightarrow |w_1 - 2w_2|^2 = 3 \Leftrightarrow (w_1 - 2w_2)(\overline{w_1 - 2w_2}) = 3$$

$$\Leftrightarrow (w_1 - 2w_2)(\overline{w_1} - 2\overline{w_2}) = 3 \Leftrightarrow w_1\overline{w_1} + 4w_2\overline{w_2} - 2(w_1\overline{w_2} + w_2\overline{w_1}) = 3$$

$$\Leftrightarrow |w_1|^2 + 4|w_2|^2 - 2(w_1\bar{w}_2 + w_2\bar{w}_1) = 3 \Leftrightarrow 1 + 4 - 2(w_1\bar{w}_2 + w_2\bar{w}_1) = 3 \Leftrightarrow w_1\bar{w}_2 + w_2\bar{w}_1 = 1.$$

Do đó: $|2w_1 + w_2|^2 = (2w_1 + w_2)(\overline{2w_1 + w_2}) = (2w_1 + w_2)(2\bar{w}_1 + \bar{w}_2)$

$$= 4w_1\bar{w}_1 + w_2\bar{w}_2 + 2(w_1\bar{w}_2 + w_2\bar{w}_1) = 4|w_1|^2 + |w_2|^2 + 2(w_1\bar{w}_2 + w_2\bar{w}_1) = 7 \Rightarrow |2w_1 + w_2| = \sqrt{7}.$$

Suy ra tập hợp các điểm M biểu diễn số phức $2w_1 + w_2$ là đường tròn tâm O , bán kính $R = \sqrt{7}$.

Gọi $A(4; -3)$ là biểu diễn của số phức $4 - 3i$, dễ thấy A nằm ngoài đường tròn (O, R) .

Ta có: $P = |2w_1 + w_2 - 4 + 3i| = MA \geq OA - R = 5 - \sqrt{7}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi O, M, A thẳng hàng.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $5 - \sqrt{7} = a + b\sqrt{c}$, với $a = 5, b = -1, c = 7$. Giá trị $a + b + c = 11$.

Câu 9: Trong không gian Oxyz. Cho phương trình mặt cầu $(S): (x+1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$;

$(S'): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ và đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 \\ y = 8 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$ mặt phẳng (α) tiếp xúc với hai mặt cầu (S) và (S') . Gọi $M \in (\alpha); N \in \Delta$ sao cho MI luôn tiếp xúc với mặt cầu (S') , với $M(-2; 0; 1)$. Độ dài đoạn thẳng MN nhỏ nhất bằng $a\sqrt{2} - \sqrt{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}$. Giá trị $a + b$ bằng

A. 9.

B. 8.

C. 7.

D. 6.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào số liệu của đề bài chứng minh được:

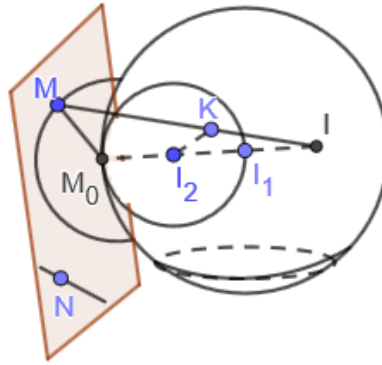
+ (S) và (S') tiếp xúc chung trong. Tâm I_1 của mặt cầu (S) , điểm này thuộc (S') .

+ Mặt phẳng (α) tiếp xúc với hai mặt cầu (S) và (S') có tiếp điểm M_0 đối xứng với I_1 qua I_2 . Từ đó ta tính được $M_0(1; 0; 1) \Rightarrow n_{(\alpha)} = \overrightarrow{I_1M_0} = \overrightarrow{I_1M_0}(2; 0; 0) \Rightarrow PT(\alpha): x - 1 = 0$. Nên $\Delta \subset (\alpha)$

+ $M \in (\alpha)$ sao cho MI luôn tiếp xúc với mặt cầu (S') tại $K \Rightarrow \frac{MM_0}{I_2K} = \frac{IK}{I_0I} = \frac{\sqrt{I_2I^2 - I_2K}}{I_0I}$

$\Rightarrow MM_0 = \frac{I_2K\sqrt{I_2I^2 - I_2K}}{I_0I} = \sqrt{3} \Rightarrow M \in$ thuộc đường tròn tâm M_0 , bán kính $\sqrt{3}$

+ MN ngắn nhất khi $MN = d(M_0, \Delta) - \sqrt{3} = 3\sqrt{2} - \sqrt{3} \Rightarrow a = 3, b = 3 \Rightarrow a + b = 6$



Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	0	-4	$+\infty$	

Phương trình $\left| f(8x^4 - 8x^2 + 1) \right| = \frac{1}{2}$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 8.

B. 12.

C. 6.

D. 10.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $t = t(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$

$$t' = 32x^3 - 16x; t' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Ta có

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
t'	$-$	0	$+$	0	$+$
t	$+\infty$	-1	1	-1	$+\infty$

$$\left| f(8x^4 - 8x^2 + 1) \right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} f(8x^4 - 8x^2 + 1) = \frac{1}{2} \\ f(8x^4 - 8x^2 + 1) = -\frac{1}{2} \end{cases} (*)$$

Ta có

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x^4 - 8x^2 + 1 = a \ (a > 1) & (1) \\ 8x^4 - 8x^2 + 1 = b \ (b < -1) & (2) \\ 8x^4 - 8x^2 + 1 = c \ (-1 < c < 1) & (3) \\ 8x^4 - 8x^2 + 1 = d \ (d > 1, d \neq a) & (4) \end{cases}$$

Từ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$, ta có (*)

Từ bảng biến thiên của hàm số $t = t(x)$, ta thấy ⁽¹⁾ có hai nghiệm phân biệt; ⁽²⁾ vô nghiệm; ⁽³⁾ có bốn nghiệm phân biệt; ⁽⁴⁾ có hai nghiệm phân biệt (các nghiệm này không trùng nhau).
 Vậy phương trình đã cho có 8 nghiệm thực phân biệt.