

Người làm: Lê Thị Phụng

Zalo: Lê Phụng - số đt zalo: 0372639291

Email: lephuong2810@gmail.com

CD9: TỈ LỆ THỨC VÀ DÃY TỈ SỐ BẰNG NHAU

Dạng 1. Tìm số hạng chưa biết dựa vào tỉ lệ thức

Dạng 2. Chứng minh đẳng thức

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường THCS Tân Tiến 2022 - 2023)

Cho $a, b, c, d \neq 0$, thỏa mãn: $b^2 = ac$; $c^2 = bd$; $b^3 + c^3 + d^3 \neq 0$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3} = \frac{a}{d}$.

Lời giải

Ta có:
$$\begin{cases} b^2 = ac \\ c^2 = bd \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{b}{c} \\ \frac{b}{c} = \frac{c}{d} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a^3}{b^3} = \frac{b^3}{c^3} = \frac{c^3}{d^3}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có: $\frac{a^3}{b^3} = \frac{b^3}{c^3} = \frac{c^3}{d^3} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3}$ (1)

Từ $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a^3}{b^3} = \frac{a}{d}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3} = \frac{a}{d}$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Kim Trung 2022 - 2023)

Cho $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng: $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3} = \frac{a}{d}$.

Lời giải

Ta có: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \left(\frac{b}{c}\right)^3 = \left(\frac{c}{d}\right)^3 \Rightarrow \frac{a^3}{b^3} = \frac{b^3}{c^3} = \frac{c^3}{d^3}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a^3}{b^3} = \frac{b^3}{c^3} = \frac{c^3}{d^3} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3} \quad (1)$$

Lại có: $\frac{a^3}{b^3} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}$ và $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$

Do đó suy ra: $\frac{a^3}{b^3} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{d}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3} = \frac{a}{d}$.

Câu 3. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Bùi Hữu Diên 2022 - 2023)

b) Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, hãy suy ra tỉ lệ thức $\frac{7a^2 + 8ab}{13a^2 - 6b^2} = \frac{7c^2 + 8cd}{13c^2 - 6d^2}$.

Lời giải

Ta có $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2}{d^2}$

Lại có $\frac{a^2}{c^2} = \frac{a}{c} \cdot \frac{a}{c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$

Do đó $\frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2}{d^2} = \frac{ab}{cd}$

Suy ra $\frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2}{d^2} = \frac{ab}{cd} = \frac{7a^2}{7c^2} = \frac{13a^2}{13c^2} = \frac{6b^2}{6d^2} = \frac{8ab}{8cd}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{7a^2}{7c^2} = \frac{13a^2}{13c^2} = \frac{6b^2}{6d^2} = \frac{8ab}{8cd} = \frac{7a^2 + 8ab}{7c^2 + 8cd} = \frac{13a^2 - 6b^2}{13c^2 - 6d^2}$$

$$\text{Từ } \frac{7a^2 + 8ab}{7c^2 + 8cd} = \frac{13a^2 - 6b^2}{13c^2 - 6d^2} \Rightarrow \frac{7a^2 + 8ab}{13a^2 - 6b^2} = \frac{7c^2 + 8cd}{13c^2 - 6d^2} \quad (\text{đpcm}).$$

Câu 4. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Trần Thủ Độ 2022 - 2023)

Cho $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng $\left(\frac{a+b+c}{b+c+d} \right)^3 = \frac{a^3+b^3+c^3}{b^3+c^3+d^3}$.
(Giả sử các tỉ số đều có nghĩa)

Lời giải

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{a+b+c}{b+c+d} \Rightarrow \frac{a^3}{b^3} = \frac{b^3}{c^3} = \frac{c^3}{d^3} = \left(\frac{a+b+c}{b+c+d} \right)^3 \quad (1)$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a^3}{b^3} = \frac{b^3}{c^3} = \frac{c^3}{d^3} = \frac{a^3+b^3+c^3}{b^3+c^3+d^3} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow \left(\frac{a+b+c}{b+c+d} \right)^3 = \frac{a^3+b^3+c^3}{b^3+c^3+d^3}$$

Câu 5. (HSG 7 huyện Tam Điệp 2021 - 2022)

Cho $a, b, c \neq 0$ thỏa mãn $b^2 = ac$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{c} = \frac{(a+2022b)^2}{(b+2022c)^2}$

Lời giải

$$\text{Ta có } b^2 = ac \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{2022b}{2022c}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a}{b} = \frac{2022b}{2022c} = \frac{a+2022b}{b+2022c} \Rightarrow \frac{(a+2022b)^2}{(b+2022c)^2} = \left(\frac{a}{b} \right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$$

$$\text{Vậy } \frac{a}{c} = \frac{(a+2022b)^2}{(b+2022c)^2}$$

Câu 6. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2021 - 2022)

Cho dãy tỉ số bằng nhau $\frac{2bz - 3cy}{a} = \frac{3cx - az}{2b} = \frac{ay - 2bx}{3c}$ (với $a, b, c \neq 0$).

Chứng minh $\frac{x}{a} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{3c}$.

Lời giải

Ta có : $\frac{2bz - 3cy}{a} = \frac{3cx - az}{2b} = \frac{ay - 2bx}{3c}$ và $a, b, c \neq 0$

$$\begin{aligned} &= \frac{a(2bz - 3cy)}{a \cdot a} = \frac{2b(3cx - az)}{2b \cdot 2b} = \frac{3c(ay - 2bx)}{3c \cdot 3c} \\ &= \frac{2abz - 3acy}{a^2} = \frac{6bcx - 2abz}{4b^2} = \frac{3acy - 6bcx}{9c^2} \\ &= \frac{2abz - 3acy + 6bcx - 2abz + 3acy - 6bcx}{a^2 + 4b^2 + 9c^2} = 0 \end{aligned}$$

(Vì $a, b, c \neq 0$ nên $a^2 + 4b^2 + 9c^2 \neq 0$)

$$* \frac{2bz - 3cy}{a} = 0 \Rightarrow 2bz - 3cy = 0 \Rightarrow \frac{y}{2b} = \frac{z}{3c} \quad (1)$$

$$* \frac{3cx - az}{2b} = 0 \Rightarrow 3cx - az = 0 \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{z}{3c} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{x}{a} = \frac{y}{2b} = \frac{z}{3c}$ (đpcm).

Câu 7. (HSG 7 tỉnh Bắc Giang, huyện Lục Ngạn 2020 – 2021)

Cho dãy tỉ số: $\frac{ab + ac}{2} = \frac{bc + ba}{3} = \frac{ca + cb}{4}$. Chứng minh: $\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{15}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{ab + ac}{2} &= \frac{bc + ba}{3} = \frac{ca + cb}{4} = \frac{ab + ac - (bc + ba) + ca + cb}{2 - 3 + 4} \\ &= \frac{ab + ac + bc + ba - (ca + cb)}{2 + 3 - 4} = \frac{-(ab + ac) + ba + bc + ca + cb}{-2 + 3 + 4} \\ &= \frac{2ac}{3} = 2ab = \frac{2bc}{5} \end{aligned}$$

Do đó:

$$+) \frac{2ac}{3} = 2ab \Rightarrow \frac{c}{3} = b$$

$$+) \frac{2ac}{3} = \frac{2bc}{5} \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{5}$$

$$+) 2ab = \frac{2bc}{5} \Rightarrow a = \frac{c}{5} \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{c}{15}$$

$$\text{Vậy } \frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{15}.$$

Câu 8. (HSG 7 tỉnh Nam Định, huyện Ý Yên 2021– 2022)

Cho x, y, z là các số nguyên dương và $x+y+z$ là số lẻ, các số thực a, b, c thỏa mãn:

$$\frac{a-b}{x} = \frac{b-c}{y} = \frac{a-c}{z}.$$

Chứng minh rằng: $a=b=c$.

Lời giải

$$\frac{a-b}{x} = \frac{b-c}{y} = \frac{a-c}{z}.$$

Theo đề bài:

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a-b}{x} = \frac{b-c}{y} = \frac{a-c}{z} = \frac{a-b+b-c+a-c}{x+y+z} = \frac{2a-2c}{x+y+z} \quad (1)$$

$$\text{Và } \frac{a-b}{x} = \frac{b-c}{y} = \frac{a-b+b-c}{x+y} = \frac{a-c}{x+y} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) (2)} \Rightarrow \frac{2(a-c)}{x+y+z} = \frac{a-c}{x+y} \quad (3)$$

Nếu $a-c \neq 0$; Từ (3) $\Rightarrow 2(x+y) = x+y+z$. (Vô lý vì $(x+y+z)$ lẻ (theo đề bài); còn $2(x+y)$ luôn chẵn với mọi x, y).

Do đó $a-c=0$. Thay vào dãy tỉ số đã cho ta được

$$\frac{a-b}{x} = \frac{b-c}{y} = \frac{0}{z} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ b-c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=b \\ b=c \end{cases}$$

Vậy $a=b=c$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

Câu 9. (HSG 7 huyện An Nhơn 2021– 2022)

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{b}. \text{ Chứng minh rằng: } \frac{a^2+c^2}{b^2+c^2} = \frac{a}{b}.$$

Cho

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{a}{c} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{a^2}{c^2} = \frac{c^2}{b^2}$$

$$\text{Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có: } \frac{a^2}{c^2} = \frac{c^2}{b^2} = \frac{a^2+c^2}{c^2+b^2} \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } \frac{a^2}{c^2} = \frac{a}{c} \cdot \frac{a}{c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{a^2+c^2}{b^2+c^2} = \frac{a}{b}.$$

Dạng 3. Chứng minh bất đẳng thức

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình 2021 - 2022)

Cho ba phân số tối giản có tổng bằng $4\frac{9}{40}$; các tử của chúng tỉ lệ với $2; 3; 5$, còn các mẫu số tương ứng tỉ lệ với $5; 4; 3$. Chứng minh rằng trong ba phân số có một phân số nhỏ hơn 1.

Lời giải

Gọi ba phân số cần tìm là x, y, z (Đk: $x, y, z \neq 0$).

Theo bài ra ba phân số tối giản có tổng bằng $4\frac{9}{40}$ nên $x + y + z = 4\frac{9}{40}$.

Lại có các tử của chúng tỉ lệ với $2; 3; 5$ còn các mẫu số tương ứng tỉ lệ với $5; 4; 3$ nên x, y, z tỉ lệ

với $\frac{2}{5}; \frac{3}{4}; \frac{5}{3}$ hay $\frac{x}{\frac{2}{5}} = \frac{y}{\frac{3}{4}} = \frac{z}{\frac{5}{3}}$.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{\frac{2}{5}} = \frac{y}{\frac{3}{4}} = \frac{z}{\frac{5}{3}} = \frac{x+y+z}{\frac{2}{5} + \frac{3}{4} + \frac{5}{3}} = \frac{4\frac{9}{40}}{\frac{169}{40}} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Suy ra } x = \frac{3}{5}; y = \frac{9}{8}; z = \frac{5}{2}.$$

Vì $x = \frac{3}{5} < 1$; $y = \frac{9}{8} > 1$; $z = \frac{5}{2} > 1$ nên trong ba phân số có một phân số nhỏ hơn.

Dạng 4. Bài toán về dãy tỉ số bằng nhau và chia tỉ lệ

Câu 1. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường THCS Tân Tiến 2022 - 2023)

Tìm $x; y; z$ biết: $3x = 4y = 6z$ và $x - y + z = -15$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 3x = 4y = 6z \Rightarrow \frac{3x}{12} = \frac{4y}{12} = \frac{6z}{12} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}$$

$$\text{Mà } x - y + z = -15$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta được:

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2} = \frac{x - y + z}{4 - 3 + 2} = \frac{-15}{3} = -5$$

Do đó:

$$x = -5.4 = -20$$

$$y = -5.3 = -15$$

$$z = -5.2 = -10$$

Vậy $x = -20$; $y = -15$; $z = -10$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Kim Trung 2022 - 2023)

Tìm a, b, c biết: $\frac{a-1}{2} = \frac{b+3}{4} = \frac{c-5}{6}$ và $5a - 3b - 4c = 46$.

Lời giải

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a-1}{2} = \frac{b+3}{4} = \frac{c-5}{6} = \frac{5(a-1)}{5.2} = \frac{3(b+3)}{3.4} = \frac{4(c-5)}{4.6} = \frac{5a-5-3b-9-4c+20}{10-12-24}$$

$$= \frac{5a-5-3b-9-4c+20}{10-12-24} = \frac{(5a-3b-4c)+(-5-9+20)}{-26} = \frac{46+6}{-26} = -2$$

$$\text{Suy ra: } \frac{a-1}{2} = -2 \Rightarrow a = -3$$

$$\frac{b+3}{4} = -2 \Rightarrow b = -11$$

$$\frac{c-5}{6} = -2 \Rightarrow c = -7$$

Vậy $a = -3$; $b = -11$; $c = -7$.

Câu 3. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Bắc Sơn 2022 - 2023)

Tìm số tự nhiên có ba chữ số, biết rằng số đó là bội của 18 và các chữ số của nó tỉ lệ với $1:2:3$.

Lời giải

Gọi a, b, c là ba chữ số của số có ba chữ số cần tìm (điều kiện: $a, b, c \in \mathbb{N}$)

Ta có: $1 \leq a+b+c \leq 27$ (do $0 < a, b, c \leq 9$)

Mặt khác số cần tìm là bội của 18 nên là bội của 9 ,

do đó $a+b+c=9$ hoặc $a+b+c=18$ hoặc $a+b+c=27$.

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{a+b+c}{6}$$

Theo đề bài ta có:

Như vậy $a+b+c$ chia hết cho 6 , nên $a+b+c=18$.

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{a+b+c}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

Khi đó

Từ đó suy ra $a=3, b=6, c=9$.

Vì số phải tìm là bội của 18 nên chữ số hàng đơn vị chẵn.

Do đó số cần tìm là: $396; 936$.

Vậy hai số cần tìm là: $396; 936$.

Câu 4. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Bắc Sơn 2022 - 2023)

Ba công nhân làm được 860 sản phẩm như nhau trong cùng một thời gian. Để làm xong 1 sản phẩm đó người thứ nhất cần 5 phút, người thứ hai cần 6 phút, người thứ ba cần 9 phút. Tính số sản phẩm mỗi người làm được.

Lời giải

Gọi số sản phẩm mỗi công nhân làm được lần lượt là a, b, c (sản phẩm) (Điều kiện: $a, b, c \in \mathbb{N}^*$)

Theo bài ra ta có: $5a=6b=9c$ và $a+b+c=860$.

$$\Rightarrow \frac{a}{\frac{1}{5}} = \frac{b}{\frac{1}{6}} = \frac{c}{\frac{1}{9}} \text{ và } a+b+c=860$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{\frac{1}{5}} = \frac{b}{\frac{1}{6}} = \frac{c}{\frac{1}{9}} = \frac{a+b+c}{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9}} = \frac{860}{\frac{18+15+10}{90}} = \frac{860 \cdot 90}{43} = 1800$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{5} \cdot 1800 = 360 \quad (\text{thỏa mãn})$$

$$b = \frac{1}{6} \cdot 1800 = 300 \quad (\text{thỏa mãn})$$

$$c = \frac{1}{9} \cdot 1800 = 200 \quad (\text{thỏa mãn}).$$

Vậy số sản phẩm mỗi người làm được lần lượt là: 360 (sản phẩm); 300 (sản phẩm) và 200 (sản phẩm).

Câu 5. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Bùi Hữu Diên 2022 - 2023)

Tìm a, b, c biết $3a = 2b$; $5a = 3c$ và $ab + bc + ca = -204$.

Lời giải

$$\text{Ta có } 3a = 2b \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{3} \Rightarrow \frac{a}{6} = \frac{b}{9}$$

$$5a = 3c \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{c}{5} \Rightarrow \frac{a}{6} = \frac{c}{10}$$

$$\text{Do đó } \frac{a}{6} = \frac{b}{9} = \frac{c}{10}$$

$$\text{Đặt } \frac{a}{6} = \frac{b}{9} = \frac{c}{10} = k \Rightarrow \begin{cases} a = 6k \\ b = 9k \\ c = 10k \end{cases}$$

$$\text{Ta có } ab + bc + ca = 54k + 90k + 60k = 204k$$

$$\text{Mà } ab + bc + ca = -204 \Rightarrow 204k = -204 \Rightarrow k = -1.$$

$$\text{Từ đó suy ra } a = -6; b = -9; c = -10.$$

Câu 6. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Bùi Hữu Diên 2022 - 2023)

Độ dài của ba cạnh tam giác tỉ lệ với $2; 3; 4$. Tính chiều cao tương ứng của ba cạnh biết tổng độ dài ba chiều cao là 13 cm .

Lời giải

Gọi độ dài ba cạnh của tam giác lần lượt là a, b, c (cm; $a, b, c > 0$) và độ dài ba đường cao tương ứng lần lượt là x, y, z (cm; $x, y, z > 0$).

$$\text{Theo bài ra ta có } \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} \text{ và } x + y + z = 13.$$

$$\text{Diện tích tam giác là } S = \frac{1}{2}ax = \frac{1}{2}by = \frac{1}{2}cz$$

$$\Rightarrow ax = by = cz \Rightarrow \frac{a}{2} \cdot 2x = \frac{b}{3} \cdot 3y = \frac{c}{4} \cdot 4z$$

$$\Rightarrow 2x = 3y = 4z \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{6+4+3} = \frac{13}{13} = 1$$

Suy ra $x=6$; $y=4$; $z=3$.

Vậy độ dài ba đường cao của tam giác lần lượt là 6 cm; 4 cm; 3 cm.

Câu 7. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Bùi Hữu Diên 2022 - 2023)

Tìm ba phân số tối giản biết tổng của chúng là $4\frac{9}{40}$; các tử của chúng tỉ lệ với 2; 3; 5 còn các mẫu tương ứng tỉ lệ với 5; 4; 3.

Lời giải

Gọi ba phân số tối giản cần tìm là $\frac{a}{a'}$; $\frac{b}{b'}$; $\frac{c}{c'}$.

(Điều kiện $(a, a')=1$; $(b, b')=1$; $(c, c')=1$)

Theo bài ra ta có:

$$\frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} + \frac{c}{c'} = 4\frac{9}{40}$$

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5} \quad (1)$$

$$\frac{a'}{5} = \frac{b'}{4} = \frac{c'}{3} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{a}{2} : \frac{a'}{5} &= \frac{b}{3} : \frac{b'}{4} = \frac{c}{5} : \frac{c'}{3} \\ &\Rightarrow \frac{a}{a'} \cdot \frac{5}{2} = \frac{b}{b'} \cdot \frac{4}{3} = \frac{c}{c'} \cdot \frac{3}{5} \\ &\Rightarrow \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a'}{5}} = \frac{\frac{b}{3}}{\frac{b'}{4}} = \frac{\frac{c}{5}}{\frac{c'}{3}} \end{aligned}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a'}{5}} &= \frac{\frac{b}{3}}{\frac{b'}{4}} = \frac{\frac{c}{5}}{\frac{c'}{3}} = \frac{\frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{5}}{\frac{a'}{5} + \frac{b'}{4} + \frac{c'}{3}} = \frac{4\frac{9}{40}}{\frac{169}{60}} = \frac{3}{2} \\ &\Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{3}{2}; \frac{b}{b'} = \frac{9}{8}; \frac{c}{c'} = \frac{5}{2} \\ &\quad \frac{3}{2}; \frac{9}{8}; \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Vậy ba phân số tối giản là

Câu 8. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Trần Thủ Độ 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $\frac{6x-5y}{11} = \frac{7y-6z}{4} = \frac{5z-7x}{30}$ và $4x+2y-z=10$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{6x-5y}{11} &= \frac{7y-6z}{4} = \frac{5z-7x}{30} \\ \Rightarrow \frac{7(6x-5y)}{7 \cdot 11} &= \frac{5(7y-6z)}{5 \cdot 4} = \frac{6(5z-7x)}{6 \cdot 30} \\ \Rightarrow \frac{42x-35y}{77} &= \frac{35y-30z}{20} = \frac{30z-42x}{180} \end{aligned}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{42x-35y}{77} &= \frac{35y-30z}{20} = \frac{30z-42x}{180} = \frac{42x-35y+35y-30z+30z-42x}{77+20+180} = 0 \\ \Rightarrow \frac{x}{5} &= \frac{y}{6} = \frac{z}{7} \end{aligned}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau

$$\begin{aligned} \frac{x}{5} = \frac{y}{6} = \frac{z}{7} &= \frac{4x+2y-z}{20+12-7} = \frac{2}{5} \\ \text{Suy ra } x &= 2; y = \frac{12}{5}; z = \frac{14}{5}. \end{aligned}$$

Câu 9. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Trần Thủ Độ 2022 - 2023)

Độ dài ba cạnh của tam giác tỉ lệ với $2; 3; 4$. Tính độ dài ba đường cao tương ứng của tam giác biết tổng độ dài ba đường cao là 26 cm .

Lời giải

Gọi độ dài ba cạnh của tam giác lần lượt là a, b, c (cm; $a, b, c > 0$) và độ dài ba đường cao tương ứng lần lượt là x, y, z (cm; $x, y, z > 0$).

$$\text{Theo bài ra ta có } \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} \text{ và } x+y+z=26.$$

$$\text{Diện tích tam giác là } S = \frac{1}{2}ax = \frac{1}{2}by = \frac{1}{2}cz$$

$$\Rightarrow ax = by = cz \Rightarrow \frac{a}{2} \cdot 2x = \frac{b}{3} \cdot 3y = \frac{c}{4} \cdot 4z$$

$$\Rightarrow 2x = 3y = 4z \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{6+4+3} = \frac{26}{13} = 2$$

$$\text{Suy ra } x=12; y=8; z=6.$$

Vậy độ dài ba đường cao của tam giác lần lượt là $12 \text{ cm}, 8 \text{ cm}, 6 \text{ cm}$.

Câu 10. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Văn Lang 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}; \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$ và $2x-3y+z=6$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có: $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{12}$ (1)

$$\frac{y}{3} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{y}{12} = \frac{z}{20}$$
 (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{20}$ (*)

Ta có: $\frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{20} = \frac{2x}{18} = \frac{3y}{36} = \frac{z}{20} = \frac{2x - 3y + z}{18 - 36 + 20} = \frac{6}{2} = 3$

Do đó: $\frac{x}{9} = 3 \Rightarrow x = 27$

$$\frac{y}{12} = 3 \Rightarrow y = 36$$

$$\frac{z}{20} = 3 \Rightarrow z = 60$$

Vậy $x = 27$; $y = 36$; $z = 60$.

Câu 11. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Văn Lang 2022 - 2023)

Ba kho A, B, C chứa một số gạo. Nếu nhập vào kho A thêm $\frac{1}{7}$ số gạo của kho đó, xuất ở kho B đi $\frac{1}{9}$ số gạo của kho đó và xuất ở kho C đi $\frac{2}{7}$ số gạo của kho đó thì khi đó số gạo ở ba kho bằng nhau. Tính số gạo ở mỗi kho lúc đầu, biết kho B nhiều hơn kho A 20 tạ.

Lời giải

Gọi số gạo lúc đầu của kho A, B, C lần lượt là x, y, z (tạ) (Điều kiện $x, y, z > 0$)

Theo bài ra, ta có: $\frac{8}{7}x = \frac{8}{9}y = \frac{5}{7}z$ (1) và $y - x = 20$.

Chia cả ba tỉ số của (1) cho 40 (BCNN của 8 và 5) ta được: $\frac{x}{35} = \frac{y}{45} = \frac{z}{56}$
 Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có

$$\frac{x}{35} = \frac{y}{45} = \frac{z}{56} = \frac{y - x}{45 - 35} = \frac{20}{10} = 2$$

Do đó $\frac{x}{35} = 2 \Rightarrow x = 70$

$$\frac{y}{45} = 2 \Rightarrow y = 90$$

$$\frac{z}{56} = 2 \Rightarrow z = 112$$

Vậy số gạo ở mỗi kho A, B, C lúc đầu lần lượt là: 70 tạ, 90 tạ, 112 tạ.

Câu 12. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Vũ Thị Thục 2022 - 2023)

Tìm x, y biết $\frac{x - y}{3} = \frac{x + y}{13} = \frac{xy}{200}$.

Lời giải

$$\frac{x-y}{3} = \frac{x+y}{13} = \frac{x.y}{200}$$

Ta có

$$\frac{x+y}{3} = \frac{x-y}{13} = \frac{x.y}{200} = \frac{x+y+x-y}{3+13} = \frac{x}{8}$$

+ Nếu $x=0 \Rightarrow y=0$

$$\text{Nếu } x \neq 0 \Rightarrow \frac{x.y}{200} = \frac{x}{8} \Rightarrow \frac{y}{25} = 1 \Rightarrow y=25$$

+

$$\text{Thay } y=25 \text{ ta có } \frac{x-25}{3} = \frac{x}{8} \Rightarrow 8x-200=3x \Rightarrow x=40$$

$$\text{Vậy } (x,y) \in \{(0;0); (40;25)\}$$

Câu 13. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Vũ Thị Thục 2022 - 2023)

Tổng số học sinh của một trường là 630 học sinh. Biết số học sinh khối 6 và 7 tỉ lệ với 2 và 3; số học sinh khối 7 và 8 tỉ lệ với 4 và 5; số học sinh khối 8 và 9 tỉ lệ với 6 và 7. Tính số học sinh mỗi khối.

Lời giải

Gọi số HS của các khối 6; 7; 8; 9 lần lượt là: $x; y; z; t$ (học sinh) (Điều kiện $x; y; z; t > 0$).

$$\text{Theo bài ra ta có: } \frac{x}{2} = \frac{y}{3}; \frac{y}{4} = \frac{z}{5}; \frac{z}{6} = \frac{t}{7} \text{ và } x+y+z+t=630$$

$$\text{Ta có: } \frac{x}{2} = \frac{y}{3}; \frac{y}{4} = \frac{z}{5}; \frac{z}{6} = \frac{t}{7} \Rightarrow \frac{x}{16} = \frac{y}{24}; \frac{y}{24} = \frac{z}{30}; \frac{z}{30} = \frac{t}{35} \Rightarrow \frac{x}{16} = \frac{y}{24} = \frac{z}{30} = \frac{t}{35}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{16} = \frac{y}{24} = \frac{z}{30} = \frac{t}{35} = \frac{x+y+z+t}{16+24+30+35} = \frac{630}{105} = 6$$

$$\text{+) } \frac{x}{16} = 6 \Rightarrow x = 6.16 = 96$$

$$\text{+) } \frac{y}{24} = 6 \Rightarrow y = 6.24 = 144$$

$$\text{+) } \frac{z}{30} = 6 \Rightarrow z = 6.30 = 180$$

$$\text{+) } \frac{t}{35} = 6 \Rightarrow t = 6.35 = 210$$

+)

$$\text{Vậy số HS của khối } 6; 7; 8; 9 \text{ lần lượt là: } 96; 144; 180; 210$$

Vậy số HS của khối

Câu 14. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Lê Tư Thành 2022 - 2023)

$$\text{Tìm } x, y, z \text{ biết: } \frac{3x-2y}{5} = \frac{2z-5x}{3} = \frac{5y-3z}{2} \text{ và } x+y+z=50$$

Lời giải

$$\text{Từ } \frac{3x-2y}{5} = \frac{2z-5x}{3} = \frac{5y-3z}{2} \Rightarrow \frac{15x-10y}{25} = \frac{6z-15x}{9} = \frac{10y-6z}{4}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau có:

$$\frac{15x-10y}{25} = \frac{6z-15x}{9} = \frac{10y-6z}{4} = \frac{15x-10y+6z-15x+10y-6z}{38} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 15x-10y=0 \\ 6z-15x=0 \\ 10y-6z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x=2y \\ 2z=5x \\ 5y=3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ \frac{x}{2} = \frac{z}{5} \\ \frac{z}{5} = \frac{y}{3} \end{cases}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau có:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{x+y+z}{2+3+5} = \frac{50}{10} = 5$$

Từ đó suy ra $x=10, y=15, z=25$.

Câu 15. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Phan Kính Ân 2022 - 2023)

Cho 3 số x, y, z thỏa mãn các điều kiện sau:

$$\frac{5z-6y}{4} = \frac{6x-4z}{5} = \frac{4y-5x}{6} \quad \text{và} \quad 3x-2y+5z=96 \quad \text{Tìm } x, y, z.$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{5z-6y}{4} = \frac{6x-4z}{5} = \frac{4y-5x}{6} \Rightarrow \frac{20z-24y}{16} = \frac{30x-20z}{25} = \frac{24y-30x}{36}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{20z-24y}{16} = \frac{30x-20z}{25} = \frac{24y-30x}{36} = \frac{20z-24y+30x-20z+24y-30x}{10+25+36} = 0$$

$$\Rightarrow 20z-24y=30x-20z=24y-30x=0 \Rightarrow 30x=24y=20z$$

$$\Rightarrow \frac{30x}{120} = \frac{24y}{120} = \frac{20z}{120} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6}$$

$$\text{Từ } \frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6} \Rightarrow \frac{3x}{12} = \frac{2y}{10} = \frac{5z}{30} = \frac{3x-2y+5z}{12-10+30} = \frac{96}{32} = 3$$

$$\text{Do đó } \frac{x}{4} = 3 \Rightarrow x=12$$

$$\frac{y}{5} = 3 \Rightarrow y=15$$

$$\frac{z}{6} = 3 \Rightarrow z=18$$

Vậy $x=12$; $y=15$; $z=18$.

Câu 16. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Phan Kính Ân 2022 - 2023)

Tìm ba phân số có tổng của chúng bằng $1\frac{1}{70}$, các tử của chúng tỉ lệ với 3; 4; 5 và các mẫu tương ứng của chúng tỉ lệ với 5; 1; 2.

Lời giải

Gọi ba phân số cần tìm lần lượt là $\frac{a}{x}; \frac{b}{y}; \frac{c}{z}$ thì ta có

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1\frac{1}{70} \quad \text{và} \quad \frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}; \quad \frac{x}{5} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{3} : \frac{x}{5} = \frac{b}{4} : \frac{y}{1} = \frac{c}{5} : \frac{z}{2} \quad \text{hay} \quad \frac{\frac{a}{3}}{\frac{x}{5}} = \frac{\frac{b}{4}}{\frac{y}{1}} = \frac{\frac{c}{5}}{\frac{z}{2}}$$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{\frac{a}{3}}{\frac{x}{5}} = \frac{\frac{b}{4}}{\frac{y}{1}} = \frac{\frac{c}{5}}{\frac{z}{2}} = \frac{\frac{a}{3} + \frac{b}{4} + \frac{c}{5}}{\frac{x}{5} + \frac{y}{1} + \frac{z}{2}} = \frac{1\frac{1}{70}}{\frac{10}{5} + \frac{1}{1} + \frac{2}{2}} = \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{3}{35}; \frac{b}{y} = \frac{4}{7}; \frac{c}{z} = \frac{5}{14}$$

Vậy 3 phân số cần tìm là $\frac{3}{35}; \frac{4}{7}; \frac{5}{14}$.

Câu 17. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Diệp Nông 2022 - 2023)

Tìm x và y biết: $\frac{1+2y}{18} = \frac{1+4y}{24} = \frac{1+6y}{6x}$.

Lời giải

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{1+2y}{18} = \frac{1+4y}{24} = \frac{1+2y-1-4y}{18-24} = \frac{2y}{6} \quad (1)$$

$$\frac{1+4y}{24} = \frac{1+6y}{6x} = \frac{1+4y-1-6y}{24-6x} = \frac{2y}{6x-24} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{2y}{6} = \frac{2y}{6x-24} \Rightarrow 6x-24=6 \Rightarrow x=5.$$

Thay $x=5$ vào biểu thức $\frac{1+2y}{18} = \frac{1+4y}{24} = \frac{1+6y}{6x}$ ta được

$$\frac{1+2y}{18} = \frac{1+6y}{30} \Rightarrow 30(1+2y) = 18(1+6y) \Rightarrow 48y = 12 \Rightarrow y = \frac{1}{4}$$

Vậy $x=5$; $y=\frac{1}{4}$.

Câu 18. (HSG 7 huyện Kim Sơn 2021 - 2022)

$$x, y, z \text{ biết: } \frac{xy}{2y+4x} = \frac{yz}{4z+6y} = \frac{zx}{6x+2z} = \frac{x^2+y^2+z^2}{2^2+4^2+6^2}$$

Tìm các số

Lời giải

$$\frac{xy}{2y+4x} = \frac{yz}{4z+6y} = \frac{zx}{6x+2z} = \frac{x^2+y^2+z^2}{2^2+4^2+6^2} \quad (2)$$

Xét $x=0 \Rightarrow y=z=0 \Rightarrow 2y+4x=0$ (vô lí)

Suy ra $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$

$$\frac{2y+4x}{xy} = \frac{4z+6y}{yz} = \frac{6x+2z}{zx} = \frac{2^2+4^2+6^2}{x^2+y^2+z^2}$$

Khi đó từ (2) suy ra:

$$\Rightarrow \frac{2}{x} + \frac{4}{y} = \frac{4}{y} + \frac{6}{z} = \frac{6}{z} + \frac{2}{x} = \frac{2^2+4^2+6^2}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{4}{y} = \frac{6}{z} \quad \text{và} \quad \frac{2}{x} = \frac{4}{y} = \frac{2^2+4^2+6^2}{x^2+y^2+z^2} = \frac{2}{x} + \frac{4}{y} = \frac{2}{x} + \frac{2}{x} = 2 \cdot \frac{2}{x}$$

$$\frac{2}{x} = \frac{4}{y} = \frac{6}{z} = \frac{1}{k} \quad (k \neq 0)$$

Đặt

$$\Rightarrow \frac{2^2+4^2+6^2}{x^2+y^2+z^2} = \frac{2}{k} \Rightarrow \begin{cases} x=2k \\ y=4k \\ z=6k \\ x^2+y^2+z^2=28k \end{cases} \quad (3)$$

Thay $\begin{cases} x=2k \\ y=4k \\ z=6k \end{cases}$ vào (3) ta được:

$$(2k)^2 + (4k)^2 + (6k)^2 = 28k \Rightarrow 56k^2 - 28k = 0 \Rightarrow 56k \cdot (2k - 1) = 0$$

$$\Rightarrow k=0 \quad (\text{loại}) \quad \text{hoặc} \quad k = \frac{1}{2} \quad (\text{thỏa mãn})$$

Với $k = \frac{1}{2}$ thì tìm được $x=1; y=2; z=3$.

Vậy $x=1; y=2; z=3$.

Câu 19. (HSG 7 huyện Kim Sơn 2021 - 2022)

Ba phân số có tổng bằng $\frac{213}{70}$. Các tử của chúng tương ứng tỉ lệ với $3; 4; 5$, các mẫu số của chúng tương ứng tỉ lệ với $5; 1; 2$. Tìm ba phân số đó.

Lời giải

Gọi ba phân số cần tìm là a, b, c .

Vì các tử số của chúng tương ứng tỉ lệ với $3; 4; 5$ và các mẫu số của chúng tương ứng tỉ lệ với $5; 1; 2$

$$\text{nên ta có} \quad a:b:c = \frac{3}{5} : \frac{4}{1} : \frac{5}{2} = 6:40:25 \Rightarrow \frac{a}{6} = \frac{b}{40} = \frac{c}{25} = \frac{a+b+c}{6+40+25} = \frac{\frac{213}{70}}{71} = \frac{3}{70}$$

$$\Rightarrow a = \frac{3 \cdot 6}{70} = \frac{9}{35}$$

$$\Rightarrow b = \frac{40 \cdot 3}{70} = \frac{12}{7}$$

$$\Rightarrow c = \frac{25 \cdot 3}{70} = \frac{15}{14}$$

Vậy ba phân số cần tìm là: $\frac{9}{35}; \frac{12}{7}; \frac{15}{14}$.

Câu 20. (HSG 7 huyện Kim Sơn 2021 - 2022)

Ba máy xay, xay được 359 tấn thóc. Số ngày làm việc của các máy tỉ lệ với $3:4:5$, số giờ làm việc hàng ngày của các máy tỉ lệ theo $6:7:8$ còn công suất của các máy tỉ lệ nghịch với $5:4:3$. Hỏi mỗi máy xay được bao nhiêu tấn thóc?

Lời giải

Gọi x, y, z là số tấn thóc mỗi máy xay xay được.

x_1, y_1, z_1 là số ngày làm việc của mỗi máy.

x_2, y_2, z_2 là số giờ làm việc hàng ngày của mỗi máy.

x_3, y_3, z_3 là công suất của mỗi máy đó (tấn/giờ).

Theo bài ra ta có: $x + y + z = 359$ (1)

$$x_1 : y_1 : z_1 = 3 : 4 : 5 \quad (2)$$

$$x_2 : y_2 : z_2 = 6 : 7 : 8 \quad (3)$$

$$x_3 : y_3 : z_3 = \frac{1}{5} : \frac{1}{4} : \frac{1}{3} \quad (4)$$

Từ (2), (3), (4) ta có:
$$\frac{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}{3 \cdot 6 \cdot \frac{1}{5}} = \frac{y_1 \cdot y_2 \cdot y_3}{4 \cdot 7 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3}{5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{3}} \quad (5)$$

Từ (1), (5) ta có:
$$\frac{x}{18} = \frac{y}{7} = \frac{z}{40}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau:
$$\frac{x}{18} = \frac{y}{7} = \frac{z}{40} = \frac{x+y+z}{\frac{18}{5} + 7 + \frac{40}{3}} = \frac{359}{15} = 15$$

Suy ra: $x = 54; y = 105; z = 200$.

Vậy số thóc mà các máy lần lượt xay được là 54 tấn, 105 tấn, 200 tấn.

Câu 21. (HSG 7 tỉnh Thái Bình, huyện Quỳnh Phụ 2021 - 2022)

Tìm các số dương x, y, z biết: $\frac{x+2y}{3} = \frac{y+2z}{4} = \frac{z+2x}{5}$ và $xy + yz + 2zx = 280$

Lời giải

+ Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x+2y}{3} = \frac{y+2z}{4} = \frac{z+2x}{5} = \frac{x+2y+y+2z+z+2x}{3+4+5} = \frac{x+y+z}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{y+2z}{4} = \frac{x+y+z}{4} \Rightarrow y+2z = x+y+z \Rightarrow x = z \quad (1)$$

Và

$$\Rightarrow \frac{x+2y}{3} = \frac{x+y+z}{4} \Rightarrow \frac{x+2y}{3} = \frac{x+y+x}{4} \Rightarrow 4x+8y = 6x+3y \Rightarrow y = \frac{2}{5}x \quad (2)$$

+ Thay (1) và (2) vào $xy + yz + 2zx = 280$ ta được:
$$x \cdot \frac{2}{5}x + \frac{2}{5}x \cdot x + 2x \cdot x = 280$$

+ Giải ra tìm được $x^2 = 100 \Rightarrow x = 10$ (vì $x > 0$)

$$\Rightarrow z = x = 10; y = \frac{2}{5} \cdot 10 = 4.$$

Vậy $x = 10; y = 4; z = 10$.

Câu 22. (HSG 7 tỉnh Thái Bình, huyện Thái Thụy 2021 - 2022)

Cuối học kì I, ba bạn An, Tâm, Bình được thưởng tổng số vở là 58 quyển. Ba bạn quyết định dùng một nửa số vở của An, $\frac{1}{3}$ số vở của Tâm, $\frac{1}{4}$ số vở của Bình để tặng các bạn học sinh nghèo. Biết số vở còn lại sau khi tặng của ba bạn bằng nhau. Hỏi mỗi bạn được thưởng bao nhiêu quyển vở ?

Lời giải

Gọi số vở được thưởng của ba bạn An, Tâm, Bình thứ tự là x, y, z (quyển).

Điều kiện: x, y, z nguyên dương.

Theo bài ra ta có: $\frac{1}{2}x = \frac{2}{3}y = \frac{3}{4}z$ và $x + y + z = 58$.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{12} = \frac{y}{9} = \frac{z}{8} = \frac{x+y+z}{12+9+8} = \frac{58}{29} = 2$$

Nên $x = 2 \cdot 12 = 24$ (TMĐK)

$y = 2 \cdot 9 = 18$ (TMĐK)

$z = 2 \cdot 8 = 16$ (TMĐK)

Vậy An được thưởng 24 quyển vở.

Tâm được thưởng 18 quyển vở.

Bình được thưởng 16 quyển vở.

Câu 23. (HSG 7 tỉnh , huyện Trục Ninh 2020 - 2021)

Tìm x, y biết: $\frac{2x-1}{5} = \frac{3y-2}{3}$ và $x+y=2$.

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{2x-1}{5} = \frac{3y-2}{3} = \frac{6x-3}{15} = \frac{6y-4}{6} = \frac{6x-3+6y-4}{15+6} = \frac{6(x+y)-7}{21} = \frac{6 \cdot 2 - 7}{21} = \frac{5}{21} \quad (\text{vì } x+y=2)$$

$$\text{Từ } \frac{2x-1}{5} = \frac{3y-2}{3} = \frac{5}{21} \text{ suy ra } \begin{cases} 42x-21=25 \\ 63y-42=15 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 42x=46 \\ 63y=57 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{23}{21} \\ y=\frac{19}{21} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x=\frac{23}{21}; y=\frac{19}{21}.$$

Câu 24. (HSG 7 tỉnh , huyện Trục Ninh 2020 - 2021)

Cho a, b, c là các số thực khác 0.

Tìm các số thực x, y, z khác không thỏa mãn: $\frac{xy}{ay+bx} = \frac{yz}{bz+cy} = \frac{zx}{cx+az} = \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$.

Lời giải

Từ $\frac{xy}{ay+bx} = \frac{yz}{bz+cy} = \frac{zx}{cx+az} \Rightarrow \frac{xyz}{ayz+bxz} = \frac{yzx}{bzx+cyx} = \frac{zxy}{cxy+azy} \quad (x, y, z \neq 0)$

Suy ra $\begin{cases} ayz+bxz = bzx+cyz \\ bzx+cyz = cxy+azy \\ ayz+bxz = cxy+azy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ayz = cyx \\ bzx = azy \\ bxz = cxy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} az = cx \\ bx = ay \\ bz = cy \end{cases} \quad (\forall x, y, z \neq 0)$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{a} = \frac{z}{c} \\ \frac{y}{b} = \frac{x}{a} \\ \frac{z}{c} = \frac{y}{b} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \end{cases}$

Đặt $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k \quad (k \neq 0) \Rightarrow \begin{cases} x = ak \\ y = bk \\ z = ck \end{cases}$, thay vào $\frac{xy}{ay+bx} = \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}$ ta có

$\frac{ak.bk}{abk+bak} = \frac{(ak)^2 + (bk)^2 + (ck)^2}{a^2+b^2+c^2} \Rightarrow \frac{k}{2} = \frac{k^2(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2} = k^2$

$\Rightarrow k = 2k^2 \Rightarrow k(1-2k) = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{2} \quad (\text{vì } k \neq 0)$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}a \\ y = \frac{1}{2}b \\ z = \frac{1}{2}c \end{cases}$.

Vậy $x = \frac{1}{2}a$; $z = \frac{1}{2}c$; $y = \frac{1}{2}b$.

Câu 25. (HSG 7 tỉnh Bắc Giang, huyện Lục Ngạn 2021 - 2022)

Tìm các số x, y, z biết rằng $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}, \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$ và $2x - 3y + z = 6$.

Lời giải

Từ $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{12} \quad (1)$

$\frac{y}{3} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{y}{12} = \frac{z}{20} \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{20} \Leftrightarrow \frac{2x}{18} = \frac{3y}{36} = \frac{z}{20}$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{2x}{18} = \frac{3y}{36} = \frac{z}{20} = \frac{2x - 3y + z}{18 - 36 + 20} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\frac{2x}{18} = 3 \Rightarrow x = 27$$

$$\frac{3y}{36} = 3 \Rightarrow y = 36$$

$$\frac{z}{20} = 3 \Rightarrow z = 60$$

Vậy $x = 27$; $y = 36$; $z = 60$

Câu 26. (HSG 7 tỉnh Bắc Giang, huyện Lục Ngạn 2021 - 2022)

Ba lớp $7A, 7B, 7C$ ở trường H có tất cả 147 học sinh. Nếu đưa $\frac{1}{3}$ số học sinh của lớp $7A$, $\frac{1}{4}$ số học sinh của lớp $7B$ và $\frac{1}{5}$ số học sinh của lớp $7C$ đi thi học sinh giỏi cấp huyện thì số học sinh còn lại của ba lớp bằng nhau. Tính số học sinh của mỗi lớp 7 ở trường H .

Lời giải

Gọi số học sinh của mỗi lớp $7A, 7B, 7C$ lần lượt là a, b, c (học sinh).

Điều kiện $a, b, c \in \mathbb{N}^*; a, b, c < 147$

Nếu đưa $\frac{1}{3}$ số học sinh của lớp $7A$ đi thi thì số học sinh còn lại là $a - \frac{1}{3}a = \frac{2a}{3}$ (học sinh).

Nếu đưa $\frac{1}{4}$ số học sinh của lớp $7B$ đi thi thì số học sinh còn lại là $b - \frac{1}{4}b = \frac{3b}{4}$ (học sinh)

Nếu đưa $\frac{1}{5}$ số học sinh của lớp $7C$ đi thi thì số học sinh còn lại là $c - \frac{1}{5}c = \frac{4c}{5}$ (học sinh)

Khi đó số học sinh còn lại của ba lớp bằng nhau nên ta có $\frac{2a}{3} = \frac{3b}{4} = \frac{4c}{5} \Rightarrow \frac{a}{18} = \frac{b}{16} = \frac{c}{15}$

Vì ba lớp $7A, 7B, 7C$ ở trường H có tất cả 147 học sinh nên $a + b + c = 147$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có: $\frac{a}{18} = \frac{b}{16} = \frac{c}{15} = \frac{a+b+c}{18+16+15} = \frac{147}{49} = 3$

Từ đó tìm được $a = 54$; $b = 48$; $c = 45$ (thỏa mãn điều kiện)

Số học sinh của ba lớp $7A, 7B, 7C$ lần lượt là 54 ; 48 ; 45 học sinh.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>

