

I. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ:

1. Cho dãy số $(a_n): a_0 = 1, a_1 = 13, a_{n+2} = 14a_{n+1} - a_n, n \geq 0$. Chứng minh rằng
- a) $a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2} + 12 = 0, \forall n \geq 0$
- b) $48a_n^2 - 12$ là số chính phương với mọi số tự nhiên n
- c) $2a_n - 1, \frac{2a_n + 1}{3}$ là số chính phương với mọi số tự nhiên n
2. Cho dãy số $(a_n): a_0 = 0, a_1 = 11, a_{n+2} = 10a_{n+1} - a_n + 10, n \geq 0$. Chứng minh rằng:
- $a_n + 1$ là số chính phương với mọi n chẵn.
3. Cho dãy số $(a_n): a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 1, n \geq 0$. Chứng minh rằng: $4a_n a_{n+2} + 1$ là một số chính phương.
4. Cho dãy số $(a_n): a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n + 2, n \geq 0$. Chứng minh rằng: $a_n a_{n+2}$ là số chính phương với mọi số tự nhiên n .
5. Cho dãy số $(a_n): a_0 = 0, a_1 = 1, a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n, n \geq 0$. Chứng minh rằng: $a_n^2 + 2^{n+2}$ là bình phương của một số nguyên lẻ.
6. Cho dãy số $(a_n): a_0 = 1, a_1 = 1, a_{n+2} = 7a_{n+1} - a_n - 2, n \geq 0$. Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy đều là số chính phương.
7. (VMO1997) Cho dãy số $(a_n): a_0 = 1, a_1 = 45, a_{n+2} = 45a_{n+1} - 7a_n, n \geq 0$.
- a) Tính số các ước nguyên dương của số $a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2}$ theo n ;
- b) Chứng minh rằng $1997a_n^2 + 4 \cdot 7^{n+1}$ là số chính phương với mọi số tự nhiên n .
8. (Kiểm tra đội tuyển IMO 2013) Cho dãy số $(a_n): a_1 = 1, a_2 = 11, a_{n+2} = a_{n+1} + 5a_n, n \geq 1$. Chứng minh rằng a_n không là số chính phương với mọi $n > 3$.
9. Cho dãy số $(a_n): a_0 = 0, a_1 = 3, a_{n+2} = 6a_{n+1} - a_n + 2, n \geq 0$. Chứng minh rằng $a_n^2 + (a_n + 1)^2$ là số chính phương với mọi số tự nhiên n .
10. Cho dãy số $(a_n): a_0 = a, a_1 = b, a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n, n \geq 0; a, b \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên k sao cho $5a_n^2 + k$ là số chính phương với mọi số tự nhiên n .
11. Cho dãy số $(a_n): a_0 = 1, a_1 = 6, a_{n+2} = 6a_{n+1} - a_n, n \geq 0$. Chứng minh rằng:
- a) $a_{n+1}^2 - 6a_n a_{n+1} + a_n^2 = 1$ với mọi số tự nhiên n ;
- b) Với mọi số tự nhiên n , tồn tại số nguyên dương k sao cho $a_n^2 = \frac{k(k+1)}{2}$

12. Cho dãy số $(a_n): a_0 = 1, a_1 = 2, a_{n+2} = a_{n+1} - a_n, n \geq 0$. Tìm n để $a_n - 1$ là số chính phương.

13. Cho dãy số $(a_n): a_1 = 1, a_2 = -1, a_{n+2} = -a_{n+1} - 2a_n, n \geq 1$. Chứng minh rằng $2^{2012} - 7a_{2010}^2$ là một số chính phương.

14. Cho dãy số $(a_n): a_0 = 1, a_1 = 2, a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n, n \geq 0$. Tìm n để $a_n - 1$ là số chính phương.

15. Cho dãy số $(a_n): a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n, n \geq 1$. Chứng minh rằng:

a) $a_n^2 + a_{n-1}^2 - 4a_n a_{n-1} = -3, \forall n \geq 2$

b) $\frac{a_n^2 - 1}{3}$ là một số chính phương.

16. Cho dãy số $(a_n): a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = 4a_{n+1} + a_n, n \geq 1$. Chứng minh rằng $a_n a_{n+2} + (-1)^n \cdot 5$ là số chính phương với mọi số nguyên dương n . Chứng minh phương trình $x^2 - 4xy - y^2 = 5$ có vô số nghiệm nguyên dương.

17. (TSTVN2012) Cho dãy số $(a_n): a_1 = 1, a_2 = 2011, a_{n+2} = 4022a_{n+1} - a_n, n \geq 1$. Chứng minh rằng $\frac{a_{2012} + 1}{2012}$ là một số chính phương.

18. Cho dãy số $(x_n): x_n = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 2, n \geq 1$. Chứng minh rằng x_{2n+1} là số chính phương với mọi số tự nhiên n .

Bài toán 2: Cho dãy số $(a_n) (n \in \mathbb{N})$ được xác định bởi $a_0 = 1, a_1 = 13$ và $a_{n+2} = 14a_{n+1} - a_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Chứng minh rằng phương trình $x^2 + (x+1)^2 = a_n$ và phương trình $(x+1)^3 - x^3 = a_n^2$ có nghiệm tự

nhiên với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Lời giải:

Phương trình đặc trưng của dãy (a_n) là $\lambda^2 - 14\lambda + 1 = 0$. Phương trình này có hai nghiệm là $\lambda_2 = 7 + \sqrt{48}, \lambda_1 = 7 - \sqrt{48}$. Tồn tại các hằng số α, β sao cho

$$a_n = \alpha \lambda_1^n + \beta \lambda_2^n, \forall n \in \mathbb{N}. \text{ Vì } a_0 = 1 \text{ và } a_1 = 13 \text{ nên } \alpha = \frac{2+\sqrt{3}}{4}, \beta = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2+\sqrt{3}}{4} (7+\sqrt{48})^n + \frac{2-\sqrt{3}}{4} (7-\sqrt{48})^n, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow 2a_n - 1 = \left[\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} (2+\sqrt{3})^n - \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} (2-\sqrt{3})^n \right]^2.$$

Xét dãy số $(b_n)(n \in \mathbb{N})$ được xác định bởi $b_n = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}(2+\sqrt{3})^n - \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}(2-\sqrt{3})^n, \forall n \in \mathbb{N}$

Ta có $b_0 = 1, b_1 = 5$ và $b_{n+2} = 4b_{n+1} - b_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Bằng phương pháp quy nạp toán học dễ dàng chứng minh được $b_n \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Mặt khác $b_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Suy ra $b_n \in \mathbb{N}^*$ và $2a_n - 1 = b_n^2, \forall n \in \mathbb{N}$. Suy ra b_n là số tự nhiên lẻ.

Suy ra tồn tại số tự nhiên c_n sao cho $b_n = 2c_n + 1$. Ta có:

$$c_n^2 + (c_n + 1)^2 = \frac{1}{2}[(2c_n + 1)^2 + 1] = \frac{1}{2}(b_n^2 + 1) = a_n.$$

Vậy phương trình $x^2 + (x+1)^2 = a_n$ có nghiệm tự nhiên.

Ta có:
$$\frac{2a_n + 1}{3} = \left[\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{6}}(2+\sqrt{3})^n + \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{6}}(2-\sqrt{3})^n \right]^2.$$

Xét dãy số $(d_n)(n \in \mathbb{N})$ được xác định bởi

$$d_n = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{6}}(2+\sqrt{3})^n + \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{6}}(2-\sqrt{3})^n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ta có: $d_0 = 1, d_1 = 3$ và $d_{n+2} = 4d_{n+1} - d_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Bằng phương pháp quy nạp toán học dễ dàng chứng minh được $d_n \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Mặt khác $d_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Suy ra $d_n \in \mathbb{N}^*$ và $2a_n + 1 = 3d_n^2, \forall n \in \mathbb{N}$

Cũng bằng phương pháp quy nạp toán học chúng ta dễ dàng chứng minh được d_n là số nguyên lẻ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Ta có:
$$\left(\frac{b_n d_n + 1}{2} \right)^3 - \left(\frac{b_n d_n - 1}{2} \right)^3 = \frac{1}{4}(3b_n^2 d_n^2 + 1) = a_n^2.$$

Vì b_n và d_n là các số tự nhiên lẻ nên $\frac{b_n d_n - 1}{2}$ là số tự nhiên.

Vậy phương trình $(x+1)^3 - x^3 = a_n^2$ có nghiệm tự nhiên với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Bài toán T3: Cho dãy số (a_n) được xác định bởi $a_0 = 1, a_1 = -1$ và $a_n = 6a_{n-1} + 5a_{n-2}$ với mọi $n \geq 2$.

Chứng minh rằng $a_{2012} - 2010$ chia hết cho 2011.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Quốc gia THPT năm 2011)

Lời giải 1:

Phương trình đặc trưng của dãy (a_n) là $\lambda^2 - 6\lambda - 5 = 0$

Phương trình này có hai nghiệm là $\lambda_1 = 3 + \sqrt{14}, \lambda_2 = 3 - \sqrt{14}$

Tồn tại các hằng số α, β sao cho $a_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = \alpha + \beta \\ -1 = \alpha(3 + \sqrt{14}) + \beta(3 - \sqrt{14}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{-4 + \sqrt{14}}{2\sqrt{14}} \\ \beta = \frac{4 + \sqrt{14}}{2\sqrt{14}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2 - \sqrt{14}}{2\sqrt{14}} \lambda_1^{n-1} + \frac{-2 - \sqrt{14}}{2\sqrt{14}} \lambda_2^{n-1}$$

$$\Rightarrow a_{2012} = \frac{2 - \sqrt{14}}{2\sqrt{14}} (3 + \sqrt{14})^{2011} + \frac{-2 - \sqrt{14}}{2\sqrt{14}} (3 - \sqrt{14})^{2011}$$

$$\text{Ta có } (3 + \sqrt{14})^{2011} = \sum_{k=0}^{2011} C_{2011}^k 3^{2011-k} (\sqrt{14})^k \quad \text{và} \quad (3 - \sqrt{14})^{2011} = \sum_{k=0}^{2011} (-1)^k C_{2011}^k 3^{2011-k} (\sqrt{14})^k$$

$$\Rightarrow a_{2012} = - \sum_{i=0}^{1005} 14^i C_{2011}^{2i} 3^{2011-2i} + 2 \sum_{i=0}^{1005} 14^i C_{2011}^{2i+1} 3^{2010-2i}$$

Với p là số nguyên tố và $1 \leq j \leq p-1 (j \in \mathbb{N}^*)$ ta có C_p^j chia hết cho p .

$$\text{Suy ra } a_{2012} \equiv (-3)^{2011} + 2 \cdot 14^{1005} \pmod{2011}.$$

$$\text{Ta có } 14 \equiv 2025 \pmod{2011} \Rightarrow 14^{1005} \equiv 15^{2010} \equiv 1 \pmod{2011}.$$

Mặt khác theo định lý nhỏ Fermat ta có $(-3)^{2010} \equiv 1 \pmod{2011}$. Suy ra $a_{2012} \equiv -1 \pmod{2011}$.

Suy ra $a_{2012} + 2010$ chia hết cho 2011

Lời giải 2:

Xét dãy số $(b_n) (n \in \mathbb{N})$ được xác định bởi $b_0 = 1, b_1 = -1$ và $b_{n+1} = 6b_n + 2016b_{n-1}, \forall n \geq 1$.

Bằng phương pháp quy nạp toán học ta chứng minh được $a_n \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$ và $b_n \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Ta cũng chứng minh được $a_n \equiv b_n \pmod{2011}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Phương trình đặc trưng của dãy (b_n) là $\lambda^2 - 6\lambda - 2016 = 0$.

Phương trình này có hai nghiệm là $\lambda_1 = 48, \lambda_2 = -42$.

Tồn tại các hằng số α, β sao cho $b_n = \alpha 48^n + \beta (-42)^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Vì $b_0 = 1, b_1 = -1$ nên $\alpha = \frac{41}{90}, \beta = \frac{49}{90}$.

Suy ra $b_n = \frac{41}{90} \cdot 48^n + \frac{49}{90} (-42)^n \Rightarrow b_{2012} = \frac{1}{90} [41 \cdot 48^{2012} + 49 \cdot (-42)^{2012}]$.

Theo định lí nhỏ Fermat ta có $48^{2010} \equiv 1 \pmod{2011}, 42^{2010} \equiv 1 \pmod{2011}$

Suy ra $41 \cdot 48^{2012} + 49 \cdot (-42)^{2012} + 90 \equiv 0 \pmod{2011}$

$\Rightarrow 90(b_{2012} + 1) \equiv 0 \pmod{2011} \Rightarrow b_{2012} \equiv -1 \pmod{2011} \Rightarrow a_{2012} \equiv -1 \pmod{2011}$

Suy ra $a_{2012} + 2010$ chia hết cho 2011.

Bài toán T9: Cho dãy số (x_n) được xác định bởi $x_1 = 1, x_2 = 2011$ và $x_{n+2} = 4022x_{n+1} - x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh rằng $\frac{x_{2012} + 1}{2012}$ là số chính phương.

(Đề thi chọn đội tuyển Việt nam dự thi Olympic Toán Quốc tế năm 2012).

Lời giải:

Phương trình đặc trưng của dãy $(x_n) (n \in \mathbb{N}^*)$ là $t^2 - 4022t + 1 = 0$

Phương trình này có hai nghiệm là $t_1 = 2011 + \sqrt{2010 \cdot 2012}$ và $t_2 = 2011 - \sqrt{2010 \cdot 2012}$.

Tồn tại các hằng số α, β sao cho $x_n = \alpha t_1^{n-1} + \beta t_2^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vì $x_1 = 1, x_2 = 2011$ nên $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$. Suy ra $x_{2012} = \frac{1}{2} (t_1^{2011} + t_2^{2011})$.

Suy ra $\frac{x_{2012} + 1}{2012} = \left[\frac{1}{2\sqrt{1006}} (\sqrt{t_1^{2011}} + \sqrt{t_2^{2011}}) \right]^2$.

Ta có $\sqrt{t_1} = \sqrt{1006} + \sqrt{1005}, \sqrt{t_2} = \sqrt{1006} - \sqrt{1005}$

Đặt $a = \sqrt{t_1^{2011}} + \sqrt{t_2^{2011}}$, ta có $a = (\sqrt{1006} + \sqrt{1005})^{2011} + (\sqrt{1006} - \sqrt{1005})^{2011}$

$$= 2\sqrt{1006} \sum_{k=0}^{1005} C_{2011}^{2k} 1006^{1005-k} \cdot 1005^k$$

Đặt $b = \frac{1}{2\sqrt{2016}} a$, ta có $b = \sum_{k=0}^{1005} C_{2011}^{2k} \cdot 1006^{1005-k} \cdot 1005^k$

Suy ra b là một số nguyên. Mặt khác $\frac{x_{2012}+1}{2012} = b^2$.

Vậy $\frac{x_{2012}+1}{2012}$ là số chính phương.

Bài toán 1: Cho dãy số (a_n) được xác định bởi $a_0 = a_1 = 1, a_{n+1} = 14a_n - a_{n-1} - 4, \forall n \geq 1$

Chứng minh mọi số hạng của dãy (a_n) đều là bình phương của các số nguyên

Lời giải:

Xét dãy số $(b_n) (n \in \mathbb{N})$ được xác định bởi $b_n = a_n - \frac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Khi đó ta có $b_{n+1} = 14b_n - b_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Phương trình đặc trưng của dãy (b_n) là $\lambda^2 - 14\lambda + 1 = 0$.

Phương trình này có hai nghiệm là $\lambda_1 = 7 + \sqrt{48}, \lambda_2 = 7 - \sqrt{48}$.

Tồn tại các hằng số α, β sao cho $a_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Vì } b_1 = b_2 = \frac{2}{3} \text{ nên } \alpha = \frac{2 - \sqrt{3}}{6}, \beta = \frac{2 + \sqrt{3}}{6}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2 - \sqrt{3}}{6} (7 + \sqrt{48})^n + \frac{2 + \sqrt{3}}{6} (7 - \sqrt{48})^n + \frac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow a_n = \left[\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{6}} (2 + \sqrt{3})^n + \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{6}} (2 - \sqrt{3})^n \right]^2$$

Xét dãy số (c_n) sao cho $c_n = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{6}}(2+\sqrt{3})^n + \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{6}}(2-\sqrt{3})^n, \forall n \in \mathbb{N}$

Bằng phương pháp quy nạp toán học ta chứng minh được $c_{n+1} = 4c_n - c_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Mặt khác $c_0 = c_1 = 1$. Suy ra c_n là số nguyên với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Mặt khác $a_n = c_n^2$. Vậy a_n là số chính phương với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Bài toán 2: Chứng minh tồn tại vô số cặp số nguyên dương (m, n) sao cho $\frac{m+1}{n} + \frac{n+1}{m}$

là một số nguyên dương. (Đề thi Olympic Toán của Anh năm 2007)

Lời giải:

Ta chứng minh rằng phương trình $\frac{x+1}{y} + \frac{y+1}{x} = 4$ (1) có vô số nghiệm nguyên dương.

Thật vậy $(1) \Leftrightarrow x^2 + (1-4y)x + y^2 + y = 0$ (2)

$(x_1 = 1, y_1 = 1)$ là một nghiệm nguyên dương của (2).

Xét dãy $(t_k) (k \geq 1)$ sao cho $t_1 = t_2 = 1, t_{k+2} = 4t_{k+1} - t_k - 1 (k \geq 1)$

Dễ dàng chứng minh được $t_{k+1} > t_k > 0, \forall k \geq 2$.

Ta có (t_1, t_2) là một nghiệm nguyên dương của phương trình (2).

Giả sử (t_k, t_{k+1}) là một nghiệm nguyên dương của phương trình (2)

tức là $t_k^2 + (1-4t_{k+1})t_k + t_{k+1}^2 + t_{k+1} = 0$.

Xét $t_{k+2}^2 + (1-4t_{k+1})t_{k+2} + t_{k+1}^2 + t_{k+1} - [t_k^2 + (1-4t_{k+1})t_k + t_{k+1}^2 + t_{k+1}]$

$$= t_{k+2}^2 - t_k^2 + (1-4t_{k+1})(t_{k+2} - t_k) = (t_{k+2} - t_k)(t_{k+2} + t_k + 1 - 4t_{k+1}) = 0$$

$$\Rightarrow t_{k+2}^2 + (1-4t_{k+1})t_{k+2} + t_{k+1}^2 + t_{k+1} = 0$$

$\Rightarrow (x, y) = (t_{k+1}, t_{k+2})$ cũng là nghiệm nguyên dương của phương trình (2).

Vì $t_{k+1} > t_k, \forall k \geq 2$ nên phương trình (1) có vô số nghiệm nguyên dương.

Vậy tồn tại vô số cặp số nguyên dương (m, n) sao cho $\frac{m+1}{n} + \frac{n+1}{m}$ là một số nguyên dương.

Bài 1. Cho dãy số $(x_n)_{(n \in \mathbb{N}^*)}$ được xác định bởi $x_1 = 3, x_2 = 11, x_n = 4x_{n-1} - x_{n-2}, \forall n \geq 3$.
 Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n tồn tại các số nguyên a, b sao cho

$$x_n = a^2 + 2b^2.$$

Lời giải

Ta có

$$x_1 = 1 + 2 \cdot 1^2,$$

$$x_2 = 3^2 + 2 \cdot 1^2,$$

$$x_3 = 3^2 + 2 \cdot 4^2,$$

$$x_4 = 11^2 + 2 \cdot 4^2.$$

Ta chứng minh

$$x_{2n-1} = x_{n-1}^2 + 2 \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{2} \right)^2,$$

$$x_{2n} = x_n^2 + 2 \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{2} \right)^2.$$

Thật vậy

$$\begin{aligned} x_{2n+1} &= 4x_{2n} - x_{2n-1} \\ &= 4x_n^2 + 8 \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{2} \right)^2 - x_{n-1}^2 - 2 \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{11}{2}x_n^2 - 3x_n x_{n-1} - \frac{1}{2}x_{n-1}^2 = \frac{11}{2}x_n^2 - 3x_n(4x_n - x_{n+1}) + \frac{1}{2}(4x_n - x_{n+1})^2 \\ &= \frac{3}{2}x_n^2 - x_n x_{n+1} + \frac{1}{2}x_{n+1}^2 = x_n^2 + 2 \left(\frac{x_{n+1} - x_n}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{2n+2} &= 4x_{2n+1} - x_{2n} \\ &= 4x_n^2 + 8 \left(\frac{x_{n+1} - x_n}{2} \right)^2 - x_n^2 - 2 \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 3x_n^2 + 8\left(\frac{x_{n+1} - x_n}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{x_{n+1} - 3x_n}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}x_{n+1}^2 - x_n x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n^2 \\
&= x_{n+1}^2 - x_n x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n^2 = x_{n+1}^2 + 2\left(\frac{x_{n+1} - x_n}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

Bài 2. Cho dãy số $(x_n)_{(n \in \mathbb{N}^*)}$ được xác định bởi $x_1 = 1, x_2 = 3, x_n = 6x_{n-1} - x_{n-2}, \forall n \geq 3$. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n tồn tại các số nguyên a, b sao cho $x_n = a^2 + 2b^2$.

Lời giải

Xét các dãy số $(u_n)_{(n \in \mathbb{N}^*)}$ và $(v_n)_{(n \in \mathbb{N}^*)}$ được xác định bởi

$$u_1 = 1, v_1 = 0, u_{n+1} = u_n + 2v_n \text{ và } v_{n+1} = u_n + v_n \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

Chúng ta chứng minh $x_n = u_n^2 + 2v_n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ ⁽¹⁾ bằng phương pháp quy nạp toán học.

Thật vậy mệnh đề đúng với $n = 1$ và $n = 2$.

Giả sử mệnh đề đúng đến $n = m, (m \geq 2)$.

Khi đó ta có $x_{m-1} = u_{m-1}^2 + 2v_{m-1}^2, x_m = u_m^2 + 2v_m^2$.

Đặt $A = u_{m-1}, B = v_{m-1}$ ta có

$$\begin{aligned}
u_m &= A + 2B, v_m = A + B \\
u_{m+1} &= 3A + 4B, v_{m+1} = 2A + 3B
\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}
6x_m - x_{m-1} &= 6(u_m^2 + 2v_m^2) - (u_{m-1}^2 + 2v_{m-1}^2) \\
&= 6[(A + 2B)^2 + 2(A + B)^2] - (A^2 + 2B^2) \\
&= (3A + 4B)^2 + 2(2A + 3B)^2 = u_{m+1}^2 + 2v_{m+1}^2.
\end{aligned}$$

Suy ra $x_{m+1} = u_{m+1}^2 + 2v_{m+1}^2$.

Vậy ⁽¹⁾ cũng đúng với $n = m + 1$.

Theo nguyên lý quy nạp toán học ⁽¹⁾ đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy với mỗi số nguyên dương n tồn tại các số nguyên a, b sao cho $x_n = a^2 + 2b^2$.

Bài 3. Tìm tất cả dãy số nguyên dương (a_n) thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau :

$$i) a_n \leq n\sqrt{n}, \quad \forall n=1,2,3,\dots$$

$$ii) a_p - a_q \text{ chia hết cho } p - q \text{ với mọi cặp số nguyên dương phân biệt } p \text{ và } q.$$

Lời giải

Từ i) ta có $a_1 \leq 1 \Rightarrow a_1 = 1$, $a_2 \leq 2\sqrt{2} < 3 \Rightarrow a_2 \in \{1; 2\}$.

+ Nếu $a_2 = 1$. Từ ii) ta có : $a_n - a_1 : n - 1 \Rightarrow a_n - 1 : n - 1, \forall n = 3, 4, 5, \dots$

Và $a_n - a_2 : n - 2 \Rightarrow a_n - 1 : n - 2, \forall n = 3, 4, 5, \dots$

Vì $(n-1, n-2) = 1$ nên từ hai điều trên ta có $a_n - 1 : (n-1)(n-2)$.

Giả sử tồn tại n sao cho $a_n \neq 1$, khi đó $|a_n - 1| \geq (n-1)(n-2)$,

kết hợp với điều kiện i) ta được :

$$n\sqrt{n} - 1 \geq (n-1)(n-2) \quad (*)$$

Dễ thấy với mọi $n \geq 9$ thì bất đẳng thức $(*)$ không đúng.

Vậy điều giả sử là sai khi $n \geq 9$, hay nói cách khác $a_n = 1, \quad \forall n \geq 9$.

Từ điều kiện ii) ta có $a_{k+m} - a_m : k$, chọn k lớn hơn 9 thì ta được $1 - a_m : k, \quad \forall k > 9$.

Vậy $1 - a_m = 0, \forall m = 1, 2, \dots$ hay $a_n = 1, \forall n = 1, 2, 3, \dots$

+ Nếu $a_2 = 2$. Từ ii) ta có $a_n - a_1 : n - 1 \Rightarrow a_n - 1 : n - 1 \Rightarrow a_n - n : n - 1, \forall n = 3, 4, 5, \dots$

Và $a_n - a_2 : n - 2 \Rightarrow a_n - 2 : n - 2 \Rightarrow a_n - n : n - 2, \forall n = 3, 4, 5, \dots$

Vì $(n-1, n-2) = 1$ nên từ hai điều trên ta có $a_n - n : (n-1)(n-2)$.

Giả sử tồn tại n sao cho $a_n \neq n$, khi đó $|a_n - n| \geq (n-1)(n-2)$,

kết hợp với điều kiện i) ta được :

$$n\sqrt{n} + n \geq (n-1)(n-2) \quad (**)$$

Dễ thấy bất đẳng thức $(**)$ không đúng khi n đủ lớn. Do đó với n đủ lớn thì $a_n = n$.

Từ điều kiện ii) ta có $a_{k+m} - a_m : k$, chọn k đủ lớn thì $a_{k+m} = k + m$ và do đó $m - a_m : k$ với mọi k đủ lớn.

Vậy $m - a_m = 0, \forall m = 1, 2, 3, \dots$ hay $a_n = n, \forall n = 1, 2, 3, \dots$

Tóm lại có hai dãy số thỏa mãn yêu cầu đề bài đó là :

- $a_n = 1, \forall n = 1, 2, 3, \dots$
- $a_n = n, \forall n = 1, 2, 3, \dots$

Bài 4. Cho dãy số thực (a_n) được xác định bởi $a_{n+1} = [a_n] \{a_n\}$, $\forall n = 0, 1, 2, \dots$ và a_0 là một số thực tùy ý. Chứng minh rằng $a_n = a_{n+2}$ với n đủ lớn.

Lời giải

Nếu $a_0 \geq 0$, khi đó $a_i \geq 0$ với mọi i và $[a_{i+1}] \leq a_{i+1} = [a_i] \{a_i\} < [a_i]$, do đó với i đủ lớn thì

$$a_{i+2} = a_i = 0.$$

Nếu $a_0 < 0$, khi đó $a_i \leq 0$ với mọi i nguyên dương.

Nếu tồn tại một phần tử của dãy bằng 0 thì khi đó mọi phần tử của dãy kể từ sau phần tử đó đều bằng 0.

Nếu không có phần tử nào của dãy số nhận giá trị là 0, tức là $a_i < 0, \forall i = 0, 1, 2, \dots$,

Khi đó ta có

$$1 + [a_{i+1}] > a_{i+1} = [a_i] \{a_i\} > [a_i] \text{ với mọi số nguyên dương } i.$$

Do đó $([a_n])$ là một dãy nguyên không giảm và bị chặn trên bởi 0.

Vậy $[a_i] = c$ với i đủ lớn.

Do đó ta có với i đủ lớn thì $a_{i+1} = c \cdot \{a_i\} = c \cdot (a_i - c) \Rightarrow b_{i+1} = c b_i$ với $b_i = a_i - \frac{c^2}{c-1}$.

Hiển nhiên dãy (b_n) bị chặn nên hoặc $c = -1$ hoặc $b_i = 0$ với mọi i đủ lớn.

Trong cả 2 trường hợp ta đều suy ra được $a_{i+2} = a_i$ với i đủ lớn.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 5. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n \geq 5$ thì tồn tại một cặp số cộng nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ và một cặp số nhân nguyên dương $b_1, b_2, \dots, b_n$ sao cho

$$b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < \dots < b_n < a_n.$$

Hãy chỉ ra một ví dụ của bài toán trên với $n = 5$.

Lời giải

Đặt $B_k = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^k = 1 + \frac{k}{m} + \frac{k(k-1)}{2!m^2} + \dots + \frac{k!}{k!m^k}$, hiển nhiên ta có $B_k > 1 + \frac{k}{m}$ với mọi $k \geq 2$.

Và với mọi $k \leq n$, ta có

$$B_k \leq 1 + \frac{k}{m} + \frac{n(n-1)}{2!m^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!m^3} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!m^k}$$

$$= 1 + \frac{k}{m} + \left[\frac{1}{2!} \frac{n(n-1)}{m} + \frac{1}{3!} \frac{n(n-1)(n-2)}{m^2} + \dots + \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{m^{k-1}} \right] \cdot \frac{1}{m}$$

Chọn $m > n^2$, khi đó theo trên ta có

$$B_k < 1 + \frac{k}{m} + \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!} \right) \cdot \frac{1}{m} < 1 + \frac{k+1}{m}$$

(Do ta có $\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!} < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{(k-1).k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{k} < 1$)

Đặt $A_k = 1 + \frac{k+1}{m}, 1 \leq k \leq n$, theo các chứng minh trên ta thu được

$$B_1 < A_1 < B_2 < A_2 < \dots < B_n < A_n.$$

Xét hai dãy $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, \dots, b_n$ thỏa mãn $a_k = m^n A_k, b_k = m^n B_k, \forall k: 1 \leq k \leq n$.

Khi đó ta có $a_1, a_2, \dots, a_n$ là một cấp số cộng nguyên dương và $b_1, b_2, \dots, b_n$ là một cấp số nhân nguyên dương và thỏa mãn $b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < \dots < b_n < a_n$. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Với $n=5$, ta xét cấp số cộng $a_1, a_2, \dots, a_5$ với $a_1=17$ và có công sai là 17, xét cấp số nhân

$b_1, b_2, \dots, b_5$ với $b_1=16$ và có công sai là $\frac{3}{2}$, khi đó ta có

$$16 < 17 < 24 < 34 < 36 < 51 < 54 < 68 < 81 < 85.$$

Bài 6.

Dãy số (a_n) được xác định như sau:

Chứng minh rằng dãy số trên không phải là dãy tuần hoàn.

Lời giải

Giả sử phản chứng rằng (a_n) là dãy tuần hoàn với chu kỳ cơ sở là $T > 0$.

Nếu $T=5k+1$, ta có $a_1 = a_{2T+1} = a_{2.(5k+1)+1} = a_{5.(2k)+3} = 0$, vô lý do $a_1=1$.

Nếu $T=5k+2$, ta có $a_1 = a_{T+1} = a_{5k+3} = 0$, vô lý do $a_1=1$.

Nếu $T=5k+3$, ta có $a_1 = a_{4T+1} = a_{4.(5k+3)+1} = a_{5.(4k+2)+3} = 0$, vô lý do $a_1=1$.

Nếu $T=5k+4$, ta có $a_1 = a_{3T+1} = a_{3.(5k+4)+1} = a_{5.(3k+2)+3} = 0$, vô lý do $a_1=1$.

Vậy $T=5k$ với k là số nguyên dương nào đó, khi đó ta có với mọi số nguyên dương s thì :

$$a_m = a_{5m} \Rightarrow a_{s+k} = a_{5(s+k)} = a_{5(s+k)+4T} = a_{5(s+5k)} = a_{s+5k} = a_{s+T} = a_s,$$

do đó k là chu kỳ của dãy (a_n) , hiển nhiên $k < 5k = T$, điều này trái với giả thiết T là chu kỳ cơ sở của dãy (a_n) .

Vậy điều giả sử là sai, tức là (a_n) không là dãy tuần hoàn.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 7. Với p là một số nguyên tố, xét dãy số (a_n) thỏa mãn

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_{k+2} = 2a_{k+1} - pa_k, \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

Xác định tất cả giá trị của p để -1 là một phần tử của dãy (a_n) .

Lời giải

Nếu $p = 2$, khi đó $a_{k+2} = 2a_{k+1} - 2a_k$ với mọi $k = 0, 1, 2, \dots$, do đó a_k là số chẵn với mọi $k \geq 2$ nên không thể có một phần tử nhận giá trị là -1 .

Vậy $p > 2 \Rightarrow (p, 2) = 1$.

Giả sử tồn tại $m \geq 2$ sao cho $a_m = -1$, theo đề ta có

$$a_{k+1} = 2a_k - pa_{k-1} \equiv 2a_k \pmod{p} \text{ với mọi } k = 2, 3, 4, \dots$$

Vậy

$$-1 = a_m \equiv 2^{m-1} a_1 \equiv 2^{m-1} \pmod{p} \quad (1)$$

Lại có

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2a_k - a_{k-1} - (p-1)a_{k-1} \equiv 2a_k - a_{k-1} \pmod{p-1} \\ \Rightarrow a_{k+1} - a_k &\equiv a_k - a_{k-1} \pmod{p-1}, \text{ với mọi } k = 2, 3, 4, \dots \end{aligned}$$

Vậy

$$a_{k+1} \equiv (k+1)(a_1 - a_0) + a_0 \equiv k+1 \pmod{p-1}.$$

Do đó

$$-1 = a_m \equiv m \pmod{p-1} \Rightarrow m+1 \equiv 0 \pmod{p-1} \quad (2)$$

Do $(p, 2) = 1$ nên theo định lý Fermat, ta có $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow 2^{m+1} \equiv 1 \pmod{p}$ (Do (2))

Kết hợp với (1) ta được

$$-4 \equiv 2^{m+1} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow 5 \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow p = 5.$$

Với $p=5$, ta thấy $a_3=-1$.

Vậy tất cả giá trị của p thỏa yêu cầu bài toán là $p=5$.

Bài 8. Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy số $(a_n), n \in \mathbb{N}^*$ xác định bởi

$$a_0=1, a_{n+1}=2a_n+\sqrt{3a_n^2-2}$$

đều nguyên.

Lời giải

Chuyển vế và bình phương công thức truy hồi, ta được

$$a_{n+1}^2-4a_na_{n+1}+4a_n^2=3a_n^2-2 \Leftrightarrow a_{n+1}^2-4a_na_{n+1}+a_n^2+2=0$$

Thay n bằng $n-1$, ta được

$$a_n^2-4a_na_{n-1}+a_{n-1}^2+2=0$$

Từ đây suy ra a_{n-1} và a_{n+1} là hai nghiệm của phương trình

$$x^2-4a_nx+a_n^2+2=0.$$

Suy ra $a_{n+1}+a_{n-1}=4a_n$ hay $a_{n+1}=4a_n-a_{n-1}$.

Từ đây suy ra tất cả các số hạng trong dãy đều nguyên, vì $a_0=1$ và $a_1=3$ nguyên.

Bài 9. Cho dãy số $(a_n), n \in \mathbb{N}^*$ xác định bởi

$$a_1=1, a_2=2, a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2 \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Chứng minh rằng với mọi m thì $a_m a_{m+1}$ cũng là một số hạng của dãy số.

Lời giải

Ta có $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2$.

Thay n bằng $n-1$, ta được $a_{n+1}=2a_n-a_{n-1}+2$

Trừ hai đẳng thức vế theo vế, ta được $a_{n+2}-3a_{n+1}+3a_n-a_{n-1}=0$

Phương trình đặc trưng $x^3-3x^2+3x-1=0$ có nghiệm bội 3: $x_{1,2,3}=1$ nên ta có nghiệm tổng quát có dạng $a_n=an^2+bn+c$.

Thay $n=1, 2, 3$ ta được

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ 4a+2b+c=2 \\ 9a+3b+c=5 \end{cases}$$

Từ đó giải ra được $a=1, b=-2, c=2$.

Vậy $a_n = n^2 - 2n + 2 = (n-1)^2 + 1$.

Do đó $a_m a_{m+1} = ((m-1)^2 + 1)(m^2 + 1) = (m^2 - m + 1)^2 + 1 = a_{m^2 - m + 2}$.

Bài 10. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 2, u_{n+1} = \frac{2+u_n}{1-2u_n}$.

a) Chứng minh rằng $u_n \neq 0$ với mọi n nguyên dương.

b) Chứng minh dãy không tuần hoàn.

Lời giải

Gọi φ là góc sao cho $\tan \varphi = 2$ thì $u_1 = \tan \varphi, u_2 = \frac{2 \tan \varphi}{1 - \tan^2 \varphi} = \tan 2\varphi, \dots, u_n = \tan n\varphi$.

a) Từ công thức tính u_n ta suy ra $u_{2n} = \frac{2u_n}{1-u_n^2}$.

Từ đó suy ra nếu tồn tại n để $u_n = 0$ thì sẽ tồn tại n lẻ để $u_n = 0$.

Giả sử $u_{2k+1} = 0$. Khi đó $u_{2k} = -2$ và ta có

$$-2 = u_{2k} = \frac{2u_k}{1-u_k^2} \Rightarrow u_k^2 + u_k - 1 = 0$$

Điều này mâu thuẫn vì lúc đó u_k là số vô tỷ, trong khi đó theo công thức truy hồi thì u_k luôn là số hữu tỷ.

b) Dãy tuần hoàn thì phải tồn tại n và k sao cho

$$\tan n\varphi = \tan k\varphi \Leftrightarrow (n-k)\varphi = m\pi \Leftrightarrow u_{n-k} = 0$$

Điều này không xảy ra do kết quả câu a).

Bài 11. Cho dãy số (a_n) được xác định bởi $a_0 = 1, a_1 = -1$ và $a_n = 6a_{n-1} + 5a_{n-2}$ với mọi $n \geq 2$. Chứng minh rằng $a_{2012} - 2010$ chia hết cho 2011

(Đề thi chọn học sinh giỏi Quốc gia THPT năm 2011)

Lời giải 1

Phương trình đặc trưng của dãy (a_n) là $\lambda^2 - 6\lambda - 5 = 0$

Phương trình này có hai nghiệm là $\lambda_1 = 3 + \sqrt{14}, \lambda_2 = 3 - \sqrt{14}$

Tồn tại các hằng số α, β sao cho $a_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = \alpha + \beta \\ -1 = \alpha(3 + \sqrt{14}) + \beta(3 - \sqrt{14}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{-4 + \sqrt{14}}{2\sqrt{14}} \\ \beta = \frac{4 + \sqrt{14}}{2\sqrt{14}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2 - \sqrt{14}}{2\sqrt{14}} \lambda_1^{n-1} + \frac{-2 - \sqrt{14}}{2\sqrt{14}} \lambda_2^{n-1}$$

$$\Rightarrow a_{2012} = \frac{2 - \sqrt{14}}{2\sqrt{14}} (3 + \sqrt{14})^{2011} + \frac{-2 - \sqrt{14}}{2\sqrt{14}} (3 - \sqrt{14})^{2011}$$

Ta có

$$(3 + \sqrt{14})^{2011} = \sum_{k=0}^{2011} C_{2011}^k 3^{2011-k} (\sqrt{14})^k$$

và

$$(3 - \sqrt{14})^{2011} = \sum_{k=0}^{2011} (-1)^k C_{2011}^k 3^{2011-k} (\sqrt{14})^k$$

$$\Rightarrow a_{2012} = - \sum_{i=0}^{1005} 14^i C_{2011}^{2i} 3^{2011-2i} + 2 \sum_{i=0}^{1005} 14^i C_{2011}^{2i+1} 3^{2010-2i}$$

Với p là số nguyên tố và $1 \leq j \leq p-1$ ($j \in \mathbb{N}^*$) ta có C_p^j chia hết cho p .

Suy ra $a_{2012} \equiv (-3)^{2011} + 2 \cdot 14^{1005} \pmod{2011}$.

Ta có $14 \equiv 2025 \pmod{2011} \Rightarrow 14^{1005} \equiv 15^{2010} \equiv 1 \pmod{2011}$.

Mặt khác theo định lý nhỏ Fermat ta có $(-3)^{2010} \equiv 1 \pmod{2011}$.

Suy ra $a_{2012} \equiv -1 \pmod{2011}$

Suy ra $a_{2012} + 2010$ chia hết cho 2011

Lời giải 2

Xét dãy số $(b_n)_{(n \in \mathbb{N})}$ được xác định bởi

$$b_0 = 1, b_1 = -1, b_{n+1} = 6b_n + 2016b_{n-1}, \forall n \geq 1.$$

Bằng phương pháp quy nạp toán học ta chứng minh được $a_n \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$ và $b_n \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Ta cũng chứng minh được $a_n \equiv b_n \pmod{2011}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Phương trình đặc trưng của dãy (b_n) là $\lambda^2 - 6\lambda - 2016 = 0$

Phương trình này có hai nghiệm là $\lambda_1 = 48, \lambda_2 = -42$.

Tồn tại các hằng số α, β sao cho

$$b_n = \alpha 48^n + \beta (-42)^n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Vì $b_0 = 1, b_1 = -1$ nên $\alpha = \frac{41}{90}, \beta = \frac{49}{90}$.

Suy ra

$$b_n = \frac{41}{90} \cdot 48^n + \frac{49}{90} (-42)^n \Rightarrow b_{2012} = \frac{1}{90} [41 \cdot 48^{2012} + 49 \cdot (-42)^{2012}]$$

Theo định lí nhỏ Fermat ta có $48^{2010} \equiv 1 \pmod{2011}, 42^{2010} \equiv 1 \pmod{2011}$

Suy ra

$$41 \cdot 48^{2012} + 49 \cdot (-42)^{2012} + 90 \equiv 0 \pmod{2011}$$

$$\Rightarrow 90(b_{2012} + 1) \equiv 0 \pmod{2011}$$

$$\Rightarrow b_{2012} \equiv -1 \pmod{2011}$$

$$\Rightarrow a_{2012} \equiv -1 \pmod{2011}$$

Suy ra $a_{2012} - 2010$ chia hết cho 2011.

Bài 12. Cho dãy số (x_n) được xác định bởi $x_1 = 1, x_2 = 2011$

và $x_{n+2} = 4022x_{n+1} - x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng $\frac{x_{2012} + 1}{2012}$ là số chính phương

(Đề thi chọn đội tuyển Việt nam dự thi Olympic Toán Quốc tế năm 2012)

Hướng dẫn giải

Phương trình đặc trưng của dãy $(x_n) (n \in \mathbb{N}^*)$ là $t^2 - 4022t + 1 = 0$

Phương trình này có hai nghiệm là $t_1 = 2011 + \sqrt{2010 \cdot 2012}$

Và $t_2 = 2011 - \sqrt{2010 \cdot 2012}$. Tồn tại các hằng số α, β sao cho $x_n = \alpha t_1^{n-1} + \beta t_2^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vì $x_1 = 1, x_2 = 2011$ nên $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$. Suy ra $x_{2012} = \frac{1}{2}(t_1^{2011} + t_2^{2011})$. Suy ra

$$\frac{x_{2012} + 1}{2012} = \left[\frac{1}{2\sqrt{1006}} (\sqrt{t_1^{2011}} + \sqrt{t_2^{2011}}) \right]^2. \text{ Ta có } \sqrt{t_1} = \sqrt{1006} + \sqrt{1005}, \sqrt{t_2} = \sqrt{1006} - \sqrt{1005}$$

Đặt $a = \sqrt{t_1^{2011}} + \sqrt{t_2^{2011}}$, ta có $a = (\sqrt{1006} + \sqrt{1005})^{2011} + (\sqrt{1006} - \sqrt{1005})^{2011}$

$$= \frac{2\sqrt{1006} \sum_{k=0}^{1005} C_{2011}^{2k} 1006^{1005-k} \cdot 1005^k}{b = \frac{1}{2\sqrt{1006}} a} \quad \text{Đặt } b = \frac{1}{2\sqrt{1006}} a, \text{ ta có } b = \sum_{k=0}^{1005} C_{2011}^{2k} 1006^{1005-k} \cdot 1005^k$$

Suy ra b là một số nguyên. Mặt khác $\frac{x_{2012}+1}{2012} = b^2$. Vậy $\frac{x_{2012}+1}{2012}$ là số chính phương

Sau đây là một số bài toán dành để luyện tập:

Bài 13. Cho dãy số (a_n) được xác định bởi $a_0 = a_1 = 1, a_{n+1} = 14a_n - a_{n-1} - 4, \forall n \geq 1$
 Chứng minh mọi số hạng của dãy (a_n) đều là bình phương của các số nguyên

Hướng dẫn giải

Xét dãy số $(b_n) (n \in \mathbb{N})$ được xác định bởi $b_n = a_n - \frac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$

Khi đó ta có $b_{n+1} = 14b_n - b_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$. Phương trình đặc trưng của dãy (b_n) là $\lambda^2 - 14\lambda + 1 = 0$

.Phương trình này có hai nghiệm là $\lambda_1 = 7 + \sqrt{48}, \lambda_2 = 7 - \sqrt{48}$. Tồn tại các hằng số α, β sao cho

$$b_n = \alpha \lambda_1^n + \beta \lambda_2^n, \forall n \in \mathbb{N}. \text{ Vì } b_1 = b_2 = \frac{2}{3} \text{ nên } \alpha = \frac{2 - \sqrt{3}}{6}, \beta = \frac{2 + \sqrt{3}}{6}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2 - \sqrt{3}}{6} (7 + \sqrt{48})^n + \frac{2 + \sqrt{3}}{6} (7 - \sqrt{48})^n + \frac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow a_n = \left[\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{6}} (2 + \sqrt{3})^n + \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{6}} (2 - \sqrt{3})^n \right]^2$$

$$\text{Xét dãy số } (c_n) \text{ sao cho } c_n = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{6}} (2 + \sqrt{3})^n + \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{6}} (2 - \sqrt{3})^n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Bằng phương pháp quy nạp toán học ta chứng minh được $c_{n+1} = 4c_n - c_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$. Mặt khác $c_0 = c_1 = 1$. Suy ra c_n là số nguyên với mọi $n \in \mathbb{N}$. Mặt khác $a_n = c_n^2$. Vậy a_n là số chính phương với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Bài 14. Chứng minh tồn tại vô số cặp số nguyên dương (m, n) sao cho $\frac{m+1}{n} + \frac{n+1}{m}$ là một số nguyên dương.

....(Đề thi Olympic Toán của Anh năm 2007)

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh rằng phương trình $\frac{x+1}{y} + \frac{y+1}{x} = 4$ (1) có vô số nghiệm nguyên dương. Thật vậy
 (1) $\Leftrightarrow x^2 + (1 - 4y)x + y^2 + y = 0$ (2)

$N_X : (x_1 = 1, y_1 = 1)$ là một nghiệm nguyên dương của (2)

Xét dãy $(t_k), k \geq 1$ sao cho $t_1 = t_2, t_{k+2} = 4t_{k+1} - t_k - 1, k \geq 1$

Dễ dàng chứng minh được $t_{k+1} > t_k > 0, \forall k \geq 2$. Ta có (t_1, t_2) là một nghiệm nguyên dương của phương trình (2). Giả sử (t_{k+1}, t_{k+2}) là một nghiệm nguyên dương của phương trình (2) tức là $t_k^2 + (1 - 4t_{k+1})t_k + t_{k+1}^2 + t_{k+1} = 0$

$$\begin{aligned} \text{Xét } & t_{k+2}^2 + (1 - 4t_{k+1})t_{k+2} + t_{k+1}^2 + t_{k+1} - [t_k^2 + (1 - 4t_{k+1})t_k + t_{k+1}^2 + t_{k+1}] \\ &= t_{k+2}^2 - t_k^2 + (1 - 4t_{k+1})(t_{k+2} - t_k) = (t_{k+2} - t_k)(t_{k+2} + t_k + 1 - 4t_{k+1}) = 0 \\ &\Rightarrow t_{k+2}^2 + (1 - 4t_{k+1})t_{k+2} + t_{k+1}^2 + t_{k+1} = 0 \\ &\Rightarrow (x, y) = (t_{k+1}, t_{k+2}) \text{ cũng là } x_n = 4x_{n-1} - x_{n-2}, \forall n \geq 3 \text{ nghiệm } x_1 = 3, x_2 = 11 \text{ nguyên dương} \end{aligned}$$

của phương trình (2)

Vì $t_{k+1} > t_k > 0, \forall k \geq 2$ nên phương trình (1) có vô số nghiệm nguyên dương.

Vậy tồn tại vô số cặp số nguyên dương (m, n) sao cho $\frac{m+1}{n} + \frac{n+1}{m}$ là một số nguyên dương.

Bài 15. Cho dãy số $(x_n) (n \in \mathbb{N}^*)$ được xác định bởi $x_{2n+1} = 4x_{2n} - x_{2n-1}$ và $x_1 = 3, x_2 = 11, x_3 = 41$. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n tồn tại các số nguyên a, b sao cho $x_n = a^2 + 2b^2$.

Hướng dẫn giải

Ta có $x_1 = 1 + 2 \cdot 1^2, x_2 = 3^2 + 2 \cdot 1^2, x_3 = 3^2 + 2 \cdot 4^2, x_4 = 11^2 + 2 \cdot 4^2$

Ta chứng minh $x_{2n-1} = x_{n-1}^2 + 2 \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{2} \right)^2, x_{2n} = x_n^2 + 2 \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{2} \right)^2$

Thật vậy $x_{2n+1} = 4x_{2n} - x_{2n-1} = 4x_n^2 + 8 \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{2} \right)^2 - x_{n-1}^2 - 2 \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{2} \right)^2$

$$= \frac{11}{2}x_n^2 - 3x_n x_{n-1} - \frac{1}{2}x_{n-1}^2 = \frac{11}{2}x_n^2 - 3x_n(4x_n - x_{n+1}) + \frac{1}{2}(4x_n - x_{n+1})^2$$

$$= \frac{3}{2}x_n^2 - x_n x_{n+1} + \frac{1}{2}x_{n+1}^2 = x_n^2 + 2 \left(\frac{x_{n+1} - x_n}{2} \right)^2$$

$$x_{2n+2} = 4x_{2n+1} - x_{2n} = 4x_n^2 + 8 \left(\frac{x_{n+1} - x_n}{2} \right)^2 - x_n^2 - 2 \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{2} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
&= 3x_n^2 + 8\left(\frac{x_{n+1} - x_n}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{x_{n+1} - 3x_n}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}x_{n+1}^2 - x_n x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n^2 \\
&= x_{n+1}^2 - x_n x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n^2 = x_{n+1}^2 + 2\left(\frac{x_{n+1} - x_n}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

Bài 16. Cho dãy số $(x_n)(n \in \mathbb{N}^*)$ được xác định bởi $x_1 = 1, x_2 = 3$ và $x_n = 6x_{n-1} - x_{n-2}, \forall n \geq 3$. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n tồn tại các số nguyên a, b sao cho $x_n = a^2 + 2b^2$.

Hướng dẫn giải

Xét các dãy số $(u_n)(n \in \mathbb{N}^*)$ và $(v_n)(n \in \mathbb{N}^*)$ được xác định bởi $u_1 = 1, v_1 = 0$,

$u_{n+1} = u_n + 2v_n$ và $v_{n+1} = u_n + v_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Chúng ta chứng minh

$x_n = u_n^2 + 2v_n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (1) bằng phương pháp quy nạp toán học. Thật vậy mệnh đề đúng với $n = 1$ và $n = 2$. Giả sử mệnh đề đúng đến $n = m (m \geq 2)$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned}
x_{m-1} &= u_{m-1}^2 + 2v_{m-1}^2, x_m = u_m^2 + 2v_m^2. \text{ Đặt } A = u_{m-1}, B = v_{m-1} \text{ ta có} \\
u_m &= A + 2B, v_m = A + B, u_{m+1} = 3A + 4B, v_{m+1} = 2A + 3B
\end{aligned}$$

Ta có $6x_m - x_{m-1} = 6(u_m^2 + 2v_m^2) - (u_{m-1}^2 + 2v_{m-1}^2) = 6[(A + 2B)^2 + 2(A + B)^2] - (A^2 + 2B^2)$
 $= (3A + 4B)^2 + 2(2A + 3B)^2 = u_{m+1}^2 + 2v_{m+1}^2$. Suy ra $x_{m+1} = u_{m+1}^2 + 2v_{m+1}^2$. Vậy (1) cũng đúng với $n = m + 1$. Theo nguyên lý quy nạp toán học (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy với mỗi số nguyên dương n tồn tại các số nguyên a, b sao cho $x_n = a^2 + 2b^2$.

Bài 17. (Học sinh giỏi Việt Nam 1991)

Cho dãy số (a_n) xác định bởi:

$$a_1 = 1.2.3, a_2 = 2.3.4, a_n = n(n+1)(n+2)$$

Đặt $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Chứng minh rằng $4S_n + 1$ là một số chính phương

Hướng dẫn giải

$$S_1 = a_1 = 1.2.3$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = 1.2.3 + 2.3.4 = 2.3.5$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 2.3.5 + 3.4.5 = 3.5.6$$

$$\Rightarrow S_1 = \frac{1}{4}.1.2.3.4, S_2 = \frac{1}{4}.2.3.4.5, S_3 = \frac{1}{4}.3.4.5.6$$

Giả sử $S_k = \frac{1}{4} \cdot k \cdot (k+1)(k+2)(k+3), k \geq 3$ (giả thiết quy nạp)

Ta sẽ chứng minh $S_{k+1} = \frac{1}{4} \cdot (k+1)(k+2)(k+3)(k+4)$

Thật vậy, theo đề bài $\Rightarrow S_{k+1} = S_k + a_{k+1} = S_k + (k+1)(k+2)(k+3)$

Theo giả thiết quy nạp $\Rightarrow S_{k+1} = \frac{1}{4} \cdot k(k+1)(k+2)(k+3) + (k+1)(k+2)(k+3)$

$$\Rightarrow S_{k+1} = \frac{1}{4} (k+1)(k+2)(k+3)(k+4)$$

Theo nguyên tắc quy nạp suy ra $S_n = \frac{1}{4} \cdot n(n+1)(n+2)(n+3)$

$$\Rightarrow 4S_n + 1 = n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1$$

$$\Rightarrow 4S_n + 1 = (n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$$

$$\text{Và } \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n^2 + 3n + 1 \in \mathbb{N}$$

Vậy $4S_n + 1$ là một số chính phương

Nhận xét:

Trong khi giải các bài tập về dãy số nêu trên ta thấy cách biến đổi khá đa dạng, đôi khi có phép biến đổi rất khéo không tự nhiên. Nhưng việc tính toán một số phần tử đầu của dãy số sau đó dự đoán và chứng minh theo phương pháp quy nạp xem ra khá tốt.

MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN SỐ CHÍNH PHƯƠNG CỦA DÃY TUYẾN TÍNH CẤP HAI

Trần Ngọc Thắng – THPT Chuyên Vĩnh Phúc

I. LÝ THUYẾT

1. Công thức tổng quát của dãy (u_n) thỏa mãn $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c$.

Trường hợp 1: $a + b = 1$

$$\text{Ta có } u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c \Leftrightarrow u_{n+2} + (1-a)u_{n+1} = u_{n+1} + (1-a)u_n + c$$

Đặt $v_n = u_{n+1} + (1-a)u_n$ ta được $v_{n+1} = v_n + c$. Từ đó ta được $v_n = v_1 + (n-1)c, n = 1, 2, \dots$ suy ra

$$u_{n+1} = (a-1)u_n + v_1 + (n-1)c. \text{ Do đó}$$

$$u_{n+1} = (a-1)u_n + v_1 + (n-1)c$$

$$(a-1)u_n = (a-1)^2 u_{n-1} + v_1(a-1) + (a-1)(n-2)c$$

$$(a-1)^2 u_{n-1} = (a-1)^3 u_{n-2} + v_1 (a-1)^2 + (a-1)^2 (n-3)c$$

...

$$(a-1)^{n-1} u_2 = (a-1)^n u_1 + v_1 (a-1)^{n-1} + (a-1)^{n-1} (n-1)c$$

Cộng từng vế các đẳng thức trên ta được:

$$u_{n+1} = (a-1)^n u_1 + v_1 \sum_{k=0}^{n-1} (a-1)^k + c \sum_{k=0}^{n-1} [(a-1)^k (n-k-1)]$$

Trường hợp 2: $a+b \neq 1$

Đặt $u_n = x_n + \alpha$, ta sẽ chọn α sao cho dãy số (x_n) là dãy tuyến tính cấp hai.

$$\text{Ta có } u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c \Leftrightarrow x_{n+2} + \alpha = a(x_{n+1} + \alpha) + b(x_n + \alpha) + c$$

$$\text{Để được dãy số } (x_n) \text{ tuyến tính ta sẽ chọn } \alpha \text{ sao cho } \alpha = a\alpha + b\alpha + c \Leftrightarrow \alpha = \frac{c}{1-a-b}$$

Khi đó ta được $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$, $n=1, 2, \dots$

Xét phương trình đặc trưng: $t^2 - at - b = 0$ (1)

+) Nếu phương trình (1) có hai thực phân biệt t_1, t_2 thì $x_n = At_1^n + Bt_2^n$, trong đó A, B là các hằng số được tính theo các số hạng x_1, x_2 .

+) Nếu phương trình (1) có nghiệm kép $t_1 = t_2 = t_0$ thì $x_n = (A+Bn)t_0^n$, trong đó A, B là các hằng số được tính theo các số hạng x_1, x_2 .

+) Nếu phương trình (1) có hai nghiệm phức $x \pm yi$ thì $x_n = r^n (A \cos n\varphi + B \sin n\varphi)$, trong đó A, B là các hằng số được tính theo các số hạng x_1, x_2 và $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, φ là một argument của $x + yi$.

2. Tính chất cơ bản dãy tuyến tính cấp hai.

Xét dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, $n=1, 2, \dots$

$$\frac{u_{n+2} - bu_n}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1} - bu_{n-1}}{u_n} \Rightarrow u_n (u_{n+2} - bu_n) = u_{n+1} (u_{n+1} - bu_{n-1})$$

$$\Rightarrow u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = -b(u_{n-1} u_{n+1} - u_n^2) = \dots = (-b)^{n-1} (u_1 u_3 - u_2^2)$$

$$\text{Do đó dãy } (u_n) \text{ thỏa mãn } u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-b)^{n-1} (u_1 u_3 - u_2^2)$$

Đây là tính chất rất quan trọng về dãy tuyến tính cấp hai, tính chất này thường được sử dụng khi chứng minh các đẳng thức liên quan đến các số hạng của dãy và các tính chất số học của dãy.

3. Phương pháp thường dùng để chứng minh $f(u_n)$ là số chính phương, trong đó (u_n) thỏa mãn $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c$.

Để chứng minh dãy số (b_n) thỏa mãn b_n là số chính phương với mọi số nguyên dương n ta thường sử dụng một số hướng sau:

Hướng 1: Ta chỉ ra tồn tại dãy số nguyên (c_n) thỏa mãn $b_n = c_n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dãy số (c_n) thường dự đoán bằng cách tính một số giá trị đầu $c_1, c_2, \dots$ và tìm ra quy luật của dãy (c_n) .

Hướng 2: Ta chứng minh $b_n b_{n+2}$ là một số chính phương với mọi số tự nhiên n , sau đó chứng minh bằng quy nạp.

Hướng 3: Dựa vào công thức truy hồi ta tính được $b_n = c_n^2$

II. MỘT SỐ BÀI TẬP MINH HỌA

Bài 18. Cho dãy số $(a_n): a_0 = 1, a_1 = 2, a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n, n \geq 0$. Chứng minh rằng:

- a) $a_n - 1$ là số chính phương với mọi n lẻ
 b) $\frac{a_n - 1}{6}$ là số chính phương với mọi n chẵn.

Hướng dẫn giải

a) **Cách 1:** Ta dự đoán dãy số (c_n) sao cho $a_{2n+1} - 1 = c_n^2$, ta có $a_1 = 2, a_3 = 26, a_5 = 362, a_7 = 5042$ suy ra $c_0 = 1, c_1 = 5, c_2 = 19, c_3 = 71$. Khi đó ta thử thiết lập quan hệ truy hồi của dãy (c_n) theo dãy tuyến tính cấp 2, giả sử $c_{n+2} = ac_{n+1} + bc_n$ và từ $c_0 = 1, c_1 = 5, c_2 = 19, c_3 = 71$ ta được $\begin{cases} 5a + b = 19 \\ 19a + 5b = 71 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -1 \end{cases}$. Do đó ta dự đoán dãy số (c_n) là: $c_0 = 1, c_1 = 5, c_{n+2} = 4c_{n+1} - c_n, n = 0, 1, 2, \dots$

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp $a_{2n+1} - 1 = c_n^2$ (1), $\forall n = 0, 1, 2, \dots$. Thật vậy (1) đúng với $n = 0$, giả sử (1) đúng đến $n > 0$, ta sẽ chứng minh (1) đúng đến $n + 1$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } a_{2n+3} - 1 &= 4a_{2n+2} - a_{2n+1} - 1 = 4(4a_{2n+1} - a_{2n}) - a_{2n+1} - 1 = 16a_{2n+1} - 4a_{2n} - a_{2n+1} - 1 \\ &= 15a_{2n+1} - (a_{2n+1} + a_{2n-1}) - 1 = 14a_{2n+1} - a_{2n-1} - 1 = 14(c_n^2 + 1) - c_{n-1}^2 - 1 - 1 = 12c_n^2 - c_{n-1}^2 - 12 \end{aligned} \quad (2)$$

Theo hệ thức cơ bản của dãy tuyến tính cấp 2 ta được:

$$c_{n+1}c_{n-1} - c_n^2 = -6 \Rightarrow (4c_n - c_{n-1})c_{n-1} - c_n^2 = -6 \Rightarrow c_n^2 + c_{n-1}^2 - 4c_nc_{n-1} - 6 = 0 \quad (3)$$

Ta có

$$\begin{aligned} c_{n+1}^2 &= (4c_n - c_{n-1})^2 = 16c_n^2 - 8c_nc_{n-1} + c_{n-1}^2 = 16c_n^2 - 2(c_n^2 + c_{n-1}^2 - 6) + c_{n-1}^2 \\ &= 14c_n^2 - c_{n-1}^2 - 12 \end{aligned} \quad (4)$$

Từ (2) và (4) suy ra

$$a_{2n+3} - 1 = c_{n+1}^2$$

Do đó ta chứng minh được (1) đúng đến $n + 1$ suy ra (1) đúng.

Cách 2: Ta có $a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2 = 3, \forall n \geq 0$. Từ hệ thức này ta được:

$$(a_{n+2} - 1)(a_n - 1) = a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2 - a_n + 1 = a_{n+1}^2 + 3 - 4a_{n+1} + 1 = (a_{n+1} - 2)^2 \quad (5).$$

Từ hệ thức (5) bằng phương pháp quy nạp suy ra $a_n - 1$ là số chính phương với mọi số nguyên dương lẻ n .

b) Ta chứng minh theo hướng 2 như sau:

Ta có
$$\frac{a_{n+2} - 1}{6} \cdot \frac{a_n - 1}{6} = \frac{a_{n+2}a_n - a_{n+2} - a_n + 1}{36} = \frac{a_{n+1}^2 - 4a_{n+1} + 4}{36} = \left(\frac{a_{n+1} - 2}{6} \right)^2$$

Từ đẳng thức này bằng phương pháp quy nạp suy ra $\frac{a_n - 1}{6}$ là số chính phương.

I. Các định nghĩa và các định lý cơ bản

Định nghĩa 1:

*) Ta nói dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn a nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại số tự nhiên N_0 (phụ thuộc vào dãy số x_n và ε) sao cho với mọi $n > N_0$ ta có $|x_n - a| < \varepsilon$.

$$\lim x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n > N_0 : |x_n - a| < \varepsilon.$$

*) Ta nói dãy số (x_n) dần đến $+\infty$ nếu với mọi số thực dương M lớn tùy ý, tồn tại số tự nhiên N_0 (phụ thuộc vào dãy số x_n và M) sao cho với mọi $n > N_0$, ta có $x_n > M$.

$$\lim x_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n > N_0 : x_n > M.$$

$$\text{Tương tự, } \lim x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall P < 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n > N_0 : x_n < P.$$

Dãy số có giới hạn hữu hạn được gọi là dãy hội tụ. Dãy số không có giới hạn hữu hạn hoặc dần đến vô cùng ($+\infty$ hoặc $-\infty$) gọi là dãy phân kì.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$.

Bài giải:

Với mọi $\varepsilon > 0$, xét bất phương trình $\left| \frac{n-1}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$ (*).

$$\text{Có } \left| \frac{n-1}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{2}{\varepsilon} - 1.$$

Nếu chọn $n_0 = \left\lceil \frac{2}{\varepsilon} \right\rceil > \frac{2}{\varepsilon} - 1$ thì (*) luôn đúng $\forall n > n_0, n_0 \in \mathbb{N}$.

Tính chất của dãy có giới hạn vô cực:

$$1) \text{ Nếu } \lim |u_n| = +\infty \text{ thì } \lim \frac{1}{u_n} = 0.$$

2) Nếu $\lim u_n = \pm\infty, \lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim u_n \cdot v_n = \pm\infty$, trong đó dấu $+$ hoặc $-$ được chọn theo đúng quy tắc nhân dấu thông thường.

3) Nếu $\lim u_n = \pm\infty, \lim v_n = L \neq 0$ thì $\lim u_n \cdot v_n = \pm\infty$, trong đó dấu $+$ hoặc $-$ được chọn theo đúng quy tắc nhân dấu thông thường.

4) Nếu $\lim u_n = L \neq 0, \lim v_n = 0$ và (v_n) có dấu xác định kể từ một số hạng nào đó
 $\lim \frac{u_n}{v_n} = \pm\infty$
trở đi thì $\frac{u_n}{v_n}$ trong đó dấu $+$ hoặc $-$ được chọn theo đúng quy tắc chia dấu thông thường.

5) Nếu $\lim u_n = \pm\infty, \lim v_n = L$ thì $\lim(u_n + v_n) = \pm\infty$.

Định lý 1. Mọi dãy hội tụ đều có giới hạn duy nhất.

Chứng minh.

Ta thấy rằng nếu $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ và $|a_1 - a_2| < \varepsilon$. Khi đó với mọi ε dương nhỏ tùy ý cho trước thì $a_1 = a_2$. Thật vậy, nếu $a_1 \neq a_2$ ta chọn $\varepsilon = \frac{|a_1 - a_2|}{2} \Rightarrow |a_1 - a_2| > \varepsilon$, mâu thuẫn.

Giả sử $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = a_1, \lim_{x \rightarrow +\infty} v_n = a_2$. Khi đó $\forall \varepsilon > 0$:

$$\exists n_1 : \forall n > n_1 : |u_n - a_1| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ và } \exists n_2 : \forall n > n_2 : |u_n - a_2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\text{Đặt } n_0 = \max\{n_1, n_2\} \text{ có: } |a_1 - a_2| = |a_1 - u_n + u_n - a_2| \leq |u_n - a_1| + |u_n - a_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Theo nhận xét trên thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = a_1 = a_2$.

Định nghĩa 2. (Dãy con)

Cho dãy số thực (u_n) và dãy số nguyên dương (n_k) sao cho $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$. Dãy $(u_{n_k}) = \{u_{n_1}, u_{n_2}, \dots, u_{n_k}, \dots\}$ được gọi là dãy con của dãy (u_n) .

Ta chú ý rằng $n_1 \geq 1, n_2 > n_1 \geq 1 \Rightarrow n_2 \geq 2$, tương tự ta có $n_k \geq k, \forall k \in \mathbb{N}^*$.

Dãy (u_n) là dãy con của chính nó với $n_k = k$.

Định lý 2. Mọi dãy con của dãy hội tụ là dãy hội tụ và có cùng giới hạn của dãy.

Chứng minh.

Giả sử $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = a$, theo định nghĩa ta có: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : \forall n > n_0 : |u_n - a| < \varepsilon$.

Cho (u_{n_k}) là dãy con của (u_n) . Khi đó $\forall k > n_0$, ta có $n_k \geq k > n_0$ nên $|u_{n_k} - a| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} u_{n_k} = a$.

Định lý 3. (Tổng, hiệu, tích, thương các dãy hội tụ)

Nếu $(x_n), (y_n)$ là các dãy hội tụ và có giới hạn tương ứng là a, b thì các dãy số $(x_n + y_n)$, $(x_n - y_n)$, $(x_n \cdot y_n)$, $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ cũng hội tụ và có giới hạn tương ứng là $a + b, a - b, a \cdot b, \frac{a}{b}$.
(Trong trường hợp dãy số thương, ta giả sử $y_n \neq 0$ và $b \neq 0$).

Chứng minh:

- Trường hợp $\lim(x_n + y_n) = a + b$

Có $\lim x_n = a$ nên $\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0, \exists n_1$ sao cho $\forall n > n_1$ thì $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ (1).

$\lim y_n = b$ nên $\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0, \exists n_2$ sao cho $\forall n > n_2$ thì $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ (2).

Đặt $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ thì $\forall n > n_0 \Rightarrow (1), (2)$ thỏa. Khi đó $\forall n > n_0$:

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow \lim(x_n + y_n) = a + b$$

- Trường hợp $\lim(x_n - y_n) = a - b$ ta chứng minh tương tự trường hợp $\lim(x_n + y_n) = a + b$ được

$$|(x_n - y_n) - (a - b)| \leq |x_n - a| + |b - y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow \lim(x_n - y_n) = a - b$$

- Trường hợp $\lim(x_n \cdot y_n) = ab$

Có $\lim x_n = a$ nên $\forall \sqrt{\varepsilon} > 0, \exists n_1$ sao cho $\forall n > n_1$ thì $|x_n - a| < \sqrt{\varepsilon}$ (3).

$\lim y_n = b$ nên $\forall \sqrt{\varepsilon} > 0, \exists n_2$ sao cho $\forall n > n_2$ thì $|y_n - b| < \sqrt{\varepsilon}$ (4).

Đặt $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ thì $\forall n > n_0 \Rightarrow (3), (4)$ thỏa. Khi đó $\forall n > n_0$:

$$|(x_n - a)(y_n - b)| = |(x_n \cdot y_n - ab - x_n b - y_n a + 2ab)| \geq |x_n \cdot y_n - ab| - |x_n b + y_n a - 2ab| \geq |x_n \cdot y_n - ab|$$

$$\Rightarrow |x_n \cdot y_n - ab| \leq \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\varepsilon} = \varepsilon \Rightarrow \text{đpcm.}$$

- Trường hợp $\lim \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{a}{b}, (y_n \neq 0, b \neq 0)$, ta chứng minh tương tự trường hợp $\lim(x_n \cdot y_n) = ab$ được

$$\left| (x_n - a) \left(\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b} \right) \right| = \left| \left(\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} \right) - \frac{x_n}{b} + \frac{a}{y_n} - \frac{2a}{b} \right| \geq \left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} \right| - \left| \frac{x_n}{b} + \frac{a}{y_n} - \frac{2a}{b} \right| \geq \left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} \right|$$

$$\Rightarrow \left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} \right| \leq \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\varepsilon} = \varepsilon \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Ví dụ 2. Tìm $\lim u_n$ với $u_n = \frac{2n^3 - 4n^2 + 3n + 3}{n^3 - 5n + 7}$

Giải.

$$u_n = \frac{2 - \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{3}{n^3}}{1 - \frac{5}{n^2} + \frac{7}{n^3}}$$

Ta có:

$$\lim u_n = \frac{\lim \left(2 - \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{3}{n^3} \right)}{\lim \left(1 - \frac{5}{n^2} + \frac{7}{n^3} \right)} = \frac{\lim 2 - \lim \frac{4}{n} + \lim \frac{3}{n^2} + \lim \frac{3}{n^3}}{\lim 1 - \lim \frac{5}{n^2} + \lim \frac{7}{n^3}} = \frac{2}{1} = 2$$

Suy ra:

Vì với $k \in \mathbb{Z}^+$, ta có: $\lim \frac{1}{n^k} = 0$.

Do nếu chọn $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}} \right\rceil + 1 > \frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon}}$ thì bất đẳng thức $\left| \frac{1}{n^k} \right| < \varepsilon$ đúng $\forall n > n_0$ hay $\lim \frac{1}{n^k} = 0$.

Định lý 4. Giả sử $\lim u_n = L$. Khi đó:

a) $\lim |u_n| = |L|$ và $\lim \sqrt[k]{u_n} = \sqrt[k]{L}$.

b) Nếu $u_n \geq 0, \forall n$ thì $L \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{L}$.

Định lý 5. (Chuyển qua giới hạn trong bất đẳng thức)

Cho dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn ℓ ; nếu $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\forall n > N_0$, ta có $a \leq x_n \leq b \Rightarrow a \leq \ell \leq b$.

Định lý 6. (Định lý kẹp)

Cho ba dãy số $(x_n), (y_n), (z_n)$, trong đó (x_n) và (z_n) có cùng giới hạn hữu hạn L , và $\exists N_0 \in \mathbb{N}: \forall n > N_0$ ta có $x_n \leq y_n \leq z_n$. Khi đó (y_n) cũng có giới hạn là L .

Chứng minh:

Ta chứng minh kết luận của định lý cho trường hợp $L = 0$.

Vì $\lim u_n = 0$ nên $\forall \varepsilon > 0$, tồn tại n_1 sao cho $\forall n > n_1: |u_n| < \varepsilon$, tức là $-\varepsilon < u_n < \varepsilon$.

Tương tự, tồn tại n_2 sao cho $\forall n > n_2: |w_n| < \varepsilon$, tức là $-\varepsilon < w_n < \varepsilon$.

Như vậy, $\forall n > n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ ta có $-\varepsilon < u_n \leq v_n \leq w_n < \varepsilon$.

Theo định nghĩa, ta có $\lim v_n = 0$.

Hệ quả. 1) Nếu $u_n \leq c, \forall n$ thì $\lim u_n \leq c$ (nếu giới hạn tồn tại).

2) Nếu $|u_n| \leq v_n \forall n$ và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng nếu $|q| < 1$ thì $\lim q^n = 0$.

Giải.

Đặt $a = \frac{1}{|q|} > 1$. Áp dụng bất đẳng thức Bernoulli, ta có: $a^n = (1 + a - 1)^n \geq 1 + n(a - 1) > 0$

$$0 < \frac{1}{a^n} \leq \frac{1}{1+n(a-1)} < \frac{1}{n(a-1)}$$

Suy ra

Mà $\lim 0 = 0$ và $\lim \frac{1}{n(a-1)} = 0$ nên theo định lí 4 có $\lim \frac{1}{a^n} = 0$ hay $\lim |q|^n = 0 \Rightarrow \lim q^n = 0$.

Định lí 7. Mọi dãy số hội tụ thì bị chặn.

Chứng minh:

Giả sử (x_n) hội tụ và $\lim x_n = L$. Theo định nghĩa, với $\varepsilon = 1, \exists N_0$ sao cho $\forall n > N_0$ thì $-1 < x_n - L < 1 \Rightarrow L - 1 < x_n < L + 1$.

Đặt $M = \max \{x_1, x_2, \dots, x_{N_0}, L + 1\}, m = \min \{x_1, x_2, \dots, x_{N_0}, L - 1\}$ thì ta có: $m \leq x_n \leq M$
 $\forall n = 1, 2, 3, \dots$

Suy ra (x_n) bị chặn.

Định lí 8. Một dãy tăng không nghiêm ngặt (knn) và bị chặn trên hay một dãy giảm knn và bị chặn dưới thì hội tụ. Ngắn gọn hơn, một dãy số đơn điệu và bị chặn thì hội tụ.

Định lí 9. a) Nếu dãy (x_n) tăng knn và có giới hạn là L thì ta có $x_n \leq L \forall n$.

b) Nếu dãy (x_n) giảm knn và có giới hạn là L thì ta có $x_n \geq L \forall n$.

Chứng minh.

Ta chỉ cần chứng minh a), vì b) hoàn toàn tương tự.

Giả sử ngược lại, tồn tại k sao cho $x_k > L$. Khi đó, vì (x_n) tăng knn nên ta có $x_n \geq x_k, \forall n > k$ suy ra $L = \lim x_n \geq x_k > L$ (theo định lí 3) $\Rightarrow$ mâu thuẫn. Vậy ta được đpcm.

Định lí 10. (Nguyên lí Cantor về dãy các đoạn thẳng lồng nhau)

Cho hai dãy số thực $(a_n), (b_n)$ sao cho:

a) $\forall n \in \mathbb{N}^* : a_n \leq b_n$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^* : [a_n; b_n] \supset [a_{n+1}; b_{n+1}]$.

c) $b_n - a_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Khi đó tồn tại duy nhất số thực L sao cho $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n] = \{L\}$.

Chứng minh.

Theo điều kiện b) thì $a_{n+1} \geq a_n$ và $b_{n+1} \leq b_n$ nên (a_n) là dãy tăng knn, (b_n) là dãy giảm knn kết hợp điều kiện a) ta được $a_n \leq b_1 \forall n$ và $b_n \geq a_1 \forall n$. Suy ra (a_n) là dãy tăng knn và bị chặn trên, (b_n) là dãy giảm knn và bị chặn dưới.

$\Rightarrow$ tồn tại $\lim a_n = A$ và $\lim b_n = B$. Do $b_n - a_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow +\infty \Rightarrow A = B = L$ ($L \in \mathbb{R}$).

Mặt khác, (a_n) và (b_n) là 2 dãy đơn điệu và có giới hạn là L nên $a_n \leq L \leq b_n \forall n$ (định lí 7), suy ra $[L] = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n]$. L là giới hạn của 2 dãy $(a_n), (b_n)$ nên có tính duy nhất $\Rightarrow$ đpcm.

Định lí 11. (Bolzano-Weierstrass)

Từ một dãy bị chặn luôn có thể trích ra một dãy con hội tụ.

Chứng minh.

Xét (a_n) bị chặn hay $\exists m, M$ sao cho đoạn $[m; M]$ chứa tất cả các số hạng của (a_n) .

Ta xây dựng dãy các đoạn thẳng $[x_n; y_n]$ theo quy tắc sau: $x_1 = m, y_1 = M$

Đặt $t = \frac{x_1 + y_1}{2}$. Vì $[x_1; y_1]$ chứa tất cả các số hạng của (a_n) nên một trong hai đoạn $[x_1; t]$, $[t; y_1]$ phải chứa vô số các số hạng của (a_n) . Giả sử đoạn $[x_1; t]$ chứa vô số các số hạng của (a_n) thì ta đặt $x_2 = x_1, y_2 = t$ (trường hợp đoạn $[t; y_1]$ chứa vô số các số hạng của (a_n) ta làm tương tự). Tiếp tục thực hiện như vậy, nếu ta đã xây dựng được đoạn $[x_k; y_k]$ chứa vô số các số hạng của (a_n) thì ta sẽ xây dựng được đoạn $[x_{k+1}; y_{k+1}]$ là 1 trong 2 nửa của $[x_k; y_k]$ và cũng chứa vô số các số hạng của (a_n) .

suy ra ta xây dựng được dãy các đoạn thẳng $[x_k; y_k]$ lồng nhau và $y_k - x_k = \frac{M - m}{2^{k-1}} \rightarrow 0$ và mỗi đoạn $[x_k; y_k]$ chứa vô số các số hạng của (a_n) .

Ta chọn dãy con (a_{i_j}) của (a_n) như sau:

$a_{i_1} = a_1$. Giả sử $a_{i_1}, \dots, a_{i_j}$ đã được chọn thì ta sẽ chọn chỉ số i_{j+1} sao cho:

- 1) $i_{j+1} > i_j$;
- 2) $a_{i_{j+1}} \in [x_{j+1}; y_{j+1}]$.

Việc chọn này luôn thực hiện được vì $[x_{j+1}; y_{j+1}]$ chứa vô số các số hạng của (a_n) .

Từ cách chọn dãy các đoạn thẳng $[x_n; y_n]$, theo định lí 8 $\exists L \in \mathbb{R}$ sao cho $\{L\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [x_n; y_n]$ hay $\lim x_n = \lim y_n = L$ (1). Mặt khác theo cách chọn (a_{i_j}) thì $x_j \leq a_{i_j} \leq y_j$ với mọi j $\Rightarrow \lim_{(1)} a_{i_j} = L$ (định lí kẹp). Vậy ta đã trích ra được một dãy con hội tụ từ (a_n) (đpcm).

Định nghĩa 3.

Dãy (x_n) được gọi là dãy cơ bản hay dãy Cauchy nếu $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}: \forall m, n > N_0$ (N_0 phụ thuộc ε) thì $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng nếu (x_n) là dãy Cauchy thì (x_n) bị chặn.

Chứng minh.

Ta cố định $m = N_0 + 1 > N_0$, khi đó $|x_m - x_n| < \varepsilon \Leftrightarrow |x_n - x_{N_0+1}| < \varepsilon \Leftrightarrow x_{N_0+1} - \varepsilon < x_n < x_{N_0+1} + \varepsilon$
 $\Rightarrow a < x_n < b$ với $a = x_{N_0} - \varepsilon, b = x_{N_0} + \varepsilon \Rightarrow (x_n)$ bị chặn (đpcm).

Định lí 12. (Tiêu chuẩn Cauchy)

Dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi nó là dãy Cauchy.

Chứng minh.

Nếu (x_n) hội tụ về giới hạn hữu hạn L thì $\forall \varepsilon > 0: \exists N_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\forall m > N_0$ ta có

$|x_m - L| < \frac{\varepsilon}{2}$. Khi đó $\forall m, n > N_0$, ta có:

$$|x_m - x_n| = |(x_m - L) - (x_n - L)| \leq |x_m - L| + |x_n - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Suy ra (x_n) là dãy Cauchy.

Ngược lại, giả sử (x_n) là dãy Cauchy. Khi đó (x_n) bị chặn. Theo định lí Bolzano-Weierstrass, tồn tại dãy con (x_{i_k}) của (x_n) có giới hạn hữu hạn L . Ta chứng minh L cũng là giới hạn của (x_n) .

$\forall \varepsilon > 0$, tồn tại k sao cho $\forall k > k_0$, ta có $|x_{i_k} - L| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Mặt khác (x_n) là dãy Cauchy nên tồn tại N_0 sao cho $\forall m, n > N_0$, ta có: $|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Do $i_k \rightarrow +\infty \Rightarrow \exists k > k_0$ sao cho $i_k > N_0$. Xét $m > N_0$ bất kì, ta có:

$$|x_m - x_{i_k}| = |(x_m - L) - (x_{i_k} - L)| \leq |x_m - L| + |x_{i_k} - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Suy ra $\lim x_n = L$.

Ví dụ 5. Chứng minh rằng dãy số (x_n) xác định bởi $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ hội tụ.

Giải.

Ta có với $m > n$ thì:

$$|x_m - x_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{m^2} < \frac{1}{n(n+1)} + \dots + \frac{1}{(m-1)m}$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n}$$

Nên $\forall \varepsilon > 0$, ta chọn $N_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$ thì $\forall m, n > N_0$, ta có: $|x_m - x_n| < \frac{1}{\min\{m, n\}} < \frac{1}{N_0} < \varepsilon$

Suy ra (x_n) là dãy Cauchy nên (x_n) hội tụ (đpcm).

Định nghĩa 4 (Số e)

Cho dãy (x_n) xác định: $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Theo Euler $\lim x_n$ tồn tại và kí hiệu là e , số e là một số vô tỷ và 15 số đầu trong khai triển thập phân của nó là $e = 2,718281828459045 \dots$. Ta chứng minh (x_n) là dãy hội tụ.

Chứng minh.

Ta xét dãy (y_n) với $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, ta chứng minh dãy (x_n) là dãy tăng và (y_n) là dãy giảm.

Ta có:

$$x_{n+1} > x_n \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n+1}} > 1 + \frac{1}{n} \Leftrightarrow \sqrt[n]{\frac{n+1}{n+2}} < \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \quad (*)$$

Mà $\sqrt[n]{\frac{n+1}{n+2}} < \frac{1}{n} \left(n - 1 + \frac{n+1}{n+2}\right) = \frac{n^2 + 2n - 1}{n(n+2)}$ (A-G) $\Rightarrow (*)$ đúng (do $(n^2 + 2n)^2 > (n^2 + 2n)^2 - 1$),

suy ra (x_n) là dãy tăng.

$$y_n < y_{n-1} \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n \Rightarrow \frac{n+1}{n} \sqrt[n]{\frac{n+1}{n}} \Rightarrow \frac{n^2}{n^2 - 1} > \sqrt[n]{\frac{n+1}{n}}$$

Mà $\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}} < \frac{1}{n} \left(n - 1 + \frac{n+1}{n}\right) = \frac{n^2 + 1}{n^2} < \frac{n^2}{n^2 - 1}$, nên (y_n) là dãy giảm.

Mặt khác, ta lại có $2 = x_1 \leq x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = y_n \leq y_1 = 4 \Rightarrow (x_n), (y_n)$ là dãy hội tụ (đpcm).

e là hằng số đặc biệt trong toán học. Hàm số e^x có những tính chất đặc biệt và người ta thường dùng làm cơ sở cho các hàm số mũ dùng trong giải tích. Hàm ngược của hàm e^x (hay $\exp(x)$) là $\log_e x$ hay $\ln x$ (đọc là logarit tự nhiên của x hay logarit Neper của x).

Bài 19. Cho dãy số (u_n) được xác định như sau

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2009} u_n^2 \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, 4, \dots)$$

a. Chứng minh $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$

b. Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \frac{u_3}{u_4} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1}} \right)$

Bài giải

a. Chứng minh $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$

Ta có $1 = u_1 < u_2 < u_3 < \dots < u_n < \dots$ Vậy (u_n) là dãy tăng. Giả sử dãy số bị chặn trên thì ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a > 1$.

Suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{u_n^2}{2009} + u_n \right) \Rightarrow a = \frac{a^2}{2009} + a \Rightarrow a = 0$. (không đúng)

Vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$

b. Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \frac{u_3}{u_4} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1}} \right)$

Ta có $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{2009} \Leftrightarrow \frac{u_n}{u_{n+1}} = 2009 \left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}} \right)$

Vậy ta có

$$\begin{aligned} \frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \frac{u_3}{u_4} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1}} &= 2009 \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{n+1}} \right) = 2009 \left(1 - \frac{1}{u_{n+1}} \right) \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \frac{u_3}{u_4} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1}} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2009 \left(1 - \frac{1}{u_{n+1}} \right) = 2009. \end{aligned}$$

Bài 20. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 11 \\ u_{n+1} = 10u_n + 1 - 9n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Tìm công thức tính u_n theo n .

Bài giải

Ta có:

$$u_1 = 11 = 10 + 1$$

$$u_2 = 10 \cdot 11 + 1 - 9 = 100 + 2$$

$$u_3 = 1003 = 1000 + 3$$

Dự đoán: $u_n = 10^n + 1$ (1). Chứng minh:

Ta có: $u_1 = 10^1 + 1$, công thức (1) đúng với $n = 1$.

Giả sử công thức $n = 1$ đúng với $n = k$ ta có: $u_k = 10^k + 1$. Ta có:

$$u_{k+1} = 10(10^k + 1) + 1 - 9k = 10^{k+1} + (k + 1). \text{ Công thức (1) đúng với } n = k + 1$$

Vậy $u_n = 10^n + 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Bài 21. Cho $P_n = \frac{1}{1} - \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} - \frac{2}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{2}{(n+1)(n+2)}$. Gọi U_n là số hạng tổng quát của P_n . Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

Bài giải

Ta có:
$$1 - \frac{2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+3)}{(k+1)(k+2)}$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, n \text{ ta được: } S_n = \frac{1 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 6 \dots n(n+3)}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 \dots (n+2)(n+1)}$$

Cho

Suy ra

$$U_n = \frac{n+3}{3(n+1)} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+3}{3(n+1)} = \frac{1}{3}.$$

Bài 22. Cho dãy (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2012u_n}{2013} \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.

Thành lập dãy (S_n) xác định bởi: $S_n = \sum_{i=1}^n \frac{u_i}{u_{i+1} - 1}$. Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

Bài giải

Ta có:

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2012u_n}{2013} = \frac{u_n^2 + 2013u_n - u_n}{2013} = \frac{u_n(u_n - 1)}{2013} + u_n, \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (*)$$

$$u_1 = 2 \Rightarrow u_1 < u_2 < \dots < u_n < u_{n+1} < \dots$$

Suy ra (u_n) là dãy tăng

Giả sử u_n bị chặn trên lúc đó tồn tại số L sao cho $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = L \quad (L > 2)$.

Từ (*) ta có : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n(u_n - 1)}{2013} + \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$

$$\Rightarrow L = \frac{L(L - 1)}{2013} + L \Rightarrow \begin{cases} L = 1 \\ L = 0 \end{cases} \text{ (vô lý)}$$

Đ u_n không bị chặn trên. Suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_n} = 0$.

Mặt khác :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n^2 + 2012u_n}{2013} = \frac{u_n(u_n - 1)}{2013} + u_n \\ \Rightarrow u_n(u_n - 1) &= 2013(u_{n+1} - u_n) = 2013[(u_{n+1} - 1) - (u_n - 1)] \\ \Rightarrow u_n &= 2013 \left(\frac{u_{n+1} - 1}{u_n - 1} - 1 \right) \Rightarrow \frac{u_n}{u_{n+1} - 1} = 2013 \left(\frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \right). \end{aligned}$$

$$n=1 \Rightarrow \frac{u_1}{u_2 - 1} = 2013 \left(\frac{1}{u_1 - 1} - \frac{1}{u_2 - 1} \right) = 2013 \left(1 - \frac{1}{u_2 - 1} \right).$$

Cho

Tương tự

$$\frac{u_2}{u_3 - 1} = 2013 \left(\frac{1}{u_2 - 1} - \frac{1}{u_3 - 1} \right)$$

⋮

$$\frac{u_n}{u_{n+1} - 1} = 2013 \left(\frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \right)$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n \frac{u_i}{u_{i+1} - 1} = 2013 \left(1 - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \right)$$

Cộng vế theo vế ta được:

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2013 \left(1 - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \right) = 2013$$

Bài 23. Cho dãy số (u_n) xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 2012 \\ u_{n+1} = 2012u_n^2 + u_n, "n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Tìm

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1}} \right)$$

Bài giải

Chứng minh được dãy tăng: $u_{n+1} - u_n = 2012u_n^2, "n \in \mathbb{N}^*$.

Giả sử có giới hạn là a thì: $a = 2012a^2 + a \Rightarrow a = 0 > 2012$ (vô lý)

nên $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$.

Ta có:
$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{u_n^2}{u_{n+1}u_n} = \frac{u_{n+1} - u_n}{2012u_{n+1}u_n} = \frac{1}{2012} \left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}} \right)$$

Vậy:
$$S = \frac{1}{2012} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{n+1}} \right) = \frac{1}{2012^2}$$

Bài 14: Cho dãy số $\{x_k\}$ xác định bởi: $x_k = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{k}{(k+1)!}$. Tính: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + x_3^n + \dots + x_{2012}^n}$.

Bài giải

Ta có

$$x_{k+1} - x_k = \frac{k+1}{(k+2)!} > 0, "k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x_{k+1} > x_k > 0, "k \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow x_{2012}^n < x_1^n + x_2^n + \dots + x_{2012}^n < 2012.x_{2012}^n$$

$$\Rightarrow x_{2012} < \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \dots + x_{2012}^n} < \sqrt[n]{2012.x_{2012}^n}$$

Ta có

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}, "k \in \mathbb{N}^*.$$

$$\Rightarrow x_k = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(k+1)!}$$

$$\Rightarrow x_{2012} = 1 - \frac{1}{2013!}$$

$$1 - \frac{1}{2013!} < \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \dots + x_{2012}^n} < \sqrt[n]{2012} - \frac{1}{2013!}$$

Suy ra $\lim \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \dots + x_{2012}^n} = 1 - \frac{1}{2013!}.$

Bài 36: Cho dãy số: (U_n) xác định như sau: $(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})U_n = \frac{2}{2n+1}, n=1, 2, 3, \dots$ Chứng minh rằng:

$$U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_{2010} < \frac{1005}{1006}.$$

Bài giải

Ta có: $U_k = \frac{2}{(2k+1)(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})} = \frac{2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})}{2k+1}$

Ta có:

$$U_k < \frac{2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})}{2\sqrt{k(k+1)}}, \text{ do } \sqrt{k(k+1)} < \frac{k+(k+1)}{2} = \frac{2k+1}{2} \Rightarrow U_k < \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Do đó:

$$U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_k < \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{k+1}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{4k+4}} < 1 - \frac{2}{\sqrt{k^2 + 4k + 4}} = 1 - \frac{2}{k+2} = \frac{k}{k+2}.$$

Suy ra: $U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_k < \frac{k}{k+2}.$

Khi $k = 2010$ thì $U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_{2010} < \frac{1005}{1006}$ (đpcm)

$$S = 5 + 55 + 555 + \dots + \underbrace{555}_{n}.$$

Bài 39: Tính tổng :

Bài giải

Ta có

$$S = \frac{5}{9} \left(9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999}_{n} \right)$$

$$\Rightarrow S = \frac{5}{9} (10 - 1 + 10^2 - 1 + 10^3 - 1 + \dots + 10^n - 1) = \frac{5}{9} \left(\frac{10(10^n - 1)}{10 - 1} - n \right) = \frac{5(10^{n+1} - 10 - 9n)}{81}$$

Bài 41: Cho dãy (x_n) : $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \frac{(2 + \cos 2\alpha)x_n + \cos^2 \alpha}{(2 - 2\cos 2\alpha)x_n + 2 - \cos 2\alpha}$. Đặt $y_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2x_i + 1}$, $\forall n \geq 1$.
 Tìm α để dãy số (y_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới.

Bài giải

Ta có :

$$x_{n+1} = \frac{3x_n - 2x_n \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{4x_n \sin^2 \alpha + 2\sin^2 \alpha + 1} \Rightarrow \frac{1}{2x_{n+1} + 1} = \frac{2\sin^2 \alpha}{3} + \frac{1}{3(2x_n + 1)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2x_n + 1} = \frac{1}{3^n} + \left(1 - \frac{1}{3^{n-1}} \right) \sin^2 \alpha$$

$$\Rightarrow y_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2x_i + 1} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{3^i} + \sin^2 \alpha \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{3^{i-1}} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right) + \left[n - \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right) \right] \sin^2 \alpha$$

$\Rightarrow$

Vì $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n} = 0$ nên dãy (y_n) có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi $\sin \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = k\pi$.

Bài 44: Cho dãy số (U_n) thỏa mãn điều kiện : $\begin{cases} U_1 = 3 \\ U_{n+1} = U_n + n(n+1) \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

U_n và tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{n^3 + 1}$.

Xác định công thức số hạng tổng quát

Bài giải

Ta có :

$$U_1 = 3$$

$$U_2 = U_1 + 1 + 1^2$$

$$U_3 = U_2 + 2 + 2^2$$

...

$$U_n = U_{n-1} + (n-1) + (n-1)^2$$

$$U_n = 3 + (1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)) + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2)$$

Do đó

Bằng qui nạp chứng minh được rằng :

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

Suy ra

$$U_n = 3 + \frac{(n-1)n}{2} + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{n^3 - n + 9}{3}$$

Do đó

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_n}{n^3 + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n^3 - n + 9}{3}}{n^3 + 1} = \frac{1}{3}$$

Bài 45: Cho dãy số (U_n) có
$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n^2 + \frac{1}{2^n}} \end{cases} \quad \forall n \geq 1$$
. Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

Bài giải

Do $U_{n+1} = \sqrt{U_n^2 + \frac{1}{2^n}}$ nên $U_{n+1}^2 = U_n^2 + \frac{1}{2^n}$ với $\forall n \geq 1$.

Khi đó

$$U_2^2 = U_1^2 + \frac{1}{2}$$

$$U_3^2 = U_2^2 + \frac{1}{2^2}$$

...

$$U_n^2 = U_{n-1}^2 + \frac{1}{2^{n-1}}$$

Suy ra

$$U_n^2 = U_1^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right)} = \sqrt{2}.$$

Vậy