



Chương

Bài 2.

CẤP SỐ CỘNG

A

Lý thuyết

1. Cấp số cộng



Định nghĩa:

- Cấp số cộng** là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi d . Nghĩa là:

$$u_{n+1} = u_n + d \text{ với } n \in \mathbb{N}^*$$

Số không đổi d được gọi là **công sai** của cấp số cộng.

- Đặc biệt:**

Khi $d=0$ thì cấp số cộng là một **dãy số không đổi** (tất cả các số hạng

2. Số hạng tổng quát



Định lý:

- Nếu một cấp số cộng có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát của nó được xác định theo công thức:

$$u_n = u_1 + (n-1)d, \forall n \geq 1.$$

3. Tính chất các số hạng của cấp số cộng



Định lý:

- Trong một cấp số cộng, mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và số hạng cuối) đều bằng trung bình cộng của hai số hạng đứng liền kề với nó, nghĩa là:

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}, \forall k \geq 1.$$

- Hệ quả:** Ba số a, b, c (theo thứ tự đó) lập thành một cấp số cộng

4. Tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng



Định lý:

- Cho cấp số cộng (u_n) có công sai d .

Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ (S_n là tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số cộng).

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}d + \frac{n^2}{2}d$$



Chứng minh

Ta có $S_n = u_1 + u_1 + d + u_1 + 2d + \dots + u_1 + (n-2)d + u_1 + (n-1)d$ (1)

Mà $S_n = u_n - (n-1)d + u_n - (n-2)d + \dots + u_n - 2d + u_n - d + u_n$ (2)

Cộng vế với vế của (1) và (2) ta được $2S_n = n(u_1 + u_n) \Rightarrow S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$

Do $u_n = u_1 + (n-1)d$ nên $S_n = \frac{n[u_1 + u_1 + (n-1)d]}{2} = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$

Nhận xét

(1) Nếu (u_n) là một cấp số cộng thì mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2} \text{ với } k \geq 2. \quad (3)$$

(2) Cấp số cộng (u_n) là một **dãy số tăng** khi và chỉ khi công sai $d > 0$.



Các dạng bài tập

Dạng 1. Xác định dãy đã cho là cấp số cộng



Phương pháp

Nếu (u_n) là một cấp số cộng với công sai d thì $u_{n+1} = u_n + d$ với $n \in \mathbb{N}^*$.
Để chứng minh một dãy đã cho là 1 cấp số cộng thì ta chứng minh:

$$u_{n+1} - u_n = C \text{ với } C \text{ là một hằng số không đổi}$$



Ví dụ 1.1.

Cho (u_n) là một cấp số cộng có sáu số hạng với $u_1 = -2$, $d = 3$.
Viết khai triển của cấp số cộng.

Lời giải

Theo định nghĩa cấp số cộng ta có:

$$u_2 = u_1 + d = -2 + 3 = 1$$

$$u_3 = u_2 + d = 1 + 3 = 4$$

$$u_4 = u_3 + d = 4 + 3 = 7$$

$$u_5 = u_4 + d = 7 + 3 = 10$$

$$u_6 = u_5 + d = 10 + 3 = 13$$

Nên dạng khai triển của cấp số cộng là: $-2; 1; 4; 7; 10; 13; \dots$



Ví dụ 1.2.

Cho dãy số (u_n) với $u_n = 2n - 3$.

Chứng minh rằng (u_n) là một cấp số cộng. Tìm công sai d .

Lời giải

Ta có $u_1 = -1$

Xét hiệu $u_{n+1} - u_n = 2(n+1) - 3 - (2n - 3) = 2$. Suy ra $u_{n+1} = u_n + 2$

Vậy (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = 2$.



Ví dụ 1.3.

Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào là cấp số cộng?

(1) $u_n = 3n + 2$

(2) $u_n = 3^n - 1$

(3) $u_n = (n+2)^2 - n^2$

(4) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 3 - u_n \end{cases}$ với $n \geq 1$

Lời giải



(1) $u_n = 3n + 2$

Ta có $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) + 2 - (3n + 2) = 3$. Vậy (u_n) là cấp số cộng.

(2) $u_n = 3^n - 1$

Ta có $u_1 = 2, u_2 = 8, u_3 = 26$.

Khi đó $u_2 - u_1 = 6, u_3 - u_2 = 18 \neq u_2 - u_1$. Vậy (u_n) không là cấp số cộng.

(3) $u_n = (n+2)^2 - n^2$

Ta có $u_n = (n+2)^2 - n^2 = n^2 + 4n + 4 - n^2 = 4n + 4$

Khi đó $u_{n+1} - u_n = 4(n+1) + 4 - (4n + 4) = 4$. Vậy (u_n) là cấp số cộng.

(4) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 3 - u_n \text{ với } n \geq 1 \end{cases}$

$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 3 - u_n \text{ với } n \geq 1 \end{cases}$

Ta có $u_1 = 2, u_2 = 1, u_3 = 2$.

Khi đó $u_2 - u_1 = -1, u_3 - u_2 = 1 \neq u_2 - u_1$. Vậy (u_n) không là cấp số cộng.



Ví dụ 1.4.

Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào là cấp số cộng? Nếu là cấp số cộng, hãy tính số hạng đầu và công sai.

(1) $u_n = 2 - 3n$

(2) $u_n = \frac{n}{3} - 2$

(3) $u_n = \frac{1}{n} + 3$

(4) $u_n = 2^n + 4$

Lời giải

(1) $u_n = 2 - 3n$

Ta có: $u_{n+1} - u_n = 2 - 3(n+1) - (2 - 3n) = -3$. Vậy (u_n) là cấp số cộng, $u_1 = -1, d = -3$.

(2) $u_n = \frac{n}{3} - 2$

Ta có: $u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{3} - 2 - \left(\frac{n}{3} - 2\right) = \frac{1}{3}$. Vậy (u_n) là cấp số cộng, $u_1 = -\frac{5}{3}, d = \frac{1}{3}$.

(3) $u_n = \frac{1}{n} + 3$

Ta có: $u_1 = 4, u_2 = \frac{7}{2}, u_3 = \frac{10}{3} \Rightarrow u_3 - u_2 \neq u_2 - u_1$. Vậy (u_n) không là cấp số cộng.

(4) $u_n = 2^n + 4$

Ta có: $u_1 = 6, u_2 = 8, u_3 = 12 \Rightarrow u_3 - u_2 \neq u_2 - u_1$. Vậy (u_n) không là cấp số cộng.





▮ Dạng 2. Xác định các yếu tố qua số hạng tổng quát



Phương

- Nếu một cấp số cộng có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát của nó được xác định theo công thức:

$$u_n = u_1 + (n-1)d$$



Ví dụ 2.1.

Cho cấp số cộng (u_n) , biết $u_1 = -3, d = 7$. Tìm $u_{15}, u_{20}, u_{25}, u_{30}$.

🔗 Lời giải

Theo công thức ta có:

$$u_{15} = u_1 + (15-1)d = -3 + 14 \cdot 7 = 95$$

$$u_{20} = u_1 + (20-1)d = -3 + 19 \cdot 7 = 130$$

$$u_{25} = u_1 + (25-1)d = -3 + 24 \cdot 7 = 165$$

$$u_{30} = u_1 + (30-1)d = -3 + 29 \cdot 7 = 200$$



Ví dụ 2.2.

Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n) , biết :
$$\begin{cases} u_1 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17 \end{cases}$$

🔗 Lời giải

$$\begin{cases} u_1 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 + 4d - (u_1 + 2d) = 10 \\ u_1 + u_1 + 5d = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d = 10 \\ 2u_1 + 5d = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 16 \\ d = -3 \end{cases}$$



Ví dụ 2.3.

Giữa các số 7 và 35 hãy đặt thêm 6 số nữa để được một cấp số cộng

🔗 Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_1 = 7 \\ u_8 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 7 \\ u_1 + 7d = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 7 \\ d = 4 \end{cases}$$

Vậy 6 số đặt thêm giữa các số 7 và 35 để được một cấp số cộng là 11, 15, 19, 23, 27, 31.



Ví dụ 2.4.

Cho cấp số cộng (u_n) , biết:
$$\begin{cases} u_1 = -15 \\ d = 18 \end{cases}$$

(1) Tìm $u_5, u_{10}, u_{15}, u_{20}, u_{25}$.

(2) Số 1209 là số hạng thứ bao

🔗 Lời giải



(1) Tìm 1209

Áp dụng định lý ta có

$$u_5 = u_1 + 4d = -15 + 4.18 = 57$$

$$u_{10} = u_1 + 9d = -15 + 9.18 = 147$$

$$u_{15} = u_1 + 14d = -15 + 14.18 = 237$$

$$u_{20} = u_1 + 19d = -15 + 19.18 = 327$$

$$u_{25} = u_1 + 24d = -15 + 24.18 = 417$$

(2) Số 1209 là số hạng thứ bao nhiêu?

Giả sử số 1209 là số hạng thứ k .

$$\text{Ta có } u_k = 1209 \Leftrightarrow u_1 + (k-1)d = 1209 \Leftrightarrow k = 69$$

Vậy số 1209 là số hạng thứ 69.



Ví dụ 2.5.

Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n) , biết:

$$(1) \begin{cases} u_2 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_3 + u_4 = 17. \end{cases}$$

Lời giải

$$(1) \begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_3 + u_4 = 17. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_2 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d + u_1 + 4d - (u_1 + 2d) = 5 \\ u_1 + 3d + u_1 + 5d = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 10 \\ 2u_1 + 8d = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_3 + u_4 = 17. \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_3 + u_4 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_2 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_3 + u_4 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_3 + u_4 - u_3 = 10 \\ u_3 + u_4 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_4 = 10 \\ u_3 + u_4 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_4 = 10 \\ u_3 = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d = u_4 - u_3 = 3. \text{ Vậy công sai là } d = 3.$$



Ví dụ 2.6.

Tổng ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng bằng 2 và tổng các bình phương của ba số đó bằng $\frac{14}{9}$. Xác định ba số đó và tính công sai của cấp số

Lời giải

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} u_k + u_{k+1} + u_{k+2} = 2 \\ u_k^2 + u_{k+1}^2 + u_{k+2}^2 = \frac{14}{9} \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_k + u_k + d + u_k + 2d = 2 \\ u_k^2 + (u_k + d)^2 + (u_k + 2d)^2 = \frac{14}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u_k + 3d = 2 \\ 3u_k^2 + 6u_k d + 5d^2 = \frac{14}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_k = 1 \\ d = -\frac{1}{3} \\ u_k = \frac{1}{3} \\ d = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Vậy ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng thỏa yêu cầu bài toán: $1; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}$ ứng

với $d = -\frac{1}{3}$ hoặc $\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1$ ứng với $d = \frac{1}{3}$.



Dạng 3. Tính chất cấp số cộng



Phương

- Trong một cấp số cộng, mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và số hạng cuối) đều bằng trung bình cộng của hai số hạng đứng liền kề với nó, nghĩa là:

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}, \forall k \geq 1.$$

- Hệ quả:** Ba số $\frac{u_1 + u_3}{2}, \forall k \geq 1$ (theo thứ tự đó) lập thành một cấp số cộng a, b, c .
Đôi khi ta cũng viết $b - a = c - b$ sẽ thuận lợi hơn trong việc giải toán.

* Các bài toán thường gặp:

- (1) Tìm ẩn x để 3 số đã cho lập thành cấp số cộng.
- (2) Ba góc trong một tam giác.
- (3) Ba nghiệm phân biệt tạo thành một cấp số cộng.

...



Ví dụ 3.1.

Ba số lập thành một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 2 và tổng bình phương của chúng bằng $\frac{14}{9}$. Tìm ba số hạng đó.

Lời giải

Gọi 3 số hạng cần tìm là u_1, u_2, u_3 .

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 2 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = \frac{14}{9} \end{cases}$$

Theo đề bài ta có hệ phương trình:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3u_2 = 2 \\ u_1^2 + u_3^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{14}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_3 = 2u_2 = \frac{4}{3} \\ (u_1 + u_3)^2 - 2u_1u_3 = \frac{10}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_3 = \frac{4}{3} \\ u_1u_3 = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1; u_3 = \frac{1}{3} \\ u_1 = \frac{1}{3}; u_3 = 1. \end{cases}$$

Vậy bộ ba số cần tìm là $\left(1; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right); \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1\right)$.



Ví dụ 3.2.

Tìm x biết ba số $10 - 3x, 3x^2 + 5, 5 - 4x$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số

Lời giải

Đặt $a = 10 - 3x, b = 3x^2 + 5, c = 5 - 4x$.

Vì a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng nên $a + c = 2b$.



$$a+c=2b \Leftrightarrow 10-3x+5-4x=2(3x^2+5) \Leftrightarrow 6x^2+7x-5=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ x=-\frac{5}{3} \end{cases}$$

Do đó ta có:



Ví dụ 3.3.

Cho tam giác ABC có số đo ba góc lập thành một cấp số cộng và một góc có số đo bằng 25° . Tính số đo hai góc còn lại.

Lời giải

Giả sử x, y, z là số đo ba góc của tam giác trên và theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng với $x \leq y \leq z$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x+y+z=180^\circ \\ x+z=2y \end{cases} \Rightarrow 3y=180^\circ \Rightarrow y=60^\circ.$$

Từ đó dễ dàng suy ra $x=25^\circ$ và $z=95^\circ$.



Ví dụ 3.4.

Tìm x để ba số a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng, biết

$$(1) \quad a=10-3x, b=2x^2+3, c=7-4x$$

$$(2) \quad a=x+1, b=3x-2, c=x^2-1$$

Lời giải

$$(1) \quad a=x+1, b=3x-2, c=x^2-1$$

a, b, c lập thành cấp số cộng khi $b-a=c-b$ Khi đó

$$2x^2+3-10+3x=7-4x-4x^2-3 \Leftrightarrow 4x^2+7x-11=0 \Leftrightarrow x=1, x=-\frac{11}{4}$$

$$(2) \quad a=x+1, b=3x-2, c=x^2-1$$

a, b, c lập thành cấp số cộng khi $b-a=c-b$

$$\text{Do đó ta có } x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow x=1, x=4.$$



Ví dụ 3.5.

Cho ba số dương a, b, c . Đặt $A=\frac{1}{b+c}, B=\frac{1}{c+a}, C=\frac{1}{a+b}$. Chứng minh rằng C, A, B theo thứ tự lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi c^2, a^2, b^2 theo thứ tự lập thành cấp số cộng.

Lời giải

C, A, B theo thứ tự lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi

$$A-C=B-A \Leftrightarrow \frac{a-c}{(b+c)(a+b)} = \frac{b-a}{(b+c)(a+c)} \Leftrightarrow a^2-c^2=b^2-a^2$$

Tương đương với c^2, a^2, b^2 theo thứ tự lập thành cấp số cộng.



Ví dụ 3.6.

Cho tam giác ABC có $\cot A, \cot B, \cot C$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng.
Chứng minh rằng a^2, b^2, c^2 cũng lập thành cấp số cộng.

Lời giải

Do $\cot A, \cot B, \cot C$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng

Nên: $\cot A + \cot C = 2 \cot B$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(A+C)}{\sin A \cdot \sin C} = \frac{2 \cos B}{\sin B} \Leftrightarrow \sin^2 B = 2 \cos B \cdot \sin A \cdot \sin C$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{b}{2R} \right)^2 = 2 \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \cdot \frac{a}{2R} \cdot \frac{c}{2R} \Leftrightarrow 2b^2 = a^2 + c^2$$

Vậy a^2, b^2, c^2 theo thứ tự lập thành cấp số cộng.



Ví dụ 3.7.

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2x^3 - 18x^2 + mx - 6 = 0$ có ba nghiệm phân biệt tạo thành một cấp số cộng.

Lời giải

Giả sử phương trình có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 với $x_1 < x_2 < x_3$.

Ba nghiệm theo thứ tự trên lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi

$$x_1 + x_3 = 2x_2 \quad (1)$$

Mặt khác, theo định lý Vi-ét, $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{-18}{2} = 9. \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $x_2 = \frac{9}{3} = 3$.

Thay $x = 3$ vào phương trình ban đầu ta được $2 \cdot 3^3 - 18 \cdot 3^2 + m \cdot 3 - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 38$.

Thử lại thấy $m = 38$ thỏa yêu cầu.



▮ Dạng 4. Tính tổng n số hạng đầu của một cấp số cộng



Phương pháp

- Tìm u_1, d hoặc u_1, u_n và tính S_n theo một trong hai công thức sau:

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$$

$$S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$$



Ví dụ 4.1.

Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = 3$.

Tính tổng S_{100} của 100 số hạng đầu tiên.

🔑 Lời giải

Ta có:
$$S_{100} = 100 \cdot 2 + \frac{100(100-1)}{2} \cdot 3 = 15050$$



Ví dụ 4.2.

Tính tổng $S = 100 + 105 + 110 + \dots + 995$

🔑 Lời giải

Các số hạng của tổng S lập thành cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 100, d = 5$

Giả sử 995 là số hạng thứ $n, n \in \mathbb{N}^*$,

Ta có
$$995 = 100 + (n-1)5 \Leftrightarrow 5n = 900 \Leftrightarrow n = 180$$

Do đó
$$S = S_{180} = \frac{180(100 + 995)}{2} = 98550$$



Ví dụ 4.3.

Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -15, u_4 = 18$. Tính tổng S_{20} của 20 số hạng đầu

🔑 Lời giải

Áp dụng công thức $u_{n+1} = u_n + d$, ta có $d = u_4 - u_3 = 18 - (-15) = 33$.

Áp dụng công thức $u_n = u_1 + (n-1)d$, ta có $u_4 = u_3 + (3-1)d = -15 + (3-1)33 = -81$.

Áp dụng công thức (4) , ta có
$$S_{20} = 20 \cdot (-81) + \frac{20(20-1)}{2} \cdot 33 = 4650$$



Ví dụ 4.4.

Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn: $\begin{cases} S_4 = 9 \\ S_6 = \frac{45}{2} \end{cases}$. Tính u_1, d .

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} S_4 = \frac{4(2u_1 + 3d)}{2} = 9 \\ S_6 = \frac{6(2u_1 + 5d)}{2} = \frac{45}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u_1 + 6d = 9 \\ 4u_1 + 10d = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = \frac{3}{2} \\ u_1 = 0 \end{cases}$.

Vậy ta có: $u_1 = 0, d = \frac{3}{2}$.



Ví dụ 4.5.

Cho dãy số (u_n) với $u_n = 2n - 3$.

- (1) Chứng minh rằng (u_n) là cấp số cộng.
- (2) Tính tổng của 30 số hạng đầu.
- (3) Biết $S_n = 195$, tìm n .

Lời giải

(1) Chứng minh rằng 30 là cấp số cộng.

Vì $u_n = 2n - 3$ nên $u_1 = -1$

Với $n \geq 1$, xét hiệu $u_{n+1} - u_n = 2(n+1) - 3 - (2n - 3) = 2$. Suy ra $u_{n+1} = u_n + 2, \forall n \geq 1$

Vậy (u_n) là cấp số cộng với công sai $d = 2$.

(2) Tính tổng của $S_n = 195$ số hạng đầu.

Vì $u_1 = -1, d = 2, n = 30$ nên ta có $S_{30} = 30 \cdot (-1) + \frac{30(30-1)}{2} \cdot 2 = 840$

(3) Biết n , tìm n .

Vì $u_1 = -1, d = 2, S_n = 195$

Nên ta có: $n \cdot (-1) + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 = 195 \Leftrightarrow n^2 - 2n - 195 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 15 \\ n = -13 \end{cases}$

Do $n \in \mathbb{N}^*$ nên $n = 15$.



Ví dụ 4.6.

Cho cấp số cộng (u_n) có $\begin{cases} u_7 + u_{15} = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases}$ và công sai $d > 0$.
Tính tổng S_{2017} của 2017 số hạng đầu.



Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \begin{cases} 2u_1 + 20d = 60 \\ (u_1 + 3d)^2 + (u_1 + 11d)^2 = 1170 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 30 - 10d \\ (30 - 7d)^2 + (30 + 7d)^2 = 1170 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 30 - 10d \\ 5d^2 - 36d + 63 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ d = 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u_1 = 36 \\ d = -\frac{3}{5} \end{cases}. \end{aligned}$$

Do $d > 0$ nên $u_1 = 0, d = 3$.

$$\text{Vậy } S_{2017} = 2017 \cdot 0 + \frac{2017(2017-1)}{2} \cdot 3 = 6099408.$$



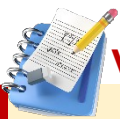
Ví dụ 4.7.

Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$. Tính tổng S_{10} của 10 số hạng

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_2 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u_1 + d) + (u_1 + 4d) - (u_1 + 2d) = 10 \\ (u_1 + 3d) + (u_1 + 5d) = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 10 \\ 2u_1 + 8d = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -99 \\ d = 28 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S_{10} = 10 \cdot (-99) + \frac{10(10-1)}{2} \cdot 28 = 270.$$



Ví dụ 4.8.

Một cấp số hữu hạn (u_n) có tổng tất cả các số hạng trừ số hạng đầu tiên bằng -36 , còn tổng tất cả các số hạng cuối cùng bằng 0 . Biết $u_{10} - u_6 = -16$. Tìm số hạng đầu tiên và công sai của cấp số cộng đó.

Lời giải

$$u_{10} - u_6 = -16 \Rightarrow u_1 + 9d - u_1 - 5d = -16 \Rightarrow d = -4$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n = -36 & (1) \\ u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } -u_1 + u_n = -36 \Rightarrow (n-1)d = -36 \text{ mà } d = -4 \Rightarrow n = 10.$$

$$\text{Từ (2) suy ra: } S_9 = 0 = 9 \left[u_1 + \frac{8(-4)}{2} \right].$$