

ĐỀ THI THỬ HSG TOÁN LẦN 2

Thời gian làm bài : 150 phút

Phần I. Trắc nghiệm khách quan (6,0 điểm)

Câu 1. Giá trị của biểu thức $P = \sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{2+\sqrt{3}}$ bằng

- A. $\sqrt{2}$ B. $\pm\sqrt{2}$ C. $-\sqrt{2}$ D. 2

Câu 2. Cho $x = \sqrt[3]{5+2\sqrt{6}} + \sqrt[3]{5-2\sqrt{6}}$. Giá trị của biểu thức $Q = x^3 - 3x + 2010$ bằng

- A. 2016 B. 2020 C. 2015 D. 2017

Câu 3. Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $3x^2 - 5xy - 2y^2 = 0$. Giá trị của biểu thức $E = \frac{2x+3y}{5x-7y}$ bằng

- A. $\frac{7}{3}$ B. $-\frac{7}{26}$ C. $\frac{1}{17}$ D. $-\frac{11}{16}$

Câu 4. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = x - 2\sqrt{x+2}$ bằng

- A. -4 B. -3 C. 3 D. -6

Câu 5. Giá trị lớn nhất của biểu thức $M = 6\sqrt{x} - x - 1$ bằng

- A. -10 B. 10 C. -8 D. 8

Câu 6. Cho các số x và y lớn hơn -2 thỏa mãn $\sqrt{x+2} - y^3 = \sqrt{y+2} - x^3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $N = x^2 + 2xy - 2y^2 + 2y + 10$ bằng

- A. 9 B. 11 C. -9 D. -11

Câu 7. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{x-5} = 3-x$ là

- A. $S = \{1\}$ B. $S = \{-1\}$ C. $S = \emptyset$ D. $S = \{\pm 1\}$

Câu 8. Giá trị x thỏa mãn $\sqrt{2x-1} - 5 < 2$ là

- A. $x < 25$ B. $\frac{1}{2} \leq x < 4$ C. $x \geq \frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2} \leq x < 25$

Câu 9. Số dư của phép chia đa thức $2x^7 - 3x^5 + 4x^3 - x^2 + 10$ cho đa thức $x-1$ là

- A. 12 B. 6 C. 9 D. 11

Câu 10. Tìm a để đa thức $2x^3 - 3x^2 + x + a$ chia hết cho đa thức $x - 2$.

- A. $a = 30$ B. $a = -6$ C. $a = -30$ D. $a = 6$

Câu 11. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3 \text{ cm}$ và $AC = 4 \text{ cm}$. Khi đó độ dài đường cao AH là

- A. $\frac{25}{144}$ B. $\frac{12}{5} \text{ cm}$ C. $\frac{12}{5}$ D. $\frac{25}{144} \text{ cm}$

Câu 12. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao $AH = 60 \text{ cm}$, $HC = 144 \text{ cm}$.

Khi đó độ dài cạnh AB là

- A. $\sqrt{65} \text{ cm}$ B. 13 cm C. 65 cm D. $\sqrt{13} \text{ cm}$

Câu 13. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Gọi D và E lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên cạnh AB, AC . Biết $BH = 4 \text{ cm}$, $CH = 9 \text{ cm}$. Khi đó độ dài đoạn thẳng DE là

- A. 6 cm B. 36 cm C. 13 cm D. 5 cm

Câu 14. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao $AH = 12 \text{ cm}$, $BH = 9 \text{ cm}$. Khi đó diện tích tam giác ABC là

- A. 150 cm B. 108 cm^2 C. 300 cm^2 D. 150 cm^2

Câu 15. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AB = 8 \text{ cm}$, $BC = 15 \text{ cm}$, AH vuông góc với BD tại H . Khi đó độ dài đoạn thẳng AH là

- A. $\frac{12}{17} \text{ cm}$ B. $\frac{289}{14400} \text{ cm}$ C. $\frac{\sqrt{120}}{17} \text{ cm}$ D. $\frac{120}{17} \text{ cm}$

Câu 16. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D , biết $AB = 15 \text{ cm}$, $AD = 20 \text{ cm}$, hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau. Khi đó độ dài đường chéo AC là

- A. $\frac{1}{144} \text{ cm}$ B. $\frac{5}{3} \text{ cm}$ C. $\frac{100}{3} \text{ cm}$ D. 12 cm

Phần II. Tự luận (14 điểm)

Câu 1 (1 điểm).

Tìm các số nguyên x và y thỏa mãn $y^2 = x^2 + x + 1$.

Câu 2 (3,0 điểm).

a) Cho các số thực x, y thỏa mãn $(x + \sqrt{a + x^2})(y + \sqrt{a + y^2}) = a$ với $a > 0$.

Tính giá trị biểu thức $4(x^7 + y^7) + 2(x^5 + y^5) + 11(x^3 + y^3) + 2016$.

b) Cho x, y là các số thực khác 0 thỏa mãn $x + y \neq 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(x+y)^3} \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} \right) + \frac{3}{(x+y)^4} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) + \frac{6}{(x+y)^5} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = \frac{1}{x^3 y^3}$$

Câu 3. (3,0 điểm)

a) Giải phương trình :

a) $\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x + 3} = \sqrt{x - 2} + \sqrt{x^2 + 2x - 3}$

b) $5x + 11 = 6\sqrt{2x + 3} + 4\sqrt{3x - 5}$

Câu 4. (5,5 điểm).

Cho 3 điểm A, B, C cố định nằm trên một đường thẳng d (B nằm giữa A và C). Vẽ đường tròn tâm O thay đổi nhưng luôn đi qua B và C (O không nằm trên đường thẳng d). Kẻ AM và AN là các tiếp tuyến với đường tròn tâm O tại M và N. Gọi I là trung điểm của BC, AO cắt MN tại H và cắt đường tròn tại các điểm P và Q (P nằm giữa A và O), BC cắt MN tại K.

a) Chứng minh 4 điểm O, M, N, I cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh điểm K cố định khi đường tròn tâm O thay đổi.

c) Gọi D là trung điểm HQ, từ H kẻ đường thẳng vuông góc với MD cắt đường thẳng MP tại E. Chứng minh P là trung điểm ME.

Câu 5 (1,5 điểm).

Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3 + (c+a)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3 + (a+b)^3}} \geq 1$$

Người soạn đề : PHẠM ĐỨC