

## MỤC LỤC

|                                                                                                                                                                                                                  |           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| .....                                                                                                                                                                                                            | 0         |
| .....                                                                                                                                                                                                            | 0         |
| <b>1. Mở đầu.....</b>                                                                                                                                                                                            | <b>2</b>  |
| - Lí do chọn đề tài.....                                                                                                                                                                                         | 2         |
| - Mục đích nghiên cứu.....                                                                                                                                                                                       | 2         |
| - Đối tượng nghiên cứu.....                                                                                                                                                                                      | 3         |
| - Phương pháp nghiên cứu.....                                                                                                                                                                                    | 3         |
| <b>2. Nội dung.....</b>                                                                                                                                                                                          | <b>3</b>  |
| 2.1. Cơ sở lí luận.....                                                                                                                                                                                          | 3         |
| 2.1.1 Bài toán: Cho ba số thực thỏa mãn điều kiện: (hoặc , ). Tìm GTLN, GTNN của biểu thức .....                                                                                                                 | 3         |
| 2.1.2 Phương pháp tìm GTLN, GTNN của hàm một biến số.....                                                                                                                                                        | 3         |
| 2.1.2.1 Quy tắc tìm GTLN, GTNN của hàm số liên tục trên.....                                                                                                                                                     | 3         |
| 2.1.2.2 Quy tắc tìm GTLN, GTNN của hàm số liên tục trên.....                                                                                                                                                     | 3         |
| 2.1.3. Phương pháp dồn biến.....                                                                                                                                                                                 | 4         |
| 2.1.4. Một số bất đẳng thức, hằng đẳng thức thường dùng (phần phụ lục).....                                                                                                                                      | 4         |
| 2.2. Thực trạng vấn đề.....                                                                                                                                                                                      | 4         |
| Trong SKKN này tôi sẽ tập trung vào việc phân tích, định hướng cách vận dụng các phương pháp dồn biến. Còn công việc sử dụng đạo hàm để khảo sát hàm một biến số tìm GTLN, GTNN chúng ta sẽ không bàn nhiều..... | 5         |
| 2.3. Giải pháp thực hiện.....                                                                                                                                                                                    | 5         |
| Trong sáng kiến này, phương pháp dồn biến được tôi vận dụng trên cơ sở căn cứ chủ yếu vào dạng ban đầu của biểu thức cần tìm GTLN, GTNN. Bao gồm hai dạng chính sau:.....                                        | 5         |
| 2.3.1. Phương pháp dồn biến các biểu thức đối xứng.....                                                                                                                                                          | 5         |
| 2.3.2. Phương pháp dồn biến các biểu thức bất đối xứng.....                                                                                                                                                      | 14        |
| 2.3.3. Bài tập tự luyện.....                                                                                                                                                                                     | 19        |
| 2.4 Hiệu quả của SKKN.....                                                                                                                                                                                       | 20        |
| <b>3. Kết luận, kiến nghị.....</b>                                                                                                                                                                               | <b>21</b> |
| - Kết luận.....                                                                                                                                                                                                  | 21        |
| - Kiến nghị.....                                                                                                                                                                                                 | 21        |
| <b>TÀI LIỆU THAM KHẢO.....</b>                                                                                                                                                                                   | <b>22</b> |
| <b>PHỤ LỤC.....</b>                                                                                                                                                                                              | <b>22</b> |

## DANH MỤC CÁC TỪ VIẾT TẮT

| Stt | Chữ viết tắt | Nội dung                     |
|-----|--------------|------------------------------|
| 1   | SKKN         | Sáng kiến kinh nghiệm        |
| 2   | THPTQG       | Trung học phổ thông quốc gia |
| 3   | THPT         | Trung học phổ thông          |
| 4   | ĐH-CD        | Đại học, Cao đẳng            |
| 5   | HSG          | Học sinh giỏi                |

|    |      |                                  |
|----|------|----------------------------------|
| 6  | GTLN | Giá trị lớn nhất                 |
| 7  | GTNN | Giá trị nhỏ nhất                 |
| 8  | minP | Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P |
| 9  | maxP | Giá trị lớn nhất của biểu thức P |
| 10 | BĐT  | Bất đẳng thức                    |

## 1. Mở đầu

### - Lí do chọn đề tài.

Trong chương trình toán THPT, bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất (GTLN, GTNN) của hàm số có một vai trò hết sức quan trọng. Nó thường xuyên được vận dụng để giải quyết nhiều bài toán thuộc những lĩnh vực khác nhau như: Giải tích, Đại số, Hình học,... Đặc biệt là phương pháp tìm GTLN, GTNN bằng công cụ đạo hàm (Giải tích 12) thì cách vận dụng thật là đơn giản, hiệu quả.

Những năm gần đây, trong các kỳ thi HSG cấp tỉnh, kỳ thi ĐH-CD (trước năm 2015) và nay là kỳ thi THPTQG. Bài toán tìm GTLN, GTNN của biểu thức nhiều biến xuất hiện ngày càng nhiều (với hướng giải chủ đạo là dồn biến và sử dụng đạo hàm) như là một thử thách lớn nhất cuối cùng dành cho những thí sinh muốn chinh phục điểm 10 môn Toán. Nhưng có vẻ thử thách này là một “ngọn núi” quá lớn để vượt qua ? Chỉ có một số rất ít thí sinh làm được. Nguyên nhân chủ yếu là do các em không có định hướng giải, hoặc không xác định được cách dồn biến hợp lí.

Vì tính thiết thực, nhiều giáo viên cũng không có hứng thú ôn luyện phần này (trừ khi có trong tay những học trò thật sự xuất sắc). Lâu dần thành một sự mặc định của nhiều học sinh (và cả giáo viên): Câu lấy điểm 10 chỉ là câu cho “đẹp đội hình”, chứ chẳng mấy ai quan tâm đến nó cả! Chính vì vậy các SKKN viết về phần này cũng chưa nhiều.

Với học sinh thì các em có quyền lựa chọn ôn thi chỉ cần đạt đến bao nhiêu điểm. Nhưng với kinh nghiệm của một giáo viên nhiều năm luyện thi ĐH-CD, bồi dưỡng HSG của nhà trường (liên tục từ năm học 2009-2010 đến nay). Trên quan điểm “biết mười dạy một”, “mỗi thầy cô giáo là một tấm gương về tinh thần tự học và sáng tạo”, tôi tự nhủ dù khó đến mấy cũng phải quyết tâm tìm cho được một hướng tiếp cận khả thi nhất. Có thể có những “ngọn núi” mình không vượt qua được nhưng điều quan trọng hơn là mình phải vượt qua được chính bản thân mình.

Với những lí do đó, tôi viết SKKN với đề tài: ***“Phương pháp kết hợp dồn biến và đạo hàm tìm GTLN, GTNN của biểu thức nhiều biến trong luyện thi THPTQG và bồi dưỡng HSG tại trường THPT Lê Lai”*** với mong muốn có thể truyền thêm ngọn lửa đam mê khám phá khoa học, đồng thời giúp các em học sinh luyện thi THPTQG, luyện thi HSG cấp tỉnh ở trường THPT Lê Lai có được một cách nhìn mới, một cách tiếp cận mới đối với bài toán này.

### - Mục đích nghiên cứu.

- + Giúp học sinh (đặc biệt là các em học sinh khá, giỏi) ôn thi THPTQG, luyện thi HSG môn Toán có một phương pháp hữu hiệu, một cách tiếp cận gần gũi, tự nhiên với các bài toán tìm GTLN, GTNN của biểu thức nhiều biến,
- + Giúp cho các bạn đồng nghiệp có thêm nguồn tài liệu phục vụ công tác luyện thi THPTQG và bồi dưỡng học sinh giỏi,
- + Giúp bản thân tự học nâng cao trình độ chuyên môn, nghiệp vụ.

### - Đối tượng nghiên cứu.

SKKN tập trung nghiên cứu một số phương pháp dồn biến cơ bản để đưa một biểu thức nhiều biến (chủ yếu là 2 đến 3 biến) về hàm một biến. Sau đó sử dụng công cụ đạo hàm để khảo sát hàm một biến này tìm GTLN, GTNN. Các bài toán trong sáng kiến này cũng chỉ tập trung ở mức độ các bài trong đề thi ĐH-CĐ (trước đây), đề thi THPTQG hiện nay và đề thi HSG cấp tỉnh.

### - Phương pháp nghiên cứu.

Một số phương pháp chính được sử dụng trong SKKN này là:

- + Phương pháp điều tra khảo sát thực tế,
- + Phương pháp thu thập thông tin,
- + Phương pháp thống kê, xử lý số liệu,
- + Phương pháp thực nghiệm, đối chứng.

## 2. Nội dung

### 2.1. Cơ sở lý luận

Phương pháp kết hợp dồn biến và đạo hàm tìm GTLN, GTNN của biểu thức nhiều biến (3 biến) có thể mô tả bởi bài toán sau:

**2.1.1 Bài toán:** Cho ba số thực  $x, y, z$  thỏa mãn điều kiện:  $F(x, y, z) = 0$  (hoặc  $F(x, y, z) \geq 0$ ,  $F(x, y, z) \leq 0$ ). Tìm GTLN, GTNN của biểu thức  $P(x, y, z)$ .

#### Phương pháp:

- \* **Bước 1:** - Quan sát, dự đoán, tìm ra biến cần dồn về  
- Đặt  $t =$  biến cần dồn về  
- Tìm điều kiện chính xác của  $t$

- \* **Bước 2:** Chuyển biểu thức cần tìm GTLN, GTNN theo  $t$   
 $P(x, y, z) \rightarrow f(t)$ , với điều kiện  $t$

- \* **Bước 3:** Dùng công cụ đạo hàm khảo sát hàm  $f(t)$  tìm GTLN, GTNN.

### 2.1.2 Phương pháp tìm GTLN, GTNN của hàm một biến số.

#### 2.1.2.1 Quy tắc tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$

- \* **Bước 1:** Tìm các điểm  $x_1, x_2, \dots, x_n$  trên khoảng  $(a; b)$ , tại đó  $f'(x) = 0$  hoặc  $f'(x)$  không xác định.

- \* **Bước 2:** Tính  $f(a)$ ,  $f(x_1)$ ,  $f(x_2)$ , ...,  $f(x_n)$ ,  $f(b)$ .

- \* **Bước 3:** Tìm số lớn nhất  $M$  và số nhỏ nhất  $m$  trong các số trên. Ta có:

$$M = \max_{[a; b]} f(x), \quad m = \min_{[a; b]} f(x)$$

#### 2.1.2.2 Quy tắc tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(a; b)$

- \* **Bước 1:** Tìm các điểm  $x_1, x_2, \dots, x_n$  trên khoảng  $(a; b)$ , tại đó  $f'(x) = 0$  hoặc  $f'(x)$  không xác định.



**\* Bước 2:** Tính  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_1, f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = L_2$ .

**\* Bước 3:**

+ Nếu  $\min \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\} < \min \{L_1, L_2\}$  thì

$f_{\min} = \min \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$  (1).

+ Nếu  $\max \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\} > \max \{L_1, L_2\}$  thì

$f_{\max} = \max \{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$  (2).

+ Nếu không thỏa (1) (hoặc (2)) thì hàm số không đạt min (hoặc max).

**Chú ý:**

i) Có thể lập bảng biến thiên của hàm số  $f(x)$  trên khoảng  $(a; b)$  thay cho bước 3.

ii) Nếu phương trình  $f'(x) = 0$  vô nghiệm trên  $(a; b)$  thì hàm số không đạt min, max trên  $(a; b)$ .

### 2.1.3. Phương pháp dồn biến

Giả sử ta cần chứng minh  $f(x, y, z) \geq 0$  (hoặc  $f(x, y, z) \leq 0$ ), với  $f(x, y, z)$  là biểu thức đối xứng của  $x, y, z$  và  $x, y, z$  là 3 biến số thực thỏa mãn các tính chất nào đây. Phương pháp dồn biến cho  $f(x, y, z)$  được khái quát bởi hai bước sau:

**Bước 1** (Kỹ thuật dồn về 2 biến bằng nhau)

Đánh giá  $f(x, y, z) \geq f(x, t, t)$  với  $t$  là một biến mới sao cho bộ số  $(x, t, t)$  thỏa mãn tính chất của bộ số  $(x, y, z)$ .

Thông thường ta hay đặt  $t$  là các đại lượng trung bình để không làm mất đi các

tính chất cho trước, chẳng hạn  $t = \frac{x+y}{2}, t = \sqrt{xy}, t = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}, \dots$

**Bước 2.** Đánh giá  $f(x, t, t) \geq 0$ .

Việc khó nhất của chúng ta là đánh giá  $f(x, y, z) \geq f(x, t, t)$ . Điều đó phải sử dụng nhiều kỹ thuật (đặc biệt là việc vận dụng các bất đẳng thức trung gian), ở bước thứ 2 hầu hết là đơn giản vì chúng ta đã hạn chế còn lại chỉ 2 biến.

### 2.1.4. Một số bất đẳng thức, hằng đẳng thức thường dùng (phần phụ lục).

## 2.2. Thực trạng vấn đề

Những năm gần đây, trong các kỳ thi HSG cấp tỉnh, kỳ thi ĐH-CĐ (trước năm 2015) và nay là kỳ thi THPTQG, có thể nói câu “chốt” (câu phân loại những thí sinh xuất sắc) trong đề thi môn Toán chủ yếu là bài toán tìm GTLN, GTNN của biểu thức nhiều biến. Bài toán này xuất hiện ngày càng nhiều, dần thay thế cho các bài toán bất đẳng thức truyền thống. Đây cũng là xu hướng ra đề của Bộ GD&ĐT, nhằm tăng cường ứng dụng của đạo hàm, hàm số vào giải toán. Tuy nhiên đại đa số thí sinh trường THPT Lê Lai chưa làm được bài toán này. Có một số nguyên nhân sau:

Thứ nhất, về phía giáo viên: Chưa chú tâm giảng dạy, ôn luyện dạng bài này (lí do là vì có rất ít học sinh có đủ trình độ, năng lực để tiếp thu). Tuy nhiên điều quan trọng hơn là giáo viên cũng chưa thực sự đầu tư nghiên cứu để có thể tìm ra một hướng tiếp cận, một phương pháp giải hiệu quả nhất.

Thứ hai, về phía học sinh: Chưa được các thầy cô ôn luyện cẩn thận (hầu hết các em hoặc là không định hướng được cách giải hoặc là có định hướng nhưng không nắm được các phương pháp dồn biến, thiếu kĩ năng vận dụng các BĐT trung gian, tư duy phân tích tổng hợp chưa tốt,...), cộng thêm tâm lí thiếu tự tin, ngại khám phá (bằng lòng với mục tiêu  $\leq 9$  điểm).

Trên thực tế, ở trường Lê Lai hằng năm vẫn có những học sinh xuất sắc (năm nào cũng có học sinh thi đỗ vào các trường ĐH với điểm số cao từ 25-28 điểm). Nếu các em tự tin và được ôn luyện tích cực thì vẫn có thể lấy điểm bài toán này được. Bởi vì bài toán tìm GTLN, GTNN của biểu thức nhiều biến có hướng giải chủ đạo là dồn biến (chủ yếu là quy về hàm một biến) và dùng đạo hàm khảo sát hàm số tìm GTLN, GTNN. Rõ ràng công việc mấu chốt là làm sao dồn được biến. Đó là một phương pháp tuy đã cổ điển nhưng không hề đơn giản. Muốn làm chủ được nó, quan trọng là cần phải có những hiểu biết và kĩ năng khá sâu sắc về phần bất đẳng thức, cực trị. Chính vì lẽ đó nếu có quyết tâm cao, có thời gian ôn luyện, rút kinh nghiệm chắc chắn sẽ làm được.

Trong SKKN này tôi sẽ tập trung vào việc phân tích, định hướng cách vận dụng các phương pháp dồn biến. Còn công việc sử dụng đạo hàm để khảo sát hàm một biến số tìm GTLN, GTNN chúng ta sẽ không bàn nhiều.

### 2.3. Giải pháp thực hiện

Trong sáng kiến này, phương pháp dồn biến được tôi vận dụng trên cơ sở căn cứ chủ yếu vào dạng ban đầu của biểu thức cần tìm GTLN, GTNN. Bao gồm hai dạng chính sau:

#### 2.3.1. Phương pháp dồn biến các biểu thức đối xứng

*Việc vận dụng phương pháp dồn biến ở trên (mục 2.1.3. ) cho chúng ta định hướng việc chọn biến để dồn như sau:*

1. Nếu  $x, y$  đối xứng thì thông thường ta dồn về biến  $t = x + y, t = xy$  hoặc  $t = x^2 + y^2, \dots$

2. Nếu  $x, y, z$  đối xứng thì thông thường ta dồn về biến  $t = x + y + z, t = xyz, t = x^2 + y^2 + z^2$  hoặc  $t = xy + yz + zx, \dots$

Ta xét các ví dụ cụ thể sau:

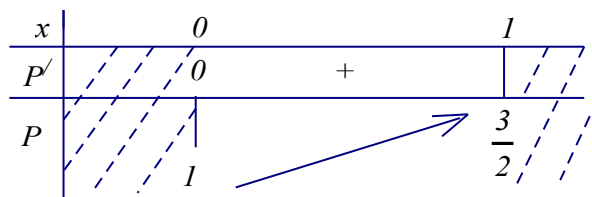
**Ví dụ 1:** Cho  $x \geq 0$  và  $y \geq 0$  thỏa mãn điều kiện  $x + y = 2$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = xy + \frac{1}{xy + 1}$ .

**Lời giải.**

Đặt  $t = xy$ . Ta có  $0 \leq xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 1$ . Suy ra điều kiện  $0 \leq t \leq 1$

Khi đó:  $P = P(t) = t + \frac{1}{t+1}$ , với  $0 \leq t \leq 1 \Rightarrow P'(t) = 1 - \frac{1}{(t+1)^2} = \frac{t(t+2)}{(t+1)^2}$

Bảng biến thiên:



Vậy  $\max P = \frac{3}{2}$  khi  $x = 1; y = 1$

**Ví dụ 2 :** ( ĐH Khối D – 2009 ) Cho  $x \geq 0, y \geq 0$  và  $x + y = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy.$$

➔ **Phân tích hướng làm :**

- Từ giả thiết  $x + y = 1$  và  $S$  là một biểu thức đối xứng của  $x, y$  nên ta có thể nghĩ đến việc biến đổi đưa  $S$  về biến  $t = xy$
- Khai triển biểu thức  $S$  cố gắng làm xuất hiện  $xy$  và  $x + y$  để sử dụng giả thiết.
- Chú ý các hằng đẳng thức quen thuộc :

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

**Lời giải.**

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } S &= (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy = 16x^2y^2 + 12(x^3 + y^3) + 34xy \\ &= 16x^2y^2 + 12(x + y)(x^2 - xy + y^2) + 34xy \\ &= 16x^2y^2 + 12[(x + y)^2 - 3xy] + 34xy, \text{ do } x + y = 1 \\ &= 16x^2y^2 - 2xy + 12 \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } t = xy. \text{ Do } x \geq 0; y \geq 0 \text{ nên } 0 \leq xy \leq \frac{(x + y)^2}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow 0 \leq t \leq \frac{1}{4}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = 16t^2 - 2t + 12 \text{ với } 0 \leq t \leq \frac{1}{4}.$$

$$\text{Ta có } f'(t) = 32t - 2. \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{16}.$$

$$\text{Ta có : } f(0) = 12; \quad f\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{191}{16}; \quad f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{25}{2}$$

Vậy :

$$\min S = \min_{\left[0; \frac{1}{4}\right]} f(t) = f\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{191}{16} \text{ khi } x = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}; y = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \text{ hoặc } x = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}; y = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

$$\max S = \max_{\left[0; \frac{1}{4}\right]} f(t) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{25}{2} \text{ khi } x = y = \frac{1}{2}.$$

▮ **Nhận xét:**

VD1, VD2 có điều kiện ban đầu khá đơn giản  $x + y = 1, x + y = 2$ . Vì thế ta có thể nghĩ tới một cách dồn biến khác là  $y = 1 - x, y = 2 - x$ . Sau đó đưa  $S, P$  về

hàm số biến  $x$ . Với điều kiện  $x \geq 0, y \geq 0$  ta dễ dàng suy ra điều kiện của  $x$ . Tuy nhiên đó không phải là cách làm tổng quát. Nó sẽ gặp nhiều khó khăn khi điều kiện ban đầu (ràng buộc giữa các biến) không phải là bậc nhất.

Ta tiếp tục xét các ví dụ sau:

**Ví dụ 3:** ( CĐ Khối A, B – 2008 ) Cho  $x, y$  là số thực thỏa mãn  $x^2 + y^2 = 2$ .  
 Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = 2(x^3 + y^3) - 3xy$ .

➡ **Phân tích hướng làm:**

- Từ giả thiết  $x^2 + y^2 = 2$  và  $P$  là một biểu thức đối xứng của  $x, y$  nên ta có thể nghĩ đến việc biến đổi đưa  $P$  về biến  $t = x + y$  hoặc  $t = xy$  bằng cách áp dụng các hằng đẳng thức  
 $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$ ;  $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ .
- Khai triển biểu thức  $P$  cố gắng làm xuất hiện  $x^2 + y^2$  để sử dụng giả thiết:

$$\begin{aligned} P &= 2(x + y)(x^2 - xy + y^2) - 3xy \\ &= 2(x + y)(2 - xy) - 3xy \end{aligned}$$

- Từ giả thiết  $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 2 \Rightarrow xy = \frac{(x + y)^2 - 2}{2}$ .

Vậy đến đây ta có thể đưa  $P$  về hàm một biến  $t = x + y$ .

**Lời giải.**

Ta có :

$$\begin{aligned} P &= 2(x + y)(x^2 - xy + y^2) - 3xy \\ &= 2(x + y)(2 - xy) - 3xy \end{aligned}$$

Lại có :  $xy = \frac{(x + y)^2 - 2}{2}$ , vì thế sau khi đặt  $t = x + y$  thì:

$$P(t) = 2t\left(2 - \frac{t^2 - 2}{2}\right) - 3\frac{t^2 - 2}{2} = -t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 6t + 3$$

Ta có  $x^2 + y^2 \geq \frac{(x + y)^2}{2} \Rightarrow (x + y)^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq t \leq 2$ .

Xét hàm số  $P(t) = -t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 6t + 3$  với  $-2 \leq t \leq 2$ . Có  $P'(t) = -3t^2 - 3t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2 \end{cases}$

Ta có :  $f(-2) = -7$  ;  $f(1) = \frac{13}{2}$  ;  $f(2) = 1$

Vậy :

$$\min P = \min_{[-2;2]} P(t) = P(-2) = -7 \text{ khi } x = y = -1 ;$$

$$\max P = \max_{[-2;2]} P(t) = P(1) = \frac{13}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}; y = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}; y = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

**Ví dụ 4 :** ( ĐH Khối B – 2009) Tìm giá trị lớn nhất , giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $A = 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1$ .  
với  $x, y$  là các số thực thỏa mãn điều kiện :  $(x + y)^3 + 4xy \geq 2$ .

➡ **Phân tích hướng làm:**

- Vì  $A$  là biểu thức đối xứng của  $x, y$  nên ta nghĩ đến việc dồn về biến  $t = x + y$ ,  $t = xy$  hoặc  $t = x^2 + y^2, \dots$

- Bằng các công thức quen thuộc, ta biến đổi và đánh giá  $A$  như sau :

$$\begin{aligned} A &= 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1 \\ &= \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^2 + \frac{3}{2}(x^4 + y^4) - 2(x^2 + y^2) + 1 \\ &\geq \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^2 + \frac{3(x^2 + y^2)^2}{4} - 2(x^2 + y^2) + 1 \quad \left( \text{do } x^4 + y^4 \geq \frac{(x^2 + y^2)^2}{2} \right) \end{aligned}$$

Đến đây ta có thể đưa  $A$  về hàm một biến bằng cách đặt  $t = x^2 + y^2$ .

**Lời giải.**

Ta luôn có kết quả :  $(x + y)^2 \geq 4xy$ , từ đó ta có :

$$\begin{aligned} (x + y)^3 + 4xy &\geq 2 \Rightarrow (x + y)^3 + (x + y)^2 \geq (x + y)^3 + 4xy \geq 2 \\ &\Rightarrow (x + y)^3 + (x + y)^2 \geq 2 \\ &\Rightarrow [(x + y) - 1][(x + y)^2 + (x + y) + 2] \geq 0 \\ &\Rightarrow (x + y) - 1 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Do } [(x + y)^2 + (x + y) + 2] = \left[ (x + y) + \frac{1}{2} \right]^2 + \frac{7}{4} \geq 0, \forall x, y$$

Bài toán được đưa về tìm max, min của :

$$A = 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1. \text{ Với } x, y \text{ thỏa mãn } x + y \geq 1.$$

Ta biến đổi biểu thức  $A$  như sau :

$$\begin{aligned} A &= 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1 \\ &= \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^2 + \frac{3}{2}(x^4 + y^4) - 2(x^2 + y^2) + 1 \\ &\geq \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^2 + \frac{3(x^2 + y^2)^2}{4} - 2(x^2 + y^2) + 1 \quad \left( \text{do } x^4 + y^4 \geq \frac{(x^2 + y^2)^2}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Hay } A \geq \frac{9}{4}(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 1.$$

$$\text{Vì } x^2 + y^2 \geq \frac{(x + y)^2}{2} \quad (\text{do } x + y \geq 1) \text{ nên } x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}.$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + y^2. \text{ Ta có } A \geq f(t) = \frac{9}{4}t^2 - 2t + 1 \text{ với } t \geq \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vì } f'(t) = \frac{9}{2}t - 2 > 0, \forall t \geq \frac{1}{2}. \text{ Nên suy ra hàm số } f(t) \text{ đồng biến trên } \left[ \frac{1}{2}; +\infty \right)$$

$$\text{Suy ra } \min_{\left[ \frac{1}{2}; +\infty \right)} f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{16} \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}. \text{ Tức là } A \geq \frac{9}{16}. \text{ Mặt khác, } A = \frac{9}{16} \text{ khi } x = y = \frac{1}{2}$$

Vậy :  $\min A = \frac{9}{16}$  khi  $x = y = \frac{1}{2}$  và không có giá trị lớn nhất.

**Ví dụ 5:** (ĐH Khối B-2011) Cho  $a, b$  là các số thực dương thỏa mãn  $2(a^2 + b^2) + ab = (a+b)(ab+2)$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 4 \left( \frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3} \right) - 9 \left( \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \right).$$

➡ **Phân tích hướng làm:**

- Do đặc điểm đối xứng của biểu thức  $P$  nên ta dễ dàng tìm ra biến cần dồn về là  $t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ . Vấn đề mấu chốt của bài này là khai thác điều kiện ban đầu như thế nào để tìm ra điều kiện của  $t$ . Cách nghĩ tự nhiên nhất là phải làm xuất hiện  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ . Sau đó vận dụng các BĐT cơ bản để đánh giá.

**Lời giải.**

- Biến đổi giả thiết:

$$\begin{aligned} 2(a^2 + b^2) + ab &= (a+b)(ab+2) \\ \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2) + ab &= a^2b + ab^2 + 2(a+b) \\ \Leftrightarrow 2 \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + 1 &= (a+b) + 2 \left( \frac{a+b}{ab} \right) \\ \Leftrightarrow 2 \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + 1 &= (a+b) + 2 \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad (*) \end{aligned}$$

- Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta được:

$$(a+b) + 2 \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 2 \sqrt{2(a+b) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)} = 2 \sqrt{2 \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 \right)}$$

Kết hợp (\*) suy ra:  $2 \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + 1 \geq 2 \sqrt{2 \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 \right)} + 2 \Rightarrow \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \geq \frac{5}{2}$ .

Đặt  $t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ ,  $t \geq \frac{5}{2}$ . Ta được :  $P = 4(t^3 - 3t) - 9(t^2 - 2) = 4t^3 - 9t^2 - 12t + 18$ .

Xét hàm số:  $f(t) = 4t^3 - 9t^2 - 12t + 18$ ;  $f'(t) = 6(2t^2 - 3t - 2) \geq 0, \forall t \geq \frac{5}{2}$

Suy ra  $\min_{\left[ \frac{5}{2}; +\infty \right)} f(t) = f\left( \frac{5}{2} \right) = -\frac{23}{4}$ .

Vậy  $\min P = -\frac{23}{4}$  đạt được khi và chỉ khi  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{5}{2}$  và  $a+b = 2 \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$   
 $\Leftrightarrow (a;b) = (2;1)$  hoặc  $(a;b) = (1;2)$

**Ví dụ 6:** Cho  $x, y, z$  là ba số thực dương thỏa mãn:  $x^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{3}{4}$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = 8xyz + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}$ .

➡ **Phân tích hướng làm:**

- Vì  $P = 8xyz + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}$  là biểu thức đối xứng của  $x, y, z$ . Nên ta nghĩ đến việc dồn về biến  $t = x + y + z, t = xyz, t = x^2 + y^2 + z^2$  hoặc  $t = xy + yz + zx, \dots$

- Mặt khác, theo chiều đánh giá tìm GTNN ta dễ nghĩ đến việc áp dụng BĐT Cô si cho tổng  $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{x^2y^2z^2}}$ . Và như vậy biến cần dồn về đã xuất hiện.

**Lời giải.**

Áp dụng BĐT Cô si, ta có  $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{x^2y^2z^2}}$ , đặt  $t = \sqrt[3]{xyz} > 0$

$$\text{Mà } \sqrt[3]{x^2y^2z^2} \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 0 < t \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P \geq 8t^3 + \frac{3}{t^2}. \text{ Xét hàm số } f(t) = 8t^3 + \frac{3}{t^2} \text{ với } 0 < t \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Ta có } \forall t \neq 0, f'(t) = 24t^2 - \frac{6}{t^3}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt[5]{\frac{1}{4}} \notin (0; \frac{1}{2}], \text{ dễ thấy } f(t) \leq 0, \forall t \in (0; \frac{1}{2}]$$

$$\text{Từ đó ta có } f(t) \geq f(\frac{1}{2}) = 13 \text{ với mọi giá trị } t \text{ thỏa mãn } 0 < t \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Suy ra: } P \geq 13. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } t = \frac{1}{2} \text{ hay } x = y = z = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy: } \min P = 13.$$

**Ví dụ 7:** Cho các số thực dương  $x, y, z$  thỏa mãn điều kiện  $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ xyz = 3 \end{cases}$

Chứng minh rằng:  $183 - 165\sqrt{5} \leq x^4 + y^4 + z^4 \leq 18$

**Hướng dẫn:**

- Biểu thức  $P = x^4 + y^4 + z^4$  đối xứng với ba ẩn  $x, y, z$ . Mặt khác theo giả thiết  $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ xyz = 3 \end{cases}$ . Vì vậy ta nghĩ tới việc dồn về biến  $xy + yz + zx$  hoặc  $x^2 + y^2 + z^2$

- Áp dụng công thức:  $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$  suy ra:

$$\begin{aligned} P = x^4 + y^4 + z^4 &= (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \\ &= (4^2 - 2(xy + yz + zx))^2 - 2(xy + yz + zx)^2 - 2xyz(x + y + z) \end{aligned}$$

Khi đó: Đặt  $t = xy + yz + zx$  và từ giả thiết  $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ xyz = 3 \end{cases}$  ta có  $P = 2(t^2 - 32t + 144)$

- Bây giờ ta cần tìm điều kiện của biến  $t$ .

Từ các điều kiện đối với  $x, y, z$  ta được  $y + z = 4 - x; yz = \frac{3}{x}$ . Do đó  $t = x(4 - x) + \frac{2}{x}$

Lúc này ta tìm điều kiện đối với ẩn  $x$  và chuyển điều kiện đó theo ẩn  $t$ .



Ta có:  $(y+z)^2 \geq 4yz \Leftrightarrow (4-x)^2 \geq \frac{8}{x} \Leftrightarrow x^3 - 8x^2 + 16x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 6x + 4) \geq 0$   
 $\Leftrightarrow 3 - \sqrt{5} \leq x \leq 2.$

Xét hàm số  $t(x) = x(4-x) + \frac{2}{x}$  trên đoạn  $[3 - \sqrt{5}; 2]$ , ta có:  $t'(x) = \frac{-2(x-1)(x^2 - x - 1)}{x^2}.$

Từ việc xét dấu  $t'(x)$  trên đoạn  $[3 - \sqrt{5}; 2]$  ta được  $5 \leq t \leq \frac{5\sqrt{5} - 1}{2}$

- Khảo sát hàm số  $P = 2(t^2 - 32t + 144)$  với  $5 \leq t \leq \frac{5\sqrt{5} - 1}{2}.$

Từ đó suy ra:  $183 - 165\sqrt{5} \leq x^4 + y^4 + z^4 \leq 18$

**Ví dụ 8 :** (Khối B - 2010) Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn  $a+b+c=1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 3(ab + bc + ca) + 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

**Lời giải.**

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki Ta có:  $3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq (ab + bc + ca)^2$

Do đó:  $M \geq (ab + bc + ca)^2 + 3(ab + bc + ca) + 2\sqrt{1 - 2(ab + bc + ca)}.$

Đặt  $t = ab + bc + ca$ , ta có:  $0 \leq t \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{1}{3}.$

Xét hàm số:  $f(t) = t^2 + 3t + 2\sqrt{1 - 2t}$  với  $t \in [0; \frac{1}{3}]$ .

Ta có  $f'(t) = 2t + 3 - \frac{2}{\sqrt{1 - 2t}}$ ;  $f''(t) = 2 - \frac{2}{\sqrt{(1 - 2t)^3}} \leq 0$

Dấu bằng chỉ xảy ra tại  $t=0$ ; suy ra  $f'(t)$  nghịch biến trên  $[0; \frac{1}{3}]$

Xét trên đoạn  $[0; \frac{1}{3}]$  ta có:  $f'(t) \geq f'(\frac{1}{3}) = \frac{11}{3} - 2\sqrt{3} > 0$ , suy ra hàm  $f(t)$  đồng biến.

Do đó  $f(t) \geq f(0) = 2, \forall t \in [0; \frac{1}{3}]$ .

Vì thế  $M \geq f(t) \geq 2, \forall t \in [0; \frac{1}{3}]; M = 2$  khi  $ab=bc=ca, ab+bc+ca=0$  và  $a+b+c=1$

$\Leftrightarrow (a;b;c)$  là một trong các bộ số sau:  $(1;0;0), (0;1;0), (0;0;1)$ .

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 2.

**Ví dụ 9:** (THPTQG-2015) Cho các số thực a,b,c thuộc đoạn  $[1; 3]$  và thỏa mãn điều kiện  $a+b+c=6$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 12abc + 72}{ab + bc + ca} - \frac{1}{2}abc$$

➡ **Phân tích hướng làm:**



- Với giả thiết  $a, b, c$  thuộc đoạn  $[1; 3]$ . Ta nghĩ đến cách khai thác  $(a-1)(b-1)(c-1) \geq 0$  (1) và  $(3-a)(3-b)(3-c) \geq 0$  (2). Khai triển (1) và (2) đều dẫn đến các biểu thức chứa  $ab+bc+ca$  và  $abc$ . Đến đây cần cứ cụ thể vào chiều BĐT của (1) và (2) ta có thể đánh giá được miền giá trị của  $ab+bc+ca$ . Từ đó quyết định việc dồn biến theo  $t = ab+bc+ca$ .

**Lời giải.**

Đặt  $t = ab+bc+ca$ . Ta có:  $t = ab + bc + ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} = 12$  (\*)

Mặt khác, từ giả thiết suy ra:

$$\bullet (a-1)(b-1)(c-1) \geq 0 \Leftrightarrow (ab-a-b+1)(c-1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow abc - (ab+bc+ca) + (a+b+c) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow abc - t + 6 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow abc \geq t - 5 \quad (1)$$

$$\bullet (3-a)(3-b)(3-c) \geq 0 \Leftrightarrow (9-3a-3b+ab)(3-c) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 27 - 9(a+b+c) + 3(ab+bc+ca) - abc \geq 0 \Leftrightarrow 27 - 9 \cdot 6 + 3t - abc \geq 0 \Leftrightarrow 3t - 27 \geq abc \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow 3t - 27 \geq t - 5 \Rightarrow t \geq 11 \quad (**)$$

$$\text{Từ (*) và (**)} \Rightarrow 11 \leq t \leq 12$$

$$\text{Ta có : } (ab+bc+ca)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a+b+c)$$

$$\Rightarrow t^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 12abc$$

$$\Rightarrow P = \frac{t^2 + 72}{t} - \frac{1}{2}abc. \text{ Mặt khác từ (1)} \Rightarrow -abc \leq -t + 5 \Rightarrow -\frac{1}{2}abc \leq \frac{5-t}{2}, \text{ do đó:}$$

$$P \leq \frac{t^2 + 72}{t} + \frac{5-t}{2} = \frac{2t^2 + 144 + t(5-t)}{2t} = \frac{t^2 + 5t + 144}{2t}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{t^2 + 5t + 144}{2t}, \text{ với } t \in [11; 12]$$

$$\text{Khảo sát hàm số này ta được: } \max_{[11;12]} f(t) = \frac{160}{11} \text{ tại } t=11 \Rightarrow P \leq \frac{160}{11}$$

$$P = \frac{160}{11} \text{ khi } a = 1, b = 2, c = 3. \text{ Vậy } \max P = \frac{160}{11}$$

### **// Nhận xét:**

1) Trong VD6, VD7, VD8, VD9 ta nhận thấy việc định hướng dồn về biến nào không quá khó. Tuy nhiên việc tìm điều kiện cho biến mới lại không hề dễ dàng. Để làm tốt điều này đòi hỏi phải có kỹ năng vận dụng các BĐT cơ bản và sử lý điều kiện ban đầu hết sức tinh tế.

2) Trong một số trường hợp, điều kiện ràng buộc ban đầu của các biến là một biểu thức bậc nhất đơn giản. Khi đó ta có thể dồn trực tiếp về một trong ba biến bằng phương pháp thế (thay cho phép đặt truyền thống). Tuy nhiên vẫn cần phải chú ý đến tính đối xứng của các biến.

Ta xét các ví dụ sau:

**Ví dụ 10:** Cho ba số thực  $x, y, z$  thay đổi thỏa mãn  $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=2 \end{cases}$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = x^3 + y^3 + z^3$ .

**Lời giải.**

$$\text{Ta có } x+y+z=0 \Rightarrow z=-(x+y) \Rightarrow P = x^3 + y^3 - (x+y)^3 = -3xyz$$

$$\text{Từ } x^2 + y^2 + z^2 = 2 \Rightarrow (x+y)^2 - 2xy + z^2 = 2 \Rightarrow 2z^2 - 2xy = 2 \Rightarrow xy = z^2 - 1$$

$$\text{Vậy } P = -3z(z^2 - 1)$$

$$\text{Do } 2 = x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{2}(x+y)^2 + z^2 = \frac{3}{2}z^2 \Rightarrow -\sqrt{\frac{4}{3}} \leq z \leq \sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$\text{Đặt } P = f(z) = -3z^3 + 3z \text{ với } z \in \left[-\sqrt{\frac{4}{3}}; \sqrt{\frac{4}{3}}\right] = K$$

$$\text{Có } f'(z) = -9z^2 + 3, f'(z) = 0 \Leftrightarrow z = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ (đều thuộc K)}$$

$$\text{Ta có: } f\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = -\sqrt{\frac{4}{3}}, f\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = \sqrt{\frac{4}{3}}, f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}, f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Do vậy } \max P = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ khi } z = \frac{1}{\sqrt{3}}; x = y = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

**Ví dụ 11:** Cho  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của tam giác có chu vi bằng 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = 3(a^2 + b^2 + c^2) + 4abc$$

**Lời giải.**

Do vai trò bình đẳng của  $a, b, c$  nên ta có thể giả sử:  $0 < a \leq b \leq c$ .

$$\text{Vì chu vi bằng 3 nên } a + b + c = 3 \Rightarrow a + b = 3 - c \text{ mà } a + b > c \Rightarrow 1 \leq c \leq \frac{3}{2}$$

Ta biến đổi:

$$\begin{aligned} T &= 3(a^2 + b^2 + c^2) + 4abc = 3(a^2 + b^2) + 3c^2 + 4abc \\ &= 3[(a+b)^2 - 2ab] + 3c^2 + 4abc = 3(3-c)^2 + 3c^2 + 2ab(2c-3) \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác } ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{3-c}{2}\right)^2 \Rightarrow ab(2c-3) \geq \left(\frac{3-c}{2}\right)^2 (2c-3) \text{ (vì } 2c-3 < 0)$$

$$\text{Do đó } T \geq 3(3-c)^2 + 3c^2 + 2\left(\frac{3-c}{2}\right)^2 (2c-3) = c^3 - \frac{3}{2}c^2 + \frac{27}{2} = f(c)$$

$$\text{Xét hàm số } f(c) = c^3 - \frac{3}{2}c^2 + \frac{27}{2}, \text{ trên } \left[1; \frac{3}{2}\right]. \text{ Có } f'(c) = 3c^2 - 3c \geq 0, \forall c \in \left[1; \frac{3}{2}\right].$$

$$\text{Từ đó suy ra } T \geq f(c) \geq f(1) = 13 \text{ khi } c=1; a=1; b=1$$

$$\text{Vậy } \min T = 13 \text{ khi } a=b=c=1.$$

### 2.3.2. Phương pháp dồn biến các biểu thức bất đối xứng

Đối với các biểu thức bất đối xứng, để dồn biến thì phải chú ý thêm nhiều yếu tố (điều kiện ban đầu, tính đẳng cấp,...) từ đó mới có thể phân tích, suy luận cách làm cụ thể. Có một số cách làm cơ bản sau:

1) *Đổi biến để đưa biểu thức ban đầu về dạng đối xứng hoặc có dạng đơn giản hơn. Sau đó vận dụng cách dồn biến như ở phần 1 (mục 2.3.1.)*

2) *Dùng các bất đẳng thức trung gian để đánh giá, đơn giản hóa biểu thức ban đầu, làm giảm số biến.*

3) *Nếu biểu thức  $P(x, y, z)$  chỉ đối xứng với hai biến, chẳng hạn  $x, y$ . Thì ta có thể dồn về biến còn lại là  $z$ .*

Sau đây là các ví dụ cụ thể:

**Ví dụ 12:** (ĐH khối D- 2013) Cho  $x, y$  là các số thực dương thỏa mãn điều kiện  $xy \leq y - 1$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = \frac{x+y}{\sqrt{x^2 - xy + 3y^2}} - \frac{x-2y}{6(x+y)}$ .

➡ **Phân tích hướng làm:**

- Vì  $P$  là một biểu thức đẳng cấp (xem thêm phần phụ lục). Lại do điều kiện ban đầu  $x, y > 0$ . Vì thế ta có:

$$P = \frac{x+y}{\sqrt{x^2 - xy + 3y^2}} - \frac{x-2y}{6(x+y)} = \frac{\frac{x}{y} + 1}{\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} + 3}} - \frac{\frac{x}{y} - 2}{6\left(\frac{x}{y} + 1\right)}$$

- Đến đây thì vấn đề là đi tìm miền giá trị của  $t = \frac{x}{y}$ . Một suy nghĩ tự nhiên là phải làm xuất hiện  $\frac{x}{y}$  từ giả thiết  $xy \leq y - 1$ , đồng thời kết hợp đánh giá hợp lý.

**Lời giải.** Từ giả thiết:

$$xy \leq y - 1 \Leftrightarrow \frac{x}{y} \leq \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} = -\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$$

$$\text{Ta có: } P = \frac{x+y}{\sqrt{x^2 - xy + 3y^2}} - \frac{x-2y}{6(x+y)} = \frac{\frac{x}{y} + 1}{\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} + 3}} - \frac{\frac{x}{y} - 2}{6\left(\frac{x}{y} + 1\right)}$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{y}, \text{ điều kiện } 0 < t \leq \frac{1}{4}. \text{ Suy ra } P = \frac{t+1}{\sqrt{t^2 - t + 3}} - \frac{t-2}{6(t+1)}$$

$$\text{Xét } f(t) = \frac{t+1}{\sqrt{t^2 - t + 3}} - \frac{t-2}{6(t+1)} \text{ với } 0 < t \leq \frac{1}{4}. \text{ Có } f'(t) = \frac{-3t+7}{2\sqrt{(t^2 - t + 3)^3}} - \frac{1}{2(t+1)^2}$$

Với  $0 < t \leq \frac{1}{4}$ , ta có  $t^2 - t + 3 = t(t-1) + 3 < 3$ ;  $-3t + 7 > 6$ ;  $t + 1 > 1$ . Do đó:

$$\frac{-3t+7}{2\sqrt{(t^2-t+3)^3}} > \frac{6}{2\sqrt{3^3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ và } -\frac{1}{2(t+1)^2} > -\frac{1}{2} \Rightarrow f'(t) > \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} > 0$$

$$\Rightarrow f'(t) > 0, \forall t \in \left(0; \frac{1}{4}\right] \Rightarrow f \text{ đồng biến trên } \left(0; \frac{1}{4}\right] \Rightarrow f(t) \leq f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{7+10\sqrt{5}}{30}$$

Vậy  $\max P = \frac{7+10\sqrt{5}}{30}$  khi  $x = \frac{1}{2}$ ,  $y = 2$ .

**Chú ý:** Với các biểu thức đẳng cấp có 3 biến. Bằng phép biến đổi tương tự như VD12 ta sẽ dồn được từ 3 biến về 2 biến.

Xét ví dụ sau:

**Ví dụ 13:** (ĐH khối B-2014) Cho các số thực  $a, b, c$  không âm và thỏa mãn điều kiện  $(a+b)c > 0$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \frac{c}{2(a+b)}.$$

**Lời giải.**

Từ điều kiện ta có  $c > 0$  và  $a + b > 0$ . Do đó:

$$P = \sqrt{\frac{a/c}{b/c+1}} + \sqrt{\frac{b/c}{a/c+1}} + \frac{1}{2\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right)} = \sqrt{\frac{x}{y+1}} + \sqrt{\frac{y}{x+1}} + \frac{1}{2(x+y)} \text{ với } x = \frac{a}{c} \geq 0, y = \frac{b}{c} \geq 0$$

Ta có:  $x + y + 1 \geq 2\sqrt{x(y+1)} \Rightarrow \sqrt{\frac{x}{y+1}} \geq \frac{2x}{x+y+1}$ . Dấu “=” xảy ra khi  $x = 0$  hoặc  $x = y + 1$

Tương tự:  $\sqrt{\frac{y}{x+1}} \geq \frac{2y}{x+y+1}$ . Dấu “=” xảy ra khi  $y = 0$  hoặc  $y = x + 1$

Từ đó suy ra:  $P \geq \frac{2(x+y)}{(x+y)+1} + \frac{1}{2(x+y)} = \frac{2t}{t+1} + \frac{1}{2t}$  với  $t = x + y > 0$

Xét hàm số  $f(t) = \frac{2t}{t+1} + \frac{1}{2t}$ ,  $t > 0$ ;  $f'(t) = \frac{2}{(t+1)^2} - \frac{1}{2t^2}$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 4t^2 = (t+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{3} \text{ (loại)} \\ t = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Từ bảng biến thiên ta có  $f(t) \geq f(1) = \frac{3}{2}$ . Tức là  $P \geq \frac{3}{2}$

Vậy  $\min P = \frac{3}{2}$  khi  $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=c \end{cases} \vee \begin{cases} b=0 \\ a=c \end{cases}$

**Ví dụ 14:** (HSG Vĩnh Phúc, 2015-2016) Cho  $x, y, z$  là ba số thực thuộc đoạn  $[1;9]$  và  $x \geq y, x \geq z$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = \frac{y}{10y-x} + \frac{1}{2} \left( \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} \right)$ .

**Lời giải.**

Ta có BĐT  $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}}$ , với  $a, b > 0$  và  $ab \geq 1$  (xem phần phụ lục)

Áp dụng bất đẳng thức trên:  $P = \frac{1}{10 - \frac{x}{y}} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 + \frac{z}{y}} + \frac{1}{1 + \frac{x}{z}} \right) \geq \frac{1}{10 - \frac{x}{y}} + \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{x}{y}}}$

Đặt  $\sqrt{\frac{x}{y}} = t \in [1;3]$ . Xét hàm số  $f(t) = \frac{1}{10-t^2} + \frac{1}{1+t}$  trên đoạn  $[1;3]$ .

$$f'(t) = \frac{2t}{(10-t^2)^2} - \frac{1}{(1+t)^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t^4 - 2t^3 - 24t^2 - 2t + 100 = 0$$

$$(t-2)(t^3 - 24t - 50) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \text{ do } t^3 - 24t - 50 < 0 \forall t \in [1;3].$$

Lập bảng biến thiên, ta có  $\min_{[1;3]} f(t) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = 2$

$$\text{Suy ra } \min P = \frac{1}{2} \text{ khi và chỉ khi } \begin{cases} x = 4y \\ \frac{z}{y} = \frac{x}{z} \\ \frac{x}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ z = 2y \end{cases}.$$

**Ví dụ 15:** Cho các số thực  $x, y, z$  thỏa mãn  $x > 2, y > 1, z > 0$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - 2(2x + y - 3)} - \frac{1}{y(x-1)(z+1)}$

**Lời giải.**

Đặt  $a = x - 2, b = y - 1, c = z \Rightarrow a, b, c > 0$ . Suy ra:

$$P = \frac{1}{2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + 1} - \frac{1}{(a+1)(b+1)(c+1)} \text{ (là biểu thức đối xứng đối của } a, b, c)$$

$$\text{Ta có } a^2 + b^2 + c^2 + 1 \geq \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{(c+1)^2}{2} \geq \frac{1}{4}(a+b+c+1)^2$$

Dấu “=” xảy ra khi  $a = b = c = 1$

Mặt khác  $(a+1)(b+1)(c+1) \leq \frac{(a+b+c+3)^3}{27}$ . Dấu “=” xảy ra khi  $a+1 = b+1 = c+1$

Khi đó  $P \leq \frac{1}{a+b+c+1} - \frac{27}{(a+b+c+3)^3}$ . Dấu “=” xảy ra khi  $a=b=c=1$

Đặt  $t=a+b+c+1 > 1$ . Khi đó  $P \leq \frac{1}{t} - \frac{27}{(t+2)^3}, t > 1$

Xét hàm số  $f(t) = \frac{1}{t} - \frac{27}{(t+2)^3}, t > 1$ ; có  $f'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{81}{(t+2)^4} = \frac{81t^2 - (t+2)^4}{t^2(t+2)^4}$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 81t^2 - (t+2)^4 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 4. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(t) = 0$$

Bảng biến thiên

|         |   |               |           |
|---------|---|---------------|-----------|
| $t$     | 1 | 4             | $+\infty$ |
| $f'(t)$ | + | 0             | -         |
| $f(t)$  | 0 | $\frac{1}{8}$ | 0         |

Từ BBT Ta có  $\max_{(1;+\infty)} f(x) = f(4) = \frac{1}{8}$

Vậy mà  $xP = f(4) = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c=1 \\ a+b+c+1=4 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=1 \Rightarrow x=3; y=2; z=1.$

**Ví dụ 16:** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{4a+2b+4\sqrt{2bc}} - \frac{4}{8+a+2b+3c} + \frac{1}{4+b+2c}.$$

**Lời giải.**

Ta có  $2\sqrt{2bc} \leq b+2c \Rightarrow \frac{1}{4a+2b+4\sqrt{2bc}} \geq \frac{1}{4a+4b+4c}$ . Dấu “=” xảy ra khi  $b=2c$

và  $\frac{-4}{8+a+2b+3c} \geq \frac{-1}{4+a+b+c} + \frac{-1}{4+b+2c}$  (áp dụng BĐT:  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}, (x, y > 0)$ )

Dấu “=” xảy ra khi  $4+a+b+c=4+b+2c \Leftrightarrow a+b+c=b+2c$ .

Suy ra  $P \geq \frac{1}{4(a+b+c)} + \frac{-1}{4+(a+c+b)}$ , Đặt  $t=a+b+c, t > 0$

$$\Rightarrow P \geq f(t) = \frac{1}{4t} + \frac{-1}{4+t}, \quad t > 0, \quad f'(t) = -\frac{1}{4t^2} + \frac{1}{(4+t)^2}; \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4.$$

Lập bảng biến thiên ta có:  $\min_{(0;+\infty)} f(t) = -\frac{1}{16} \Leftrightarrow t = 4$

Từ đó suy ra giá trị nhỏ nhất của  $P$  bằng  $-\frac{1}{16}$  khi  $\begin{cases} b=2c \\ a+b+c=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2c \\ c=2c=1 \end{cases}$ .

**Ví dụ 17:** Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $ab \geq 1; c(a+b+c) \geq 3$ .

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = \frac{b+2c}{1+a} + \frac{a+2c}{1+b} + 6\ln(a+b+2c).$

➡ **Phân tích hướng làm:**

- Do biểu thức  $\ln(a+b+2c)$  là bất biến. Vì thế ta nghĩ đến việc dồn về biến  $t=a+b+2c$ . Đến đây điều quan trọng là làm sao dồn được phần còn lại của  $P$  theo  $t$ . Muốn làm được điều này cần có sự quan sát tinh tế biểu thức  $P$ , điều kiện ban đầu và vận dụng khéo léo các BĐT trung gian.

**Lời giải.** Ta có:

$$\begin{aligned} P+2 &= \frac{a+b+2c+1}{1+a} + \frac{a+b+2c+1}{1+b} + 6\ln(a+b+2c) \\ &= (a+b+2c+1) \left( \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \right) + 6\ln(a+b+2c) \end{aligned}$$

Ta chứng minh được các BĐT quen thuộc sau:

$$+)\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}} \quad (1) \quad (\text{với } a, b > 0 \text{ và } ab \geq 1) \quad +)\sqrt{ab} \leq \frac{ab+1}{2} \quad (2) \quad (a, b > 0)$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} &\geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}} \geq \frac{2}{1+\frac{ab+1}{2}} = \frac{4}{3+ab} \\ &\geq \frac{4}{ab+bc+ca+c^2} = \frac{4}{(a+c)(b+c)} \geq \frac{16}{(a+b+2c)^2}. \end{aligned}$$

Đặt  $t=a+b+2c, t > 0$  ta có:

$$\begin{aligned} P+2 &\geq f(t) = \frac{16(t+1)}{t^2} + 6\ln t, \quad t > 0; \\ f'(t) &= \frac{6}{t} - \frac{16(t+2)}{t^3} = \frac{6t^2 - 16t - 32}{t^3} = \frac{(t-4)(6t+8)}{t^3} \end{aligned}$$

Lập bảng biến thiên suy ra:  $\min_{(0;+\infty)} f(t) = 5 + 6\ln 4 \Leftrightarrow t=4$ . Tức là  $P+2 \geq 5 + 6\ln 4$

Vậy:  $\min P = 3 + 6\ln 4$  khi  $a=b=c=1$ .

**Ví dụ 18:** (Đề thi HSG Thanh Hóa, 2013-2014) Cho  $a, b, c$  là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = \frac{8a+3b+4(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt[3]{abc})}{1+(a+b+c)^2}$

➡ **Phân tích hướng làm:**

- Theo chiều đánh giá tìm GTLN, ta nghĩ đến việc vận dụng BĐT Côsi để phá các căn thức trong  $P$ . Tuy nhiên điểm khó của bài này là dự đoán GTLN của  $P$  đạt được khi nào (do  $a, b, c$  chưa được chuẩn hóa) để chọn “điểm rơi” khi vận dụng BĐT Côsi cho hợp lí.

- Quan sát  $P$  ta có thể dự đoán biến cần dồn về là  $t=a+b+c$ . Vì thế cần nghiên cứu “điểm rơi” khi vận dụng BĐT Côsi sao cho tử số của  $P$  có thể thu gọn được về dạng  $k(a+b+c)$ . Từ đó ta có lời giải sau:

### Lời giải.

Ta có:

$$P = \frac{8a+3b+4(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt[3]{abc})}{1+(a+b+c)^2}$$

$$\leq \frac{8a+3b+4\left(\frac{a+4b}{4}+\frac{b+4c}{4}+\frac{a+4b+16c}{12}\right)}{1+(a+b+c)^2} = \frac{28}{3} \cdot \frac{a+b+c}{1+(a+b+c)^2}$$

Dấu “=” xảy ra khi  $a=4b=16c$ .

Đặt  $t=a+b+c$ , ta có  $t>0$ . Xét hàm số

$$f(t) = \frac{t}{1+t^2}, t > 0; \quad f'(t) = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$$

Lập bảng biến thiên, suy ra  $\max_{(0;+\infty)} f(t) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow P \leq \frac{28}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{14}{3}$

$$\text{Vậy: } \max P = \frac{14}{3} \Leftrightarrow a = \frac{16}{21}, b = \frac{4}{21}, c = \frac{1}{21}$$

**Nhận xét:** Qua các ví dụ trên (VD12-VĐ18) chúng ta nhận thấy sự khó khăn trong việc định hướng biến cần dồn về của các biểu thức bất đối xứng. Cũng từ đó thêm một lần nữa thấy được tầm quan trọng của kỹ năng vận dụng các BĐT trung gian. Đó là những BĐT hết sức đơn giản nhưng sức mạnh thì thật là to lớn. Chúng như những cây cầu nhỏ nhưng có thể nối liền những hòn đảo lớn với nhau. Đây cũng chính là nguyên nhân thực sự tạo nên sự khó khăn trong việc đi tìm lời giải bài toán GTLN, GTNN của biểu thức nhiều biến.

### 2.3.3. Bài tập tự luyện



**Bài 1.** (ĐH khối D- 2014) Cho hai số thực  $x, y$  thỏa mãn các điều kiện  $1 \leq x \leq 2$ ;  $1 \leq y \leq 2$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{x+2y}{x^2+3y+5} + \frac{y+2x}{y^2+3x+5} + \frac{1}{4(x+y-1)}$$

**Đáp số:**  $\min P = \frac{7}{8}$  tại  $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$  hay  $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

**Bài 2.** Cho  $x, y, z$  là các số thực thỏa mãn điều kiện  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ . Tìm GTLN, GTNN của biểu thức :  $P = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ .

**Đáp số :**  $\max P = 2\sqrt{2}$  đạt được khi  $x = \sqrt{2}; y = z = 0$

$\min P = -2\sqrt{2}$  đạt được khi  $x = -\sqrt{2}; y = z = 0$ .

**Bài 3.** Cho  $a, b, c$  là ba số thực thỏa mãn điều kiện  $abc + a + c = b$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = \frac{2}{a^2+1} - \frac{2}{b^2+1} + \frac{3}{c^2+1}$ .

**Đáp số:**  $\max P = \frac{10}{3}$  khi  $c = \frac{1}{\sqrt{8}}, a = \frac{\sqrt{2}}{2}, b = \sqrt{2}$

**Bài 4.** Cho ba số dương  $x, y, z$  thay đổi và thỏa điều kiện  $x + y + z = 3$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = x^4 + y^4 + 8z^4$ .

**Đáp số:**  $\min P = \frac{648}{125}$  khi  $x=y=\frac{6}{5}; z=\frac{3}{5}$

**Bài 5.** Cho các số thực dương  $a, b, c$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{2}{a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc}} - \frac{3}{\sqrt{a+b+c}}$$

**Đáp số:**  $\min P = -\frac{3}{2}$  Khi  $a = \frac{16}{21}; b = \frac{4}{21}; c = \frac{1}{21}$

## 2.4 Hiệu quả của SKKN

Với nội dung của SKKN này, qua thực tế giảng dạy (khoảng 16 tiết) cho đội tuyển HSG cấp tỉnh và nhóm học sinh khá giỏi luyện thi đại học, THPTQG của trường THPT Lê Lai những năm gần đây, tôi nhận thấy các em đã bước đầu hình thành cho mình những kỹ năng cơ bản, cần thiết và một cách tiếp cận có định hướng để giải quyết bài toán tìm GTLN, GTNN của biểu thức nhiều biến. Nhưng do đặc thù đây là một bài toán rất khó (nhằm phân loại những học sinh xuất sắc), chính vì thế mà việc vận dụng các phương pháp dồn biến là hết sức đa dạng, phong phú. Đòi hỏi sự linh hoạt và tư duy độc lập cao trong việc vận dụng kiến thức. Do đó đối với biểu thức 2 biến thì hầu hết các em làm được. Nhưng với biểu thức 3 biến trở lên thì cũng đang còn hạn chế. Cần phải có thêm thời gian và sự đầu tư đúng mức.

Một điều khá quan trọng mà SKKN này làm được, là đã làm thay đổi quan niệm, cách nhìn nhận của nhiều học sinh (và cả giáo viên Toán) trường THPT Lê Lai về câu “chốt” trong đề thi THPTQG. Từ chỗ thờ ơ, không quan

tâm thì nay bắt đầu có cái nhìn thân thiện và có niềm tin vào khả năng có thể chiếm lĩnh được nó.

### 3. Kết luận, kiến nghị

#### - Kết luận.

Với đề tài: ***“Phương pháp kết hợp dồn biến và đạo hàm tìm GTLN, GTNN của biểu thức nhiều biến trong luyện thi THPTQG và bồi dưỡng HSG tại trường THPT Lê Lai”***, tôi đã cố gắng hệ thống một số phương pháp dồn biến cơ bản. Trong mỗi phần có đưa ra cơ sở lý thuyết và những ví dụ được chọn lọc có tính minh họa cao cho phần định hướng cách giải, có phân tích hướng làm cụ thể nhằm giúp học sinh có thể tự tìm ra lời giải, cũng từ đó hình thành cho mình phương pháp giải toán nói chung để giải quyết các bài toán này.

Các ví dụ đưa ra từ dễ đến khó, có những ví dụ có lời giải chi tiết nhưng có những ví dụ chỉ có hướng dẫn, học sinh phải biết tự chiếm lĩnh tri thức, phát triển khả năng tư duy của mình. Hệ thống bài tập trong sáng kiến này chủ yếu là bài tập trong các đề thi Đại học, Cao đẳng những năm gần đây nên khi học sinh hiểu bài và làm được thì tạo nên hứng thú và động lực học tập rất tốt cho các em. Chính vì vậy SKKN này sẽ là một tài liệu tham khảo bổ ích cho các bạn đồng nghiệp, các em học sinh muốn chinh phục điểm 10 môn Toán trong các kỳ thi THPTQG sắp tới.

Do phải hạn chế về dung lượng (không quá 20 trang) nên sáng kiến này mới chỉ khai thác được một phần nhỏ trong tổng thể phương pháp kết hợp dồn biến và đạo hàm tìm GTLN, GTNN của biểu thức nhiều biến. Đặc biệt là các kỹ thuật dồn biến. Chính vì vậy mà sáng kiến này chưa thể giải quyết triệt để được bài toán tìm GTLN, GTNN của biểu thức nhiều biến. Do đó trong thời gian tới tôi sẽ tiếp tục phát triển sáng kiến này bằng cách cập nhật thêm nhiều ví dụ hay, nhiều phương pháp dồn biến độc đáo, như sẽ đi sâu vào phương pháp “khảo sát từng biến” bằng công cụ đạo hàm.

#### - Kiến nghị.

- Tổ Toán-Tin trường THPT Lê Lai cần tạo điều kiện, khuyến khích, động viên các giáo viên luyện thi THPTQG và giáo viên dạy đội tuyển HSG cấp tỉnh, dành một phần thời gian hợp lý để ôn luyện nội dung lấy điểm 10 trong đề thi THPTQG cho học sinh.

- Sau mỗi năm Sở GD&ĐT cần chọn lọc những SKKN hay thuộc lĩnh vực SKKN này (và nhiều lĩnh vực khác) triển khai về các trường để giáo viên được học hỏi, rút kinh nghiệm và vận dụng thực hiện nhằm nâng cao chất lượng dạy và học của nhà trường.

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG  
ĐƠN VỊ

Thanh Hóa, ngày 30 tháng 5 năm 2016

Tôi xin cam đoan đây là SKKN của  
mình viết, không sao chép nội dung của  
người khác.

(Ký và ghi rõ họ tên)

**Nguyễn Đức Lượng**

## **TÀI LIỆU THAM KHẢO**

1. Đề thi tuyển sinh ĐH-CD, đề thi THPTQG hàng năm của Bộ GD&ĐT, của các trường THPT trên toàn quốc.
2. Tài liệu chuyên toán Giải tích 12 – Đoàn Quỳnh (chủ biên), Nhà xuất bản Giáo dục.
3. Chuyên đề Bất đẳng thức – Nguyễn Trung Kiên, Nhà xuất bản ĐHQGHN

## **PHỤ LỤC**

**\* Các đẳng thức và bất đẳng thức cơ bản (cần học thuộc lòng để vận dụng):**

1.  $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) = a^2 + b^2 + c^2 + a(b+c) + b(a+c) + c(a+b)$
2.  $(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ca$
3.  $(a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ca$
4.  $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - (x+y+z)^2$
5.  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$
6.  $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + a(b+c) + b(a+c) + c(a+b)$  (1)

với  $a=|x-y|$ ;  $b=|y-z|$ ;  $c=|z-x|$

Áp dụng bất đẳng thức  $|A| + |B| \geq |A+B|$

$$|x-y| + |y-z| \geq |x-y+y-z| = |x-z| = |z-x| \Rightarrow a+b \geq c$$

Tương tự  $a+c \geq b$ ;  $a+b \geq c$

$$(1) \Rightarrow (a+b+c)^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 + a.a + b.b + c.c$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 \geq 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Rightarrow a+b+c \geq \sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$7. a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a+b+c)$$

$$8. (a+b+c)^2 = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] + 3(ab+bc+ca)$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$$

$$\Rightarrow ab+bc+ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3}$$

$$9. (ab+bc+ca)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a+b+c)$$

$$10. \text{ Nếu } a, b \in [\alpha; \beta] \Rightarrow (\beta-a)(\beta-b) \geq 0 \Rightarrow ab - \beta(a+b) + \beta^2 \geq 0$$

Đặt  $S=a+b$ ;  $P=a.b$

$$\Rightarrow P - \beta S + \beta^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow P \geq \beta S - \beta^2$$

Ta có  $a^2+b^2=S^2-2P \leq S^2 - 2(\beta S - \beta^2)$

$$\Rightarrow a^2+b^2 \leq S^2 - 2\beta S + 2\beta^2$$

Mặt khác  $ab \leq \frac{1}{4}(a+b)^2 \Rightarrow P \leq \frac{S^2}{4}$

Ta lại có:  $a^3+b^3=S^3 - 3PS \geq S^3 - 3\frac{S^2}{4}.S \Rightarrow a^3+b^3 \geq \frac{1}{4}S^3$

11. Nếu  $a, b, c \in [\alpha; \beta] \Rightarrow \begin{cases} (a-\alpha)(b-\alpha)(c-\alpha) \geq 0 \\ (\beta-a)(\beta-b)(\beta-c) \geq 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} [ab - \alpha(a+b) + \alpha^2](c-\alpha) \geq 0 \\ [ab - \beta(a+b) + \beta^2](\beta-c) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} abc - \alpha(ab+bc+ca) + \alpha^2(a+b+c) - \alpha^3 \geq 0 & (1) \\ -abc + \beta(ab+bc+ca) - \beta^2(a+b+c) + \beta^3 \geq 0 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1)+(2) ta được

$$\Rightarrow (\beta - \alpha)(ab+bc+ca) + (\alpha^2 - \beta^2)(a+b+c) + \beta^3 - \alpha^3 \geq 0$$

### Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki

$$(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+\dots x_ny_n)^2 \leq (x_1^2+x_2^2+x_3^2+\dots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2+\dots+y_n^2)$$

Dấu “=” xảy ra  $\Leftrightarrow \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \dots = \frac{x_n}{y_n}$

12.  $a^2+b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$

13.  $a^4+b^4 \geq \frac{(a^2+b^2)^2}{2}$

14.  $\begin{cases} a^2+b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} \\ a^4+b^4 \geq \frac{(a^2+b^2)^2}{2} \end{cases} \Rightarrow a^4+b^4 \geq \frac{(a+b)^4}{8}$

15.  $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b) \geq (a+b)^3-3.\frac{(a+b)^2}{4}.(a+b) = \frac{1}{4}(a+b)^3$

### Áp dụng bất đẳng thức côsi

$a_1+a_2+a_3+\dots+a_n \geq n\sqrt[n]{a_1.a_2.a_3\dots a_n}$ . Với  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  là các số thực không âm

16.  $a+b \geq 2\sqrt{ab}$

Với a,b không âm

17.  $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

Với a,b không âm

18.  $ab \leq \frac{1}{4}(a+b)^2$

19.  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$

20.  $2ab \leq a^2+b^2$

21.  $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$

22.  $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$

Với a,b,c không âm

23.  $(a+b+c)^3 \geq 27abc$

Với a,b,c không âm

$$24. abc \leq \frac{(a+b+c)^3}{27}$$

$$25. a^3+b^3+c^3 \geq 3abc$$

Với a,b,c không âm

$$26. a+b+c \geq 2\sqrt{a(b+c)} \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} \geq \frac{2a}{a+b+c}$$

Với a,b,c không âm

$$27. a^x+a^y \geq 2\sqrt{a^x \cdot a^y} = 2\sqrt{a^{x+y}} = 2.a^{\frac{x+y}{2}}$$

$$28. a^t \geq t+1, \quad \forall t \geq 0 \text{ và } a > 3$$

**Chứng minh.**

Đặt  $f(t)=a^t-t-1$ , có  $f'(t)=a^t \cdot \ln a - 1 > 0, \quad \forall t \geq 0 \text{ và } a > 3$

$\Rightarrow$  hàm số đồng biến

$$t \geq 0 \Rightarrow f(t) \geq f(0) \Rightarrow a^t - t - 1 \geq 0 \Rightarrow a^t \geq t + 1$$

$$29. \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}} \quad \text{Với } a, b > 0 \text{ và } ab \geq 1$$

**Chứng minh.**

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}} \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 (\sqrt{ab} - 1) \geq 0 \text{ đúng do } ab \geq 1.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $a=b$  hoặc  $ab=1$ .

$$30. |A| + |B| \geq |A+B|$$

$$31. |x-y| + |y-z| \geq |x-z| \Rightarrow |x-y| + |y-z| = |x-z| \Rightarrow |z-x| = |x-z|$$

$$32. P=f(x); \quad x \in [a;b]$$

Nếu  $f'(x) > 0$  thì hàm số  $f(x)$  đồng biến  $\Rightarrow f(a) \leq P \leq f(b)$

Nếu  $f'(x) < 0$  thì hàm số  $f(x)$  nghịch biến  $\Rightarrow f(a) \geq P \geq f(b)$

$$33. \text{ Nếu } \quad \quad \quad \text{đặt} \quad \quad \quad t \quad \quad \quad = \quad \quad \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \Rightarrow$$

$$34. \text{ Nếu đặt } t = \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = t^2 - 2$$

$$35. (a+b+c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 3 \sqrt[3]{abc} \cdot \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} = 9 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

$$36. a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)^3 - 3(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

$$37. a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c) \left[ a^2 + b^2 + c^2 - (ab+bc+ca) \right] + 3abc$$

### \* Biểu thức đẳng cấp

Biểu thức  $f(x, y)$  được gọi là biểu thức đẳng cấp bậc k nếu:

$$f(mx, my) = m^k f(x, y)$$

- Đối với các biểu thức đẳng cấp 2 biến số ngoài việc quy về một biến theo cách đặt  $S=x+y$ ,  $P=xy$  (đối với biểu thức đối xứng) ta cũng có thể dùng phép đặt  $a=tb$  với  $b \neq 0$  hay  $x=ty$  với  $y \neq 0$  để quy về bài toán một ẩn số t.

- Đối với các biểu thức đẳng cấp 3 biến số, chúng ta cũng thực hiện phép dồn biến tương tự như với biểu thức 2 biến và sẽ dồn được từ 3 biến còn 2 biến.