SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO	**KỲ THI KHẢO SÁT HSG GIỎI**
PHÒNG GD VÀ ĐÀO TẠO	**NĂM HỌC 2023-2024**

ĐỀ SỐ 24

MÔN THI: TOÁN

Thời gian: 150 phút (Không tính thời gian giao đề)

PHẦN I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (6 điểm)

Câu 1. Cho biểu thức $L=8\left(3^2+1\right)\left(3^4+1\right)...\left(3^{128}+1\right)$. Thu gọn L ta được

A. $3^{256}-1$. **B.** $3^{256}+3$. **C.** $3^{256}+1$. **D.** $3^{256}-3$.

Câu 2. Giá trị của $M=a^3+b^3+3ab\left(a^2+b^2\right)+6a^2b^2\left(a+b\right)$ tại $a+b=-1$, $ab=1$ là

A. 0. **B.** -7. **C.** 1. **D.** -1.

Câu 3. Số giá trị nguyên của a để đa thức $2x^ay^7-3x^4y^8$ chia hết cho đơn thức $7xy^a$ là

A. 3. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 4. Xác định hệ số a để đa thức $\left(x^3-3x+a\right)$ chia hết cho $\left(x-1\right)^2$.

A. -2. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -1.

Câu 5. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=x^2+2y^2+2xy+2x-4y+2013$ là

A. $A=2022$ **B.** $A=2003$ **C.** $A=2013$ **D.** $A=2023$

Câu 6. Giá trị lớn nhất của $B=2x-2x^2-5$ là

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{-9}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 1.

Câu 7. Tổng các nghiệm của đa thức $f\left(x\right)=(x+2)(3-4x)+\left(x^2+4x+4\right)$ bằng

A. $-\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $-\frac{11}{3}$. **D.** $\frac{11}{3}$.

Câu 8. Giá trị của a và b để đa thức $4x^3+ax+b$ chia cho đa thức x^2-1 dư $3x-2$ là

A. $a=7;b=-2$ **B.** $a=1;b=-3$

C. $a=1;b=2$ **D.** $a=-1;b=-2$

Câu 9. Cho đa thức $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+10x-4$ và $g\left(x\right)=x^2+x-2$ biết rằng $f\left(x\right)$ chia hết cho $g\left(x\right)$ khi đó $\left(a;b\right)$ bằng

A. $\left(-4;-2\right)$. **B.** $\left(2;-8\right)$. **C.** $\left(-2;-8\right)$. **D.** $\left(-2;8\right)$.

Câu 10. Hình thang $ABCD$ có $AB//CD; \hat{A}=3\hat{D}; \hat{B}-\hat{C}=30^\circ$. Khi đó tổng $\hat{A}+\hat{B}$ bằng

A. 180°. **B.** 210°. **C.** 240°. **D.** 270°.

Câu 11. Cho tam giác ABC cân tại $A; AB = 8\,\text{cm}$, có $D \in BC$. Vẽ $DM \,//\, AC,\ DN \,//\, AB$, $(M \in AB,\ N \in AC)$, I là trung điểm của MN. Tính chu vi tứ giác $AMDN$

A. $8\,\text{cm}$ **B.** $16\,\text{cm}$.

C. $12\,\text{cm}$. **D.** $32\,\text{cm}$.

Câu 12. Thủy rút ngẫu nhiên một lá bài từ bộ bài 52 lá. Sau khi rút ngẫu nhiên 60 lần, Thủy thấy rằng số lần rút được lá rô bằng $\frac{1}{4}$ tổng số lần rút, số lần rút được lá cơ bằng $\frac{7}{5}$ số lần rút được lá rô, số lần rút được lá tép kém trung bình cộng của số lần rút được lá cơ và lá rô là 4 đơn vị. Tính xác suất thực nghiệm của biến cố "Rút được lá bích".

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{7}{20}$. **D.** $\frac{7}{12}$.

PHẦN II. PHẦN TỰ LUẬN (14 điểm)

Câu I. (2,*0 điểm)* Cho biểu thức $P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2 - x^2}{x^2 - x} \right)$ với $x \neq 0; x \neq 1; x \neq -1$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm giá trị x nguyên để P nhận giá trị nguyên.

Câu II (4,0 điểm)

1. Giải phương trình sau:

$$(2x^2 + x - 2023)^2 + 4(x^2 - 5x - 2022)^2 = 4(2x^2 + x - 2023)(x^2 - 5x - 2022).$$

2. Cho các số thực x, y, z thoả mãn $xyz \neq 0$ và $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$. Tính giá trị của biểu thức:

$$M = \left(1 + \frac{x}{y}\right)\left(1 + \frac{y}{z}\right)\left(1 + \frac{z}{x}\right).$$

Câu III. (2,0 điểm)

1. Tìm số nguyên tố p để $p^2 + 2$ và $p^3 + 2$ đều là các số nguyên tố.

2. Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình: $x^2y^2 - x^2 - 8y^2 = 2xy.$

Câu IV *(6,0 điểm)* Cho hình vuông $ABCD$, gọi M là điểm bất kỳ trên cạnh BC. Trong nửa mặt phẳng bờ AB chứa C, dựng hình vuông $AMHN$. Qua M dựng đường thẳng d song song với AB, d cắt AH tại E. Đường thẳng AH cắt DC tại F.

a) Chứng minh rằng $BM = ND$.

b) Tứ giác $EMFN$ là hình gì?

c) Chứng minh chu vi tam giác MFC không đổi khi M thay đổi trên BC.

Câu V. (1,0 điểm) Cho x, y, z là 3 số thực dương thỏa mãn $x(x-z)+y(y-z)=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x^3}{x^2+z^2}+\dfrac{y^3}{y^2+z^2}+\dfrac{x^2+y^2+4}{x+y}$.

HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ ĐÁP ÁN

PHẦN I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (6 điểm)

BẢNG ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Đáp án	A	B	B	C	B	B	A	D	A	C	B	B

Câu 1. Cho biểu thức $L=8\left(3^2+1\right)\left(3^4+1\right)...\left(3^{128}+1\right)$. Thu gọn L ta được

A. $3^{256}-1$. **B.** $3^{256}+3$. **C.** $3^{256}+1$. **D.** $3^{256}-3$.

Lời giải

Ta có $8\left(3^2+1\right)\left(3^4+1\right)...\left(3^{128}+1\right)=\left(3^2-1\right)\left(3^2+1\right)\left(3^4+1\right)...\left(3^{128}+1\right)$

$=\left(3^4-1\right)\left(3^4+1\right)...\left(3^{128}+1\right)=\left(3^8-1\right)\left(3^8+1\right)...\left(3^{128}+1\right)$ ....

$=\left(3^{128}-1\right)\left(3^{128}+1\right)=3^{256}-1$.

Đáp án cần chọn là. **A.**

Câu 2 Giá trị của $M=a^3+b^3+3ab\left(a^2+b^2\right)+6a^2b^2\left(a+b\right)$ tại $a+b=-1$, $ab=1$ là

A. 0. **B.** -7. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải

Ta có

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \Rightarrow a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \Rightarrow a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

Thay vào biểu thức M ta có:

$M=a^3+b^3+3ab\left(a^2+b^2\right)+6a^2b^2\left(a+b\right)$

$=(a+b)^3-3ab(a+b)+3ab\left[(a+b)^2-2ab\right]+6a^2b^2(a+b)$

Thay $a+b=-1$, $ab=1$ vào biểu thức M ta có:

$M = (-1)^3 - 3.1.(-1) + 3.1\left[(-1)^2 - 2.1\right] + 6.1^2.(-1) = -1 + 3 + 3.(-1) - 6 = -1 + 3 - 3 - 6 = -7$

Đáp án cần chọn là. B.

Câu 3. Số giá trị nguyên của a để đa thức $2x^a y^7 - 3x^4 y^8$ chia hết cho đơn thức $7xy^a$ là

A. 8. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Đa thức $2x^a y^7 - 3x^4 y^8$ chia hết cho đơn thức $7xy^a$ thì $2x^a y^7; 3x^4 y^8$ cùng chia hết cho $7xy^a$ nên $1 \le a \le 7$.

Mà a nguyên nên có 7 giá trị của a.

Đáp án cần chọn là. B.

Câu 4. Xác định hệ số a để đa thức $(x^3 - 3x + a)$ chia hết cho $(x-1)^2$.

A. -2. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -1.

Lời giải:

Ta có: $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$.

Thực hiện phép chia ta được: $(x^3 - 3x + a) = (x^2 - 2x + 1).(x+2) + (a-2)$.

Muốn thực hiện phép chia không còn dư, ta phải có số dư $a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$.

Vậy để đa thức $(x^3 - 3x + a)$ chia hết cho $(x-1)^2$ thì $a = 2$.

Đáp án cần chọn là. C.

Câu 5: Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x - 4y + 2013$ là

A. $A = 2022$ **B.** $A = 2003$ **C.** $A = 2013$ **D.** $A = 2023$

Lời Giải

Ta có:

$A = x^2 + 2y^2 + 2xy + 2x - 4y + 2013$

$= (x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2x + 2y) + (y^2 - 6y + 9) + 2003 = (x + y + 1)^2 + (y - 3)^2 + 2003$

Vì $(x+y+1)^2 \ge 0; (y-3)^2 \ge 0 \Rightarrow (x+y+1)^2 + (y-3)^2 + 2003 \ge 2003 \Rightarrow A \ge 2003$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = -4; y = 3$

Vậy Giá trị nhỏ nhất của biểu thức A bằng 2003 khi $x = -4; y = 3$

Đáp án cần chọn là. B.

Câu 6. Giá trị lớn nhất của $B = 2x - 2x^2 - 5$ là

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{-9}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 1.

Lời giải

$B = 2x - 2x^2 - 5 = -(2x^2 - 2x + 5)$

$$B=-2\left(x^2-x+\frac{5}{2}\right)=-2\left(x^2-2.x.\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{9}{4}\right)=-2\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\right]$$

Ta có $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\geq 0$ với mọi x

$$\Rightarrow\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\geq\frac{9}{4}\Rightarrow -2\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\right]\leq(-2).\frac{9}{4}\Rightarrow B\leq\frac{-9}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x-\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $B=\frac{-9}{2}$ khi $x=\frac{1}{2}$.

Đáp án cần chọn là. **B.**

Câu 7. Tổng các nghiệm của đa thức $f(x)=(x+2)(3-4x)+(x^2+4x+4)$ bằng

A. $-\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $-\frac{11}{3}$. **D.** $\frac{11}{3}$.

Lời giải

Ta có: $f(x)=0$

$(x+2)(3-4x)+(x^2+4x+4)=0$

$\Leftrightarrow (x+2)(3-4x)+(x+2)^2=0$

$\Leftrightarrow (x+2)(-3x+5)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=\frac{5}{3}\end{array}\right.$$

Tổng các nghiệm là: $-2+\frac{5}{3}=-\frac{1}{3}$.

Đáp án cần chọn là. **A.**

Câu 8: Giá trị của a và b để đa thức $4x^3+ax+b$ chia cho đa thức x^2-1 dư $3x-2$ là

A. $a=7;b=-2$ **B.** $a=1;b=-3$

C. $a=1;b=2$ **D.** $a=-1;b=-2$

Lời giải

Vì:

$4x^3+ax+b=M.(x^2-1)+3x-2$

$4x^3+ax+b=M.(x-1)(x+1)+3x-2$

Với $x=1$ ta có: $4.1^3+a.1+b=M.(1-1)(1+1)+3.1-2$

Þ $a+b=-3$ (1)

Với $x=-1$ ta có: $4.(-1)^3+a.(-1)+b=M.(-1-1)(-1+1)+3.(-1)-2$

Þ $-a+b=-1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $a=-1;b=-2$

Đáp án cần chọn là. **D.**

Câu 9. Cho đa thức $f(x)=ax^3+bx^2+10x-4$ và $g(x)=x^2+x-2$ biết rằng $f(x)$ chia hết cho $g(x)$ khi đó $(a;b)$ bằng

A. $(-4;-2)$. **B.** $(2;-8)$. **C.** $(-2;-8)$. **D.** $(-2;8)$.

Lời giải

Ta có: $g(x)=x^2+x-2=(x-1)(x+2)$

Để $f(x)=ax^3+bx^2+10x-4$ thì: $\begin{cases} f(1)=0 \\ f(-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=-6 \\ -8a+4b=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=-2 \end{cases}$

Đáp án cần chọn là. **A.**

Câu 10. Hình thang $ABCD$ có $AB//CD;\hat{A}=3\hat{D};\hat{B}-\hat{C}=30^\circ$. Khi đó tổng $\hat{A}+\hat{B}$ bằng

A. 180°. **B.** 210°. **C.** 240°. **D.** 270°.

Lời giải

Vì $ABCD$ là hình thang nên; $\hat{A}+\hat{D}=180^\circ$ và $\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$

Do đó: $\begin{cases} \hat{B}+\hat{C}=180^\circ \\ \hat{A}+\hat{D}=180^\circ \\ \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=360^\circ \\ \hat{B}-\hat{C}=30^\circ \\ \hat{A}=3\hat{D} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{B}=105^\circ \\ \hat{C}=75^\circ \\ \hat{A}=135^\circ \\ \hat{D}=45^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{A}+\hat{B}=240^\circ$

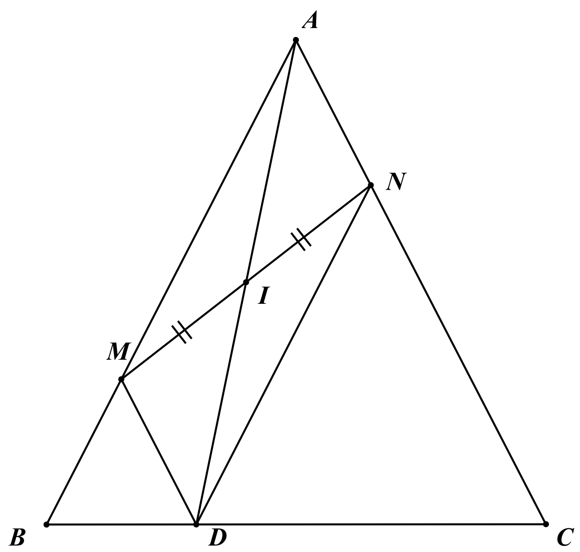
Đáp án cần chọn là. **C.**

Câu 11. Cho tam giác ABC cân tại $A; AB=8\,\text{cm}$, có $D\in BC$. Vẽ $DM // AC, DN // AB$, $(M\in AB, N\in AC)$, I là trung điểm của MN. Tính chu vi tứ giác $AMDN$

A. $8\,\text{cm}$ **B.** $16\,\text{cm}$.

C. $12\,\text{cm}$. **D.** $32\,\text{cm}$.

Lời giải



Xét tứ giác $AMDN$ có: $AM // ND;\ AN // MD$ (GT)

$\Rightarrow$ Tứ giác $AMDN$ là hình bình hành.

$\Rightarrow AM = ND$ (1)

Vì $DM // CA$ nên $\widehat{BDM} = \widehat{ACB}$ (hai góc đồng vị)

Mà $\widehat{MBD} = \widehat{ACB}$ (vì ΔABC cân tại A)

$\Rightarrow \widehat{BDM} = \widehat{MBD}$

$\Rightarrow \Delta MBD$ cân tại M

$\Rightarrow MB = MD$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow DM + DN = BM + MA = AB$ (không đổi)

Vậy $DM + DN = 8$ cm

Vì $AMDN$ là hình bình hành nên $AN = DM;\ AM = DN$

Do đó: $P_{AMDN} = AM + DM + DN + AN$

$$= DN + DM + DN + DM = 2(DM + DN) = 2AB$$

Vậy $\text{Chu vi}_{AMDN} = 16\,\text{cm}$.

Đáp án cần chọn là. **B.**

Câu 12. Thủy rút ngẫu nhiên một lá bài từ bộ bài 52 lá. Sau khi rút ngẫu nhiên 60 lần, Thủy thấy rằng số lần rút được lá rô bằng $\frac{1}{4}$ tổng số lần rút, số lần rút được lá cơ bằng $\frac{7}{5}$ số lần rút được lá rô, số lần rút được lá tép kém trung bình cộng của số lần rút được lá cơ và lá rô là 4 đơn vị. Tính xác suất thực nghiệm của biến cố "Rút được lá bích".

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{7}{20}$. **D.** $\frac{7}{12}$.

Lời giải

Số lần Thủy rút được lá rô là: $60.\frac{1}{4} = 15$ (lần).

Số lần Thủy rút được lá cơ là: $15.\frac{7}{5} = 21$ (lần).

Số lần Thủy rút được lá tép là: $\frac{15+21}{2} - 4 = 14$ (lần).

Số lần Thủy rút được lá bích là: $60 - 21 - 15 - 14 = 10$ (lần).

Xác suất thực nghiệm của biến cố "Rút được lá bích" là $\frac{10}{60} = \frac{1}{6}$.

Đáp án cần chọn là. **B.**

PHẦN II. PHẦN TỰ LUẬN (14 điểm)

Câu I. (2,0 *điểm*) Cho biểu thức $P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2 - x^2}{x^2 - x} \right)$ với $x \neq 0; x \neq 1; x \neq -1$

a) Rút gọn biểu thức P.

Với $x \neq 0; x \neq 1; x \neq -1$ ta có:

$$P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2 - x^2}{x^2 - x} \right)$$

$$P = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \left[\frac{x^2 - 1}{x(x-1)} + \frac{x}{x(x-1)} + \frac{2 - x^2}{x(x-1)} \right]$$

$$P = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x+1}{x(x-1)}$$

$$P = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} . \frac{x(x-1)}{x+1}$$

$$P = \frac{x^2}{x-1}$$

Vậy $P = \frac{x^2}{x-1}$ (với $x \neq 0; x \neq 1; x \neq -1$)

b) Tìm giá trị x nguyên để P nhận giá trị nguyên.

Với $x \neq 0; x \neq 1; x \neq -1$ ta có: $P = \frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}$

Để P nhận giá trị nguyên thì $1 \vdots x - 1$ hay $x - 1$ là Ư(1) $= \{-1; 1\}$

Giải được: $x = 0$ (loại); $x = 2$ (thỏa mãn).

Vậy $x = 2$

Câu II (4,0 điểm)

1. Giải phương trình sau:

$$(2x^2 + x - 2023)^2 + 4(x^2 - 5x - 2022)^2 = 4(2x^2 + x - 2023)(x^2 - 5x - 2022).$$

Đặt: $\begin{cases} a = 2x^2 + x - 2023 \\ b = x^2 - 5x - 2022 \end{cases}$

Phương trình đã cho trở thành:

$a^2 + 4b^2 = 4ab \Leftrightarrow (a - 2b)^2 = 0 \Leftrightarrow a - 2b = 0 \Leftrightarrow a = 2b$

Khi đó, ta có:

$$2x^2 + x - 2023 = 2(x^2 - 5x - 2022) \Leftrightarrow 2x^2 + x - 2023 = 2x^2 - 10x - 4044$$

$$\Leftrightarrow 11x = -2021 \Leftrightarrow x = \frac{-2021}{11}.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{-2021}{11}$.

2. Cho các số thực x, y, z thoả mãn $xyz \neq 0$ và $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$. Tính giá trị của biểu thức:

$M=\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right)$.

Ta có: $x^3+y^3+z^3=3xyz \Leftrightarrow (x+y)^3-3xy(x+y)+z^3=3xyz$

$x^3+y^3+z^3=3xyz \Leftrightarrow \left[(x+y)^3+z^3\right]-3xy(x+y)-3xyz=0$

$\Leftrightarrow (x+y+z)\left[(x+y)^2-(x+y)z+z^2\right]-3xy(x+y+z)=0$

$\Leftrightarrow (x+y+z)(x^2+y^2+2xy-xz-yz+z^2-3xy)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0 \end{array}\right.$

Trường hợp 1: $x+y+z=0$ tính được $M=-1$

Trường hợp 2:

$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0 \Leftrightarrow 2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0$

$\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$

Lập luận $x=y=z$ từ đó tính được $M=8$

Câu III. (2,0 điểm)

1. Tìm số nguyên tố p để p^2+2 và p^3+2 đều là các số nguyên tố.

- Xét $p=2$, thay vào p^2+2 ta có $p^2+2=2^2+2=6$ là hợp số

Suy ra $p=2$ (loại)

- Xét $p=3$, thay vào ta có

$p^2+2=3^2+2=11$ là số nguyên tố

$p^3+2=3^3+2=29$ là số nguyên tố

Suy ra $p=3$ (thỏa mãn)

- Xét $p>3$

Trong ba số tự nhiên liên tiếp $p-1; p; p+1$ tồn tại một số chia hết cho 3. Vì $p>3$ và p là số nguyên tố nên p không chia hết cho 3

Nếu $p-1$ hoặc $p+1$ chia hết cho 3 thì $(p-1)(p+1) \vdots 3 \Rightarrow p^2-1 \vdots 3$

$\Rightarrow p^2+2=p^2-1+3 \vdots 3$

$\Rightarrow p^2+2$ là hợp số nên trường hợp $p>3$ loại

Vậy $p=3$

2. Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình: $x^2y^2-x^2-8y^2=2xy.$

$x^2y^2-x^2-8y^2=2xy \Leftrightarrow x^2y^2-7y^2=x^2+2xy+y^2$

* Với $y^2=0$ suy ra $x=y=0$ thỏa mãn

$\Leftrightarrow y^2\left(x^2-7\right)=(x+y)^2\ (1)$

* Với $y^2\neq 0$ thì do y^2 là số chính phương khác 0 và $(x+y)^2$ là số chính phương nên từ (1) ta có x^2-7 là số chính phương

Từ đó tìm được $x=4;$ thì $y\in\{2;-1\}$

hoặc $x=-4$ tìm được $y\in\{-2;1\}$

HS kết luận các cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn bài toán là:

Kết luận các cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn bài toán là:

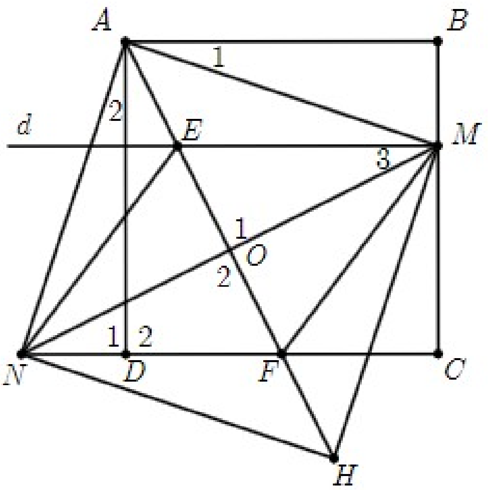
$(0;0)$, $(4;2)$, $(4;-1)$, $(-4;-2)$, $(-4;1)$

Câu IV *(6,0 điểm)* Cho hình vuông $ABCD$, gọi M là điểm bất kỳ trên cạnh BC. Trong nửa mặt phẳng bờ AB chứa C, dựng hình vuông $AMHN$. Qua M dựng đường thẳng d song song với AB, d cắt AH tại E. Đường thẳng AH cắt DC tại F.

a) Chứng minh rằng $BM=ND$.

b) Tứ giác $EMFN$ là hình gì?

c) Chứng minh chu vi tam giác MFC không đổi khi M thay đổi trên BC.



a) Do $ABCD$ là hình vuông nên $\Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{MAD} = 90^\circ$ (1)

Mà $AMHN$ là hình vuông $\Rightarrow \widehat{A_2} + \widehat{MAD} = 90^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$

Do đó $\triangle AND = \triangle AMB$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{D_1} = 90^\circ$ và $BM = ND$.

Do $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow \widehat{D_2} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{NDC} = \widehat{D_1} + \widehat{D_2} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow N, D, C$ thẳng hàng.

Gọi O là giao điểm hai đường chéo AH, MN của hình vuông $AMHN$.

$\Rightarrow O$ là tâm đối xứng của hình vuông $AMHN$.

$\Rightarrow AH$ là đường trung trực đoạn MN, mà $E, F \in AH$ $\Rightarrow EN = EM$ và $FM = FN$ (3)

Dễ dàng chứng minh được $\triangle EOM = \triangle FON$ $\Rightarrow \widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ $\Rightarrow EM = NF$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow EM = NE = NF = FM$

$\Rightarrow MENF$ là hình thoi (5)

Từ (5) suy ra $FN = FN = FD + DN$

Mà $DN = MB$ $\Rightarrow MF = DF + BM$

Gọi chu vi tam giác MCF là p và cạnh hình vuông là a.

Ta có $P = MC + CF + MF = MC + CF + BM + DF$ (Vì $MF = DF + MB$)

$P = (MC + MB) + (CF + FD) = BC + CD = a + a = 2a$

Do đó, chu vi tam giác MFC không đổi khi M thay đổi trên BC.

Câu V. (1,0 điểm) Cho *x, y, z* là 3 số thực dương thỏa mãn $x(x-z)+y(y-z)=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x^3}{x^2+z^2}+\frac{y^3}{y^2+z^2}+\frac{x^2+y^2+4}{x+y}$.

Áp dụng bất bằng thức AM – GM ta có: $\frac{x^3}{x^2+z^2}=x-\frac{xz^2}{x^2+z^2}\geq x-\frac{xz^2}{2xz}=x-\frac{z}{2}.$

Tương tự $\frac{y^3}{y^2+z^2}\geq y-\frac{z}{2}.$ Suy ra $P\geq x+y-z+\frac{x^2+y^2+4}{x+y}.$

Theo gt $z=\frac{x^2+y^2}{x+y}\Rightarrow P\geq x+y+\frac{4}{x+y}\geq 4.$

Vậy $P_{\min}=4\Leftrightarrow x=y=z=1.$