

BÀI 28. BIẾN CỐ HỢP, GIAO, ĐỘC LẬP

CHƯƠNG 8. CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

Dạng. Xác định biến cố (giao, hợp, độc lập)

Câu 1. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Một tổ trong lớp 11B có 4 học sinh nữ là Hương, Hồng, Dung, Phương và 5 học sinh nam là Sơn, Tùng, Hoàng, Tiến, Hải. Trong giờ học, giáo viên chọn ngẫu nhiên một học sinh trong tổ đó lên bảng để kiểm tra bài.

Xét các biến cố sau:

H: "Học sinh đó là một bạn nữ";

K: "Học sinh đó có tên bắt đầu là chữ cái H".

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Nêu nội dung của biến cố hợp $M = H \cup K$. Mỗi biến cố H, K, M là tập con nào của không gian mẫu?

Lời giải

a) $\Omega = \{\text{Hương, Hồng, Dung, Phương, Sơn, Tùng, Hoàng, Tiến, Hải}\}$.

b) M : "Học sinh đó là một bạn nữ hoặc học sinh đó có tên bắt đầu là chữ H".

$H = \{\text{Hương, Hồng, Dung, Phương}\}$.

$K = \{\text{Hương, Hồng, Hoàng, Hải}\}$.

$M = \{\text{Hương, Hồng, Dung, Phương, Hoàng, Hải}\}$.

Câu 2. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Một hộp đựng 25 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 25. Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ trong hộp. Xét các biến cố P: "Số ghi trên tấm thẻ là số chia hết cho 4"; Q: "Số ghi trên tấm thẻ là số chia hết cho 6".

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Nội dung của biến cố giao $S = P \cap Q$ là gì? Mỗi biến cố P, Q, S là tập con nào của không gian mẫu?

Lời giải

a) Không gian mẫu $\Omega = \{1; 2; 3; 4; \dots; 25\}$.

b) S là biến cố: "Số ghi trên tấm thẻ chia hết cho cả 4 và 6".

Ta có: $P = \{4; 8; 12; 16; 20; 24\}$.

$Q = \{6; 12; 18; 24\}$.

$S = P \cap Q = \{12; 24\}$

Câu 3. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Trở lại tình huống mở đầu. Sử dụng khái niệm biến cố hợp, biến cố giao, biến cố đối, ta biểu diễn biến cố G, H theo các biến cố M và N như sau:

Biến cố G xảy ra khi và chỉ khi hoặc gia đình đó có ti vi và không có máy vi tính hoặc gia đình đó không có ti vi và có máy vi tính. Vậy $G = M\bar{N} \cup \bar{M}N$.

Biến cố H xảy ra khi và chỉ khi gia đình đó không có cả ti vi và máy vi tính. Vậy $H = \bar{M}\bar{N}$.

Hãy biểu diễn mỗi biến cố E, F theo các biến cố M và N .

Lời giải

$E = M \cup N; F = MN$.

Câu 4. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Trở lại tình huống trong HD3. Xét hai biến cố sau:

E : "Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc bạn Minh gieo là số nguyên tố";

B : "Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc bạn Sơn gieo là số chia hết cho 3".

Hai biến cố E và B độc lập hay không độc lập?

Lời giải

Nếu B xảy ra: $P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; nếu B không xảy ra: $P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Nếu E xảy ra: $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; nếu E không xảy ra: $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Vậy hai biến cố E và B độc lập.

Câu 5. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Một hộp đựng 15 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 15. Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ và quan sát số ghi trên thẻ. Gọi A là biến cố "Số ghi trên tấm thẻ nhỏ hơn 7"; B là biến cố "Số ghi trên tấm thẻ là số nguyên tố".

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Mỗi biến cố $A \cup B$ và AB là tập con nào của không gian mẫu?

Lời giải

a) $\Omega = \{1; 2; \dots; 15\}$.

b) A

$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}; B = \{2; 3; 5; 7; 11; 13\}$.

$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 11; 13\}$.

$AB = A \cap B = \{2; 3; 5\}$.

Câu 6. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Gieo hai con xúc xắc cân đối, đồng chất. Xét các biến cố sau:

E : "Số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc đều là số chẵn";

F : "Số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc khác tính chẵn lẻ";

K : "Tích số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc là số chẵn".

Chứng minh rằng K là biến cố hợp của E và F .

Lời giải

Nếu E hoặc F xảy ra thì K xảy ra. Ngược lại, nếu K xảy ra thì trong hai số chấm xuất hiện phải có ít nhất một số chẵn: nếu cả hai số đều chẵn thì E xảy ra; nếu một số chẵn, một số lẻ thì F xảy ra. Nghĩa là, nếu K xảy ra thì hoặc E hoặc F xảy ra.

Câu 7. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong trường em. Xét hai biến cố sau:

P : "Học sinh đó bị cận thị";

Q : "Học sinh đó học giỏi môn Toán".

Nêu nội dung của các biến cố $P \cup Q$; PQ và $\overline{PQ}$.

Lời giải

$P \cup Q$ là biến cố: "Học sinh đó hoặc bị cận thị hoặc học giỏi môn Toán".

PQ là biến cố: "Học sinh đó bị cận thị và học giỏi môn Toán".

$\overline{PQ}$ là biến cố: "Học sinh đó không bị cận thị và không học giỏi môn Toán".

Câu 8. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Có hai chuồng nuôi thỏ. Chuồng I có 5 con thỏ đen và 10 con thỏ trắng. Chuồng II có 3 con thỏ trắng và 7 con thỏ đen. Từ mỗi chuồng bắt ngẫu nhiên ra một con thỏ. Xét hai biến cố sau:

A : "Bắt được con thỏ trắng từ chuồng I";

B : "Bắt được con thỏ đen từ chuồng II".
Chúng tỏ rằng hai biến cố A và B độc lập.

Lời giải

Dù B xảy ra hay không xảy ra, ta luôn có:

$$P(A) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}.$$

Dù A xảy ra hay không xảy ra ta luôn có:

$$P(B) = \frac{7}{10}.$$

Vậy A và B là hai biến cố độc lập.

Câu 9. (SGK - KNTT 11 - Tập 2) Có hai chuồng nuôi gà. Chuồng I có 9 con gà mái và 3 con gà trống. Chuồng II có 3 con gà mái và 6 con gà trống. Bắt ngẫu nhiên một con gà của chuồng I để đem bán rồi dồn các con gà còn lại của chuồng I vào chuồng II. Sau đó bắt ngẫu nhiên một con gà của chuồng II. Xét hai biến cố sau:

E : "Bắt được con gà trống từ chuồng I";

F : "Bắt được con gà mái từ chuồng II".

Chúng tỏ rằng hai biến cố E và F không độc lập.

Lời giải

Nếu E xảy ra: Chuồng I có 9 con gà mái và 2 con gà trống. Sau khi bắt một con gà trống từ chuồng I và dồn số gà còn lại vào chuồng II thì chuồng II có $9+3=12$ con gà mái và $2+6=8$ con gà trống.

Vậy

$$P(F) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$$

Nếu E không xảy ra: Chuồng I có 8 con gà mái và 3 con gà trống. Sau khi bắt một con gà mái từ chuồng I và dồn số gà còn lại vào chuồng II thì chuồng II có $8+3=11$ con gà mái và $3+6=9$ con

gà trống. Vậy

$$P(F) = \frac{11}{20}.$$

Như vậy, xác suất xảy ra của F đã thay đổi theo việc E xảy ra hay E không xảy ra. Do đó, hai biến cố E và F không độc lập.

Câu 10. Hai xạ thủ X, Y mỗi người bắn một viên đạn vào một mục tiêu. Xét các biến cố A : "Xạ thủ X bắn trúng"; B : "Xạ thủ Y bắn trúng".

Nêu nội dung của các biến cố $AB, A \cup B, \overline{AB}, \overline{AB}, \overline{AB} \cup \overline{AB}$.

Giải

- AB : "Cả hai xạ thủ bắn trúng".
- $A \cup B$: "Có ít nhất một xạ thủ bắn trúng".
- $\overline{AB}$: "Cả hai xạ thủ bắn trượt".
- $\overline{AB}$: "Xạ thủ X bắn trượt, xạ thủ Y bắn trúng".
- $A\overline{B}$: "Xạ thủ X bắn trúng, xạ thủ Y bắn trượt".
- $\overline{AB} \cup \overline{AB}$: "Chỉ có một xạ thủ bắn trúng".

Câu 11. Có hai chiếc hộp A, B mỗi hộp đựng 30 tấm thẻ, đánh số từ 1 đến 30. Từ mỗi hộp rút ngẫu nhiên một tấm thẻ. Kí hiệu a, b là số ghi trên thẻ tương ứng rút từ hộp A và hộp B .

Gọi M là biến cố: " a là số chẵn"; N là biến cố: " b là số chẵn".

Xét biến cố E : " $a+b$ là số lẻ".

Chúng tỏ rằng $E = M\overline{N} \cup \overline{M}N$.

Giải

Nếu $M\overline{N}$ xảy ra thì a là số chẵn, b là số lẻ, do đó $a+b$ lẻ tức là E xảy ra.

Nếu $\overline{MN}$ xảy ra thì a là số lẻ, b là số chẵn, do đó $a+b$ lẻ tức là E xảy ra.

Ngược lại, nếu E xảy ra thì a và b phải khác tính chẵn lẻ. Nếu a chẵn, b lẻ thì $M\overline{N}$ xảy ra. Nếu a lẻ, b chẵn thì $\overline{MN}$ xảy ra.

Vậy $E = M\overline{N} \cup \overline{MN}$.

Câu 12. Có hai lọ hoa. Lọ I cắm 5 bông hoa hồng và 3 bông hoa cúc. Lọ II cắm 4 bông hoa hồng và 5 bông hoa thược dược. Lấy ngẫu nhiên đồng thời từ mỗi lọ một bông hoa. Xét hai biến cố sau:

A : "Lấy được bông hoa hồng từ lọ I", B : "Lấy bông hoa hồng từ lọ II".

Chứng tỏ rằng A và B độc lập.

Giải

Dù A có xảy ra (lấy được bông hoa hồng) hay A không xảy ra (lấy được bông hoa cúc) ta đều có

$$P(B) = \frac{4}{9}.$$

Dù B có xảy ra (lấy được bông hoa hồng) hay B không xảy ra (lấy được bông hoa thược

dược) ta đều có $P(A) = \frac{5}{8}$.

Việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố kia.

Vậy A và B độc lập.

Câu 13. Một hộp đựng 70 tấm thẻ, đánh số từ 1 đến 70. Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ. Kí hiệu a là số ghi trên thẻ. Gọi A là biến cố: " a là ước của 28", B là biến cố: " a là ước của 70". Xét biến cố C : " a là ước của 14". Chứng tỏ C là biến cố giao của A và B .

Lời giải

$$A = \{1; 2; 4; 7; 14; 28\}; B = \{1; 2; 5; 7; 10; 14; 35; 70\}; C = \{1; 2; 7; 14\}.$$

Ta có $A \cap B = \{1; 2; 7; 14\}$.

Vậy C là biến cố giao của A và B .

Câu 14. Một chiến hạm có ba bộ phận A, B, C có tầm quan trọng khác nhau. Chiến hạm sẽ bị chìm khi và chỉ khi:

- Hoặc có một quả ngư lôi bắn trúng bộ phận A ;
- Hoặc có hai quả ngư lôi bắn trúng bộ phận B ;
- Hoặc có ba quả ngư lôi bắn trúng bộ phận C .

Giả sử có hai quả ngư lôi bắn trúng chiến hạm. Xét hai biến cố K : "Hai quả trúng vào C ", H : "Một quả trúng vào B , một quả trúng vào C ".

Gọi M là biến cố: "Chiến hạm không bị chìm". Chứng tỏ rằng M là biến cố hợp của H và K .

Lời giải

Nếu biến cố H xảy ra thì B trúng một quả ngư lôi, C trúng một quả ngư lôi. Từ điều kiện ta thấy chiến hạm không bị chìm (biến cố M xảy ra).

Nếu biến cố K xảy ra thì C trúng hai quả ngư lôi. Từ điều kiện ta thấy chiến hạm không bị chìm (biến cố M xảy ra).

Ngược lại giả sử chiến hạm không bị chìm, khi đó cả hai quả hoặc trúng vào C (biến cố K xảy ra) hoặc chỉ một quả trúng vào B và quả còn lại không trúng A , tức là trúng C (biến cố H xảy ra).

Vậy M là biến cố hợp của H và K .

Câu 15. Có bốn chiếc hộp I, II, III, IV mỗi hộp đựng 10 tấm thẻ, đánh số từ 1 đến 10. Từ mỗi hộp rút ngẫu nhiên một tấm thẻ. Gọi a, b, c, d là số ghi trên thẻ tương ứng rút từ I, II, III, IV.

Xét các biến cố sau:

A : " a là số chẵn"; B : " b là số chẵn"; C : " c là số chẵn"; D : " d là số chẵn";

E : " ad là số lẻ"; F : " bc là số lẻ", G : " $ad - bc$ là số chẵn".

Chúng tỏ rằng:

a) $E = \overline{AD}; F = \overline{BC}$;

b) $G = EF \cup \overline{EF}$.

Lời giải

a) ad là số lẻ khi và chỉ khi cả a và d đều là số lẻ, tức là không xảy ra cả biến cố A và D . Vậy $E = \overline{AD}$. Tương tự bc là số lẻ chỉ khi cả b và c đều là số lẻ, tức là không xảy ra cả biến cố B và C . Vậy $F = \overline{BC}$.

b) Giả sử G xảy ra, tức là ad và bc có cùng tính chẵn, lẻ. Nếu ad là số lẻ, bc là số lẻ thì E và F đều xảy ra. Do đó EF xảy ra.

Nếu ad là số chẵn, bc là số chẵn thì E và F đều không xảy ra. Do đó $\overline{EF}$ xảy ra. Ngược lại, nếu EF xảy ra thì ad là số lẻ, bc là số lẻ. Suy ra $ad - bc$ là số chẵn.

Nếu $\overline{EF}$ xảy ra thì ad là số chẵn, bc là số chẵn. Do đó $ad - bc$ là số chẵn.

Vậy $G = EF \cup \overline{EF}$.

Câu 16. Hai bạn Sơn và Tùng, mỗi bạn gieo đồng thời hai đồng xu cân đối. Xét hai biến cố sau:

E : "Cả hai đồng xu bạn Sơn gieo đều ra mặt sấp".

F : "Hai đồng xu bạn Tùng gieo có một sấp, một ngửa".

Chúng tỏ rằng E và F độc lập.

Lời giải

Nếu F xảy ra thì $P(E) = \frac{1}{4}$; nếu F không xảy ra thì $P(E) = \frac{1}{4}$.

Nếu E xảy ra thì $P(F) = \frac{1}{2}$; nếu E không xảy ra thì $P(F) = \frac{1}{2}$.

Vậy E và F độc lập.

Câu 17. Một chiếc túi có 12 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 12. Bạn Hoà rút ngẫu nhiên một tấm thẻ trong túi để sang bên cạnh. Tiếp theo, bạn Bình rút ngẫu nhiên tiếp một tấm thẻ. Xét hai biến cố sau:

M : "Bạn Hoà rút được tấm thẻ ghi số lẻ";

N : "Bạn Bình rút được tấm thẻ ghi số chẵn".

Chúng tỏ rằng hai biến cố M và N không độc lập.

Lời giải

Có 6 số lẻ là $\{1; 3; 5; 7; 9; 11\}$ và 6 số chẵn là $\{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$.

Nếu M xảy ra, tức là bạn Hoà rút được tấm thẻ ghi số lẻ thì sau đó trong túi còn 11 tấm thẻ với 5 tấm thẻ ghi số lẻ và 6 tấm thẻ ghi số chẵn.

Vậy $P(N) = \frac{6}{11}$.

Nếu M không xảy ra, tức là bạn Hoà rút được tấm thẻ ghi số chẵn thì sau đó trong túi còn 11 tấm thẻ với 6 tấm thẻ ghi số lẻ và 5 tấm thẻ ghi số chẵn.

Vậy $P(N) = \frac{5}{11}$.

Như vậy xác suất của N thay đổi tùy theo M xảy ra hay M không xảy ra. Do đó M và N không độc lập.

Câu 18. Một hộp có 10 viên bi màu xanh và 15 viên bi màu đỏ, các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Lấy ngẫu nhiên hai viên bi. Xét các biến cố:

A : "Hai viên bi được lấy ra có cùng màu xanh";

B : "Hai viên bi được lấy ra có cùng màu đỏ";

C : "Hai viên bi được lấy ra cùng màu";

D : "Hai viên bi được lấy ra khác màu".

Chọn phát biểu đúng trong những phát biểu sau đây:

a) Biến cố hợp của hai biến cố A và B là biến cố C .

b) Biến cố hợp của hai biến cố A và B là biến cố D .

c) Biến cố hợp của hai biến cố A và C là biến cố C .

Giải

Phát biểu a) đúng; phát biểu b) sai; phát biểu c) đúng.

Câu 19. Gieo một xúc xắc cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Xét các biến cố:

A : "Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ nhất là số lẻ";

B : "Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ hai là số lẻ".

Chọn phát biểu đúng trong những phát biểu sau đây:

a) Biến cố giao của hai biến cố A và B là "Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ nhất là số lẻ hoặc số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ hai là số lẻ".

b) Biến cố giao của hai biến cố A và B là "Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ nhất là số lẻ và số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ hai là số lẻ".

c) Biến cố giao của hai biến cố A và B là "Tích số chấm xuất hiện ở hai lần gieo là số lẻ".

d) Biến cố giao của hai biến cố A và B là "Tích số chấm xuất hiện ở hai lần gieo là số chẵn".

Giải

Phát biểu a) sai; phát biểu b) đúng; phát biểu c) đúng; phát biểu d) sai.

Câu 20. Tung một đồng xu cân đối và đồng chất ba lần liên tiếp. Xét các biến cố:

A : "Đồng xu xuất hiện mặt sấp (S) ở lần tung thứ nhất";

B : "Đồng xu xuất hiện mặt ngửa (N) ở lần tung thứ nhất".

Hai biến cố trên có xung khắc hay không?

Giải

Ta có: $A = \{SSS; SSN; SNS; SNN\}$, $B = \{NSS; NSN; NNS; NNN\}$.

Suy ra $A \cap B = \emptyset$. Do đó A và B là hai biến cố xung khắc.

Câu 21. Một hộp có 7 viên bi màu xanh và 8 viên bi màu đỏ, các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Lấy viên bi ngẫu nhiên hai lần liên tiếp, trong đó mỗi lần lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp, ghi lại màu của viên bi lấy ra và bỏ lại viên bi đó vào hộp. Xét các biến cố:

A : Viên bi màu đỏ được lấy ra ở lần thứ nhất;

B : Viên bi màu xanh được lấy ra ở lần thứ hai.

Hai biến cố A và B có độc lập không? Vì sao?

Giải

Trước hết, xác suất của biến cố B khi biến cố A xảy ra bằng $\frac{7}{15}$, xác suất của biến cố B khi biến cố A không xảy ra cũng bằng $\frac{7}{15}$. Do đó việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố A không làm ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố B . Mặt khác,

xác suất của biến cố A bằng $\frac{8}{15}$, không phụ thuộc vào việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố B . Vậy hai biến cố A và B là độc lập.

Câu 22. Một lớp học có 35 học sinh gồm 20 nam và 15 nữ. Chọn ngẫu nhiên ra 2 học sinh để phân công trực nhật.

a) Xét các biến cố sau:

A : "Hai học sinh được chọn đều là học sinh nam";

B : "Hai học sinh được chọn đều là học sinh nữ";

C : "Hai học sinh được chọn có cùng giới tính".

Trong ba biến cố A, B, C , biến cố nào là biến cố hợp của hai biến cố còn lại?

b) Xét các biến cố sau:

D : "Hai học sinh được chọn gồm một bạn nam và một bạn nữ";

E : "Trong hai học sinh được chọn, có ít nhất một học sinh nữ";

G : "Trong hai học sinh được chọn, có ít nhất một học sinh nam".

Trong ba biến cố D, E, G , biến cố nào là biến cố giao của hai biến cố còn lại?

Lời giải

a) Biến cố C là biến cố hợp của hai biến cố A và B .

b) Biến cố D là biến cố giao của hai biến cố E và G .

Câu 23. Một ban văn nghệ có 20 người, trong đó có 8 nam và 12 nữ. Chọn ngẫu nhiên ra 5 người để tập múa. Xét các biến cố sau:

M : "Trong 5 người được chọn, số nam lớn hơn 3";

N : "Trong 5 người được chọn, số nữ nhỏ hơn 3";

P : "Trong 5 người được chọn, số nam không vượt quá 3".

Trong ba biến cố M, N, P , hai biến cố nào là xung khắc?

Lời giải

Biến cố M và biến cố P là xung khắc.

Câu 24. Gieo một xúc xắc cân đối và đồng chất ba lần liên tiếp. Xét các biến cố sau:

A : "Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ nhất lớn hơn 3";

B : "Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ hai nhỏ hơn 3";

C : "Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ ba lớn hơn 3";

D : "Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ nhất nhỏ hơn 3".

Trong các biến cố trên, tìm:

a) Một cặp biến cố xung khắc;

b) Ba cặp biến cố độc lập.

Lời giải

a) Một cặp biến cố xung khắc là A và D .

b) Ba cặp biến cố độc lập là: A và B , A và C , B và C .