|  |  |
| --- | --- |
| **SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**  **TỈNH QUẢNG NAM** | **KỲ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH THPT**  **NĂM HỌC 2021 - 2022** |
| |  | | --- | | **HDC CHÍNH THỨC** | | **HƯỚNG DẪN CHẤM**  **MÔN: TOÁN 10 (CHUYÊN)** |

*(Bản hướng dẫn này gồm 06 trang)*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **Nội dung** | **Điểm** |
| **Câu 1 (3,0)** *Giải hệ phương trình sau* | | **3,0** |
|  | Điều kiện: |  |
|  |  |
| - Nhận xét:  không thỏa hệ |  |
| *-* Xét |  |
|  |  |
| Khi đó phương trình còn lại trở thành: |  |
|  |  |
| Với  thì |  |
| Với  thì |  |
| Đối chiếu với điều kiện, tập nghiệm của hệ phương trình đã cho là |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu 2. (3,0 điểm)**  *Cho ba số thực dương  thỏa mãn  Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* | | **3,0** |
|  | + Ta có: |  |
| Tương tự suy ra: |  |
|  |  |
| mà |  |
| Tương tự suy ra: |  |
| Ta có:, ,    **(1)** |  |
| mà: hay hay  **(2)**  Lấy (1) cộng (2) vế theo vế |  |
| Suy ra , dấu bằng xảy ra khi  Vậy  khi |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **Nội dung** | **Điểm** |
| **Câu 3. (3,0 điểm)**  *Tìm tất cả các hàm đơn điệu  thỏa mãn* | | **3,0** |
|  | Vì là hàm đơn điệu nên là hàm đơn ánh. |  |
| + Thay  ta có |  |
| Thay  ta có  hay |  |
| + Thay  bởi  ta có : |  |
| (vì là hàm đơn ánh).  là hàm cộng tính. |  |
| Hơn nữa đơn điệu nên  (*k* là hằng số). |  |
| + Thay biểu thức  vào hệ thức  ta được |  |
| + Kiểm tra  thỏa mãn yêu cầu của đề. |  |
| **Câu 4. (3,0 điểm)**  *Tìm tất cả các số tự nhiên có hai chữ số  (với ), biết rằng tổng tất cả các chữ số nguyên từ a đến b bằng .* | | **3,0** |
|  | Theo đề ta có  Nên *a* ≤ 4.  Ta xét các trường hợp sau: |  |
| + Nếu *a =* 4 và thì  mâu thuẩn.!  ( *hoặc suy ra , mà 4 + 5 khác 45 nên TH này không xảy ra*) |  |
| + Nếu *a =* 3 thì .  Suy ra  Mà ta có  nên (*b* - 1)*b* = 66, phương trình này không có nghiệm | 0,5 |
| + Nếu *a =*2 thì suy ra  Khi đó (*b –* 1)*b =* 42*,* suy ra *b =* 7, ta có nghiệm . |  |
| + Nếu *a =*1 thì  suy ra .  Khi đó ta có (*b –* 1)*b = 20,* suy ra *b* *=* 5, ta có nghiệm . |  |
| Vậy có hai số tự nhiên thỏa đề là 27 và 15. |  |
| **Câu 5. (5,0 điểm)**  1) *Cho tam giác* ABC *có ba cạnh  thỏa mãn  Chứng minh  nhọn và* | | **1,5** |
|  | Ta có |  |
|  |  |
| Suy ra  là góc nhọn. |  |
|  |  |
| Vậy . |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 2) Cho tam giác ABC (AB < AC,  tù) có đường cao AH, tia phân giác trong góc A là Ax. Gọi (O­1) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABH, (O2) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ACH.   1. Trên tia Ax lấy điểm D nằm ngoài hai đường tròn (O­1), (O2). Hai đường thẳng DB, DC lần lượt cắt (O­1), (O2) tại điểm thứ hai là K và L. Đường thẳng vuông góc với AD tại A lần lượt cắt hai đường tròn (O­1), (O2) tại điểm thứ hai là E và F. Chứng minh tứ giác EFLK nội tiếp đường tròn. 2. Đường thẳng d tiếp xúc với hai đường tròn (O­1), (O2) lần lượt tại P, Q. Các tiếp tuyến tại P, Q của đường tròn ngoại tiếp tam giác HPQ cắt nhau tại N. Lấy điểm M đối xứng với A qua PQ. Chứng minh H, M, N thẳng hàng. | | | **3,5** |
|  | *Hình vẽ câu* a) (0,25 điểm) | *Hình vẽ câu* b) (0,25 điểm) |  |
| 1. ***Chứng minh tứ giác EFLK nội tiếp***   Ta có | |  |
| Mà tứ giác AKDL nội tiếp đường tròn đường kính AD có AE là tiếp tuyến  Nên | |  |
| Suy ra .  Vậy tứ giác EFLK nội tiếp đường tròn. | |  |
| 1. ***Chứng minh H, M, N thẳng hàng***   + Gọi I là giao điểm của PQ và AH.  Ta có .  Suy ra tứ giác HPMQ nội tiếp đường tròn. **(1)** | |  |
| + Chứng minh hai tam giác IPA và IHP đồng dạng, suy ra được  + Chứng minh hai tam giác IQA và IHQ đồng dạng, suy ra được  Suy ra  **(2)** | |  |
| Từ (1) và (2) suy ra HPMQ là tứ giác điều hòa.  Do đó N nằm trên đường chéo HM, hay ba điểm H, M, N thẳng hàng. | |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **Nội dung** | **Điểm** |
| **Câu 6. (3,0 điểm)**  *Trong hình vuông có cạnh bằng* 1*, ta đặt một số đường tròn mà tổng chu vi của chúng bằng* 2022*. Chứng minh rằng tồn tại một đường thẳng có điểm chung với ít nhất* 644 *đường tròn trong các đường tròn này.* | | **3,0** |
|  | + Gọi các đường tròn là  với bán kính tương ứng là (là số nguyên dương)  + Với mỗi đường tròn , ta dựng đường kính song song với cạnh AB của hình vuông, sau đó chiếu theo phương vuông góc với cạnh AB lên cạnh AB, ta thu được hình chiếu tương ứng của đường kính này trên cạnh AB, có độ dài bằng đường kính bằng . |  |
| + Do tổng chu vi các đường tròn bằng 2022 nên |  |
| Theo nguyên lý Đirichlet thì trong các hình chiếu trên cạnh AB của các đường kính nói trên tồn tại hình chiếu có chung ít nhất một điểm, gọi I là một trong các điểm chung đó |  |
| Khi đó, đường thẳng qua I và vuông góc với AB có điểm chung với ít nhất 644 đường tròn. |  |

***\* Lưu ý:***

*Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong HDC nhưng đúng thì vẫn cho đủ số điểm từng phần như hướng dẫn quy định.*