

Chuyên đề 12. PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA CÁC PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

A. Kiến thức cần nhớ

Quy tắc: Muốn nhân hai phân thức, ta nhân các tử thức với nhau, các mẫu thức với nhau: $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$

Phép nhân các phân thức có các tính chất:

- Giao hoán: $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{C}{D} \cdot \frac{A}{B}$;
- Kết hợp: $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} \cdot \frac{E}{F} = \frac{A}{B} \cdot \frac{C \cdot E}{D \cdot F}$;
- Phân phối đối với phép cộng: $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} + \frac{E}{F} = \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} + \frac{A}{B} \cdot \frac{E}{F}$.

1. Phân thức nghịch đảo. Hai phân thức được gọi là nghịch đảo của nhau nếu tích của chúng bằng 1.

Tổng quát, nếu $\frac{A}{B}$ là phân thức khác 0 thì $\frac{A}{B} \cdot \frac{B}{A} = 1$, do đó $\frac{B}{A}$ là phân thức nghịch đảo của phân thức $\frac{A}{B}$.

2. Phép chia

Quy tắc. Muốn chia phân thức $\frac{A}{B}$ cho phân thức $\frac{C}{D}$ khác 0, ta nhân $\frac{A}{B}$ với phân thức nghịch đảo của $\frac{C}{D}$.

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} \text{ với } \frac{C}{D} \neq 0.$$

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Thực hiện các phép tính sau:

$$a) P = \frac{12x+5}{x+9} \cdot \frac{4x+3}{360x+150} + \frac{12x+5}{x+9} \cdot \frac{6-3x}{360x+150}$$

$$b) P = \frac{x+3y}{3x+y} \cdot \frac{4x-2y}{x-y} - \frac{x+3y}{3x+y} \cdot \frac{x-3y}{x-y}$$

Giải

Tìm cách giải. Nhận thấy trong các biểu thức đều có phân thức chung. Do đó nên vận dụng tính chất phân phối của phép nhân nhằm đưa bài toán về dạng đơn giản hơn.

Trình bày lời giải

a) Dùng tính chất phân phối, ta có:

$$P = \frac{12x+5}{x+9} \cdot \frac{4x+3}{360x+150} + \frac{6-3x}{360x+150} = \frac{12x+5}{x+9} \cdot \frac{x+9}{30(12x+5)} = \frac{1}{30}$$

b) Dùng tính chất phân phối, ta có:

$$P = \frac{x+3y}{3x+y} \cdot \frac{4x-2y}{x-y} - \frac{x-3y}{x-y} = \frac{x+3y}{3x+y} \cdot \frac{3x+y}{x-y} = \frac{x+3y}{x-y}$$

Ví dụ 2: Rút gọn biểu thức:

$$R = \frac{3a^2 - 2ab - b^2}{2a^2 + ab - b^2} \cdot \frac{3a^2 - 4ab + b^2}{3a^2 + 2ab - b^2}$$

(Tuyển sinh 10, Trường PTNK, ĐHQGTP.Hồ Chí Minh, năm học 2004 - 2005)

Giải

$$R = \frac{(a-b)(3a+b)}{(2a-b)(a+b)} \cdot \frac{(a-b)(3a-b)}{(3a-b)(a+b)} = \frac{(a-b)(3a+b)}{(2a-b)(a+b)} \cdot \frac{(3a-b)(a+b)}{(a-b)(3a-b)}$$

$$R = \frac{3a+b}{2a-b}$$

Ví dụ 3: Cho $x+y+z=1$. Chứng minh rằng giá trị biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến số:

$$P = \frac{(x+y)^2}{xy+z} \cdot \frac{(y+z)^2}{yz+x} \cdot \frac{(z+x)^2}{zx+y}$$

Giải

Tìm cách giải. Khai thác điều kiện bài toán, nhận thấy với điều kiện này chúng ta có thể cân bằng bậc ở mẫu và phân tích thành nhân tử được $xy+z = xy+z(x+y+z) = (z+x)(z+y)$. Do vậy chúng ta có lời giải sau:

Trình bày lời giải

Thay $1 = x+y+z$ vào mẫu số, ta được:

$$xy+z = xy+z(x+y+z) = (z+x)(z+y)$$

và tương tự ta có:

$$yz+x = (x+y)(x+z)$$

$$zx+y = (x+y)(y+z)$$

$$\text{Từ đó suy ra: } P = \frac{(x+y)^2}{(x+z)(y+z)} \cdot \frac{(y+z)^2}{(x+y)(x+z)} \cdot \frac{(z+x)^2}{(x+y)(y+z)}$$

$$\text{b } P = 1$$

Ví dụ 4: Cho $a+b+c=0$. Chứng minh rằng tích sau không phụ thuộc vào biến số:

$$\text{a) } M = \frac{4bc - a^2}{bc + 2a^2} \cdot \frac{4ca - b^2}{ca + 2b^2} \cdot \frac{4ab - c^2}{ab + 2c^2}$$

$$\text{b) } N = \frac{a}{b} + \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{b}{c} \cdot \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{a} \cdot \frac{c}{a}$$

Giải

a) Ta có:

$$\frac{4bc - a^2}{bc + 2a^2} = \frac{4bc - (b+c)^2}{bc + a^2 - a(b+c)} = \frac{-(b^2 - 2bc + c^2)}{bc + a^2 - ab - ac} = \frac{-(b-c)^2}{(a-b)(a-c)} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{4ca - b^2}{ca + 2b^2} = \frac{-(c-a)^2}{(b-a)(b-c)} \quad (2)$$

$$\frac{4ab - c^2}{ab + 2c^2} = \frac{-(a-b)^2}{(c-a)(c-b)} \quad (3)$$

Từ (1) và (2), (3) ta có:

$$M = \frac{4bc - a^2}{bc + 2a^2} \cdot \frac{4ca - b^2}{ca + 2b^2} \cdot \frac{4ab - c^2}{ab + 2c^2} = \frac{-(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{-(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2} = 1$$

Vậy giá trị biểu thức M không phụ thuộc vào giá trị của biến.

b) Ta có:

$$N = \frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{a} = \frac{a+b}{b} \cdot \frac{c+b}{c} \cdot \frac{a+c}{a} = \frac{(-c)(-a)(-b)}{abc} = -1$$

Vậy giá trị biểu thức N không phụ thuộc vào giá trị của biến.

Ví dụ 5: Cho x là số thực âm thỏa mãn $x^2 + \frac{1}{x^2} = 23$. Tính giá trị biểu thức $A = x^3 + \frac{1}{x^3}$

Giải

Tìm cách giải. Do kết luận có dạng hằng đẳng thức $a^3 + b^3$, nên để tính giá trị biểu thức, chúng ta cần tính được $x + \frac{1}{x}$. Với suy nghĩ ấy, chúng ta khai thác điều kiện để tìm $x + \frac{1}{x}$. Từ đó chúng ta có lời giải sau:

Trình bày lời giải

$$\text{Từ giả thiết } x^2 + \frac{1}{x^2} = 23 \Rightarrow x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 23 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 5$$

$$\text{Vì } x < 0 \text{ nên } x + \frac{1}{x} = -5$$

$$\text{Ta có: } A = x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = (-5)^3 - 3(-5) = -110.$$

Ví dụ 6: Rút gọn biểu thức với n là số nguyên dương:

$$A = 1 + \frac{2}{1 \cdot 4} + \frac{2}{2 \cdot 5} + \frac{2}{3 \cdot 6} + \dots + \frac{2}{n(n+3)}$$

Giải

Tìm cách giải. Với phép nhân các biểu thức theo quy luật, chúng ta thường xét phân thức có dạng tổng quát. Sau đó phân tích thành nhân tử cả tử và mẫu dạng tổng quát ấy. Cuối cùng thay các giá trị từ 1 đến n vào biểu thức và rút gọn.

Trình bày lời giải

$$\text{Xét } 1 + \frac{2}{k(k+3)} = \frac{k^2 + 3k + 2}{k(k+3)} = \frac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)}$$

Thay $k = 1; 2; 3; \dots; n$ ta được:

$$A = \frac{2.3}{1.4} \cdot \frac{3.4}{2.5} \cdot \frac{4.5}{3.6} \cdots \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)} = \frac{2.3.4 \dots (n+1)}{1.2.3 \dots n} \cdot \frac{3.4.5 \dots (n+2)}{4.5.6 \dots (n+3)} = \frac{3(n+1)}{n+3}$$

Ví dụ 7. Cho a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn $\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0$. Tính giá trị của biểu thức:

$$\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2}$$

Giải

Tìm cách giải. Quan sát phần giả thiết và kết luận của bài toán, chúng ta nhận thấy có nhiều điểm giống nhau. Do vậy, để không phức tạp chúng ta vận dụng giả thiết và tạo ra từng hạng tử của phần kết luận. Sau đó cộng lại.

Trình bày lời giải

Ta có: $\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} = -\frac{c}{a-b} \Leftrightarrow \frac{ac - a^2 + b^2 - bc}{(b-c)(c-a)} = -\frac{c}{a-b}$$

$$\frac{a^2 - b^2 + bc - ca}{(b-c)(c-a)(a-b)} = \frac{c}{(a-b)^2} \quad (1)$$

Tương tự: $\frac{b}{(c-a)^2} = \frac{c^2 - a^2 + ab - bc}{(a-b)(b-c)(c-a)} \quad (2)$

$$\frac{a}{(b-c)^2} = \frac{b^2 - c^2 + ca - ab}{(a-b)(b-c)(c-a)} \quad (3)$$

Cộng từng vế của (1); (2) và (3) $\Rightarrow \frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2}$

Nhận xét. Từ kết quả ta thấy a, b, c không thể cùng dấu được do vậy bạn có thể giải được bài toán sau: Cho a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn $\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0$. Chứng minh rằng trong ba số sau a, b, c tồn tại một số không âm và một số không dương.

C. Bài tập vận dụng

12.1. Rút gọn biểu thức: $A = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 2x + 4} - \frac{7x + 10}{x^3 - 8} \cdot \frac{x + 7}{x^2 + 2x + 4}$

12.2. Chứng minh rằng với $x^2 \neq 0; x^2 \neq \pm 1$ thì biểu thức sau có giá trị không phụ thuộc vào biến.

$$A = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x} - \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x} \cdot \frac{x^4 + x^3 - x^2 - x}{x + 1}$$

12.3. Rút gọn biểu thức: $A = \frac{x - y}{2y - x} + \frac{x^2 + y^2 + y - 2}{2y^2 + xy - x^2} \cdot \frac{4x^2 + 4x^2y + y^2 - 4}{x^2 + y + xy + x}$

12.4. Cho biểu thức:
$$P = \frac{(x-1)^2}{x+(x-1)^2} - \frac{1-2x^2+4x}{x^3-1} + \frac{1}{x-1} \cdot \frac{2x}{x^3+x}$$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) So sánh P với $\frac{1}{2}$.

12.5. Cho
$$P = \frac{x^3-1}{x^2-x} + \frac{x^3+1}{x^2+x} \cdot \frac{2(x^2-2x+1)}{x^2-x}$$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm x nguyên để P nhận giá trị nguyên.

12.6. Cho
$$A = \frac{x}{y^2+xy} - \frac{x-y}{x^2+xy} \cdot \frac{y^2}{x^3-xy^2} + \frac{1}{x+y} \cdot \frac{x}{y}$$

a) Rút gọn A

b) Tìm x, y để $A > 1$ và $y < 0$

12.7. Cho x là số thực dương thỏa mãn điều kiện $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$

Tính giá trị biểu thức $A = x^3 + \frac{1}{x^3}$ và $B = x^5 + \frac{2}{x^5}$

12.8. Thực hiện phép tính:

a)
$$A = \frac{1^4+4}{3^4+4} \cdot \frac{5^4+4}{7^4+4} \cdot \frac{9^4+4}{11^4+4} \cdots \frac{17^4+4}{19^4+4}$$

b)
$$B = \frac{1^4+\frac{1}{4}}{2^4+\frac{1}{4}} \cdot \frac{3^4+\frac{1}{4}}{4^4+\frac{1}{4}} \cdot \frac{5^4+\frac{1}{4}}{6^4+\frac{1}{4}} \cdots \frac{29^4+\frac{1}{4}}{30^4+\frac{1}{4}}$$

12.9. Cho hai số thực a, b thỏa điều kiện $ab=1, a+b \neq 0$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P = \frac{1}{(a+b)^3} \cdot \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{3}{(a+b)^4} \cdot \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{6}{(a+b)^5} \cdot \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

12.10. Cho $x = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}; y = \frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2}$

Tính giá trị biểu thức $P = xy + x + y$

12.11. Cho a, b, c là những số nguyên thỏa mãn:
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

Chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 3

12.12. Rút gọn biểu thức với n là số tự nhiên:

a)
$$B = \frac{1}{6} - \frac{7}{6 \cdot 12} + \frac{7}{7 \cdot 13} - \frac{7}{8 \cdot 14} + \frac{1}{n(n+6)}$$
, với $n > 5$

$$b) C = \frac{1}{1} + \frac{2^2}{1.5} + \frac{2^2}{2.6} + \frac{2^2}{3.7} + \frac{2^2}{n(n+4)}, \text{ với } n > 0$$

Hướng dẫn giải – đáp số

12.1. Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{x}{x-2} - \frac{x^2-3}{x^2+2x+4} - \frac{7x+10}{x^3-8} \cdot \frac{x+7}{x^2+2x+4} \\ &= \frac{x(x^2+2x+4) - (x^2-3)(x-2) - (7x+10)}{(x-2)(x^2+2x+4)} \cdot \frac{x+7}{x^2+2x+4} \\ &= \frac{x^3+2x^2+4x - x^3+2x^2+3x-6-7x-10}{(x-2)(x^2+2x+4)} \cdot \frac{x+7}{x^2+2x+4} \\ &= \frac{4x^2-16}{(x-2)(x^2+2x+4)} \cdot \frac{x^2+2x+4}{x+7} \\ &= \frac{4(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)} \cdot \frac{x^2+2x+4}{x+7} = \frac{4(x+2)}{x+7} \end{aligned}$$

12.2. Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{(x-1)(x^2+x+1) - (x+1)(x^2-x+1)}{x(x+1)(x-1)} \cdot \frac{x(x^3+x^2-x-1)}{x+1} \\ &= \frac{x^3-1-x^3-1}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{(x^2-1)(x+1)}{x+1} = -2 \end{aligned}$$

Vậy biểu thức $A = -2$ không phụ thuộc vào biến.

12.3. Ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{x-y}{2y-x} + \frac{x^2+y^2+y-2}{(x+y)(2y-x)} \cdot \frac{(2x^2+y)^2-4}{x(x+y)+(x+y)} \\ &= \frac{x^2-y^2+x^2+y^2+y-2}{(x+y)(2y-x)} \cdot \frac{(2x^2+y-2)(2x^2+y+2)}{(x+y)(x+1)} \\ &= \frac{2x^2+y-2}{(x+y)(2y-x)} \cdot \frac{(x+y)(x+1)}{(2x^2+y-2)(2x^2+y+2)} = \frac{x+1}{(2y-x)(2x^2+y+2)} \end{aligned}$$

12.4.

$$a) \text{ Ta có: } P = \frac{(x-1)^2}{x+(x-1)^2} - \frac{1-2x^2+4x}{x^3-1} + \frac{1}{x-1} \cdot \frac{2x}{x^3+x} \quad (\text{ĐK: } x \neq \pm 1; 0)$$

$$P = \frac{(x-1)^3}{(x-1)(x^2+x+1)} - \frac{1-2x^2+4x}{(x-1)(x^2+x+1)} + \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} \cdot \frac{2}{x^2+1}$$

$$= \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{(x-1)(x^2+x+1)} \cdot \frac{2}{x^2+1}$$

$$= \frac{x^3 - 1}{(x-1)(x^2+x+1)} \cdot \frac{x^2+1}{2} = \frac{x^2+1}{2}$$

b) $P = \frac{x^2+1}{2} \geq \frac{1}{2}$

dấu bằng không xảy ra. Vậy $P > \frac{1}{2}$

12.5.

a) Ta có: $P = \frac{x^3-1}{x^2-x} + \frac{x^3+1}{x^2+x} \cdot \frac{2(x^2-2x+1)}{x^2-x}$

$$= \frac{x^2+x+1}{x} + \frac{x^2-x+1}{x} \cdot \frac{2(x-1)}{x}$$

$$= \frac{2x^2+2}{x} \cdot \frac{2(x-1)}{x} = \frac{x^2+1}{x} \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{x^2+1}{x-1}$$

ĐK: $x^1 \neq 0, x^1 \neq 1$

b) Ta có $P = \frac{x^2+1}{x-1} = x+1 + \frac{2}{x-1}$ vì $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x+1 \in \mathbb{Z} \wedge \frac{2}{x-1} \in \mathbb{Z}$

$\wedge x-1 \in U(2)$ suy ra:

$x-1$	1	2	-1	-2
x	2	3	0	-1

Kết hợp với tập xác định $x \in \{0; 1; -1\}$ thì $x \in \{2; 3\}$ ta được $P \in \mathbb{Z}$.

12.6.

a) Ta có: $A = \frac{x}{y^2+xy} - \frac{x-y}{x^2+xy} \cdot \frac{y^2}{x^3-xy^2} + \frac{1}{x+y} \cdot \frac{x}{y}$

$$A = \frac{x^2}{xy(x+y)} - \frac{xy-y^2}{xy(x+y)} \cdot \frac{y^2}{x(x+y)(x-y)} + \frac{x^2-xy}{x(x-y)(x+y)} \cdot \frac{x}{y}$$

$$= \frac{x^2-xy+y^2}{xy(x+y)} \cdot \frac{x^2-xy+y^2}{x(x-y)(x+y)} \cdot \frac{x}{y} = \frac{x(x-y)(x+y)}{xy(x+y)} \cdot \frac{x}{y} = \frac{x-y}{x}$$

ĐK: $xy^1 \neq 0, x^1 \neq \pm y$

b) $A > 1 \wedge \frac{-y}{x} > 0 \wedge x > 0$

12.7. Từ $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7 \wedge x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 9 \wedge \frac{x^2 + \frac{1}{x^2}}{x} = 9 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 3$ (vì $x > 0$)

Ta có $\frac{a}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 3.7 \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} + x + \frac{1}{x} = 21 \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} + 3 = 21$

$\Rightarrow A = 18$

Ta có: $\frac{a}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} = 7.18 \Rightarrow x^5 + \frac{1}{x^5} + x + \frac{1}{x} = 126 \Rightarrow x^5 + \frac{1}{x^5} + 3 = 126$

$\Rightarrow B = 123$

12.8.

a) Xét $k^4 + 4 = (k^2 + 2)^2 - 4k^2 = (k^2 + 2 - 2k)(k^2 + 2k + 2)$

$= (k-1)^2 + 1)(k+1)^2 + 1)$

Áp dụng kết quả trên với $k = 1, 3, 5, \dots, 19$. Ta có:

$$A = \frac{(0^2 + 1)(2^2 + 1)(4^2 + 1)(6^2 + 1)(8^2 + 1)(10^2 + 1)(12^2 + 1)(14^2 + 1)(16^2 + 1)(18^2 + 1)}{(2^2 + 1)(4^2 + 1)(6^2 + 1)(8^2 + 1)(10^2 + 1)(12^2 + 1)(14^2 + 1)(16^2 + 1)(18^2 + 1)(20^2 + 1)}$$

$$= \frac{1}{20^2 + 1} = \frac{1}{401}$$

b) Tương tự câu a, áp dụng công thức:

$$k^4 + \frac{1}{4} = (k - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}(k + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}$$

Ta được kết quả $B = \frac{1}{1241}$

12.9. Với $ab = 1, a + b \neq 0$, ta có:

$$P = \frac{a^3 + b^3}{(a+b)^3(ab)^3} + \frac{3(a^2 + b^2)}{(a+b)^4(ab)^2} + \frac{6(a+b)}{(a+b)^5(ab)}$$

$$= \frac{a^3 + b^3}{(a+b)^3} + \frac{3(a^2 + b^2)}{(a+b)^4} + \frac{6(a+b)}{(a+b)^5} = \frac{a^2 + b^2 - 1}{(a+b)^2} + \frac{3(a^2 + b^2)}{(a+b)^4} + \frac{6}{(a+b)^4}$$

$$= \frac{(a^2 + b^2 - 1)(a+b)^2 + 3(a^2 + b^2) + 6}{(a+b)^4}$$

$$= \frac{(a^2 + b^2 - 1)(a^2 + b^2 + 2) + 3(a^2 + b^2) + 6}{(a+b)^4}$$

$$= \frac{(a^2 + b^2)^2 + 4(a^2 + b^2) + 4}{(a+b)^4} = \frac{(a^2 + b^2 + 2)^2}{(a+b)^4}$$

$$= \frac{(a^2 + b^2 + 2ab)^2}{(a+b)^4} = \frac{(a+b)^2}{(a+b)^4} = 1$$

Vậy $P = 1$, với $ab = 1, a + b \neq 0$.

$$12.10. \text{ Xét } x+1 = \frac{b^2 + 2bc + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2bc}$$

$$\text{Xét } y+1 = \frac{b^2 + 2bc + c^2 - b^2 - 2bc - c^2}{(b+c-a)(b+c+a)} = \frac{4bc}{(b+c-a)(b+c+a)}$$

$$\text{Vậy } P = xy + x + y = (x+1)(y+1) - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$12.11. \text{ Ta có: } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2}{ab} + \frac{2}{bc} + \frac{2}{ca} \\ &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2(a+b+c)}{abc} \quad (2) \end{aligned}$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow \frac{2(a+b+c)}{abc} = 0 \Rightarrow a+b+c = 0$$

$$\text{Ta có: } a^3 + b^3 + c^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3 = (a+b+c)^3 - 3abc(a+b+c) - 3ab(-c) = 3abc$$

12.12.

$$a) \text{ Xét } 1 - \frac{7}{k(k+6)} = \frac{k^2 + 6k - 7}{k(k+6)} = \frac{(k-1)(k+7)}{k(k+6)}$$

thay $k = 6; 7; 8; \dots; n$ ta được:

$$\begin{aligned} B &= \frac{5.13}{6.12} \cdot \frac{6.14}{7.13} \cdot \frac{7.15}{8.14} \cdots \frac{(n-1)(n+7)}{n(n+6)} = \frac{5.6.7 \dots (n-1)}{6.7.8 \dots n} \cdot \frac{13.14.15 \dots (n+7)}{12.13.14 \dots (n+6)} \\ &= \frac{6(n+7)}{12n} \end{aligned}$$

$$b) \text{ Xét } 1 + \frac{2^2}{k(k+4)} = \frac{k^2 + 4k + 2^2}{k(k+4)} = \frac{(k+2)^2}{k(k+4)}$$

thay $k = 1; 2; 3; \dots; n$ ta được:

$$C = \frac{3^2}{1.5} \cdot \frac{4^2}{2.6} \cdot \frac{5^2}{3.7} \cdots \frac{(n+2)^2}{n(n+4)} = \frac{3.4 \cdot (n+2)}{1.2 \cdot (n+4)} = \frac{6(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)}$$