

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN QUỐC GIA

DỰ THI IMO 1999

Bài 1.

Cho một số nguyên tố lẻ p thỏa mãn $2^h \not\equiv 1 \pmod{p}$ với mọi $h < p-1, h \in \mathbb{N}^*$ và một số chẵn $a \in (\frac{p}{2}; p)$. Xét dãy số (a_n) xác định bởi: $a_0 = a, a_{n+1} = p - b_n, n = 0, 1, 2, \dots$ với b_n là ước số lẻ lớn nhất của a_n .

Chứng minh rằng (a_n) là dãy số tuần hoàn và tìm chu kì dương nhỏ nhất của nó.

Lời giải.

Ta thấy rằng với mọi i , a_i là số chẵn, $a_i = p - b_{i-1} < p$ mà $b_{i-1} < \frac{a_{i-1}}{2} < \frac{p}{2}, \forall i \Rightarrow a_i = p - b_{i-1} > \frac{p}{2}$.

Suy ra $\frac{p}{2} < a_i < p, \forall i$, tức là giá trị của các số hạng của dãy (a_n) đã cho là hữu hạn.

Đặt $a_i = 2^{k_i} \cdot b_i$ với $k_i, b_i \in \mathbb{N}, k_i > 0$ và b_i là số lẻ. Nếu $b_i = b_j$ thì $a_i | a_j$ hoặc $a_j | a_i$, theo nhận xét trên thì $a_i = a_j$ vì nếu ngược lại thì cả hai số này không thể nằm trong khoảng $(\frac{p}{2}, p)$ được.

Cũng theo nhận xét trên thì phải tồn tại các giá trị $i < j; i, j \in (\frac{p}{2}, p)$ thỏa mãn $a_i = a_j$; mặt khác

$a_i = p - b_{i-1}, a_j = p - b_{j-1}$ nên $b_i = b_j$, do đó $a_{i-1} = a_{j-1}$, tiếp tục quá trình này, ta được $a_0 = a_{j-i}$, tức là dãy đã cho tuần hoàn từ số hạng đầu tiên. Nếu đặt $T = j - i$ thì T chính là chu kì dương nhỏ nhất cần tìm của dãy đã cho.

Ta biết rằng lũy thừa của 2 trong $n!$ là $\sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{n}{2^i} \right]$ nên nếu đặt K là tích của tất cả các số tự nhiên

trong khoảng $(\frac{p}{2}, p)$, tức là $K = \frac{(p-1)!}{\left(\frac{p-1}{2}\right)!}$, thì lũy thừa của 2 trong K là

$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\left[\frac{p-1}{2^i} \right] - \left[\frac{p-1}{2^{i+1}} \right] \right) = \frac{p-1}{2}$, đó cũng chính là lũy thừa của 2 trong tích của tất cả các số chẵn

trong khoảng $(\frac{p}{2}, p)$. Suy ra $k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_T \leq \frac{p-1}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tập

hợp $a_1, a_2, a_3, \dots, a_T$ chính là tập hợp tất cả các số chẵn trong khoảng $(\frac{p}{2}, p)$.

Ta có $a_1 a_2 a_3 \dots a_T \equiv 2^{k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_T} \cdot b_1 b_2 b_3 \dots b_T \pmod{p}$.

Theo giả thiết thì $a_i \equiv -b_{i-1} \pmod{p}$ nên $a_1 a_2 a_3 \dots a_T \equiv (-1)^T \cdot b_0 b_1 b_2 \dots b_{T-1} \pmod{p}$, do cách chọn T nên $b_0 = b_T$, tức là $a_1 a_2 a_3 \dots a_T \equiv (-1)^T \cdot b_1 b_2 \dots b_T \pmod{p}$, suy ra:

$$(-1)^T \cdot b_1 b_2 \dots b_T \equiv 2^{k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_T} \cdot b_1 b_2 b_3 \dots b_T \pmod{p} \Leftrightarrow (-1)^T \equiv 2^{k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_T} \pmod{p}$$

do $(b_i, p) = 1 \Rightarrow (b_1 b_2 b_3 \dots b_T, p) = 1$. Ta được $2^{2(k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_T)} \equiv 1 \pmod{p}$.

Hơn nữa, cũng theo giả thiết thì $2^h \not\equiv 1 \pmod{p}$, $h = 1, 2, 3, \dots, p-2$ nên từ hệ thức trên, suy ra

$$2(k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_T) \geq p-1 \Leftrightarrow k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_T \geq \frac{p-1}{2}.$$

So sánh hai bất đẳng thức trên về tổng $k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_T$, ta được $k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_T = \frac{p-1}{2}$.

Do đó $a_1, a_2, a_3, \dots, a_T$ chính là tất cả các số chẵn trong khoảng $\left(\frac{p}{2}, p\right)$, suy ra

$$T = \frac{1}{2} \left[(p-1) - \frac{p-1}{2} \right] = \frac{p-1}{4}.$$

Vậy dãy số đã cho tuần hoàn với chu kì dương nhỏ nhất là $T = \left\lceil \frac{p-1}{4} \right\rceil$.

Bài 2.

Hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$ có hệ số thực được gọi là “đồng dạng” nếu tồn tại một số thực q thỏa mãn $f(x) = q \cdot g(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

1. Chứng minh rằng tồn tại đa thức $P(x)$ có bậc 1999 với hệ số thực và thỏa mãn $P^2(x) - 4$ và $(P'(x))^2(x^2 - 4)$ “đồng dạng”.

2. Hỏi có bao nhiêu đa thức bậc 1999 thỏa mãn điều kiện trên?

Lời giải.

1. Xét dãy đa thức $T_n(x)$ như sau $T_0(x) = 2, T_1(x) = x, T_{n+1}(x) = x \cdot T_n(x) + T_{n-1}(x), n = 1, 2, 3, \dots$

Ta sẽ chứng minh rằng $T_n(2 \cos x) = 2 \cos(nx)$. Thật vậy:

- Với $n = 0, T_0(x) = 2 \Rightarrow T_0(2 \cos 0) = 2$.

- Với $n = 1, T_1(x) = 2x \Rightarrow T_1(2 \cos x) = 2 \cos(x)$.

- Giả sử với $n = k, n = k + 1, (*)$ đúng, tức là $T_k(\cos x) = 2 \cos(kx), T_{k+1}(\cos x) = 2 \cos((k + 1)x)$.

Khi đó, ta có:

$$\begin{aligned} T_{k+2}(2 \cos x) &= 2 \cos x \cdot T(\cos nx) + T(\cos(k + 1)x) = 4 \cos x \cdot \cos(kx) + 2 \cos((k + 1)x) \\ &= 2[\cos(k + 2)x - \cos((k + 1)x) + \cos((k + 1)x)] = 2 \cos(k + 2)x \end{aligned}$$

Suy ra $(*)$ cũng đúng với $n = k + 2$.

Theo nguyên lý quy nạp, $(*)$ đúng với mọi n .

Dễ thấy đa thức $T_n(x)$ có bậc là n .

Ta sẽ chứng minh rằng đa thức $T_{1999}(x)$ xác định như trên thỏa mãn đề bài. Thật vậy:

$$T_{1999}^2(2 \cos x) - 4 = 4 \cos^2(1999 \cdot x) - 4 = -4 \sin^2(1999 \cdot x).$$

Từ $T_{1999}(2 \cos x) = 2 \cos(1999x)$, đạo hàm hai vế, ta có

$$-2 \sin x \cdot T'_{1999}(2 \cos x) = -2 \cdot 1999 \cdot \sin(1999 \cdot x) \Rightarrow T'_{1999}(\cos x) = \frac{1999 \cdot \sin(1999 \cdot x)}{\sin x}.$$

$$\Rightarrow (T'_{1999}(2 \cos x))^2 (4 \cos^2 x - 4) = \frac{1999^2 \cdot \sin^2(1999 \cdot x)}{\sin^2 x} \cdot (-4 \sin^2 x) = -4 \cdot 1999^2 \cdot \sin^2(1999 \cdot x).$$

$$\text{Suy ra } T_{1999}^2(x) - 4 = \frac{1}{1999^2} \cdot (x^2 - 4)(T'_{1999}(x))^2, \forall x \in [-2; 2].$$

Vì bậc của hai vế đều là $2 \cdot 1999$ mà đẳng thức trên đúng với mọi giá trị x thuộc $[-2; 2]$ nên theo định lý về nghiệm của đa thức thì nó đúng với mọi giá trị thực của x .

Do đó, đa thức $T_{1999}(x)$ thỏa mãn đề bài.

2. Ta sẽ chứng minh rằng có đúng hai đa thức như thế thỏa mãn điều kiện đề bài. Thật vậy:

Gọi a_{1999} là hệ số bậc cao nhất của đa thức $P(x)$ thì hệ số bậc cao nhất ở biểu thức $P^2(x) - 4$ là a_{1999}^2 , còn ở biểu thức $(x^2 - 4)(P'(x))^2$ là $1999^2 a_{1999}^2$. Do $a_{1999} \neq 0$ nên đồng nhất hệ số, ta thấy giá trị q thỏa mãn $P^2(x) - 4 = q \cdot (P'(x))^2 (x^2 - 4)$ luôn là $q = \frac{1}{1999^2}$.

Đặt $P(x) = \sum_{i=0}^{1999} a_i x^i, a_i \in \mathbb{R} \Rightarrow P'(x) = \sum_{i=1}^{1999} i a_i x^{i-1}$. Điều kiện đã cho tương đương với đẳng thức:

$$\left(\sum_{i=0}^{1999} a_i x^i \right)^2 = q \cdot (x^2 - 4) \left(\sum_{i=1}^{1999} i a_i x^{i-1} \right)^2.$$

Hệ số của $x^{2 \cdot 1999 - 1}$ ở vế trái là $2a_{1999} \cdot a_{1998}$, ở vế phải là $2q \cdot 1999 \cdot 1998 a_{1999} \cdot a_{1998}$, do đó:

$$2a_{1999} \cdot a_{1998} = 2q \cdot 1999 \cdot 1998 a_{1999} \cdot a_{1998} \Rightarrow a_{1999} \cdot a_{1998} = 0 \Rightarrow a_{1998} = 0 \text{ (vì } a_{1999} \neq 0 \text{)}.$$

So sánh hệ số của $x^{2 \cdot 1998}$ ở hai vế, ta có:

$$\begin{aligned} a_{1998}^2 + 2a_{1997}a_{1999} &= q(1998^2 a_{1998}^2 + 2 \cdot 1997 \cdot 1999 a_{1997}a_{1999} - 4 \cdot 1999^2 a_{1999}^2) \\ \Rightarrow 4q \cdot 1999^2 a_{1999}^2 &= a_{1997}a_{1999} (2q \cdot 1997 \cdot 1999 - 2) \end{aligned}$$

Do $a_{1999} \neq 0$ nên ta có $a_{1997} \neq 0$.

Bằng phương pháp quy nạp lùi, ta sẽ chứng minh rằng $a_{2i} = 0, a_{2i+1} \neq 0, 0 \leq i \leq 999$. (*)

- Với $i = 999$, theo chứng minh ở trên thì (*) đúng.

- Giả sử (*) đúng đến $i = k, 0 \leq k \leq 999$, tức là $a_{2i} = 0, a_{2i+1} \neq 0, k \leq i \leq 999$.

So sánh hệ số của $x^{2(2k-1)+1}$ ở hai vế, ta có:

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq i, j \leq k, i+j=2(2k-1)-1} a_i a_j &= q \left(\sum_{0 \leq i, j \leq k, i+j=2(2k-2)-1} i j a_i a_j - 4 \sum_{0 \leq i, j \leq k, i+j=2(2k-1)-1} i j a_i a_j \right) \\ \Leftrightarrow a_{2k-2} a_{2k-1} &= 0 \Leftrightarrow a_{2k-2} = 0 \end{aligned}$$

So sánh hệ số của $x^{2(2k-1)}$ ở hai vế, ta có:

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq i, j \leq k, i+j=2(2k-1)} a_i a_j &= q \left(\sum_{0 \leq i, j \leq k, i+j=2(2k-2)} i j a_i a_j - 4 \sum_{0 \leq i, j \leq k, i+j=2(2k-1)} i j a_i a_j \right) \\ \Leftrightarrow 2a_{2k-3} a_{2k+1} &= q [2(2k-1) \cdot (2k-3) \cdot a_{2k-1} a_{2k-3} - 8(2k-3)(2k+1) a_{2k-3} a_{2k+1}] \\ \Leftrightarrow [8q(2k-3)(2k+1) + 2] a_{2k-3} a_{2k+1} &= 2q \cdot (2k-1)(2k-3) a_{2k-1} a_{2k-3} \\ \Rightarrow a_{2k-3} &\neq 0 \end{aligned}$$

Do đó, (*) đúng với $i = k - 1$ nên theo nguyên lí quy nạp thì (*) được chứng minh.

Từ tính chất này, ta có được $P(x)$ là hàm số lẻ nên $P(0) = 0$.

Giả sử ngoài đa thức $P(x) = T_{1999}(x)$ ở trên, còn tồn tại đa thức $R(x)$ thỏa mãn đề bài. Khi đó, rõ ràng cả hai cùng thỏa mãn đẳng thức sau:

$$T^2(x) - 4 = q \cdot (x^2 - 4)(T(x))^2, R^2(x) - 4 = q \cdot (x^2 - 4)(R(x))^2.$$

Trừ từng vế hai đẳng thức, ta có:

$$\begin{aligned} T^2(x) - R^2(x) &= q \cdot (x^2 - 4) \left[(T'(x))^2 - (R'(x))^2 \right] \\ \Leftrightarrow [T(x) + R(x)][T(x) - R(x)] &= q \cdot (x^2 - 4) [T'(x) + R'(x)][T'(x) - R'(x)] \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } M(x) = T(x) + R(x), N(x) = T(x) - R(x) \Rightarrow M'(x) = T'(x) + R'(x), N'(x) = T'(x) - R'(x),$$

$$\text{ta được } M(x)N(x) = q(x^2 - 4)M'(x)N'(x).$$

Do $M(0) = N(0) = 0$ nên đa thức bên vế phải cũng có nhân tử x^2 .

Ta sẽ chứng minh rằng nếu đa thức $K(x)$ thỏa mãn $K(0) = 0$ và $K'(0) = 0$ thì nó có thể biểu diễn dưới dạng $K(x) = x^2 H(x)$.

Thật vậy, do $K(0) = 0$ nên tồn tại đa thức $G(x)$ thỏa $K(x) = xG(x) \Rightarrow K'(x) = xG'(x) + G(x)$, mà $K'(0) = 0$ nên $G(0) = 0$, do đó tồn tại $H(x)$ mà $G(x) = xH(x)$ suy ra $K(x) = x^2 H(x)$.

Từ đó, ta thấy rằng nếu lần lượt xét nghiệm $x = 0$ ở hai đa thức thì đến một lúc nào đó, ta được một trong hai đa thức $M(x), N(x)$ có dạng mx^n , nhưng rõ ràng vế phải có thêm hai nghiệm là $x = \pm 2$ nên buộc đa thức đó phải đồng nhất với 0.

$$\text{Suy ra } M(x) \equiv 0 \vee N(x) \equiv 0, \text{ tức là } R(x) = T(x) \vee R(x) = -T(x).$$

Vậy có đúng hai đa thức thỏa mãn đề bài là $\pm T_{1999}(x)$. Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

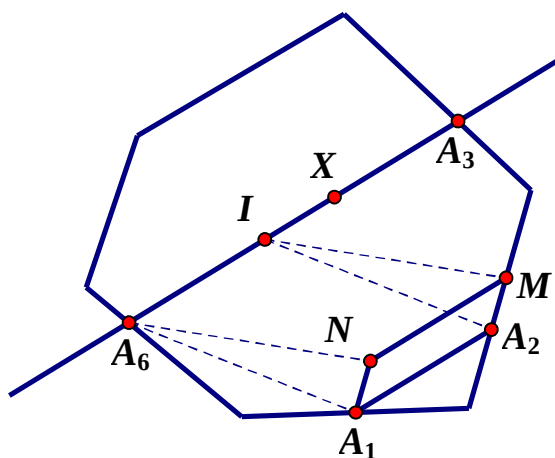
Bài 3.

Cho một đa giác lồi (H). Chứng minh rằng với mỗi số thực $a \in (0,1)$, tồn tại 6 điểm phân biệt nằm trên các cạnh của (H), kí hiệu là $A_1, A_2, \dots, A_6$ theo chiều kim đồng hồ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

1. $\overrightarrow{A_1 A_2} = \overrightarrow{A_5 A_4} = a \cdot \overrightarrow{A_6 A_3}$.
2. Các đường thẳng $A_1 A_2, A_5 A_4$ cách đều đường thẳng $A_6 A_3$.

Lời giải.

Trước hết, ta sẽ dựng đoạn $A_6 A_3$ có các đỉnh nằm trên các cạnh của (H). Lấy một điểm X bất kì nằm trong đa giác (H) đã cho, gọi (d) là một đường thẳng bất kì qua X, không song song với các cạnh của (H) và A_6, A_3 là hai giao điểm của (d) với các cạnh của (H). Đánh dấu một miền mặt phẳng nằm trong (H) được chia ra bởi (d) là P và phần còn lại là Q. Ta sẽ tìm được vô số bộ sáu điểm thỏa mãn (1) và cần chứng minh rằng trong số đó, tồn tại ít nhất một bộ thỏa mãn (2).



Trên đoạn $A_6 A_3$ đã dựng, lấy điểm I sao cho

$\overrightarrow{A_6 I} = a \cdot \overrightarrow{A_6 A_3}$. Trong miền P, dựng hình bình

hành $A_6 I M N$ bất kì sao cho một trong hai đỉnh M và N nằm trên cạnh của (H). Tiếp tục tịnh tiến vector $\overrightarrow{MN}$ về phía cạnh của (H) đến khi cả hai đỉnh đều nằm trên các cạnh của (H). Dễ thấy đoạn MN luôn tồn tại vì:

- Nếu (d) không song song với cạnh nào của (H) nên khi $a \rightarrow 0$ thì đoạn MN cũng tiến gần về một đỉnh nào đó của (H).

- Nếu (d) song song với một cạnh của (H), và độ

dài của MN lớn hơn độ dài cạnh đó thì M, N lần lượt thuộc về hai cạnh kề với cạnh của (H) nêu trên; ngược lại thì MN sẽ nằm ngay trên cạnh đó.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh rằng trong trường hợp (d) không song song với cạnh nào của (H) thì trong miền (P), chỉ có đúng một đoạn MN thỏa mãn cách dựng trên.

Thật vậy, giả sử tồn tại hai đoạn $MN, M'N'$ có đỉnh đều nằm trên các cạnh của (H) và các tứ giác $A_6 I M N, A_6 I M'N'$ là hình bình hành. Ta sẽ chứng minh rằng điều này mâu thuẫn với giả thiết (H) là đa giác lồi. Thật vậy, ta xét ba trường hợp:

- Nếu giao điểm của hai đường thẳng đi qua hai cạnh chứa A_6, A_3 cắt nhau tại một điểm nằm trong miền (P). Khi đó, các đoạn thẳng song song với $A_6 A_3$ có đỉnh nằm trong miền này đều có độ dài nhỏ hơn $A_6 A_3$. Nếu tồn tại hai đoạn thẳng $MN, M'N'$ như trên. Ta có ba trường hợp:

+ Nếu có một cặp đỉnh nào đó trong chúng thuộc cùng một cạnh, giả sử là M và M' và hai đỉnh còn lại là N, N' thì không; khi đó rõ ràng các đỉnh nằm giữa N, N' sẽ không nằm trong cùng nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng đi qua đầu mút của đoạn thẳng chứa hai đỉnh N, N' , điều này mâu thuẫn với giả thiết (H) là đa giác lồi.

+ Nếu cả hai cặp đỉnh của hai đoạn $MN, M'N'$ cùng nằm trên các cạnh của (H) thì hai cạnh đó phải song song với nhau, ta thấy điều này cũng mâu thuẫn.

+ Nếu không có cặp đỉnh nào cùng thuộc một đoạn thì những cũng tương tự trường hợp trên, các đỉnh nằm giữa hai đỉnh M, M' và N, N' sẽ không thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng đi qua đầu mút của đoạn thẳng chứa hai đỉnh M, M' và N, N' ; mâu thuẫn.

- Nếu giao điểm của đường thẳng đi qua hai cạnh chứa A_6, A_3 song song thì khi tịnh tiến vector $\overrightarrow{A_6A_3}$ trên đường thẳng đó, ta luôn nhận được các vector có bằng với $\overrightarrow{A_6A_3}$. Do đa giác đã cho là lồi nên các đỉnh còn lại thuộc miền (P) của (H) sẽ chỉ nằm trong phần giữa hai đường thẳng song song nêu trên. Từ đó, ta cũng đưa về trường hợp đầu tiên và cũng dẫn đến điều mâu thuẫn.

- Nếu giao điểm của hai đường thẳng đi qua hai cạnh chứa A_6, A_3 cắt nhau tại một điểm không nằm trong miền (P). Khi đó, độ dài của các đoạn thẳng song song với A_6A_3 sẽ tăng lên đến một giá trị nào đó rồi giảm xuống đến 0; khi nó giảm đến độ dài đúng bằng A_6A_3 thì ta lại quay về trường hợp đầu tiên và cũng có điều vô lí.

Tiếp theo, ta cần chứng minh rằng tồn tại một cách dựng đường thẳng (d) mà các cả 6 điểm này đều thỏa mãn đề bài.

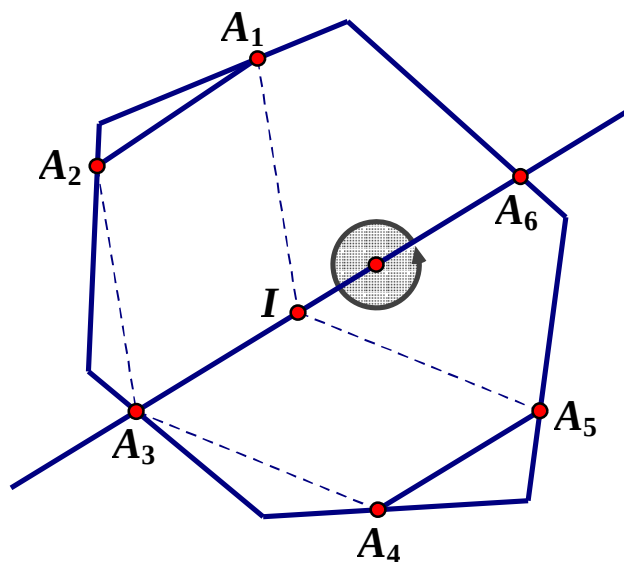
-Nếu như khoảng cách từ A_1A_2 và từ A_5A_4 đến A_6A_3 bằng nhau thì bài toán kết thúc.

-Nếu như khoảng cách từ A_1A_2 và từ A_5A_4 đến A_6A_3 không bằng nhau và giả sử đoạn A_1A_2 gần A_6A_3 hơn đoạn A_5A_4 .

Quay (d) quanh X nửa vòng tròn, độ dài của A_6A_3 thay đổi liên tục như khi quay (d) quanh X cả một vòng tròn. Độ dài của các đoạn A_1A_2 và A_5A_4 cũng thay đổi theo

nhưng tỉ lệ giữa chúng thì vẫn giữ nguyên. Đến khi quay xong thì các đoạn A_1A_2 và A_5A_4 đã đổi chỗ cho nhau, tức là khoảng cách từ đoạn A_5A_4 đến A_6A_3 gần hơn đoạn A_1A_2 .

Do phép biến đổi này thực hiện liên tục nên tồn tại một thời điểm mà khoảng cách giữa A_1A_2 và A_5A_4 đến A_6A_3 bằng nhau. Ngay lúc đó, bộ 6 điểm $A_1, A_2, \dots, A_6$ này thỏa mãn tất cả các điều kiện của đề bài. Ta có đpcm.



Bài 4.

Cho dãy số thực dương (u_n) . Với mỗi số nguyên dương n , kí hiệu k_n là số nguyên dương nhỏ

nhất thỏa mãn $\sum_{i=1}^{k_n} \frac{1}{i} \geq \sum_{i=1}^n u_i$.

Chứng minh rằng dãy $\left(\frac{k_{n+1}}{k_n}\right)$ có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi (u_n) có giới hạn hữu hạn.

Lời giải.

Trước hết, ta chứng minh bổ đề sau:

Cho (a_n) là dãy số nguyên dương tăng thực sự với $\lim a_n = +\infty$. Khi đó:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=a_n}^{a_{n+1}} \frac{1}{i} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right).$$

Thật vậy:

Trước hết, ta có bất đẳng thức quen thuộc $\left(1 + \frac{1}{i}\right)^i < e < \left(1 + \frac{1}{i}\right)^{i+1}$ (suy ra từ định nghĩa của số e là

$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ và dãy $\left(1 + \frac{1}{i}\right)^i$ tăng trong khi dãy $\left(1 + \frac{1}{i}\right)^{i+1}$ giảm).

Lấy logarit nepe các vế của bất đẳng thức trên, ta được:

$$i \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{i}\right) < \ln e < (i+1) \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{i}\right) \Leftrightarrow i \cdot \ln \left(\frac{i+1}{i}\right) < 1 < (i+1) \cdot \ln \left(\frac{i+1}{i}\right).$$

$$\text{Do đó: } \frac{1}{i} > \ln(i+1) - \ln i > \frac{1}{i+1} \Rightarrow \ln i - \ln(i-1) > \frac{1}{i} > \ln(i+1) - \ln i.$$

Tính tổng này với i đi từ a_n đến a_{n+1} , ta có:

$$\sum_{i=a_n}^{a_{n+1}} [\ln i - \ln(i-1)] > \sum_{i=a_n}^{a_{n+1}} \frac{1}{i} > \sum_{i=a_n}^{a_{n+1}} [\ln(i+1) - \ln i] \Leftrightarrow \ln a_{n+1} - \ln(a_n - 1) > \sum_{i=a_n}^{a_{n+1}} \frac{1}{i} > \ln(a_{n+1} + 1) - \ln a_n$$

Tức là $\ln \left(\frac{a_{n+1}}{a_n - 1}\right) > \sum_{i=a_n}^{a_{n+1}} \frac{1}{i} > \ln \left(\frac{a_{n+1} + 1}{a_n}\right)$. Do $\lim a_n = +\infty$ nên

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\ln \left(\frac{a_{n+1}}{a_n - 1}\right) \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\ln \left(\frac{a_{n+1} + 1}{a_n}\right) \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right).$$

Theo nguyên lí kẹp, ta được $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=a_n}^{a_{n+1}} \frac{1}{i} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$.

Ta trở lại bài toán. Từ giả thiết k_n là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn $\sum_{i=1}^{k_n} \frac{1}{i} \geq \sum_{i=1}^n u_i$, ta có:

$$\sum_{i=1}^{k_n-1} \frac{1}{i} < \sum_{i=1}^n u_i \leq \sum_{i=1}^{k_n} \frac{1}{i} \quad \text{và} \quad \sum_{i=1}^{k_{n+1}-1} \frac{1}{i} < \sum_{i=1}^{n+1} u_i \leq \sum_{i=1}^{k_{n+1}} \frac{1}{i}.$$

$$\text{Do đó: } u_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} u_i - \sum_{i=1}^n u_i > \sum_{i=1}^{k_{n+1}-1} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{k_n+1} \frac{1}{i} = \sum_{i=k_n+1}^{k_{n+1}-1} \frac{1}{i} \quad \text{và} \quad u_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} u_i - \sum_{i=1}^n u_i < \sum_{i=1}^{k_{n+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{k_n} \frac{1}{i} = \sum_{i=k_n}^{k_{n+1}} \frac{1}{i}.$$

Tức là $\sum_{i=k_n+1}^{k_{n+1}-1} \frac{1}{i} < u_{n+1} < \sum_{i=k_n}^{k_{n+1}} \frac{1}{i}$, điều này có nghĩa là $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ tồn tại khi và chỉ khi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=k_n}^{k_{n+1}} \frac{1}{i}$ tồn tại và hai giới hạn này, theo nguyên lý kẹp, là bằng nhau. (*)

Từ đó, ta thấy rằng chỉ cần xét hai trường hợp:

-Nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ thì từ $0 < \sum_{i=k_n+1}^{k_{n+1}-1} \frac{1}{i} < u_{n+1}$, ta thấy $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=k_n}^{k_{n+1}} \frac{1}{i} = 0$. Theo bổ đề trên thì

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=k_n}^{k_{n+1}} \frac{1}{i} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{k_{n+1}}{k_n} \right) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{k_{n+1}}{k_n} \right) = 1.$$

-Nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a > 0$ thì dễ thấy rằng từ cách xác định (k_n) , ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} k_n = +\infty$ và theo (*) thì

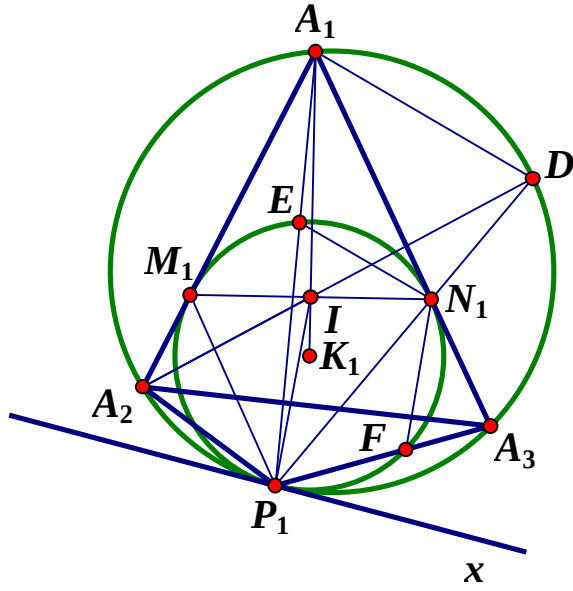
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=k_n}^{k_{n+1}} \frac{1}{i} = a. \text{ Theo bổ đề trên, ta có } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=k_n}^{k_{n+1}} \frac{1}{i} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{k_{n+1}}{k_n} \right) = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{k_{n+1}}{k_n} \right) = e^a \text{ là hữu hạn.}$$

Vậy dãy $\left(\frac{k_{n+1}}{k_n} \right)$ có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi (u_n) có giới hạn hữu hạn. Ta có đpcm.

Bài 5. Cho tam giác $A_1A_2A_3$ nội tiếp trong đường tròn (O) . Một đường tròn (K_1) tiếp xúc với các cạnh A_1A_2, A_1A_3 và tiếp xúc trong với đường tròn (O) lần lượt tại các điểm M_1, N_1, P_1 . Các điểm M_1, N_2, P_2 và M_3, N_3, P_3 xác định một cách tương tự.

Chứng minh rằng các đoạn thẳng M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn.

Lời giải.



Gọi E, F lần lượt là giao điểm của AP_1, CP_1 với đường tròn (K_1) , gọi D là giao điểm của N_1P_1 với (O) . Ta sẽ chứng minh rằng D là trung điểm của cung $\widehat{A_1A_3}$. Thật vậy:

Gọi P_1x là tiếp tuyến của (O) tại P_1 . Ta có:

$$\widehat{N_1AE} = \widehat{A_3AP_1} = \widehat{A_3P_1x} = \widehat{FP_1x} = \widehat{FN_1P_1}$$

Hơn nữa, tứ giác EN_1FP_1 nội tiếp nên

$$\widehat{N_1EA} = \widehat{N_1FP_1}, \text{ suy ra: } \triangle AEN_1 \sim \triangle N_1FP_1 (g.g)$$

$\Rightarrow \widehat{FP_1N_1} = \widehat{AN_1E} = \widehat{AP_1N_1} \Rightarrow P_1N_1$ là phân giác của góc $\widehat{AP_1A_3}$ hay D là trung điểm của $\widehat{A_1A_3}$.

Từ đó, ta cũng có: A_2D là phân giác góc $\widehat{A_1A_2A_3}$.

Gọi I là giao điểm của A_2D với M_1N_1 . Ta sẽ chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp của

$\triangle A_1A_2A_3$. Ta có: $\widehat{IM_1P_1} = \widehat{N_1M_1P_1} = \widehat{N_1P_1x} = \widehat{DP_1x} = \widehat{DA_2P_1} = \widehat{IA_2P_1} \Rightarrow$ Tứ giác $IM_1A_2P_1$ nội tiếp.

Suy ra: $\widehat{P_1IA_2} = \widehat{P_1M_1A_2}$, mà $\widehat{P_1M_1A_2} = \widehat{P_1N_1M_1}$ nên $\widehat{P_1IA_2} = \widehat{P_1N_1M_1} \Rightarrow \widehat{DIP_1} = \widehat{DN_1I}$.

$$\text{Do đó: } \triangle DIP_1 \sim \triangle DN_1I (g.g) \Rightarrow \frac{DI}{DN_1} = \frac{DP_1}{DI} \Rightarrow DI^2 = DN_1 \cdot DP_1.$$

$$\text{Ta cũng có: } \widehat{DA_1N_1} = \widehat{A_3P_1N_1} = \widehat{DP_1N_1} \Rightarrow \triangle DA_1N_1 \sim \triangle DP_1A_1 \Rightarrow \frac{DA_1}{DP_1} = \frac{DN_1}{DA_1} \Rightarrow DA_1^2 = DN_1 \cdot DP_1$$

Do đó: $DI^2 = DA_1^2 \Rightarrow DI = DA_1$ hay $\triangle DIA_1$ cân tại D.

$$\Rightarrow \widehat{DIA_1} = \widehat{DA_1I} \Rightarrow \widehat{A_1A_2I} + \widehat{IA_1A_2} = \widehat{DA_1N_1} + \widehat{N_1A_1I} \Rightarrow \frac{\widehat{A_1A_2A_3}}{2} + \widehat{IA_1A_2} = \frac{\widehat{A_1A_2A_3}}{2} + \widehat{N_1A_1I}$$

$$\Rightarrow \widehat{IA_1A_2} = \widehat{N_1A_1I} \text{ hay } A_1I \text{ chính là phân giác } \widehat{A_2A_1A_3}.$$

Từ đó suy ra I chính là tâm đường tròn nội tiếp của $\triangle A_1A_2A_3$.

Dễ thấy $\triangle A_1M_1N_1$ cân tại A_1 và A_1I là phân giác $\widehat{A_2A_1A_3}$ nên I là trung điểm của M_1N_1 .

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có: I là trung điểm của M_2N_2, M_3N_3 .

Vậy các đoạn thẳng M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 cắt nhau tại trung điểm của mỗi đoạn. Ta có đpcm.

Bài 6.

Cho $p > 2$ là một số nguyên tố. Xét đa giác có p cạnh với một con khỉ tại mỗi đỉnh. Người ta cho p hạt đậu cho mỗi con khỉ với quy tắc như sau:

Hạt đậu đầu tiên được cho một con khỉ nào đó, hạt đậu tiếp theo cho con khỉ ở đỉnh thứ ba tính từ vị trí của con khỉ nhận được hạt đậu đầu tiên theo chiều kim đồng hồ, hạt đậu thứ ba được cho con khỉ thứ năm tính từ vị trí con khỉ được nhận hạt đậu thứ hai theo chiều kim đồng hồ và cứ như thế... Tức là hạt đậu thứ $k+1$ được cho con khỉ tại đỉnh thứ $2k+1$ tính từ vị trí của con khỉ được nhận hạt đậu thứ k .

1. Hỏi có bao nhiêu con khỉ không được nhận hạt đậu nào?
2. Có bao nhiêu cạnh của đa giác có tính chất cả hai con khỉ ở đầu và cuối của cạnh đó đều nhận được các hạt đậu?

Lời giải.

1. Đánh số các đỉnh của đa giác là $1, 2, 3, \dots, p-1, p$ theo chiều kim đồng hồ. Đặt $r(a)$ là số dư trong phép chia a cho p .

Ta thấy rằng hạt đậu thứ k được cho con khỉ ở đỉnh cách đỉnh đầu tiên theo chiều kim đồng hồ là $1+3+5+\dots+(2k-1)=k^2$. Nếu xem đỉnh thứ p là đỉnh 0 thì vị trí trên cũng chính là $r(k^2)$.

Dễ thấy $k^2 \equiv (p-k)^2 \pmod{p}$ nên số khỉ nhận được đậu không nhiều hơn $\frac{p+1}{2}$.

Mặt khác, ta thấy rằng với mọi $0 < i < k < \frac{p+1}{2}$ thì nếu có đồng dư thức $i^2 \equiv k^2 \pmod{p}$, ta cần có $(i+k)(i-k) \equiv 0 \pmod{p}$, nhưng $i \not\equiv k \pmod{p} \Rightarrow i-k \not\equiv 0 \pmod{p}$ và $i+k < \frac{p-1}{2} + \frac{p+1}{2} = p$ nên $i+k \not\equiv 0 \pmod{p}$; suy ra $(i+k)(i-k) \not\equiv 0 \pmod{p}$; do đó, ta luôn có $i^2 \not\equiv k^2 \pmod{p}$.

Rõ ràng mỗi giá trị bình phương có số dư theo module khác nhau như thế cho ta một vị trí của con khỉ được nhận đậu, tức là có không ít hơn $\frac{p+1}{2}$ chú khỉ được nhận đậu.

Từ hai điều trên, ta thấy rằng có đúng $\frac{p+1}{2}$ con khỉ được nhận đậu nên tương ứng cũng có đúng

$\frac{p-1}{2}$ con khỉ không nhận được hạt đậu nào.

2. Gọi cạnh có hai con khỉ ở các đầu mút đều được nhận đậu là cạnh tốt. Đánh dấu con khỉ ở đầu và cuối của cạnh đó theo chiều kim đồng hồ là y và x thì ta có $x^2 \equiv y^2 + 1 \pmod{p}$.

Đặt $A = \{(x, y) \mid 1 \leq y < x \leq p, x^2 \equiv y^2 + 1 \pmod{p}\}$.

Ta có $(x + y)(x - y) \equiv 1 \pmod{p}$ và $\{r(x + y) \mid (x, y) \in A\} = \{1, 2, 3, \dots, p - 1\}$.

Ta biết rằng với mọi số tự nhiên k trong đoạn $[1, p]$ thì tồn tại đúng một số $k' \in [1, p]$ sao cho $k \cdot k' \equiv 1 \pmod{p}$.

Do đó, nếu $r(x + y) = r(x' + y'), (x', y') \in A$ thì $x^2 - y^2 \equiv (x')^2 - (y')^2 \equiv 1 \pmod{p}$ và $x + y \equiv x' + y' \pmod{p}$, suy ra $x - y \equiv x' - y' \pmod{p}$, tức là $x \equiv x', y \equiv y' \pmod{p}$. Nhưng do $x, x', y, y' \in [1, p]$ nên $x = x', y = y'$.

Ta được $|A| = |\{r(x + y) \mid (x, y) \in A\}| = p - 1$.

Ta cần đếm số phần tử của tập A tương ứng với cạnh tốt $\{r(x^2), r(y^2)\}$. Ta có các trường hợp:

- Nếu $x = p$ thì $0 \equiv y^2 + 1 \pmod{p} \Rightarrow p \equiv 1 \pmod{4}$ (theo định lý về thặng dư bậc hai). Trong trường hợp này thì phương trình $0 \equiv y^2 + 1 \pmod{p}$ có hai nghiệm có dạng $y, p - y$ và tương ứng với chúng là hai nghiệm $(p, y), (p, p - 1) \in A$ tương ứng với cạnh tốt $\{p, r(y^2)\}$.

- Nếu $y = p$ thì $x = 1, x = p - 1$, ta được hai cặp $(1, p), (1, p - 1) \in A$ tương ứng với cạnh tốt có dạng $\{1, p\}$.

- Nếu $p \notin \{x, y\}$, ta có 4 cặp thỏa mãn đề bài là $(x, y), (p - x, y), (x, p - y), (p - x, p - y) \in A$ tương ứng với các cạnh tốt có dạng $\{r(x^2), r(y^2)\}$.

Gọi m là số cạnh tốt. Theo các trường hợp trên, ta có đẳng thức $4(m - 2) + 2 + 2 = |A| = p - 1$ nếu $p \equiv 1 \pmod{4}$, suy ra $m = \frac{p + 3}{4}$.

Và nếu $p \equiv 3 \pmod{4}$ thì không có cạnh tốt dạng $\{p, r(y^2)\}$ nên ta có đẳng thức khác là

$$4(m - 2) + 2 = |A| = p - 1 \Leftrightarrow m = \frac{p + 1}{4}.$$

Vậy nếu p là số nguyên tố thỏa mãn $p \equiv 1 \pmod{4}$ thì có đúng $\frac{p + 3}{4}$ cạnh mà cả hai con khi ở

hai đầu mút được nhận đậu; nếu p là số nguyên tố thỏa mãn $p \equiv 3 \pmod{4}$ thì có đúng $\frac{p + 1}{4}$

cạnh mà cả hai con khi ở hai đầu mút được nhận đậu.