

DẠNG 2**Đề tổng hợp chủ đề Oxyz****I. PHẦN ĐỀ BÀI**

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z + 5 = 0$ và mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; -2)$. Biết (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có chu vi 8π . Tìm bán kính của mặt cầu (T) chứa đường tròn (C) và (T) đi qua điểm $M(1; 1; 1)$.

- A. $R = 5$. B. $R = \frac{\sqrt{265}}{4}$. C. $R = \frac{5\sqrt{5}}{4}$. D. $R = 4$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S_1) có tâm $I(2; 1; 1)$ có bán kính bằng 4 và mặt cầu (S_2) có tâm $J(2; 1; 5)$ có bán kính bằng 2. Gọi (P) là mặt phẳng thay đổi tiếp xúc với hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$. Đặt M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (P) . Giá trị $M + m$ bằng

- A. 8. B. 9. C. $8\sqrt{3}$. D. $\sqrt{15}$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; 4; -2)$ và mặt phẳng $(P): (m^2 + 1)x + (m^2 - 1)y + 2mz + 4 = 0$. Biết rằng, khi tham số m thay đổi thì mặt phẳng (P) luôn tiếp xúc với hai mặt cầu cố định cùng đi qua A là (S_1) và (S_2) . Gọi M và N lần lượt nằm trên (S_1) và (S_2) . Tìm giá trị lớn nhất của MN ?

- A. $16\sqrt{2}$. B. $8 + 8\sqrt{2}$. C. $8\sqrt{2}$. D. $8 + 6\sqrt{2}$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 16 = 0$ và mặt cầu $(S): (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 21$. Một khối hộp chữ nhật (H) có bốn đỉnh nằm trên mặt phẳng (P) và bốn đỉnh còn lại nằm trên mặt cầu (S) . Khi (H) có thể tích lớn nhất, thì mặt phẳng chứa bốn đỉnh của (H) nằm trên mặt cầu (S) là $(Q): 2x + by + cz + d = 0$. Giá trị $b + c + d$ bằng

- A. -15. B. -13. C. -14. D. -7.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x + 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 25$ và hai đường thẳng

$$(d_1), (d_2) \text{ lần lượt có phương trình } d_1: \begin{cases} x = 1 + mt \\ y = -1 \\ z = 1 + t \end{cases} \text{ và } d_2: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 \\ z = 1 - mt \end{cases}. \text{ Có bao nhiêu giá trị của}$$

m để $(d_1), (d_2)$ cắt mặt cầu (S) tại 4 điểm phân biệt sao cho bốn điểm đó tạo thành tứ giác có diện tích lớn nhất

- A. 0. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu

$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 12y + 6z + 24 = 0$. Hai điểm M, N thuộc (S) sao cho $MN = 8$ và $OM^2 - ON^2 = -112$. Khoảng cách từ O đến đường thẳng MN bằng

A. 4.

B. 3.

C. $2\sqrt{3}$.

D. $\sqrt{3}$.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 = 5$ và điểm $M(1;4;-2)$. Xét điểm N thuộc mặt cầu (S) sao cho đường thẳng MN tiếp xúc với mặt cầu (S) . Khi đó điểm N luôn nằm trên mặt phẳng có phương trình là:

A. $2x + y + z + 2 = 0$.

B. $x + y + z + 1 = 0$.

C. $2x + y + 2z + 2 = 0$.

D. $2x + y + 2z - 2 = 0$.

Câu 8: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(a;b;c)$ với $a;b;c$ là các số thực dương thỏa mãn $5(a^2 + b^2 + c^2) = 9(ab + 2bc + ca)$ và $Q = \frac{a}{b^2 + c^2} - \frac{1}{(a+b+c)^3}$ có giá trị lớn nhất.

Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các tia Ox, Oy, Oz . Phương trình mặt phẳng (MNP) là

A. $3x + 12y + 12z - 1 = 0$.

B. $x + 4y + 4z - 12 = 0$.

C. $3x + 12y + 12z + 1 = 0$.

D. $x + 4y + 4z = 0$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;-2;3)$, $C(1;1;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa A, B sao cho khoảng cách từ C đến (P) bằng $\frac{2}{\sqrt{3}}$. Tìm tọa độ giao điểm M của (P) và trục Oy .

A. $M(0;-1;0)$ hoặc $M\left(0; \frac{23}{37}; 0\right)$.

B. $M(0;1;0)$ hoặc $M\left(0; -\frac{23}{37}; 0\right)$.

C. $M(0;-1;0)$ hoặc $M\left(0; -\frac{23}{37}; 0\right)$.

D. $M(0;1;0)$ hoặc $M\left(0; -\frac{23}{37}; 0\right)$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(0;0;3)$ và $B(2;-3;-5)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 25$ và $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 14 = 0$. Gọi M, N là hai điểm thuộc (P) sao cho $MN = 1$. Biết giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$ có dạng $\sqrt{a-b\sqrt{c}}$ ($a, b, c \in \mathbb{N}$ và c là số nguyên tố). Tính $a + b + c$

A. 80.

B. 93.

C. 89.

D. 90.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $(d_1): \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{2}, (d_2): \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{3}$ và điểm $A(4;1;2)$. Gọi Δ là đường thẳng qua A cắt d_1 và cách d_2 một khoảng lớn nhất. Lấy $\vec{u} = (a;1;c)$ là một vectơ chỉ phương của Δ . Độ dài của $\vec{u}$ là

A. $3\sqrt{5}$.

B. $\sqrt{86}$.

C. $\sqrt{3}$.

D. $\sqrt{85}$.

Câu 12: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(P): x + y + z + 5 = 0$; $(Q): x + y + z + 1 = 0$ và $(R): x + y + z + 2 = 0$. Ứng với mỗi cặp điểm A, B lần lượt thuộc hai mặt phẳng $(P), (Q)$ thì mặt cầu đường kính AB luôn cắt mặt phẳng (R) theo một đường tròn. Tìm bán kính nhỏ nhất của đường tròn đó.

A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

B. $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

C. 1.

D. $\frac{1}{2}$.

Câu 13: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+2}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{1}$ và mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 6$. Hai mặt phẳng $(P), (Q)$ chứa d và cùng tiếp xúc với (S) lần lượt tại A, B . Gọi I là tâm mặt cầu (S) . Giá trị $\cos AIB$ bằng

A. $-\frac{1}{9}$.

B. $\frac{1}{9}$.

C. $-\frac{1}{3}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Câu 14: Trong không gian tọa độ cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{1}$ và hai điểm $A(1; -1; 1)$, $B(4; 2; -2)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và vuông góc với d sao cho khoảng cách từ điểm B đến Δ là nhỏ nhất. Phương trình của đường thẳng Δ là

A. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{4}$.

B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{4}$.

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{4}$.

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-4}$.

Câu 15: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xét ba điểm $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ thỏa mãn $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Biết rằng mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 25$ cắt mặt phẳng (ABC) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính là 4. Giá trị của biểu thức $a+b+c$ là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 5.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=1 \\ z=t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): 2x-z+3=0$. Biết đường thẳng Δ đi qua điểm $O(0; 0; 0)$ gốc tọa độ, có 1 vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; a; b)$, vuông góc với đường thẳng d và hợp với mặt phẳng (P) một góc lớn nhất. Hỏi điểm nào sau đây thuộc đường thẳng Δ ?

A. $P(0; 1; 0)$.

B. $M(2; 0; -2)$.

C. $N(-1; 1; 1)$.

D. $Q(1; 2; 2)$.

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(2; -1; 3)$ bán kính $R=4$ và mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6z - 2 = 0$. Biết mặt phẳng (P) là giao của hai mặt cầu (S) và (S_1) . Gọi M, N là hai điểm thay đổi thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MN = \sqrt{2}$. Giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$ bằng $\sqrt{a-b\sqrt{2}}$, với $a, b \in \mathbb{R}$ và $A(0; 5; 0), B(3; -2; -4)$. Tính giá trị gần đúng của $\frac{b}{a}$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

A. 0,05.

B. 0,07.

C. 0,11.

D. 0,13.

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1): x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 16; (S_2): (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 1$ và điểm $A\left(\frac{4}{3}; \frac{7}{3}; -\frac{14}{3}\right)$. Gọi (P) là mặt phẳng tiếp xúc với cả hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$ và I là tâm của (S_1) . Xét điểm

$M(a;b;c)$ di động trên (P) sao cho IM tiếp xúc với mặt cầu (S_2) , khi AM ngắn nhất thì $a+b+c$ bằng

- A. 1. B. -1. C. $\frac{7}{3}$. D. $-\frac{7}{3}$.

Câu 19: Trong không gian Oxyz, cho bốn điểm $A(2;3;5), B(-1;3;2), C(-2;1;3), D(5;7;4)$. Xét điểm $M(a;b;c)$ di động trên mặt phẳng (Oxy) , khi $T = 4MA^2 + 5MB^2 - 6MC^2 + MD^4$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $a+b+c$ bằng

- A. 11. B. -11. C. 12. D. 9.

Câu 20: Trong không gian Oxyz, biết rằng không có đường thẳng nào cắt đồng thời cả 4 đường thẳng

$$d_1: \frac{x-3}{-1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{1}; d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}; d_3: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{-1}; d_4: \begin{cases} x = 6+t \\ y = a+3t \\ z = b+t \end{cases}$$

Giá trị $2b-a$ bằng

- A. -2 B. 3 C. 2. D. -3.

Câu 21: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z = 0$ và điểm $M(0;1;0)$. Mặt phẳng (P) đi qua M và cắt (S) theo đường tròn (C) có chu vi nhỏ nhất. Gọi $N(x_0; y_0; z_0)$ là điểm thuộc đường tròn (C) sao cho $ON = \sqrt{6}$. Tính y_0 .

- A. 3. B. 1. C. 2. D. 4.

Câu 22: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$ và điểm $M(1;3;-1)$, biết rằng các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ M tới các mặt cầu đã cho luôn thuộc một đường tròn (C) có tâm $J(a;b;c)$. Giá trị $T = 2a + b + c$ bằng

- A. $T = \frac{134}{25}$. B. $T = \frac{62}{25}$. C. $T = \frac{84}{25}$. D. $T = \frac{116}{25}$.

Câu 23: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(2;-3;-5), I(2;0;-1)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z + 5 = 0$. Điểm $M(a;b;c)$ thay đổi thuộc mặt phẳng (P) sao cho $IM = 5$ và độ dài đoạn AM lớn nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $T = a + b + 2c$ bằng

- A. -1. B. 11. C. 6. D. $-\frac{1}{3}$.

Câu 24: Trong không gian Oxyz, cho ba đường thẳng $d: \frac{x-5}{1} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-3}{3}$, $d_1: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{-2}$ và $d_2: \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z}{2}$. Gọi Δ là đường thẳng song song với d đồng thời cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2 . Đường thẳng Δ đi qua điểm nào sau đây?

- A. $(4;10;17)$. B. $(4;1;-7)$. C. $(3;-12;10)$. D. $(1;-6;6)$.

Câu 25: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x+2)^2 + y^2 + (z+5)^2 = 24$ cắt mặt phẳng $(\alpha): x + y + 4 = 0$ theo giao tuyến là đường tròn (C) . Điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ M đến $A(4;-12;1)$ nhỏ nhất. Tung độ của điểm M bằng

A. -6.

B. -4.

C. 0.

D. 2.

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ và điểm $M(x_0; y_0; z_0) \in d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$.

Ba điểm A, B, C phân biệt cùng thuộc mặt cầu sao cho MA, MB, MC là tiếp tuyến của mặt cầu. Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $D(1; 1; 2)$. Tổng $T = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$ bằng

A. 21.

B. 30.

C. 20.

D. 26.

Câu 27: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $N(2; 3; 4)$. Một mặt cầu bất kỳ đi qua O và N cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại $A, B, C \neq 0$. Biết rằng khi mặt cầu thay đổi nhưng vẫn thỏa đề bài, trọng tâm G của tam giác ABC luôn nằm trên một mặt phẳng cố định. Mặt phẳng cố định này chắn các trục tọa độ thành một tứ diện, tính thể tích của khối tứ diện đó.

A. $\frac{24389}{3888}$.B. $\frac{24389}{4374}$.C. $\frac{24389}{8748}$.D. $\frac{24389}{2916}$.

Câu 28: Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(4; 6; 2), B(2; -2; 0)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z = 0$. Xét đường thẳng d thay đổi thuộc (P) và đi qua B , gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên d . Biết rằng khi d thay đổi thì H thuộc một đường tròn cố định. Diện tích của hình tròn đó bằng

A. 4π .B. π .C. 6π .D. 3π .

Câu 29: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 3 đường thẳng $(d_1), (d_2), (d_3)$ có phương trình

$$(d_1): \begin{cases} x = 1 + 2t_1 \\ y = 1 + t_1 \\ z = 1 - 2t_1 \end{cases}, (d_2): \begin{cases} x = 3 + t_2 \\ y = -1 + 2t_2 \\ z = 2 + 2t_2 \end{cases}, (d_3): \begin{cases} x = 4 + 2t_3 \\ y = 4 - 2t_3 \\ z = 1 + t_3 \end{cases} \text{ tiếp xúc với 3 đường thẳng đó. Giá trị}$$

nhỏ nhất của R gần số nào nhất trong các số sau:

A. 2,1.

B. 2,2.

C. 2,3.

D. 2,4.

Câu 30: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho điểm $I(1; 0; 0)$, điểm $M\left(\frac{7}{9}; \frac{4}{9}; \frac{4}{9}\right)$ và đường

$$\text{thẳng } d: \begin{cases} x = 2 \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}. N(a, b, c) \text{ là điểm thuộc đường thẳng } d \text{ sao cho diện tích tam giác } IMN \text{ nhỏ}$$

nhất. Khi đó $a + b + c$ có giá trị bằng:

A. 2.

B. -2.

C. $\frac{5}{2}$.D. $-\frac{5}{2}$.

Câu 31: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 1$ và hai điểm $A(3; 0; 0); B(-1; 1; 0)$. Gọi M là điểm thuộc mặt cầu (S) . Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA + 3MB$.

A. $2\sqrt{34}$ B. $\sqrt{26}$

C. 5

D. $\sqrt{34}$

Câu 32: Trong không gian $Oxyz$ cho đường tròn (C) là giao tuyến của mặt phẳng tọa độ (xOy) với mặt cầu $(S): (x-6)^2 + (y-6)^2 + (z+3)^2 = 41$. Gọi d là đường thẳng đi qua các điểm $A(0; 0; 12), B(0; 4; 8)$. Với M, N là các điểm thay đổi thứ tự trên (C) và d . Giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn MN gần với giá trị nào nhất sau đây?

A. 3,5.

B. 2,35.

C. 1,25.

D. 2,92.

Câu 33: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(2;-1;-1), B(0;1;-2)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z - 2 = 0$. Điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho AMB lớn nhất, khi đó $\cos AMB$ bằng

A. $\frac{5}{13}$.

B. $\frac{12}{13}$.

C. $-\frac{12}{13}$.

D. $-\frac{5}{13}$.

Câu 34: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(-1;2;3)$ và $B(3;2;5)$. Xét hai điểm M và N thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MN = 2023$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$.

A. $2\sqrt{17}$.

B. $\sqrt{65}$.

C. $25\sqrt{97}$.

D. $205\sqrt{97}$.

Câu 35: Trong không gian Oxyz, cho ba điểm $A(1;2;3), B(0;1;0), C(1;0;-2)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z + 2 = 0$. Điểm $M(a;b;c)$ nằm trên (P) sao cho biểu thức $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $T = a - b + 9c$ bằng

A. $\frac{13}{9}$.

B. $-\frac{13}{9}$.

C. 13.

D. -13.

Câu 36: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(\alpha): x + y - 2z - 2 = 0$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-2}{1}$. Đường thẳng Δ' là hình chiếu vuông góc của đường thẳng Δ trên mặt phẳng (α) có phương trình:

A. $\frac{x+8}{3} = \frac{y-6}{5} = \frac{z+2}{4}$.

B. $\frac{x+8}{3} = \frac{y-6}{-5} = \frac{z+2}{4}$.

C. $\frac{x+1}{7} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+1}{1}$.

D. $\frac{x+1}{7} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+1}{1}$.

Câu 37: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho hai mặt cầu $(S_1): (x+5)^2 + y^2 + z^2 = 25$,

$(S_2): (x+5)^2 + y^2 + z^2 = 100$ và điểm $K(8;0;0)$. Đường thẳng Δ di động nhưng luôn tiếp xúc với (S_1) , đồng thời cắt (S_2) tại hai điểm M, N . Tam giác KMN có diện tích lớn nhất bằng

A. $90\sqrt{3}$.

B. $50\sqrt{6}$.

C. $100\sqrt{2}$.

D. $100\sqrt{3}$.

Câu 38: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $a, b, c > 0$ sao cho $2OA - OB + OC + 5\sqrt{OB^2 + OC^2} = 36$. Tính $a - b + c$ khi thể tích khối chóp O. ABC đạt giá trị lớn nhất

A. 1.

B. 5

C. $\frac{-36+36\sqrt{2}}{5}$

D. 7

Câu 39: Trong không gian tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$ và hai điểm $A(6;0;0), B(0;0;-6)$. Khi M thay đổi trên đường thẳng d , hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = MA + MB$

A. $\min P = 6\sqrt{3}$.

B. $\min P = 6\sqrt{2}$.

C. $\min P = 9$.

D. $\min P = 12$.

Câu 40: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 11 = 0$ và điểm $I(-3; 3; 1)$.

Gọi (S) là mặt cầu có tâm là điểm I và cắt mặt phẳng (P) theo một đường tròn có chu vi bằng 8π . Phương trình của mặt cầu (S) là

A. $(x+3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 52.$

B. $(x+3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 64.$

C. $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z+1)^2 = 64.$

D. $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z+1)^2 = 52.$

II. PHẦN HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z + 5 = 0$ và mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; -2)$. Biết (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có chu vi 8π . Tìm bán kính của mặt cầu (T) chứa đường tròn (C) và (T) đi qua điểm $M(1; 1; 1)$.

- A. $R = 5$. B. $R = \frac{\sqrt{265}}{4}$. C. $R = \frac{5\sqrt{5}}{4}$. D. $R = 4$.

Lời giải

Chọn B

Đường tròn (C) có chu vi 8π nên có bán kính $r = 4$.

Gọi J là tâm của mặt cầu (T) , theo đề ta có (P) cắt (S) và (T) theo cùng một giao tuyến là đường tròn (C) do đó $IJ \perp (P)$.

Đường thẳng IJ đi qua điểm I và nhận vector $\vec{n}_{(P)} = (2; 2; 1)$ làm vector chỉ phương nên có

$$\text{phương trình } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = -2 + t \end{cases}$$

Suy ra $J(1 + 2t; 2 + 2t; -2 + t)$.

$$\text{Ta có: } d = d(J; (P)) = \frac{|2(1 + 2t) + 2(2 + 2t) - 2 + t + 5|}{3} = \frac{|9t + 9|}{3} = 3|t + 1|.$$

$$\text{Bán kính của mặt cầu } (T): R = JM = \sqrt{4t^2 + (2t + 1)^2 + (t - 3)^2}.$$

$$\text{Ta có: } d^2 + r^2 = R^2 \Leftrightarrow 9(t + 1)^2 + 16 = 4t^2 + (2t + 1)^2 + (t - 3)^2$$

$$\Leftrightarrow 9t^2 + 18t + 25 = 9t^2 - 2t + 10 \Leftrightarrow 20t = -15 \Leftrightarrow t = -\frac{3}{4}.$$

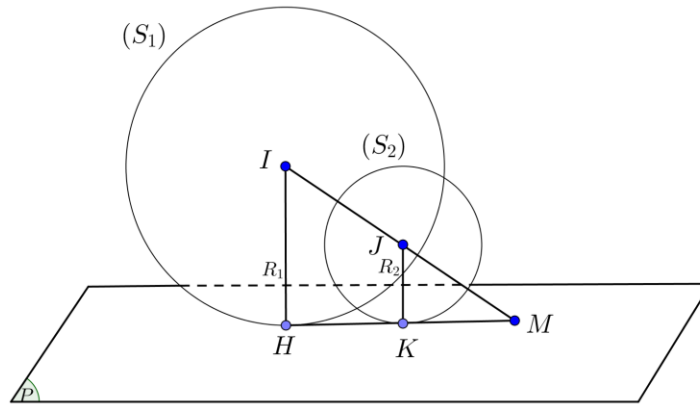
$$\text{Vậy bán kính của mặt cầu } (T) \text{ là } R = \frac{\sqrt{265}}{4}.$$

Câu 2: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S_1) có tâm $I(2; 1; 1)$ có bán kính bằng 4 và mặt cầu (S_2) có tâm $J(2; 1; 5)$ có bán kính bằng 2. Gọi (P) là mặt phẳng thay đổi tiếp xúc với hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$. Đặt M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (P) . Giá trị $M + m$ bằng

- A. 8. B. 9. C. $8\sqrt{3}$. D. $\sqrt{15}$.

Lời giải

Chọn B



(S_1) có bán kính $R_1 = 4$, (S_2) có bán kính $R_2 = 2$.

Nhận xét: $R_1 - R_2 < IJ = 4 < R_1 + R_2$ nên hai mặt cầu này cắt nhau.

Vì $R_2 = \frac{1}{2}R_1$ nên theo định lý Talet suy ra J là trung điểm đoạn MI nên $M(2;1;9)$.

(P) qua $M(2;1;9)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (a; b; c)$, $(a^2 + b^2 + c^2 > 0)$ nên phương trình

(P) có dạng: $\boxed{ax + by + cz - 2a - b - 9c = 0}$.

$$\text{Ta có: } d(I, (P)) = 4 \Leftrightarrow \frac{|-8c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 4 \Leftrightarrow \frac{|2c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 1 \Leftrightarrow 3c^2 = a^2 + b^2.$$

Nếu $c = 0$ thì $a = b = 0$ (vô lý) nên $c \neq 0$. Không mất tính tổng quát, chọn $c = 1$, suy ra $a^2 + b^2 = 3$.

Do đó tồn tại $t \in [0; 2\pi]$ sao cho $a = \sqrt{3} \sin t, b = \sqrt{3} \cos t$.

$$\text{Mặt khác: } d \equiv d(O, (P)) = \frac{|2a + b + 9c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|2\sqrt{3} \sin t + \sqrt{3} \cos t + 9|}{2} = \frac{2\sqrt{3} \sin t + \sqrt{3} \cos t + 9}{2},$$

(vì $2\sqrt{3} \sin t + \sqrt{3} \cos t + 9 > 0, \forall t \in [0; 2\pi]$).

Biến đổi ta được: $2\sqrt{3} \sin t + \sqrt{3} \cos t = 2d - 9$.

Điều kiện có nghiệm:

$$(2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 \geq (2d - 9)^2 \Leftrightarrow 4d^2 - 36d + 66 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{9 - \sqrt{15}}{2} \leq d \leq \frac{9 + \sqrt{15}}{2}.$$

$$\text{Vậy } M = \frac{9 + \sqrt{15}}{2}, m = \frac{9 - \sqrt{15}}{2} \text{ nên } M + m = 9.$$

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; 4; -2)$ và mặt phẳng $(P): (m^2 + 1)x + (m^2 - 1)y + 2mz + 4 = 0$. Biết rằng, khi tham số m thay đổi thì mặt phẳng (P) luôn tiếp xúc với hai mặt cầu cố định cùng đi qua A là (S_1) và (S_2) . Gọi M và N lần lượt nằm trên (S_1) và (S_2) . Tìm giá trị lớn nhất của MN ?

A. $16\sqrt{2}$.

B. $8 + 8\sqrt{2}$.

C. $8\sqrt{2}$.

D. $8 + 6\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi tâm mặt cầu tiếp xúc với (P) là điểm $I(a; b; c)$.

Do mặt cầu đi qua điểm $A(2; 4; -2)$ nên ta có: $(2-a)^2 + (4-b)^2 + (-2-c)^2 = R^2$ (1)

Do mặt cầu đi tiếp xúc với (P) nên:

$$R = d(I, (P)) = \frac{|(m^2+1)a + (m^2-1)b + 2mc + 4|}{\sqrt{2(m^2+1)^2}} = \frac{|(m^2+1)(a+b) - 2b + 2mc + 4|}{\sqrt{2}(m^2+1)}.$$

Vì mặt cầu là cố định nên bán kính R không đổi, do đó $2mc - 2b + 4 = 0, \forall m \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = 2 \end{cases}.$

Khi đó $R = \frac{|a+2|}{\sqrt{2}}$, thay $b = 2, c = 0$ và $R = \frac{|a+2|}{\sqrt{2}}$ vào (1) ta được

$$a^2 - 12a + 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1(2; 2; 0), R_1 = 2\sqrt{2} \\ I_2(2; 10; 0), R_2 = 6\sqrt{2} \end{cases}.$$

Từ đó ta có $\max MN = I_1I_2 + R_1 + R_2 = 8 + 8\sqrt{2}$.

Câu 4: Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 16 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 21$. Một khối hộp chữ nhật (H) có bốn đỉnh nằm trên mặt phẳng (P) và bốn đỉnh còn lại nằm trên mặt cầu (S) . Khi (H) có thể tích lớn nhất, thì mặt phẳng chứa bốn đỉnh của (H) nằm trên mặt cầu (S) là $(Q): 2x + by + cz + d = 0$. Giá trị $b + c + d$ bằng

A. -15.

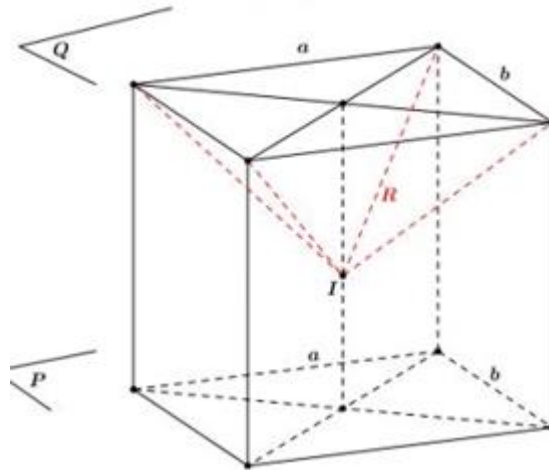
B. -13.

C. -14.

D. -7.

Lời giải

Chọn B



Đầu tiên, ta có mặt cầu (S) tâm $I(2; -1; 3)$, bán kính $R = \sqrt{21}$

Tiếp đến ta nhận thấy: $d(I; (P)) = 9 > \sqrt{21}$ nên suy ra mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu (S) .

Gọi a, b là các kích thước mặt đáy hình hộp chữ nhật và $d = d(I; (Q))$. Khi đó ta có:

$$\text{Ta có: } V = (d(I; (P)) + d(I; (Q)))ab = (9 + d)ab \leq (9 + d)\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = (9 + d)(21 - d^2) = f(d)$$

Xét hàm số $y = f(d) = (9 + d)(21 - d^2)$ trên $(0; +\infty)$ có $f'(d) = 0 \Leftrightarrow d = 1 \Rightarrow \max_{\mathbb{R}^+} f(d) = f(1)$

Suy ra thể tích khối hộp đạt max khi và chỉ khi $d = d(I; (Q)) = 1, (P) \parallel (Q)$

Suy

ra:

$$(Q): 2x - y + 2z + d = 0; d(I; (Q)) = \frac{|11 + d|}{3} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} d = -8 \\ d = -14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (Q_1): 2x - y + 2z - 8 = 0 \\ (Q_2): 2x - y + 2z - 14 = 0 \end{cases}$$

Xét điểm $N(0; 0; -8)$ bất kì thuộc mặt phẳng (P) ta nhận ra để thể tích max thì chiều cao hộp phải max tức hai điểm I và N phải nằm cùng phía với mặt phẳng (Q)

Như vậy ta nhận mặt phẳng $(Q_2): 2x - y + 2z - 14 = 0$ do $(2x_I - y_I + 2z_I - 14)(2x_N - y_N + 2z_N - 14) > 0$ Với $(Q): 2x + by + cz + d = 0$, ta đồng nhất hệ số ra $b + c + d = -13$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 25$ và hai đường thẳng

$$(d_1), (d_2) \text{ lần lượt có phương trình } d_1: \begin{cases} x = 1 + mt \\ y = -1 \\ z = 1 + t \end{cases} \text{ và } d_2: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 \\ z = 1 - mt \end{cases}. \text{ Có bao nhiêu giá trị của}$$

m để $(d_1), (d_2)$ cắt mặt cầu (S) tại 4 điểm phân biệt sao cho bốn điểm đó tạo thành tứ giác có diện tích lớn nhất

A. 0.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải**Chọn C**

Ta có đánh giá khác như sau: (Gọi R_C là bán kính của đường tròn thiết diện (C))

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2} MP \cdot NQ = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{R_C^2 - d^2(O'; MP)} \cdot 2\sqrt{R_C^2 - d^2(O'; NQ)} \\ \leq 2 \left(\frac{2R_C^2 - d^2(O'; MP) - d^2(O'; NQ)}{2} \right)$$

$$= 2R_C^2 - O'A^2 = \text{const với } O'(-1; -1; 2) \text{ là tâm đường tròn } (C).$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$d(O'; MP) = d(O'; NQ) \Leftrightarrow d(O'; d_1) = d(O'; d_2) \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{O'A}; \vec{u}_1 \right] = \left[\overrightarrow{O'A}; \vec{u}_2 \right]$$

$$\Leftrightarrow |2 + m| = |-2m + 1| \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -\frac{1}{3} \end{cases}, \text{ Vậy chỉ có 2 giá trị } m \text{ thỏa mãn yêu cầu đề bài.}$$

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu

$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 12y + 6z + 24 = 0$. Hai điểm M, N thuộc (S) sao cho $MN = 8$ và $OM^2 - ON^2 = -112$. Khoảng cách từ O đến đường thẳng MN bằng

A. 4.

B. 3.

C. $2\sqrt{3}$.D. $\sqrt{3}$.**Lời giải****Chọn B**

Phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 12y + 6z + 24 = 0$; ta có $I(2; -6; -3), R = 5$ và $OI = 7$.

$$\begin{aligned} OM^2 - ON^2 &= (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM})^2 - (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IN})^2 = 2\overrightarrow{OI}(\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IN}) = 2\overrightarrow{OI}\overrightarrow{MN} \\ &= 2 \cdot OIMN \cdot \cos(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{MN}) = 112 \cdot \cos(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{MN}). \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó } OM^2 - ON^2 = -112 \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{MN}) = -1.$$

Suy ra $\overrightarrow{OI}$ và $\overrightarrow{MN}$ ngược hướng hay $OI \parallel MN$ (vì $O \notin MN$).

$$\text{Vậy } d(O, MN) = d(I, MN) = \sqrt{R^2 - \left(\frac{MN}{2}\right)^2} = 3.$$

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 = 5$ và điểm $M(1; 4; -2)$. Xét điểm N thuộc mặt cầu (S) sao cho đường thẳng MN tiếp xúc với mặt cầu (S) . Khi đó điểm N luôn nằm trên mặt phẳng có phương trình là:

A. $2x + y + z + 2 = 0$.

B. $x + y + z + 1 = 0$.

C. $2x + y + 2z + 2 = 0$.

D. $2x + y + 2z - 2 = 0$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 3; -4)$, bán kính $R = \sqrt{5}$

Từ tính chất tiếp tuyến ta có $MN^2 = MI^2 - R^2 = 9 - 5 = 4 \Rightarrow MN = 2$, do đó N thuộc mặt cầu tâm $M(1; 4; -2)$, bán kính $R = 2$ có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 8y + 4z + 17 = 0(1)$.

N thuộc (S) viết dạng $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 8z + 21 = 0(2)$.

Trừ các vế (1) cho (2) và rút gọn ta được: $2x + y + 2z + 2 = 0$.

Vậy điểm N luôn nằm trên mặt phẳng có phương trình là: $2x + y + 2z + 2 = 0$

Câu 8: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho điểm $A(a; b; c)$ với $a; b; c$ là các số thực dương thỏa mãn $5(a^2 + b^2 + c^2) = 9(ab + 2bc + ca)$ và $Q = \frac{a}{b^2 + c^2} - \frac{1}{(a+b+c)^3}$ có giá trị lớn nhất.

Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các tia Ox, Oy, Oz . Phương trình mặt phẳng (MNP) là

A. $3x + 12y + 12z - 1 = 0$.

B. $x + 4y + 4z - 12 = 0$.

C. $3x + 12y + 12z + 1 = 0$.

D. $x + 4y + 4z = 0$.

Lời giải

Chọn A

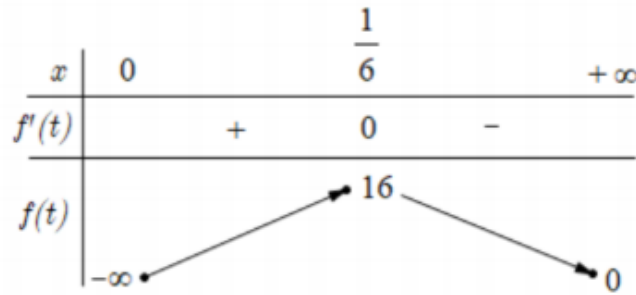
$$\text{Đặt } t = b + c \ (t > 0); \ b^2 + c^2 \geq \frac{t^2}{2}; \ bc \leq \frac{t^2}{4}.$$

$$5(a^2 + b^2 + c^2) = 9(ab + 2bc + ca) \Leftrightarrow 5a^2 + 5(b+c)^2 - 9a(b+c) = 28bc$$

$$\Rightarrow 5a^2 + 5t^2 - 9at \leq 7t^2 \Leftrightarrow (5a+t)(a-2t) \leq 0 \Leftrightarrow a \leq 2t.$$

$$\text{Vậy } Q \leq \frac{4}{t} - \frac{1}{27t^3} = f(t) \text{ với } t > 0.$$

$$\text{Ta có } f'(t) = -\frac{4}{t^2} + \frac{1}{9t^4}, \ f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{6} \text{ (vì } t > 0). \text{ Ta có bảng biến thiên}$$



Vậy $Q_{\max} = 16 \Leftrightarrow t = \frac{1}{6} \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}; b = c = \frac{1}{12}$.

Suy ra tọa độ điểm $A\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{12}; \frac{1}{12}\right)$; tọa độ các điểm $M\left(\frac{1}{3}; 0; 0\right)$; $N\left(0; \frac{1}{12}; 0\right)$; $P\left(0; 0; \frac{1}{12}\right)$.

Phương trình mặt phẳng (MNP) : $\frac{x}{\frac{1}{3}} + \frac{y}{\frac{1}{12}} + \frac{z}{\frac{1}{12}} = 1 \Leftrightarrow 3x + 12y + 12z - 1 = 0$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;-2;3)$, $C(1;1;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa A, B sao cho khoảng cách từ C đến (P) bằng $\frac{2}{\sqrt{3}}$. Tìm tọa độ giao điểm M của (P) và trục Oy .

A. $M(0;-1;0)$ hoặc $M\left(0; \frac{23}{37}; 0\right)$.

B. $M(0;1;0)$ hoặc $M\left(0; -\frac{23}{37}; 0\right)$.

C. $M(0;-1;0)$ hoặc $M\left(0; -\frac{23}{37}; 0\right)$.

D. $M(0;1;0)$ hoặc $M\left(0; -\frac{23}{37}; 0\right)$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $\vec{n}_{(P)} = (a; b; c)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) , với $a^2 + b^2 + c^2 > 0$.

Ta có:

$$\vec{AB} = (-1; -2; 3); (P) \supset AB \Rightarrow \vec{n}_{(P)} \cdot \vec{AB} = 0 \Leftrightarrow -a - 2b + 3c = 0 \Leftrightarrow a = -2b + 3c.$$

$$(P): a(x-1) + by + cz = 0 \Leftrightarrow (P): ax + by + cz - a = 0.$$

$$d(C; (P)) = \frac{|b+c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sqrt{3}|b+c| = 2\sqrt{(-2b+3c)^2 + b^2 + c^2}$$

$$\Leftrightarrow 3(b+c)^2 = 4(5b^2 - 12bc + 10c^2) \Leftrightarrow 17b^2 - 54bc + 37c^2 = 0, (1).$$

Với $c = 0$, từ phương trình (1) suy ra $b = 0$, $a = 0$ không thỏa mãn.

Với $c \neq 0$, chia hai vế phương trình (1) cho c^2 ta được:

$$17\left(\frac{b}{c}\right)^2 - 54\left(\frac{b}{c}\right) + 37 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b}{c} = 1 \\ \frac{b}{c} = \frac{37}{17} \end{cases}.$$

+/- Trường hợp $\frac{b}{c} = 1$, chọn $c = 1 \Rightarrow b = 1, a = 1$.

Khi đó, ta có $(P): x + y + z - 1 = 0$, suy ra $(P) \cap Oy = M(0; 1; 0)$.

+/ Trường hợp $\frac{b}{c} = \frac{37}{17}$, chọn $c = 17 \Rightarrow b = 37, a = -23$.

Khi đó, ta có $(P): -23x + 37y + 17z + 23 = 0$, suy ra $(P) \cap Oy = M\left(0; -\frac{23}{37}; 0\right)$.

Câu 10: Trong không gian Oxyz, cho các điểm $A(0;0;3)$ và $B(2;-3;-5)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 25$ và $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 14 = 0$. Gọi M, N là hai điểm thuộc (P) sao cho $MN = 1$. Biết giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$ có dạng $\sqrt{a-b\sqrt{c}}$ ($a, b, c \in \mathbb{N}$ và c là số nguyên tố). Tính $a+b+c$

A. 80.

B. 93.

C. 89.

D. 90.

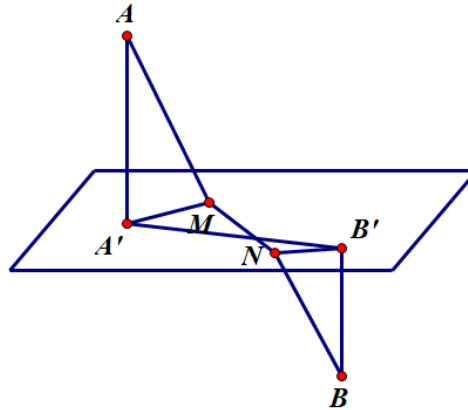
Lời giải

Chọn B

Mặt phẳng (P) là giao tuyến của hai mặt cầu (S_1) và (S_2) nên thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 6z - 14 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 14 = 0 \end{cases} \Rightarrow 6z = 0 \Leftrightarrow z = 0. \text{ Vậy } (P) \equiv (Oxy).$$

Nhận thấy A và B nằm khác phía với nhau so với mặt phẳng (P) .



Gọi $A'(0;0;0)$ và $B'(2;-3;0)$ lần lượt là hình chiếu của A và B lên (P) .

Suy ra: $AA' = 3, BB' = 5, A'B' = \sqrt{13}$.

$$\text{Lại có: } AM + BN = \sqrt{AA'^2 + A'M^2} + \sqrt{BB'^2 + B'N^2} \geq \sqrt{(AA' + BB')^2 + (A'M + B'N)^2}$$

Mặt khác $A'M + MN + B'N \geq A'B' \Leftrightarrow A'M + B'N \geq A'B' - MN = \sqrt{13} - 1$.

$$\text{Suy ra } AM + BN \geq \sqrt{(3+5)^2 + (\sqrt{13}-1)^2} = \sqrt{78 - 2\sqrt{13}}.$$

Vậy $a = 78, b = 2, c = 13$. Vậy $a+b+c = 93$.

Câu 11: Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng $(d_1): \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{2}, (d_2): \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{3}$ và điểm $A(4;1;2)$. Gọi Δ là đường thẳng qua A cắt d_1 và cách d_2 một khoảng lớn nhất. Lấy $\vec{u} = (a;1;c)$ là một vectơ chỉ phương của Δ . Độ dài của $\vec{u}$ là

A. $3\sqrt{5}$.

B. $\sqrt{86}$.

C. $\sqrt{3}$.

D. $\sqrt{85}$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của A lên d_2 , khi đó Δ nằm trên mặt phẳng (P) qua A và nhận $\overline{AH}$ là vectơ pháp tuyến.

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa A và (d_1) . Khi đó $\Delta = (P) \cap (Q) \Rightarrow \vec{u}_\Delta = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q]$.

Giả sử $H(1+t; -3+2t; 1+3t) \Rightarrow \overline{AH} = (t-3; 2t-4; 3t-1)$.

Ta

có

$$\overline{AH} \perp \vec{u}_{d_2}, \vec{u}_{d_2} = (1; 2; 3) \Rightarrow t-3+4t-8+9t-3=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow \overline{AH} = (-2; -2; 2) \Rightarrow \vec{n}_P = (1; 1; -1).$$

$$\text{Lấy } N(-1; 1; -2) \in (d_1) \Rightarrow \overline{AN} = (-5; 0; -4) \Rightarrow \vec{n}_Q = [\vec{u}_{d_1}, \overline{AN}] = (4; -2; -5).$$

$$\text{Suy ra } \vec{u}_\Delta = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q] = (-7; 1; -6) \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{86}.$$

Câu 12: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(P): x+y+z+5=0$; $(Q): x+y+z+1=0$ và $(R): x+y+z+2=0$. Ứng với mỗi cặp điểm A, B lần lượt thuộc hai mặt phẳng $(P), (Q)$ thì mặt cầu đường kính AB luôn cắt mặt phẳng (R) theo một đường tròn. Tìm bán kính nhỏ nhất của đường tròn đó.

A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

B. $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

C. 1.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Để thấy ba mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ song song với nhau và mặt phẳng (R) nằm giữa hai mặt phẳng $(P), (Q)$.

Gọi $(\alpha): x+y+z+D=0$ là mặt phẳng cách đều hai mặt phẳng $(P), (Q)$.

$$\text{Ta có } \frac{|D-5|}{\sqrt{3}} = \frac{|D-1|}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow D=3 \Rightarrow (\alpha): x+y+z+3=0.$$

Suy ra khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(R), (\alpha)$ là $d = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Khi đó mặt cầu đường kính AB có tâm I luôn thuộc mặt phẳng (α) cách đều hai mặt phẳng $(P), (Q)$.

Mặt cầu tâm I luôn cắt mặt phẳng (R) theo một đường tròn có bán kính là $r = \sqrt{\frac{AB^2}{4} - d^2}$. Để

$$r_{\min} \text{ thì } AB_{\min} = d[(P), (Q)] = \frac{4}{\sqrt{3}}. \text{ Vậy } r = \sqrt{\frac{AB^2}{4} - d^2} = 1.$$

Câu 13: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+2}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{1}$ và mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 6$. Hai mặt phẳng $(P), (Q)$ chứa d và cùng tiếp xúc với (S) lần lượt tại A, B . Gọi I là tâm mặt cầu (S) . Giá trị $\cos AIB$ bằng

A. $-\frac{1}{9}$.

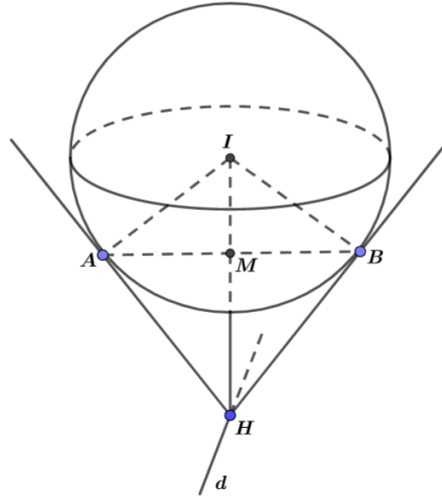
B. $\frac{1}{9}$.

C. $-\frac{1}{3}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Mặt cầu (S) có tâm $I(2; -1; -1)$ và bán kính $R = \sqrt{6}$.

Phương trình tham số của đường thẳng $d: \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -1 - 3t \\ z = t \end{cases}, \vec{u}_d = (2; -3; 1).$

Gọi H là hình chiếu của I lên d . Vì $H \in d \Rightarrow H(-2 + 2t; -1 - 3t; t)$
 $\Rightarrow \vec{IH} = (-4 + 2t; -3t; t + 1).$

Khi đó, $\vec{IH} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow 2(-4 + 2t) - 3(-3t) + (t + 1) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow H\left(-1; -\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$ và

$$IH = \frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

Gọi M là hình chiếu của A lên IH .

Xét tam giác AIH vuông tại A có: $IA^2 = IM \cdot IH \Rightarrow IM = \frac{IA^2}{IH} = \frac{R^2}{IH} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$

Xét tam giác AIM vuông tại M có $AM^2 = \sqrt{IA^2 - IM^2} = \sqrt{R^2 - IM^2} = \frac{\sqrt{30}}{3} \Rightarrow AB = \frac{2\sqrt{30}}{3}.$

Tam giác AIB có $IA = IB = \sqrt{6}, AB = \frac{2\sqrt{30}}{3}$. Áp dụng định lý côsin trong tam giác AIB ta có:

$$\cos AIB = \frac{IA^2 + IB^2 - AB^2}{2IA \cdot IB} = -\frac{1}{9}.$$

Câu 14: Trong không gian tọa độ cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{1}$ và hai điểm $A(1; -1; 1)$,

$B(4; 2; -2)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và vuông góc với d sao cho khoảng cách từ điểm B đến Δ là nhỏ nhất. Phương trình của đường thẳng Δ là

A. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{4}.$

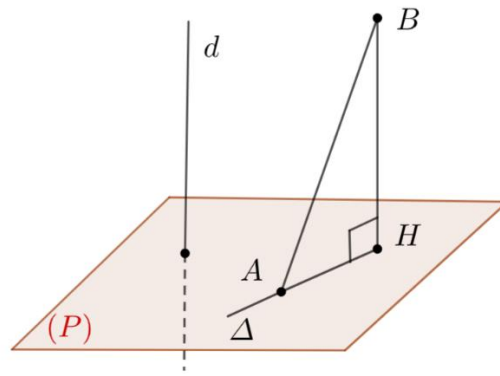
B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{4}.$

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{4}.$

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-4}.$

Lời giải

Chọn D



Đường thẳng đã cho nằm trong mặt phẳng qua A và vuông góc với d
 $(P): 2(x-1) + 2(y+1) + z - 1 = 0 \Rightarrow 2x + 2y + z - 1 = 0$

$$\text{Kẻ } BH \perp (P) \Rightarrow (BH): \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = -2 + t \end{cases}$$

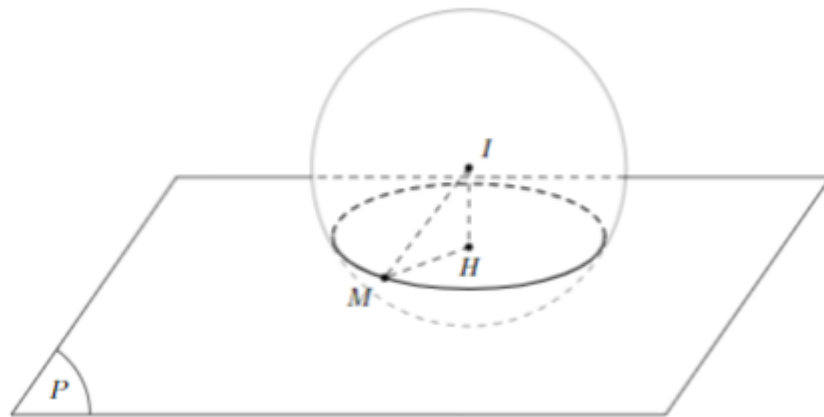
Khi đó $H \in (P) \Rightarrow 2(4 + 2t) + 2(2 + 2t) - 2 + t - 1 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow H(2; 0; -3)$.

Nhận xét $BH \leq BA$, đường thẳng cần tìm là đường thẳng AH .

$$\text{Trong đó } \overrightarrow{AH} = (1; 1; -4) \Rightarrow \Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-4}.$$

- Câu 15:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xét ba điểm $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ thỏa mãn $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Biết rằng mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 25$ cắt mặt phẳng (ABC) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính là 4. Giá trị của biểu thức $a + b + c$ là
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 5.

Lời giải



Theo phương trình đoạn chắn ta có phương trình mặt phẳng (ABC) là: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Với giả thiết $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Ta thấy mặt phẳng luôn đi qua điểm $H(1; -1; 1)$.

Mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 25$ có tâm $I(2; 1; 3), R_{mc} = 5$.

Ta gọi K là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (ABC) .

$IK = \sqrt{R_{mc}^2 - r^2} = 3$ và ta thấy $IH = 3$ và $IH \geq IK$ nên ta có H trùng với điểm K .

$$(ABC) \text{ qua } H(1; -1; 1) \text{ và có VTPT } \vec{n} = \overrightarrow{HI} = (1; 2; 2) \Rightarrow x + 2y + 2z - 1 = 0 \Rightarrow \frac{x}{1} + \frac{y}{\frac{1}{2}} + \frac{z}{\frac{1}{2}} = 1.$$

Vậy $a + b + c = 2$.

Câu 16: Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): 2x - z + 3 = 0$. Biết

đường thẳng Δ đi qua điểm $O(0; 0; 0)$ gốc tọa độ, có 1 vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; a; b)$, vuông góc với đường thẳng d và hợp với mặt phẳng (P) một góc lớn nhất. Hỏi điểm nào sau đây thuộc đường thẳng Δ ?

- A. $P(0; 1; 0)$. B. $M(2; 0; -2)$. C. $N(-1; 1; 1)$. D. $Q(1; 2; 2)$.

Lời giải

Ta có đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; a; b)$.

Mà đường thẳng d có phương trình $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$ nên suy ra một vectơ chỉ phương của d là

$$\vec{v} = (1; 0; 1).$$

Ta lại có $\Delta \perp d \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow 1 + b = 0 \Rightarrow b = -1$. Suy ra $\vec{u} = (1; a; -1)$.

Mặt khác, mặt phẳng (P) có phương trình $(P): 2x - z + 3 = 0$ nên có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2; 0; -1)$.

Giải sử Δ hợp với mặt phẳng (P) một góc $\varphi = (\Delta, (P))$ thì

$$\sin \varphi = |\cos(\vec{u}, \vec{n})| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|3|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2 + a^2}} = \frac{3}{\sqrt{5(2 + a^2)}}.$$

$$\text{Mà } \sqrt{2 + a^2} \geq \sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2 + a^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin \varphi = \frac{3}{\sqrt{5(2 + a^2)}} \leq \frac{3}{\sqrt{10}} \text{ khi } a = 0.$$

Vì φ lớn nhất khi $\sin \varphi$ lớn nhất do đó $\varphi_{\max}$ khi $a = 0$.

Suy ra $\vec{u} = (1; 0; -1)$. Vậy phương trình đường thẳng Δ là $\begin{cases} x = s \\ y = 0 \\ z = -s \end{cases}$. Suy ra điểm $M(2; 0; -2)$

thuộc đường thẳng Δ .

Câu 17: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S) tâm $I(2; -1; 3)$ bán kính $R = 4$ và mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6z - 2 = 0$. Biết mặt phẳng (P) là giao của hai mặt cầu (S) và (S_1) .

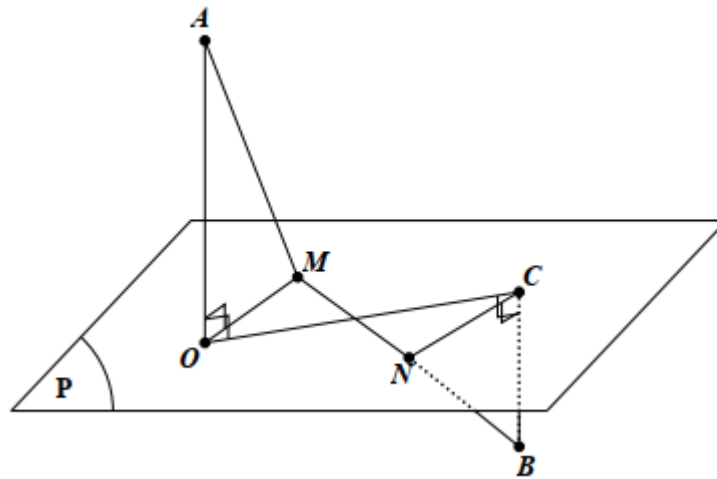
Gọi M, N là hai điểm thay đổi thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MN = \sqrt{2}$. Giá trị nhỏ nhất của

$AM + BN$ bằng $\sqrt{a - b\sqrt{2}}$, với $a, b \in \mathbb{R}$ và $A(0; 5; 0), B(3; -2; -4)$. Tính giá trị gần đúng của $\frac{b}{a}$

(làm tròn đến hàng phần trăm).

- A. 0,05. B. 0,07. C. 0,11. D. 0,13.

Lời giải



Ta có $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 2 = 0$.

Vì $(P) = (S) \cap (S_1) \Rightarrow (P): y = 0 \Rightarrow (P) \equiv (Ozx)$.

Ta có $O(0;0;0), C(3;0;-4)$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $A(0;5;0), B(3;-2;-4)$ xuống mặt phẳng (P) .

Mà $OA = 5; OC = 5; BC = 2$.

Do đó

$$AM + BN = \sqrt{OA^2 + OM^2} + \sqrt{BC^2 + CN^2} \geq \sqrt{(OA + BC)^2 + (OM + CN)^2} = \sqrt{49 + (OM + CN)^2}$$

Lại có $OM + MN + NC \geq OC \Rightarrow OM + NC \geq OC - MN = 5 - \sqrt{2}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi O, M, N, C thẳng hàng.

$$\text{Vậy } AM + BN \geq \sqrt{49 + (OM + CN)^2} \geq \sqrt{49 + (5 - \sqrt{2})^2} = \sqrt{76 - 10\sqrt{2}}.$$

$$\text{Suy ra } a = 76; b = 10 \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{10}{76} \approx 0,13.$$

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu

$(S_1): x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 16; (S_2): (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 1$ và điểm $A\left(\frac{4}{3}; \frac{7}{3}; -\frac{14}{3}\right)$. Gọi

(P) là mặt phẳng tiếp xúc với cả hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$ và I là tâm của (S_1) . Xét điểm $M(a;b;c)$ di động trên (P) sao cho IM tiếp xúc với mặt cầu (S_2) , khi AM ngắn nhất thì $a+b+c$ bằng

- A. 1. B. -1. C. $\frac{7}{3}$. D. $-\frac{7}{3}$.

Lời giải

Mặt cầu (S_1) có tâm $I(0;1;2), R_1 = 4$ và mặt cầu (S_2) có tâm $J(1;-1;0), R_2 = 1$.

Do $IJ = R_1 - R_2 = 3 \Rightarrow (S_1), (S_2)$ tiếp xúc trong tại E như hình vẽ (vẽ đại diện là đường tròn).

Lời giải

Đường thẳng d_1 có vec-tơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (-1; 1; 1)$ và đi qua điểm $A(3; -3; 0)$.

Đường thẳng d_3 có vec-tơ chỉ phương $\vec{u}_3 = (1; -1; -1)$ và đi qua điểm $B(0; -2; -1)$.

$$\vec{BA} = (3; -1; 1).$$

Vì $\vec{u}_1, \vec{u}_3$ cùng phương và $\vec{u}_1$ không cùng phương $\vec{BA}$ nên $d_1 // d_3$.

Gọi (α) là mặt phẳng chứa d_1, d_3 .

Khi đó (α) nhận $\vec{n}_\alpha = [\vec{BA}, \vec{u}_1] = -2(1; 2; -1)$ làm vec-tơ pháp tuyến và (α) đi qua $B(0; -2; -1)$ nên nó có phương trình là:

$$1(x-0) + 2(y+2) - (z+1) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - z + 3 = 0.$$

Dễ thấy $(\alpha): x + 2y - z + 3 = 0$ cắt $d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$ tại điểm $M(0; -1; 1)$. d_4 có vec-tơ chỉ phương $\vec{u}_4 = (1; 3; 1)$. Do $\vec{n}_\alpha \cdot \vec{u}_4 \neq 0$ nên α, d_4 cắt nhau. Gọi tọa độ giao điểm tương ứng của chúng là $N(6+t; a+3t; b+t)$.

$$\vec{MN} = (6+t; a+1+3t; b-1+t).$$

Vì không có đường thẳng nào cắt đồng thời cả 4 đường thẳng đã cho nên suy ra $\vec{MN}$ cùng phương với $\vec{u}_1 = (-1; 1; 1)$.

$$\Leftrightarrow \frac{6+t}{-1} = \frac{a+1+3t}{1} = \frac{b-1+t}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} a+1+3t = -6-t \\ b-1+t = -6-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4t = 7+a \\ 4t = -10-2b \end{cases} \Rightarrow 2b - a = -3$$

Câu 21: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z = 0$ và điểm $M(0; 1; 0)$. Mặt phẳng (P) đi qua M và cắt (S) theo đường tròn (C) có chu vi nhỏ nhất.

Gọi $N(x_0; y_0; z_0)$ là điểm thuộc đường tròn (C) sao cho $ON = \sqrt{6}$. Tính y_0 .

A. 3.

B. 1.

C. 2.

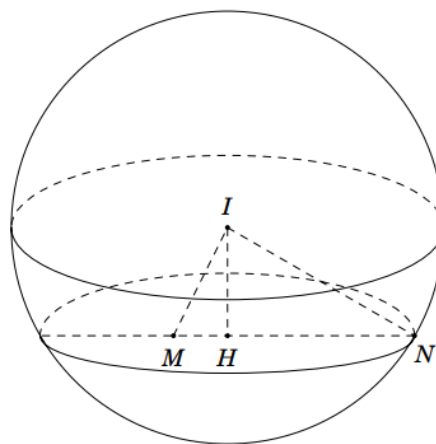
D. 4.

Lời giải.

Nhận thấy rằng, mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 2; 1)$, bán kính $R = \sqrt{6}$ và điểm M là điểm nằm trong mặt cầu này. Gọi r là bán kính hình tròn (C) và H là hình chiếu của I lên (P) . Dễ thấy rằng

$$H \text{ là tâm đường tròn } (C). \text{ Khi đó, ta có } r = \sqrt{R^2 - IH^2} \geq \sqrt{R^2 - IM^2}.$$

Vậy để (C) có chu vi nhỏ nhất thì r nhỏ nhất khi đó H trùng với M .



Khi đó mặt phẳng (P) đi qua $M(0;1;0)$ và nhận vector $\overrightarrow{IM} = (1; -1; -1)$ làm vector pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $x - (y - 1) - z = 0 \Leftrightarrow x - y - z = -1$.

Điểm N vừa thuộc mặt cầu (S) vừa thuộc mặt phẳng (P) và thỏa $ON = \sqrt{6}$ nên tọa độ của N thỏa hệ phương trình.

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + 2x_0 - 4y_0 - 2z_0 = 0 \\ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 6 \\ x_0 - y_0 - z_0 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 - 4y_0 - 2z_0 = -6 \\ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 6 \\ x_0 - y_0 - z_0 = -1 \end{cases}$$

Lấy phương trình đầu trừ hai lần phương trình thứ ba ta được $-2y_0 = -4 \Leftrightarrow y_0 = 2$.

Câu 22: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$ và điểm $M(1;3;-1)$, biết rằng các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ M tới các mặt cầu đã cho luôn thuộc một đường tròn (C) có tâm $J(a;b;c)$. Giá trị $T = 2a + b + c$ bằng

A. $T = \frac{134}{25}$.

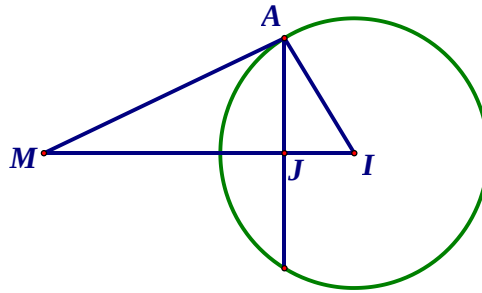
B. $T = \frac{62}{25}$.

C. $T = \frac{84}{25}$.

D. $T = \frac{116}{25}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có (S): $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9 \Rightarrow I(1; -1; 2); R = 3$.

$M(1; 3; -1) \Rightarrow IM = \sqrt{0^2 + 4^2 + (-3)^2} = 5$.

Gọi A là một tiếp điểm nên $AM = \sqrt{MI^2 - IA^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

Mặt cầu tâm M bán kính $AM = 4$ dạng $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 16$.

Tọa độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 16 \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow 4y - 3z + 1 = 0$.

Hay $A \in (P): 4y - 3z + 1 = 0$.

J là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P). Đường thẳng IJ dạng $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + 4t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$

$$J = IJ \cap (P) \Rightarrow J \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} 4y - 3x + 1 = 0 \\ x = 1 \\ y = -1 + 4t \\ z = 2 - 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{11}{25} \\ z = \frac{23}{25} \end{cases} \Rightarrow J\left(1; \frac{11}{25}; \frac{23}{25}\right) = J(a; b; c).$$

$$\text{Nên } T = 2a + b + c = \frac{84}{25}.$$

Câu 23: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(2; -3; -5), I(2; 0; -1)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z + 5 = 0$. Điểm $M(a; b; c)$ thay đổi thuộc mặt phẳng (P) sao cho $IM = 5$ và độ dài đoạn AM lớn nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $T = a + b + 2c$ bằng

A. -1. B. 11. C. 6. D. $-\frac{1}{3}$.

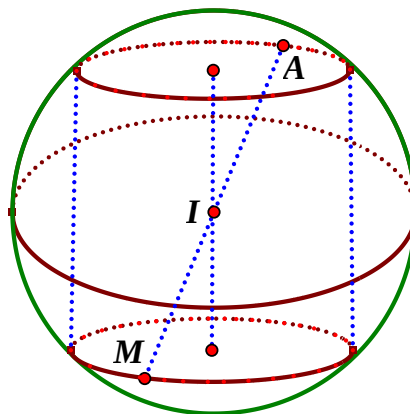
Lời giải

Chọn B

Có M thuộc mặt cầu (S) (tâm I , bán kính $R = 5$).

Do $d(I, (P)) = \frac{|4 - 0 + 2 + 5|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{11}{3} < 5$ nên (S) cắt (P) theo giao tuyến là đường tròn (C_1) và $M \in (C_1)$.

Gọi (Q) là mặt phẳng qua A và song song với (P) , có $(Q): 2x - y - 2z - 17 = 0$ và $d(I, (Q)) = \frac{|4 - 0 + 2 - 17|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{11}{3}$. Suy ra (S) cắt (Q) theo giao tuyến là đường tròn (C_2) và $A \in (C_2)$ (do $IA = 5$ nên $A \in (S)$)



Do $d(I, (P)) = d(I, (Q))$ nên (C_1) bằng (C_2) và A, M lần lượt thuộc hai đường tròn đáy của hình trụ. Do đó AM lớn nhất khi M là điểm đối xứng với A qua I , suy ra $M(2; 3; 3)$ và $T = 2 + 3 + 2 \cdot 3 = 11$.

Câu 24: Trong không gian Oxyz, cho ba đường thẳng $d: \frac{x-5}{1} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-3}{3}$, $d_1: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{-2}$ và $d_2: \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z}{2}$. Gọi Δ là đường thẳng song song với d đồng thời cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2 . Đường thẳng Δ đi qua điểm nào sau đây?

- A. (4;10;17). B. (4;1;-7). C. (3;-12;10). D. (1;-6;6).

Lời giải

Chọn A

$$\text{Gọi } A = \Delta \cap d_1 \Rightarrow A(2t_1; -1+t_1; -3-2t_1).$$

$$B = \Delta \cap d_2 \Rightarrow B(-2+t_2; 3-3t_2; 2t_2).$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (-2+t_2-2t_1; 4-3t_2-t_1; 3+2t_2+2t_1).$$

Do Δ là đường thẳng song song với d nên $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{u_d}$ cùng phương.

$$\Rightarrow \frac{-2+t_2-2t_1}{1} = \frac{4-3t_2-t_1}{2} = \frac{3+2t_2+2t_1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4+2t_2-4t_1 = 4-3t_2-t_1 \\ -6+3t_2-6t_1 = 3+2t_2+2t_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t_1-5t_2 = -8 \\ 8t_1-t_2 = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = -1 \\ t_2 = 1 \end{cases}$$

Đường thẳng Δ qua $B(-1;0;2)$ và nhận vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (1;2;3)$ có phương trình là

$$\Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{3}.$$

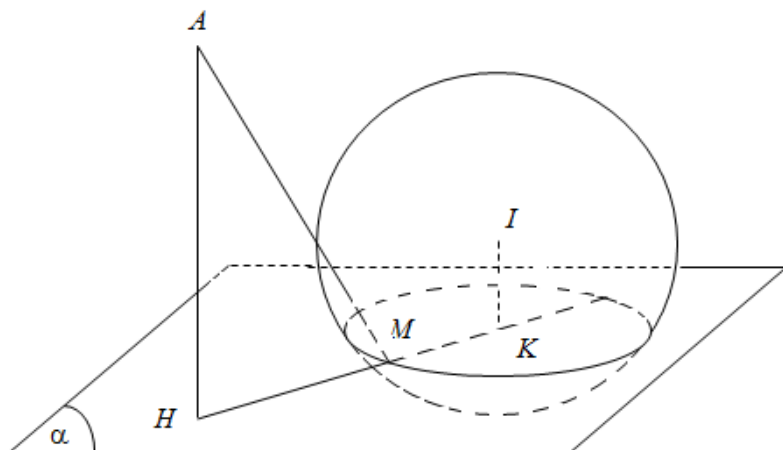
Thay tọa độ (4;10;17) vào phương trình đường thẳng Δ ta được $\frac{4+1}{1} = \frac{10}{2} = \frac{17-2}{3}$ (thỏa mãn).

Câu 25: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): (x+2)^2 + y^2 + (z+5)^2 = 24$ cắt mặt phẳng $(\alpha): x+y+4=0$ theo giao tuyến là đường tròn (C) . Điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ M đến $A(4;-12;1)$ nhỏ nhất. Tung độ của điểm M bằng

- A. -6. B. -4. C. 0. D. 2.

Lời giải

Chọn B



Mặt cầu (S) có tâm $I(-2;0;-5)$, bán kính $R = 2\sqrt{6}$.

Ta có: $A \notin (\alpha)$; $AI = \sqrt{(-6)^2 + 12^2 + (-6)^2} = 6\sqrt{6} \Rightarrow A$ nằm ngoài mặt cầu (S) .

Khoảng cách từ tâm I đến (α) là: $d = d(I, (\alpha)) = \frac{|-2+0+4|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Suy ra bán kính đường tròn (C) là: $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{(2\sqrt{6})^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{22}$.

Gọi K là hình chiếu của I trên (α) .

Ta có $IK \perp (\alpha)$ nên đường thẳng IK nhận vector $\vec{n}_\alpha = (1; 1; 0)$ làm vector chỉ phương.

$$\text{Phương trình } IK: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = t \\ z = -5 \end{cases} \Rightarrow K(-2+t; t; -5).$$

Vì $K \in (\alpha)$ nên: $-2+t+t+4=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow K(-3; -1; -5)$.

Gọi H là hình chiếu của A trên (α) .

Ta có $AH \perp (\alpha)$ nên đường thẳng AH nhận vector $\vec{n}_\alpha = (1; 1; 0)$ làm vector chỉ phương.

$$\text{Phương trình } AH: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -12 + t \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow H(4+t; -12+t; 1).$$

Vì $H \in (\alpha)$ nên: $4+t-12+t+4=0 \Leftrightarrow t=2 \Rightarrow H(6; -10; 1) \Rightarrow AH = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.

$\Rightarrow KH = \sqrt{9^2 + 9^2 + 6^2} = 3\sqrt{22} > r \Rightarrow H$ nằm ngoài đường tròn (C) .

Khi đó ta có: $AM = \sqrt{AH^2 + HM^2} = \sqrt{HM^2 + 8}$.

Suy ra $AM_{\min}$ khi $HM_{\min} \Leftrightarrow H, M, K$ thẳng hàng (theo thứ tự đó).

Khi đó: $\vec{HM} = \frac{2}{3}\vec{HK}$ (*).

$$\text{Gọi } M(a; b; c). \text{ Từ (*) ta có: } \begin{cases} x-6 = \frac{2}{3}(-9) \\ y+10 = \frac{2}{3} \cdot 9 \\ z-1 = \frac{2}{3} \cdot (-6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-4 \\ z=-3 \end{cases}$$

Vậy, $M(0; -4; -3)$ nên tung độ của M bằng -4 .

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ và điểm $M(x_0; y_0; z_0) \in d: \begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=2-3t \end{cases}$.

Ba điểm A, B, C phân biệt cùng thuộc mặt cầu sao cho MA, MB, MC là tiếp tuyến của mặt cầu.

Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $D(1; 1; 2)$. Tổng $T = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$ bằng

A. 21.

B. 30.

C. 20.

D. 26.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $O(0; 0; 0)$ và bán kính $R = 3$.

Gọi $A(x; y; z) \in (S)$ ta có $OA^2 + AM^2 = OM^2$

$$\Leftrightarrow 9 + [x - (1 + t_0)]^2 + [y - (1 + 2t_0)]^2 + [z - (2 - 3t_0)]^2 = (1 + t_0)^2 + (1 + 2t_0)^2 + (2 - 3t_0)^2$$

$$\Leftrightarrow (1 + t_0)x + (1 + 2t_0)y + (2 - 3t_0)z - 9 = 0 \quad (*)$$

Tương tự, tọa độ điểm B, C cũng thỏa mãn $(*)$. Hay nói cách khác, phương trình mặt phẳng (ABC) là: $(1 + t_0)x + (1 + 2t_0)y + (2 - 3t_0)z - 9 = 0$

Mặt khác vì (ABC) đi qua $D(1; 1; 2)$ nên

$$(1 + t_0) \cdot 1 + (1 + 2t_0) \cdot 1 + (2 - 3t_0) \cdot 2 - 9 = 0 \Leftrightarrow t_0 = -1.$$

Suy ra $M(0; -1; 5)$. Vậy $T = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 26$.

Câu 27: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $N(2; 3; 4)$. Một mặt cầu bất kỳ đi qua O và N cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại $A, B, C \neq 0$. Biết rằng khi mặt cầu thay đổi nhưng vẫn thỏa đề bài, trọng tâm G của tam giác ABC luôn nằm trên một mặt phẳng cố định. Mặt phẳng cố định này chứa các trục tọa độ thành một tứ diện, tính thể tích của khối tứ diện đó.

A. $\frac{24389}{3888}$.

B. $\frac{24389}{4374}$.

C. $\frac{24389}{8748}$.

D. $\frac{24389}{2916}$.

Lời giải

Giả sử $A(a; 0; 0) = (S) \cap Ox, B(0; b; 0) = (S) \cap Oy$ và $C(0; 0; c) = (S) \cap Oz$.

Khi đó I là tâm của mặt cầu có tọa độ là $I\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; \frac{c}{2}\right)$.

Theo tính chất hình hộp, ta có $\overrightarrow{OG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OI} \Rightarrow G\left(\frac{a}{3}; \frac{b}{3}; \frac{c}{3}\right)$.

Do $O, N \in (S) \Rightarrow IO = IN \Rightarrow I$ thuộc mặt phẳng trung trực của đoạn ON

$$\Rightarrow 2a + 3b + 4c = 29 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{a}{3} + 3 \cdot \frac{b}{3} + 4 \cdot \frac{c}{3} = \frac{29}{3} \Leftrightarrow 2x_G + 3y_G + 4z_G = \frac{29}{3}$$

$$\text{Suy ra } G \in (P): 2x + 3y + 4z = \frac{29}{3}.$$

$$\text{Gọi } M = (P) \cap Ox \Rightarrow M\left(\frac{29}{6}; 0; 0\right), N = (P) \cap Oy \Rightarrow N\left(0; \frac{29}{9}; 0\right)$$

$$\text{Và } P = (P) \cap Oz \Rightarrow P\left(0; 0; \frac{29}{12}\right).$$

$$\text{Vậy } V_{OMNP} = \frac{1}{6} OM \cdot ON \cdot OP = \frac{24389}{3888}.$$

Câu 28: Trong không gian Oxyz cho hai điểm $A(4; 6; 2), B(2; -2; 0)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z = 0$. Xét đường thẳng d thay đổi thuộc (P) và đi qua B , gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên d . Biết rằng khi d thay đổi thì H thuộc một đường tròn cố định. Diện tích của hình tròn đó bằng

A. 4π .

B. π .

C. 6π .

D. 3π .

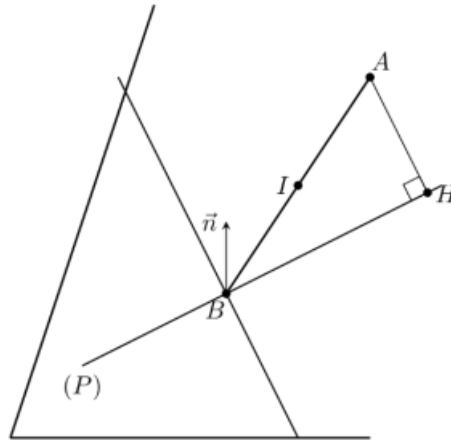
Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Do $BHA = 90^\circ$ nên H thuộc mặt cầu đường kính $AB, H \in (P)$, do đó, H chạy trên đường tròn là giao của mặt cầu đường kính AB và (P) . Đường tròn này có tâm là hình chiếu vuông góc

của I lên (P) với I là trung điểm của AB , bán kính bằng $\frac{1}{2}$ độ dài hình chiếu vuông góc của AB trên (P) .



Ta có $\overrightarrow{BA} = (2; 8; 2); \overrightarrow{n_p} = (1; 1; 1), (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{n_p}) = \alpha$

Ta có $|\cos \alpha| = \frac{|\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{n_p}|}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{n_p}|}$

$$r = \frac{1}{2} |\overrightarrow{BA}| \cdot |\sin \alpha| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{BA}| \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{6} S = \pi r^2 = 6\pi$$

Cách 2: Ta có $AB^2 = 72, d(A, (P)) = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$, vậy hình chiếu vuông góc của AB trên (P) có độ dài là $\sqrt{AB^2 - d^2} = 2\sqrt{6}$, bán kính $r = \sqrt{6}. S = \pi r^2 = 6\pi$

Câu 29: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 3 đường thẳng $(d_1), (d_2), (d_3)$ có phương trình

$$(d_1): \begin{cases} x = 1 + 2t_1 \\ y = 1 + t_1 \\ z = 1 - 2t_1 \end{cases}, (d_2): \begin{cases} x = 3 + t_2 \\ y = -1 + 2t_2 \\ z = 2 + 2t_2 \end{cases}, (d_3): \begin{cases} x = 4 + 2t_3 \\ y = 4 - 2t_3 \\ z = 1 + t_3 \end{cases} \text{ tiếp xúc với 3 đường thẳng đó. Giá trị}$$

nhỏ nhất của R gần số nào nhất trong các số sau:

A. 2,1.

B. 2,2.

C. 2,3.

D. 2,4.

Lời giải

Ta có: (d_1) đi qua điểm $A(1; 1; 1)$ có VTCP $\overrightarrow{u_1} = (2; 1; -2)$.

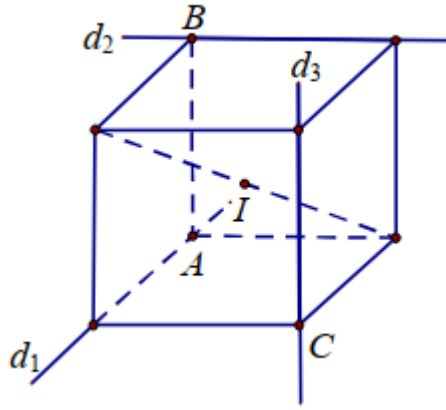
(d_2) đi qua điểm $B(3; -1; 2)$ có VTCP $\overrightarrow{u_2} = (1; 2; 2)$.

(d_3) đi qua điểm $C(4; 4; 1)$ có VTCP $\overrightarrow{u_3} = (2; -2; 1)$.

Ta có $\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2} = 0, \overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{u_3} = 0, \overrightarrow{u_3} \cdot \overrightarrow{u_1} = 0 \Rightarrow (d_1), (d_2), (d_3)$ đôi một vuông góc với nhau.

$[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] \cdot \overrightarrow{AB} \neq 0, [\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}] \cdot \overrightarrow{BC} \neq 0, [\overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_1}] \cdot \overrightarrow{CA} \neq 0 \Rightarrow (d_1), (d_2), (d_3)$ đôi một chéo nhau.

Lại có: $\overrightarrow{AB} = (2; -2; 1); \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u_1} = 0$ và $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u_2} = 0$ nên $(d_1), (d_2), (d_3)$ chứa 3 cạnh của hình hộp chữ nhật như hình vẽ.



Vì mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ tiếp xúc với 3 đường thẳng $(d_1), (d_2), (d_3)$ nên bán kính

$$R = d(I, d_1) = d(I, d_2) = d(I, d_3) \Leftrightarrow R^2 = d^2(I, d_1) = d^2(I, d_2) = d^2(I, d_3)$$

$$\Leftrightarrow R^2 = \left(\frac{[\overrightarrow{AI}, \vec{u}_1]}{|\vec{u}_1|} \right)^2 = \left(\frac{[\overrightarrow{BI}, \vec{u}_2]}{|\vec{u}_2|} \right)^2 = \left(\frac{[\overrightarrow{CI}, \vec{u}_3]}{|\vec{u}_3|} \right)^2, \text{ ta thấy } |\vec{u}_1|^2 = |\vec{u}_2|^2 = |\vec{u}_3|^2 = 9 \text{ và}$$

$$\overrightarrow{AI} = (a-1; b-1; c-1), [\overrightarrow{AI}, \vec{u}_1] = (-2b-c+3; 2a+2c-4; a-2b+1)$$

$$\overrightarrow{BI} = (a-3; b+1; c-2), [\overrightarrow{BI}, \vec{u}_2] = (2b-2c+6; -2a+c+4; 2a-b-7).$$

$$\overrightarrow{CI} = (a-4; b-4; c-1), [\overrightarrow{CI}, \vec{u}_3] = (b+2c-6; -a+2c+2; -2a-2b+16).$$

$$9R^2 = [\overrightarrow{AI}, \vec{u}_1]^2 = [\overrightarrow{BI}, \vec{u}_2]^2 = [\overrightarrow{CI}, \vec{u}_3]^2 \Rightarrow 27R^2 = [\overrightarrow{AI}, \vec{u}_1]^2 + [\overrightarrow{BI}, \vec{u}_2]^2 + [\overrightarrow{CI}, \vec{u}_3]^2$$

$$= 18(a^2 + b^2 + c^2) - 126a - 54b - 54c + 423 = 18\left(a - \frac{7}{2}\right)^2 + 18\left(b - \frac{3}{2}\right)^2 + 18\left(c - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{243}{2} \geq \frac{243}{2}$$

$$\Rightarrow R_{\min} = \frac{3\sqrt{2}}{2}, R \approx 2,12.$$

Câu 30: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho điểm $I(1;0;0)$, điểm $M\left(\frac{7}{9}; \frac{4}{9}; \frac{4}{9}\right)$ và đường

$$\text{thẳng } d: \begin{cases} x=2 \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}. N(a,b,c) \text{ là điểm thuộc đường thẳng } d \text{ sao cho diện tích tam giác } IMN \text{ nhỏ}$$

nhất. Khi đó $a+b+c$ có giá trị bằng:

- A. 2. B. -2. C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{-5}{2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } IM = \frac{2}{3}.$$

Gọi H là hình chiếu của N trên đường thẳng d' đi qua I, M , ta có:

$$S_{\triangle IMN} = \frac{1}{2} IM \cdot NH = \frac{1}{3} NH$$

Diện tích tam giác IMN nhỏ nhất khi và chỉ khi độ dài NH nhỏ nhất.

$$N \in d \Rightarrow N(2; n; 1+n) \Rightarrow \overrightarrow{IN} = (1; n; 1+n).$$

Đường thẳng d' có vectơ chỉ phương $\vec{u}' = (1; -2; -2) \cdot [\vec{IN}, \vec{u}'] = (2; n+3; -n-2)$.

$$NH = d(N; d') = \frac{|\vec{IN}, \vec{u}'|}{|\vec{u}'|} = \frac{\sqrt{2^2 + (n+3)^2 + (-n-2)^2}}{3} = \frac{\sqrt{2\left(n+\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}}}{3} \geq \frac{1}{2}.$$

Dấu = xảy ra khi $n = -\frac{5}{2}$, suy ra: $N\left(2; -\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right)$. Vậy $a+b+c = -2$.

Câu 31: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 1$ và hai điểm $A(3; 0; 0); B(-1; 1; 0)$. Gọi M là điểm thuộc mặt cầu (S) . Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA + 3MB$.

A. $2\sqrt{34}$

B. $\sqrt{26}$ **C.** 5

D. $\sqrt{34}$

Lời giải

Gọi $M(x; y; z)$ là điểm cần tìm.

Ta có: $M \in (S) \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

$$MA = \sqrt{(x-3)^2 + y^2 + z^2}; MB = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra: } MA + 3MB &= \sqrt{(x-3)^2 + y^2 + z^2} + 3\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2} \\ &= \sqrt{(x-3)^2 + y^2 + z^2 + 8(x^2 + y^2 + z^2) - 8 + 3\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2}} \\ &= 3\sqrt{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 + z^2} + 3\sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2} \\ &= 3(MC + MB) \geq 3BC \text{ với } C\left(\frac{1}{3}; 0; 0\right). \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA + 3MB$ bằng 5 khi

$$\begin{cases} M = BC \cap (S) \\ \overrightarrow{CM} = k \cdot \overrightarrow{CB} (k > 0) \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{3-8\sqrt{6}}{25}; \frac{4+6\sqrt{6}}{25}; 0\right).$$

Câu 32: Trong không gian $Oxyz$ cho đường tròn (C) là giao tuyến của mặt phẳng tọa độ (xOy) với mặt cầu $(S): (x-6)^2 + (y-6)^2 + (z+3)^2 = 41$. Gọi d là đường thẳng đi qua các điểm $A(0; 0; 12); B(0; 4; 8)$. Với M, N là các điểm thay đổi thứ tự trên (C) và d . Giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn MN gần với giá trị nào nhất sau đây?

A. 3,5.

B. 2,35.

C. 1,25.

D. 2,92.

Lời giải

Phương trình $(C): (x-6)^2 + (y-6)^2 = 32$ với tâm $I(6; 6)$ và bán kính $R = 4\sqrt{2}$.

Gọi $F = (d) \cap Oy, IK \perp Oy, D = IK \cap (C), G = IF \cap (C), ML \perp Oy$. Như vậy để MN đạt giá trị nhỏ nhất thì M phải thuộc cung nhỏ DG .

$$\begin{cases} KH \perp (d) : NL \perp (d) \\ LK = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{NL}{KH} = \frac{FL}{FK} \\ KH = d(K : (d)) = 3\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow NL = KH \frac{6-x}{6} = \frac{6-x}{\sqrt{2}}$$

$$LM = 6 - \sqrt{R^2 - d^2(I; (ML))} = 6 - \sqrt{32 - KL^2} = 6 - \sqrt{32 - x^2}$$

$$MN = \sqrt{ML^2 + LN^2} = \sqrt{\left(\frac{6-x}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(6 - \sqrt{32 - x^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(6-x)^2}{2} + \left(6 - \sqrt{32 - x^2}\right)^2} = f(x)$$

$$\text{Xét hàm số } y = f(x) = \sqrt{\frac{(6-x)^2}{2} + \left(6 - \sqrt{32 - x^2}\right)^2}, \forall x \in [-4\sqrt{2}; 4\sqrt{2}].$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x - (x+6)\sqrt{32 - x^2} = 0 \Leftrightarrow x = x_0 \approx 3,5145 \in [-4\sqrt{2}; 4\sqrt{2}]$$

$$\Rightarrow \min f(x) = f(3,5145) \approx 2,35488$$

Câu 33: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(2; -1; -1), B(0; 1; -2)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z - 2 = 0$. Điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho AMB lớn nhất, khi đó $\cos AMB$ bằng

A. $\frac{5}{13}$.

B. $\frac{12}{13}$.

C. $-\frac{12}{13}$.

D. $-\frac{5}{13}$.

Lời giải

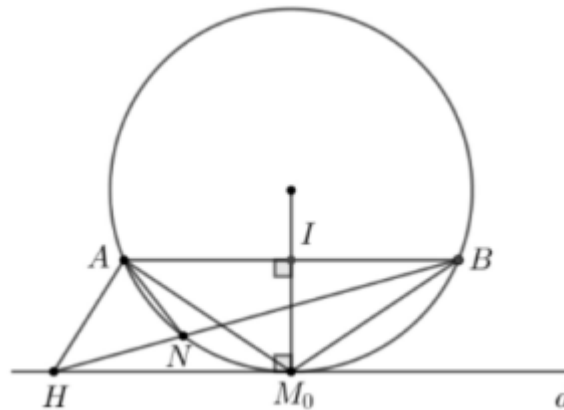
Gọi (Q) là mặt phẳng chứa AB và vuông góc với (P) ; gọi $d = (P) \cap (Q)$.

Gọi $H = h/c(M, d) \Rightarrow AMB \leq AHB$ đến đây các em có thể đưa về hàm một biến nhờ viết phương trình của d , tham số hoá tọa độ điểm H , tính $\cos AHB$ tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức này hoặc sử dụng hình học như sau:

Đề ý $\overrightarrow{AB}(-2; 2; -1) \perp \overrightarrow{n_p}(2; 1; -2), A \notin (P) \Rightarrow AB // (P) \Rightarrow AB // d$.

Trong mặt phẳng (Q) xét đường tròn qua hai điểm A, B và tiếp xúc với d tại M_0 , (M_0 chính là giao điểm của đường trung trực đoạn AB với đường thẳng d)

Nếu $H \neq M_0 \Rightarrow HB$ cắt đường tròn tại điểm N và $AHB < ANB = AMB$ vậy $AHB_{\max} = AM_0B$ không đổi. Dấu bằng đạt tại $M \equiv H \equiv M_0$



$$\text{Ta có } AB = 3, IM_0 = d(A, (P)) = 1, M_0A = M_0B = \sqrt{IA^2 + IM_0^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

$$\text{Khi đó } \cos AM_0B = \frac{M_0A^2 + M_0B^2 - AB^2}{2M_0M_0B} = \frac{\frac{13}{4} + \frac{13}{4} - 9}{2 \cdot \frac{13}{4}} = -\frac{5}{13}.$$

Câu 34: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 2; 3)$ và $B(3; 2; 5)$. Xét hai điểm M và N thay đổi thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MN = 2023$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$.

A. $2\sqrt{17}$.

B. $\sqrt{65}$.

C. $25\sqrt{97}$.

D. $205\sqrt{97}$.

Lời giải

Chọn D

Hình chiếu vuông góc của $A(-1; 2; 3)$ xuống mặt phẳng (Oxy) là $C(-1; 2; 0)$.

Hình chiếu vuông góc của $B(3; 2; 5)$ xuống mặt phẳng (Oxy) là $D(3; 2; 0)$.

Khi đó $\overrightarrow{CD} = (4; 0; 0) \Rightarrow \vec{u}_d = (1; 0; 0)$.

$$\text{Phương trình đường thẳng } CD \text{ là } \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Để } AM + BN \text{ nhỏ nhất thì hai điểm } M \text{ và } N \text{ thay đổi trên } CD \Rightarrow \begin{cases} M(3+m; 2; 0) \\ N(3+n; 2; 0) \end{cases}.$$

Theo bài $MN = 2023 \Rightarrow n - m = 2023$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AM} = (m+4; 0; -3) \Rightarrow AM = \sqrt{(m+4)^2 + 9} \text{ và } \overrightarrow{BN} = (n; 0; -5) \Rightarrow BN = \sqrt{n^2 + 25}.$$

$$\text{Khi đó } AM + BN = \sqrt{(m+4)^2 + 9} + \sqrt{n^2 + 25} = \sqrt{(m+4)^2 + 9} + \sqrt{(m+2023)^2 + 25}.$$

$$\text{Đặt } f(m) = \sqrt{(m+4)^2 + 9} + \sqrt{(m+2023)^2 + 25}.$$

$$\text{Ta có } f'(m) = \frac{m+4}{\sqrt{(m+4)^2 + 9}} + \frac{m+2023}{\sqrt{(m+2023)^2 + 25}} = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{6089}{8}.$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của } f(m) \text{ bằng } 205\sqrt{97} \text{ đạt được tại } m = -\frac{6089}{8}.$$

Câu 35: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; 3), B(0; 1; 0), C(1; 0; -2)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z + 2 = 0$. Điểm $M(a; b; c)$ nằm trên (P) sao cho biểu thức $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $T = a - b + 9c$ bằng

A. $\frac{13}{9}$.

B. $-\frac{13}{9}$.

C. 13.

D. -13.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Gọi } I(x; y; z) \text{ là điểm thỏa mãn } \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow I\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{2}\right).$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2 &= 6MI^2 + IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC}) \\ &= 6MI^2 + IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2 \end{aligned}$$

Vì $IA^2 + 2IB^2 + 3IC^2$ không đổi nên biểu thức $MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của điểm I trên (P) .

Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm I và vuông góc với mặt phẳng (P) .

$$\text{Phương trình tham số của } \Delta : \begin{cases} x = \frac{2}{3} + t \\ y = \frac{2}{3} + t \\ z = \frac{-1}{2} + t \end{cases}.$$

$$\text{Xét phương trình: } \frac{2}{3} + t + \frac{2}{3} + t - \frac{1}{2} + t + 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{-17}{18} \Rightarrow M\left(\frac{-5}{18}; \frac{-5}{18}; \frac{-13}{9}\right)$$

$$\text{Vậy } T = a - b + 9c = \frac{-5}{18} + \frac{5}{18} + 9 \cdot \frac{-13}{9} = -13.$$

Câu 36: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(\alpha): x + y - 2z - 2 = 0$ và đường thẳng

$\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-2}{1}$. Đường thẳng Δ' là hình chiếu vuông góc của đường thẳng Δ trên mặt phẳng (α) có phương trình:

A. $\frac{x+8}{3} = \frac{y-6}{5} = \frac{z+2}{4}$.

B. $\frac{x+8}{3} = \frac{y-6}{-5} = \frac{z+2}{4}$.

C. $\frac{x+1}{7} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+1}{1}$.

D. $\frac{x+1}{7} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+1}{1}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } (\alpha): x + y - 2z - 2 = 0 \Rightarrow \vec{n}_\alpha = (1; 1; -2).$$

$$\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-2}{1} \Rightarrow \vec{u}_\Delta = (2; -2; 1).$$

$$\text{Gọi } (\beta) \text{ là mặt phẳng qua } \Delta \text{ và vuông góc với } (\alpha) \Rightarrow \vec{n}_\beta = [\vec{n}_\alpha, \vec{u}_\Delta] = (-3; -5; -4).$$

Đường thẳng Δ' là hình chiếu vuông góc của đường thẳng Δ lên mặt phẳng (α) có VTCP:

$$\vec{u}_{\Delta'} = [\vec{n}_\beta, \vec{n}_\alpha] = (14; -10; 2). \text{ Chọn VTCP của } \Delta' \text{ là } \vec{u} = (7; -5; 1).$$

$$\text{Gọi } M = \Delta \cap (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-2}{1} \\ x + y - 2z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 \\ y = 6 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow M(-8; 6; -2).$$

Đường thẳng Δ' qua $M(-8; 6; -2)$ và có VTCP $\vec{u} = (7; -5; 1)$ phương trình dạng tham số:

$$\begin{cases} x = -8 + 7t \\ y = 6 - 5t \\ z = -2 + t \end{cases} \text{ . Với } t = 1 \Rightarrow I(-1; 1; -1) \in \Delta'.$$

$$\text{Phương trình đường thẳng } \Delta' \text{ dạng: } \frac{x+1}{7} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+1}{1}.$$

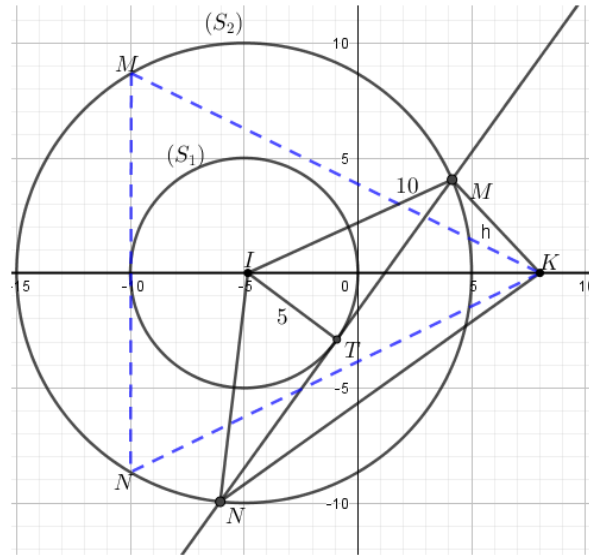
Câu 37: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho hai mặt cầu $(S_1): (x+5)^2 + y^2 + z^2 = 25$,

$(S_2): (x+5)^2 + y^2 + z^2 = 100$ và điểm $K(8;0;0)$. Đường thẳng Δ đi động nhưng luôn tiếp xúc với (S_1) , đồng thời cắt (S_2) tại hai điểm M, N . Tam giác KMN có diện tích lớn nhất bằng

A. $90\sqrt{3}$. B. $50\sqrt{6}$. C. $100\sqrt{2}$. D. $100\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $I_1 \equiv I_2 = (-5; 0; 0)$, $R_1 = 5$, $R_2 = 10$, $IK = 13 > R_2$.

Ta có R_1, R_2 không đổi nên $MN = 2\sqrt{R_2^2 - R_1^2} = 10\sqrt{3}$.

Do đó, tam giác KMN có diện tích lớn nhất khi $d(K, MN)$ lớn nhất.

Ta thấy rằng $d(K, MN)$ lớn nhất là bằng $KI + R_1 = 18$. Dấu “=” xảy ra khi K, I, T thẳng hàng (với T là tiếp điểm).

Suy ra, tam giác KMN có diện tích lớn nhất bằng:

$$S_{\Delta KMN} = \frac{1}{2} \cdot d(K, MN) \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 10\sqrt{3} = 90\sqrt{3}.$$

Câu 38: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ với $a, b, c > 0$ sao cho $2OA - OB + OC + 5\sqrt{OB^2 + OC^2} = 36$. Tính $a - b + c$ khi thể tích khối chóp $O. ABC$ đạt giá trị lớn nhất

A. 1. B. 5 C. $\frac{-36 + 36\sqrt{2}}{5}$ D. 7

Lời giải

Chọn B

$$\text{Từ } 2OA - OB + OC + 5\sqrt{OB^2 + OC^2} = 36 \Rightarrow 2a - b + c + 5\sqrt{b^2 + c^2} = 36$$

Ta có

$$\begin{aligned} 36 &= 2a - b + c + 5\sqrt{b^2 + c^2} = 2a - b + c + 5\sqrt{\frac{(4b)^2}{16} + \frac{(3c)^2}{9}} \geq 2a - b + c + 5\sqrt{\frac{(4b + 3c)^2}{16 + 9}} = 2a - b + c + 4b \\ &= 2a + 3b + 4c \geq 3\sqrt[3]{2a \cdot 3b \cdot 4c} = 3\sqrt[3]{24abc} \Rightarrow 36^3 \geq 27 \cdot 24abc \Rightarrow abc \leq 72 \Rightarrow \frac{1}{6}abc \leq 12 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V_{\max} = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4b}{16} = \frac{3c}{9} \\ 2a = 3b = 4c \\ 36 = 2a - b + c + 5\sqrt{b^2 + c^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 4 \\ c = 3 \end{cases}$$

Vậy $a - b + c = 5$

Câu 39: Trong không gian tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$ và hai điểm $A(6;0;0), B(0;0;-6)$. Khi M thay đổi trên đường thẳng d , hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = MA + MB$

A. $\min P = 6\sqrt{3}$. B. $\min P = 6\sqrt{2}$. C. $\min P = 9$. D. $\min P = 12$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

$$\text{Ta có } d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}, \text{ vì } M \in d \Rightarrow M(1+2t; 1+2t; -1+t).$$

$$\begin{aligned} P = MA + MB &= \sqrt{(2t-5)^2 + (1+2t)^2 + (t-1)^2} + \sqrt{(2t+1)^2 + (1+2t)^2 + (t+5)^2} \\ &= \sqrt{9t^2 - 18t + 27} + \sqrt{9t^2 + 18t + 27} = 3 \left[\sqrt{(1-t)^2 + (\sqrt{2})^2} + \sqrt{(t+1)^2 + (\sqrt{2})^2} \right] \end{aligned}$$

$$\text{Gọi } \vec{u} = (1-t; \sqrt{2}); \vec{v} = (t+1; \sqrt{2}).$$

$$\text{Ta có } |\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}| \Leftrightarrow \left[\sqrt{(1-t)^2 + (\sqrt{2})^2} + \sqrt{(t+1)^2 + (\sqrt{2})^2} \right] \geq 2\sqrt{3}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \frac{1-t}{1+t} = 1 \Leftrightarrow t = 0. \text{ Suy ra } P \geq 6\sqrt{3}.$$

Vậy $\min P = 6\sqrt{3}$.

Cách 2:

$$\text{Có } d(I, (P)) = \frac{|-3 - 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 - 11|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{18}{3} = 6.$$

$$\text{Gọi } R \text{ là bán kính của mặt cầu } (S), \text{ có } R = \sqrt{r^2 + d^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}.$$

$$\text{Suy ra } (S): (x+3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 52.$$