

Câu 1. (2,0 điểm)

1) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^2.(x^4 - 1)(x^2 + 2) + 1$

2) Biết $4a^2 + b^2 = 5ab$ với $2a > b > 0$. Tính giá trị biểu thức $C = \frac{ab}{4a^2 - b^2}$

Câu 2. (2,0 điểm) Giải các phương trình sau:

1) $x^2 - 3x + 2 + |x - 1| = 0$

2) $\frac{9x}{2x^2 + x + 3} - \frac{x}{2x^2 - x + 3} = 8$

Câu 3. (2,0 điểm)

1) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^2 + 2xy + 7(x + y) + 2y^2 + 10 = 0$

2) Cho đa thức $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$. Với giá trị nguyên nào của x thì giá trị của đa thức $f(x)$ chia hết cho giá trị của đa thức $x^2 + 2$

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho O là trung điểm của đoạn AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB vẽ tia Ax, By cùng vuông góc với AB. Trên tia Ax lấy điểm C (khác A), qua O kẻ đường thẳng vuông góc với OC cắt tia By tại D.

1) Chứng minh $AB^2 = 4AC.BD$

2) Kẻ OM vuông góc với CD tại M. Chứng minh $AC = CM$

3) Từ M kẻ MH vuông góc với AB tại H. Chứng minh BC đi qua trung điểm của MH .

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $x + y + z = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P = \frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z}$.

ĐÁP ÁN

Câu 1.

$$\begin{aligned} & 1) \\ & x^2(x^4 - 1)(x^2 + 2) + 1 \\ & = x^2(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^2 + 2) + 1 \\ & = (x^4 + x^2)(x^4 + x^2 - 2) + 1 \\ & = (x^4 + x^2)^2 - 2(x^4 + x^2) + 1 \\ & = (x^4 + x^2 - 1)^2 \end{aligned}$$

2)

$$4a^2 + b^2 = 5ab \Leftrightarrow (a - b)(4a - b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ 4a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = 4b \end{cases}$$

Do $2a > b > 0$ nên $4a = b$ loại

$$\text{Với } a = b \text{ thì } C = \frac{ab}{4a^2 - b^2} = \frac{a^2}{4a^2 - a^2} = \frac{1}{3}$$

Câu 2.

1)

*Với $x \geq 1$ ta có phương trình: $x^2 - 3x + 2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1(tm)$

*Với $x < 1$ ta có phương trình:

$$x^2 - 3x + 2 + 1 - x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & (ktm) \\ x = 3 & (tm) \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1$

2) Xét $x = 0$ không phải là nghiệm

Xét $x \neq 0$

$$\begin{aligned} & \frac{9x}{2x^2 + x + 3} - \frac{x}{2x^2 - x + 3} = 8 \\ & \Leftrightarrow \frac{9}{2x + 1 + \frac{3}{x}} - \frac{1}{2x - 1 + \frac{3}{x}} = 8 \end{aligned}$$

Đặt $2x + \frac{3}{x} = t$ ta có phương trình:

$$\frac{9}{t+1} - \frac{1}{t-1} = 8$$

ĐKXD: $x \neq \pm 1$

$$PT \Rightarrow 8t^2 - 8t + 2 = 0 \Leftrightarrow 2(2t - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2x + \frac{3}{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4x^2 - x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left(2x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{95}{16} = 0 \Rightarrow \text{PTVN}$$

Câu 3.

1.

Ta có:

$$x^2 + 2xy + 7(x + y) + 2y^2 + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 8xy + 28x + 28y + 8y^2 + 40 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x + 2y + 7)^2 + 4y^2 = 9(*)$$

Ta thấy: $(2x + 2y + 7)^2 \geq 0$ nên $4y^2 \leq 9 \Leftrightarrow y^2 \leq \frac{9}{4}$ do y nguyên nên $y^2 \in \{0; 1\} \Rightarrow y \in \{0; 1; -1\}$

Với $y = 0$ thay vào $(*)$ ta được $(2x + 7)^2 = 9$ tìm được $x \in \{-2; -5\}$

Với $y = 1$ thay vào $(*)$ ta có: $(2x + 9)^2 = 5$ không tìm được x nguyên

Với $y = -1$ thay vào $(*)$ ta có: $(2x + 5)^2 = 5$ không tìm được x nguyên.

Vậy $(x; y)$ nguyên tìm được $(-2; 0); (-5; 0)$

2.

Chia $f(x)$ cho $x^2 + 2$ được thương là $x - 3$ dư $x + 2$

Để $f(x)$ chia hết cho $x^2 + 2$ thì $x + 2$ chia hết cho $x^2 + 2$

$$\Rightarrow (x + 2)(x - 2) \text{ chia hết cho } x^2 + 2$$

$$\Rightarrow x^2 - 4 \text{ chia hết cho } x^2 + 2$$

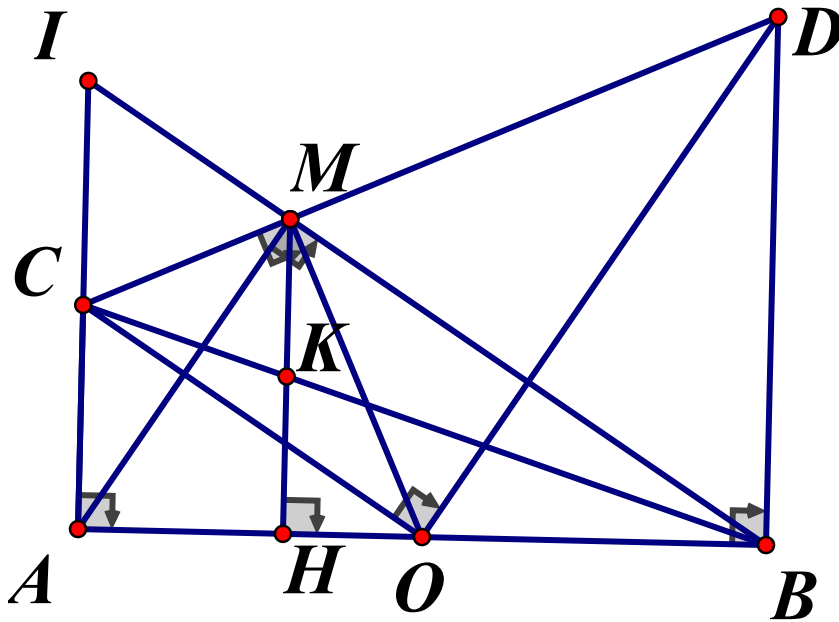
$\Rightarrow x^2 + 2 - 6$ chia hết cho $x^2 + 2$

$\Rightarrow 6$ chia hết cho $x^2 + 2$ mà $x^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow x^2 + 2 \in \{3; 6\} \Rightarrow x \in \{\pm 1; \pm 2\}$

Thử lại ta thấy $x = 1; x = -2$ thỏa mãn

Vậy với $x = 1; x = -2$ thì $f(x)$ chia hết cho $x^2 + 2$

Câu 4



1. Chứng minh $\triangle OAC \sim \triangle DBO$

$$\Rightarrow \frac{OA}{DB} = \frac{AC}{OB} \Rightarrow OA \cdot OB = AC \cdot BD$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{2} \cdot \frac{AB}{2} = AC \cdot BD \Rightarrow \frac{AB^2}{4} = AC \cdot BD (dfcm)$$

2. Theo câu a ta có: $\triangle OAC \sim \triangle DBO (g.g) \Rightarrow \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{OB}$

Mà $OA = OB \Rightarrow \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{OA} \Rightarrow \frac{OC}{AC} = \frac{OD}{OA}$

Chứng minh $\triangle OCD \sim \triangle ACO (c.g.c) \Rightarrow \angle OCD = \angle ACO$

Chứng minh $\triangle OAC = \triangle OMC (ch - gn) \Rightarrow AC = MC (dfcm)$

3. Ta có: $\triangle OAC = \triangle OMC \Rightarrow OA = OM; CA = CM \Rightarrow OC$ là trung trực của AM
 $\Rightarrow OC \perp AM$

Mặt khác $OA = OM = OB \Rightarrow \triangle AMB$ vuông tại M

$\Rightarrow OC \parallel BM$ (vì cùng vuông góc với AM) hay $OC \parallel BI$

Chứng minh được C là trung điểm của AI

Do $MH \parallel AI$ theo hệ quả định lý Ta let ta có: $\frac{MK}{IC} = \frac{BK}{BC} = \frac{KH}{AC}$

Mà $IC = AC \Rightarrow MK = HK \Rightarrow BC$ đi qua trung điểm MH (đpcm)

Câu 5.

$$P = \frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z} = (x + y + z) \left(\frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z} \right) = \left(\frac{y}{16x} + \frac{x}{4y} \right) + \left(\frac{z}{16x} + \frac{x}{z} \right) + \left(\frac{z}{4y} + \frac{y}{z} \right) + \frac{21}{16}$$

Theo BĐT cô si ta có: $\frac{y}{16x} + \frac{x}{4y} \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow y = 2x$

Tương tự $\frac{z}{16x} + \frac{x}{z} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow z = 4x; \frac{z}{4y} + \frac{y}{z} \geq 1 \Leftrightarrow z = 2y$

$\Rightarrow P \geq \frac{49}{16}$. Dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{1}{7}; y = \frac{2}{7}; z = \frac{4}{7}$