

ĐS6. CHUYÊN ĐỀ - ƯỚC CHUNG LỚN NHẤT VÀ BỘI CHUNG NHỎ NHẤT

CHỦ ĐỀ 1: CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN VÀ BÀI TOÁN ƯCLN VÀ BCNN

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. ĐỊNH NGHĨA VỀ ƯỚC VÀ BỘI

Ước: Số tự nhiên $d \neq 0$ được gọi là ước của số tự nhiên a khi và chỉ khi a chia hết cho d . Ta nói d là ước của a .

Nhận xét: Tập hợp các ước của a là $U^{(a)} = \{d \in \mathbb{N} : d \mid a\}$

Bội: Số tự nhiên m được gọi là bội của $a \neq 0$ khi và chỉ khi m chia hết cho a hay a là một ước số m .

Nhận xét: Tập hợp các bội của a ($a \neq 0$) là $B(a) = \{0; a; 2a; \dots; ka\}, k \in \mathbb{Z}$

2) Tính chất:

- Số 0 là bội của mọi số nguyên khác 0. Số 0 không phải là ước của bất kì số nguyên nào.
- Các số 1 và -1 là ước của mọi số nguyên.
- Nếu $U^{(a)} = \{1; a\}$ thì a là số nguyên tố.
- Số lượng các ước của một số: Nếu dạng phân tích ra thừa số nguyên tố của một số tự nhiên A là $a^x \cdot b^y \cdot c^z \dots$ thì số lượng các ước của A bằng $(x+1)(y+1)(z+1) \dots$

Thật vậy ước của A là số có dạng $mnp \dots$ trong đó:

m có $x+1$ cách chọn (là $1, a, a^2, \dots, a^x$)

n có $y+1$ cách chọn (là $1, b, b^2, \dots, b^y$)

p có $z+1$ cách chọn (là $1, c, c^2, \dots, c^z$),...

Do đó, số lượng các ước của A bằng $(x+1)(y+1)(z+1)$

II. Ước chung và bội chung

1) Định nghĩa

Ước chung (ƯC): Nếu hai tập hợp $U^{(a)}$ và $U^{(b)}$ có những phần tử chung thì những phần tử đó gọi là ước số chung của a và b . Kí hiệu: $ƯC^{(a,b)}$.

Nhận xét: Nếu $\text{ƯC}(a; b) = \{1\}$ thì a và b nguyên tố cùng nhau.

Ước chung lớn nhất (ƯCLN): Số $d \in \mathbb{N}$ được gọi là ước số chung lớn nhất của a và b ($a, b \in \mathbb{Z}$) khi d là phần tử lớn nhất trong tập hợp $\text{ƯC}(a; b)$. Kí hiệu ước chung lớn nhất của a và b là $\text{ƯCLN}(a; b)$ hoặc $(a; b)$ hoặc $\text{gcd}(a; b)$.

Bội chung (BC): Nếu hai tập hợp $B^{(a)}$ và $B^{(b)}$ có những phần tử chung thì những phần tử đó gọi là bội số chung của a và b . Kí hiệu $\text{BC}(a; b)$.

Bội chung nhỏ nhất (BCNN): Số $m \neq 0$ được gọi là bội chung nhỏ nhất của a và b khi m là số nhỏ nhất khác 0 trong tập hợp $\text{BC}(a; b)$. Kí hiệu bội chung nhỏ nhất của a và b là $\text{BCNN}(a; b)$ hoặc $[a; b]$ hoặc $\text{lcm}(a; b)$.

2) Tính chất

Một số tính chất của ước chung lớn nhất:

- Nếu $(a_1; a_2; \dots; a_n) = 1$ thì ta nói các số $a_1; a_2; \dots; a_n$ nguyên tố cùng nhau.
- Nếu $(a_m; a_k) = 1, \forall m \neq k, \{m, k\} \in \{1; 2; \dots; n\}$ thì ta nói các số $a_1; a_2; \dots; a_n$ đôi một nguyên tố cùng nhau.
- $c \in \text{ƯC}(a; b)$ thì $\left(\frac{a}{c}; \frac{b}{c}\right) = \frac{(a; b)}{c}$.
- $d = (a; b) \Leftrightarrow \left(\frac{a}{d}; \frac{b}{d}\right) = 1$.
- $(ca; cb) = c(a; b)$.
- $(a; b) = 1$ và $(a; c) = 1$ thì $(a; bc) = 1$
- $(a; b; c) = ((a; b); c)$
- Cho $a > b > 0$
- Nếu $a = b \cdot q$ thì $(a; b) = b$.
- Nếu $a = bq + r (r \neq 0)$ thì $(a; b) = (b; r)$.

Một số tính chất của bội chung nhỏ nhất:

- Nếu $[a; b] = M$ thì $\left(\frac{M}{a}; \frac{M}{b}\right) = 1$.
- $[a; b; c] = [[a; b]; c]$
- $[ka, kb] = k[a, b];$
- $[a; b] \cdot (a; b) = a.b$

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI

Dạng 1: Các tính chất và bài toán cơ bản về ƯCLN và BCNN

I. Phương pháp giải

Nếu dạng phân tích ra thừa số nguyên tố của một số tự nhiên A là $a^x.b^y.c^z \dots$ thì số lượng các ước của A bằng $(x+1)(y+1)(z+1) \dots$

Thật vậy ước của A là số có dạng $mnp \dots$ trong đó:

m có $x+1$ cách chọn (là $1, a, a^2, \dots, a^x$)

n có $y+1$ cách chọn (là $1, b, b^2, \dots, b^y$)

p có $z+1$ cách chọn (là $1, c, c^2, \dots, c^z$),...

Do đó, số lượng các ước của A bằng $(x+1)(y+1)(z+1)$

II. Bài toán

Bài 1: Tìm số ước của số 18^{96} .

Lời giải:

Ta có : $18^{96} = (3^2.2)^{96} = 3^{192}.2^{96}$.

Vậy số ước của số 18^{96} là $(96+1)(192+1) = 97.193 = 18721$.

Bài 2: Chứng minh rằng một số tự nhiên lớn hơn 0 là số chính phương khi và chỉ khi số ước số của nó là số lẻ.

Lời giải:

Giả sử $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ với p_i nguyên tố và $a_i \in \mathbb{N}^*$.

n là số chính phương khi và chỉ khi $a_1, a_2, \dots, a_k$ là các số chẵn khi đó $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1)$ là số lẻ.

Mặt khác $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1)$ là số các số ước của n , do đó bài toán được chứng minh.

Bài 3: Một số tự nhiên n là tổng bình phương của 3 số tự nhiên liên tiếp. Chứng minh rằng n không thể có đúng 17 ước số.

Lời giải

Tổng bình phương của 3 số tự nhiên liên tiếp có dạng :

$n = (m - 1)^2 + m^2 + (m + 1)^2 = 3m^2 + 2$ không thể là số chính phương.

Nếu n có đúng 17 ước số thì n là số chính phương (bài toán 1), vô lí. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 3: Cho $(a, b) = 1; a > b$. Chứng minh rằng:

- | | |
|---------------------|-----------------------|
| a) $(a, a + b) = 1$ | c) $(ab, a + b) = 1$ |
| b) $(b, a - b) = 1$ | d) $(a^2, a - b) = 1$ |

Lời giải

$$(a, a + b) = d (d \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow \begin{cases} a : d \\ a + b : d \end{cases} \Rightarrow b : d \Rightarrow d \in UC(a, b) \Rightarrow d \in U(UC(a, b)) \Rightarrow 1 : d \Rightarrow d = 1$$

a) Đặt

$$(ab, a + b) = d \Rightarrow \begin{cases} ab : d \\ a + b : d \end{cases}$$

c)

Giả sử $d \neq 1$. Gọi p là số ước nguyên tố của d (1 số tự nhiên khác 1 bao giờ cũng tồn tại ít nhất một ước

$$\Rightarrow d : p \Rightarrow \begin{cases} ab : p \\ a + b : p \end{cases}$$

nguyên tố)

$$ab : p \Rightarrow \begin{cases} a : b \Rightarrow b : p \\ b : p \Rightarrow a : p \end{cases} \Rightarrow p \in UC(a, b) \Rightarrow p \in U(ucIn(a, b)) \Rightarrow 1 : p \Rightarrow p = 1$$

Ta có:

(vô lý)

Vậy $d = 1 \Rightarrow (ab, a + b) = 1$

$$d) \begin{cases} a^2b:d \\ a-b:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2b:p \\ a-b:p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2:p \Rightarrow a:p \Rightarrow b:p \\ b:p \Rightarrow a:p \\ a-b:p \end{cases}$$

Bài 3: Biết rằng $\overline{abc}$ là bội chung của $\overline{ab}; \overline{ac}; \overline{bc}$. Chứng minh rằng:

a) $\overline{abc}$ là bội của $\overline{bc}$

b) $\overline{abc}$ là bội của 11

Lời giải

$$a) \overline{abc} : \overline{ab} \Leftrightarrow 10\overline{ab} + c : \overline{ab} \Leftrightarrow c : \overline{ab} \Leftrightarrow c = 0 \quad (\text{do } c \text{ có một chữ số, } \overline{ab} \text{ có hai chữ số})$$

$$\begin{cases} \overline{abc} : \overline{ac} \Rightarrow (100a + 10b) : 10a \Rightarrow b : a \\ c = 0 \end{cases}$$

$$b = ak (k \in \mathbb{N}^*)$$

Đặt

$$\begin{cases} \overline{abc} : \overline{ba} \Rightarrow 100a + 10b : (10b + a) \Rightarrow 99a : 10b + a \Rightarrow 99a : 10ak + a \Rightarrow 99 : 10k + 1 \Rightarrow 10k + 1 = 11 \\ c = 0; b = ak \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow k = 1 \Rightarrow a = b; c = 0$$

$$\text{Vì } \overline{abc} : \overline{ac} \Rightarrow \overline{abc} : \overline{bc} \Rightarrow \text{đpcm}$$

$$b) \overline{abc} = \overline{aa0} = 110a : 11 \Rightarrow \text{đpcm}$$

Bài 4: Biết rằng $[a, b] \cdot (a, b) = ab$

a. $[a, b] = 600; (a, b)$ nhỏ hơn 10 lần (a, b). Số thứ nhất là 120, tìm số thứ hai

b. $(a, b) = 12, [a, b]$ lớn gấp 6 lần (a, b). Số thứ nhất là 24, tìm số thứ hai

c. Tổng của hai số bằng 60, tổng giữa UCLN và BCNN của chúng là 84. Tìm hai số đó

Lời giải

$$(a, b) = 600 : 10 = 60; (a, b) \cdot [a, b] = ab \Rightarrow 60 \cdot 60 = 120 \cdot b \Rightarrow b = 300$$

a. Ta có:

b. Số thứ hai là 36

c. Gọi hai số phải tìm là: a và b

$$(a,b)=d, \text{ đặt } a=dm; b=dn \Rightarrow \begin{cases} (m,n)=1 \\ m,n \in \mathbb{N}^* \end{cases}; \quad [a,b] = \frac{ab}{(a,b)} = \frac{d^2 m.n}{d} = dmn$$

$$d + dmn = 4 \Leftrightarrow d(mn + 1) = 4(1)$$

Có:

$$d(m + n) = 60(2)$$

Vì tổng của hai bằng 60 nên

$$\Rightarrow 1, 2, 3, 4, 6, 12 = d \Rightarrow d = 12(\text{thoả mãn}) \Rightarrow m = 2; n = 3 \Leftrightarrow a = 24; b = 36$$

Từ (1)(2)

$$m = 3; n = 2 \Rightarrow a = 36; b = 24$$

Hoặc

Dạng 2: Tìm số nguyên n để thỏa mãn điều kiện chia hết

I. Phương pháp giải

Tách số bị chia thành phần chứa ẩn số chia hết cho số chia và phần nguyên dư, sau đó để thỏa mãn chia hết thì số chia phải là ước của phần số nguyên dư, từ đó ta tìm được số nguyên n thỏa mãn điều kiện.

II. Bài toán

Bài 1: Tìm số tự nhiên n để $5n + 14$ chia hết cho $n + 2$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } 5n + 14 = 5.(n + 2) + 4$$

$$\text{Mà } 5.(n + 2) \text{ chia hết cho } (n + 2)$$

$$\text{Do đó } (5n + 14) \text{ chia hết cho } (n + 2) \Leftrightarrow 4 \text{ chia hết cho } (n + 2) \Leftrightarrow (n + 2) \text{ là ước của } 4.$$

$$\Leftrightarrow (n + 2) \in \{1; 2; 4\}$$

$$\text{Do đó } n \in \{0; 2\}$$

$$\text{Vậy với } n \in \{0; 2\} \text{ thì } (5n + 14) \text{ chia hết cho } (n + 2).$$

$$\text{Bài 2: Tìm số tự nhiên } n \text{ để } \frac{n + 15}{n + 3} \text{ là số tự nhiên.}$$

Lời giải:

$$\text{Để } \frac{n + 15}{n + 3} \text{ là số tự nhiên thì } (n + 15) \text{ chia hết cho } (n + 3).$$

$[(n+15)-(n+3)]$ chia hết cho $(n+3)$.

$\Leftrightarrow 12$ chia hết cho $(n+3)$.

$\Leftrightarrow (n+3) \mid 12 \Rightarrow \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$.

$\Leftrightarrow n \in \{0; 1; 3; 9\}$.

Vậy với $n \in \{0; 1; 3; 9\}$ thì $\frac{n+15}{n+3}$ là số tự nhiên.

Bài 3: Tìm số tự nhiên n để $(n^2+3n+6):(n+3)$.

Lời giải:

Ta có: $(n^2+3n+6):(n+3)$

Suy ra: $[n(n+3)+6]:(n+3) \Leftrightarrow 6:(n+3)$

Do đó $n+3 \in U(6) = \{1; 2; 3; 6\}$

Vậy $n=0; n=3$ thì $(n^2+3n+6):(n+3)$.

Bài 4: Tìm số nguyên n để phân số $\frac{4n+5}{2n-1}$ có giá trị là một số nguyên.

Lời giải:

Ta có: $\frac{4n+5}{2n-1} = \frac{4n-2+7}{2n-1} = \frac{2(2n-1)+7}{2n-1} = 2 + \frac{7}{2n-1}$

Vì 2 là số nguyên nên để $\frac{4n+5}{2n-1}$ là số nguyên thì $\frac{7}{2n-1}$ là số nguyên

Suy ra $2n-1 \in U(7) = \{-7; -1; 1; 7\}$

$\Leftrightarrow 2n \in \{-6; 0; 2; 8\} \Leftrightarrow n \in \{-3; 0; 1; 4\}$

Vậy với $n \in \{-3; 0; 1; 4\}$ thì $\frac{4n+5}{2n-1}$ có giá trị là một số nguyên.

Bài 5: Tìm số tự nhiên n để biểu thức sau là số tự nhiên:

$$B = \frac{2n+2}{n+2} + \frac{5n+17}{n+2} - \frac{3n}{n+2}$$

Lời giải

Ta có:

$$B = \frac{2n+2}{n+2} + \frac{5n+17}{n+2} - \frac{3n}{n+2} = \frac{2n+2+5n+17-3n}{n+2} = \frac{4n+19}{n+2} = \frac{4(n+2)+11}{n+2} = 4 + \frac{11}{n+2}$$

Để B là số tự nhiên thì $\frac{11}{n+2}$ là số tự nhiên

$$\Rightarrow 11:(n+2) \Rightarrow n+2 \in \cup (11) = \{-11; -1; 1; 11\}$$

Do $n+2 > 1$ nên $n+2=11 \Rightarrow n=9$.

Vậy $n=9$ thì B là số tự nhiên.

Bài 6: Tìm k nguyên dương lớn nhất để ta có số $n = \frac{(k+1)^2}{k+23}$ là một số nguyên dương.

Lời giải

Ta có:
$$n = \frac{(k+1)^2}{k+23} = \frac{k^2+2k+1}{k+23} = \frac{(k+23)(k-21)+484}{k+23} = k-1 + \frac{484}{k+23}, k \in \mathbb{Z}^+$$
 n là một số

nguyên dương khi và chỉ khi $k+23 \mid 484, k+23 > 23$

$$\Rightarrow \begin{cases} k+23=121 \\ k+23=44 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=98 \\ k=21 \end{cases}$$

Ta có $484 = 22^2 = 4 \cdot 121 = 44 \cdot 11$

Với $k=98$, ta có $n=81$

Với $k=21$, ta có $n=11$

Vậy giá trị k lớn nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán là 98.

Dạng 3: Tìm số tự nhiên khi biết điều kiện về tổng, tích, thương các số và dữ kiện về ƯCLN, BNCC.

I. Phương pháp giải

- Biết $\text{ƯCLN}(a, b) = k$ thì $a = km$ và $b = kn$ với $\text{ƯCLN}(m, n) = 1$ (là điều kiện của số m, n cần tìm), từ đó tìm được a và b

- Biết $\text{BCNN}(a, b) = k$ thì ta gọi $\text{ƯCLN}(a, b) = d$ thì $a = md$ và $b = nd$ với $\text{ƯCLN}(m, n) = 1$ (là điều kiện của số m, n cần tìm), từ đó tìm được a và b .

II. Bài toán

Bài 1: Tìm hai số nguyên dương a, b biết $a+b=128$ và $\text{ƯCLN}(a, b) = 16$.

Lời giải:

Điều kiện: $a, b \in \mathbb{Z}^+$

Giả sử $0 < a \leq b$. Ta có $\text{UCLN}(a, b) = 16$

$\Rightarrow a = 16m; b = 16n$ với $(m, n \in \mathbb{Z}^+)$ $(m, n) = 1; m \leq n$
; UCLN

Biết $a + b = 128 \Rightarrow 16(m + n) = 128 \Rightarrow m + n = 8$

Vì UCLN $(m, n) = 1$ nên ta có hai trường hợp của m và n

Trường hợp 1: $m = 1, n = 7 \Rightarrow a = 16, b = 112$

Trường hợp 2: $m = 3, n = 5 \Rightarrow a = 48, b = 80$

Bài 2: Tìm hai số tự nhiên a, b , biết rằng: $a + b = 162$ và $\text{UCLN}(a, b) = 18$

Lời giải:

Điều kiện: $a, b \in \mathbb{N}$. Giả sử $a \leq b$

Ta có: $a + b = 162, (a, b) = 18$

Đặt $\begin{cases} a = 18m \\ b = 18n \end{cases}$ với $(m, n) = 1, m \leq n$

Từ $a + b = 162 \Rightarrow 18(m + n) = 162 \Rightarrow m + n = 9$

Do $(m, n) = 1$, lập bảng:

m	1	2	3	4
n	8	7	6	5
a	18	36	loại	72
b	144	126		90

Kết luận: Các số cần tìm là: $(18; 144); (36; 126); (72; 90)$

Bài 3: Tìm hai số nhỏ hơn 200, biết hiệu của chúng bằng 90 và UCLN là 15

Lời giải:

Gọi hai số cần tìm là $a; b$ $(a, b \in \mathbb{N}; a, b < 200)$

Ta có: $a - b = 90; (a, b) = 15$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = 15m \\ b = 15n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m, n) = 1 \\ 15(m - n) = 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m, n) = 1 \\ m - n = 6 \end{cases}$$

$$\text{Lại có: } a, b < 200 \Rightarrow \begin{cases} 15m < 200 \\ 15n < 200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \leq 13 \\ n \leq 13 \end{cases}$$

m	n	a	b
13	7	195	105
11	5	65	75
7	1	85	15

$$(a, b) = (195; 105), (65; 75), (85; 15).$$

Vậy:

Bài 4: Tìm hai số tự nhiên có tích bằng 432 và ƯCLN bằng 6.

Lời giải:

Gọi hai số tự nhiên cần tìm là a, b . Điều kiện: $a, b \in \mathbb{N}$.

Ta có: $ab = 432; (a, b) = 6 (a \leq b)$

$$\text{Đặt } a = 6m, b = 6n \text{ với } (m, n) = 1 \text{ và } m \leq n \Rightarrow 36mn = 432 \Rightarrow mn = 12$$

Ta được:

m	n	a	b
1	12	6	72
3	4	18	24

$$\text{Vậy } (a, b) = (6; 72), (18, 24).$$

Bài 5: Tìm hai số a, b biết $7a = 11b$ và ƯCLN $(a, b) = 45$.

Lời giải

Từ $7a = 11b$ suy ra $a > b$

$$\text{Từ ƯCLN } (a, b) = 45 \Rightarrow \begin{cases} a = 45a_1 \\ b = 45b_1 \end{cases} \quad (a_1, b_1) = 1, (a_1 \geq b_1)$$

$$\text{Mà: } \frac{a}{b} = \frac{11}{7} \Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{11}{7} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 11 \\ b_1 = 7 \end{cases} \text{ vì } (a_1, b_1) = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 45 \cdot 11 = 495 \\ b = 45 \cdot 7 = 315 \end{cases}$$

Vậy hai số a, b cần tìm là $a = 495$ và $b = 315$.

Bài 6: Cho $a = 1980, b = 2100$.

a) Tìm (a, b) và $[a, b]$.

b) So sánh $[a, b] \cdot (a, b)$ với ab . Chứng minh nhận xét đó đối với hai số tự nhiên a và b khác 0 tùy ý.

Lời giải

$$a) 1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11, \quad 2100 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7.$$

$$\text{ƯCLN}(1980, 2100) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

$$\text{BCNN}(1980, 2100) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 = 69300.$$

b) $[1980, 2100] \cdot (1980, 2100) = 1980 \cdot 2100$ (đều bằng 4158000). Ta sẽ chứng minh rằng $[a, b] \cdot (a, b) = ab$

Cách 1. Trong cách giải này, các thừa số riêng cũng được coi như các thừa số chung, chẳng hạn a chứa thừa số 11 , b không chứa thừa số 11 thì ra coi như b chứa thừa số 11 với số mũ bằng 0 . Với cách viết này, trong ví dụ trên ta có:

$$1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^0 \cdot 11.$$

$$2100 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11^0.$$

$(1980, 2100)$ là tích các thừa số chung với số mũ nhỏ nhất $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^0 \cdot 11^0 = 60$. $[1980, 2100]$ là tích các thừa số chung với số mũ lớn nhất $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 = 69300$.

Bây giờ ta chứng minh trong trường hợp tổng quát:

$$[a, b] \cdot (a, b) = ab \quad (1)$$

Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, các thừa số nguyên tố ở hai vế của (1) chính là các thừa số nguyên tố có trong a và b . Ta sẽ chứng tỏ rằng hai vế chứa các thừa số nguyên tố như nhau với số mũ tương ứng bằng nhau.

Gọi P là thừa số nguyên tố tùy ý trong các thừa số nguyên tố như vậy. Giả sử số mũ của P trong a là x , số mũ của P trong b là y trong đó x và y có thể bằng 0 . Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $x \geq y$.

Khi đó vế phải của (1) chứa P với số mũ $x + y$. Còn ở vế trái, $[a, b]$ chứa P với số mũ x , (a, b) chứa P với số mũ y nên vế trái cũng chứa P với số mũ $x + y$.

Cách 2. Gọi $d = (a, b)$ thì $a = da', b = db'$ (1), trong đó $(a', b') = 1$.

Đặt $\frac{ab}{d} = m$ (2), ta cần chứng minh rằng $[a, b] = m$.

Để chứng minh điều này, cần chứng tỏ tồn tại các số tự nhiên x, y sao cho $m = ax$, $m = by$ và $(x, y) = 1$.

Thật vậy từ (1) và (2) suy ra $m = a \cdot \frac{b}{d} = ab'$,

$m = b \cdot \frac{a}{d} = ba'$. Do đó, ta chọn $x = b', y = a'$, thế thì $(x, y) = 1$ vì $(a', b') = 1$.

Vậy $\frac{ab}{d} = [a, b]$, tức là $[a, b] \cdot (a, b) = ab$.

Bài 7: Tìm hai số tự nhiên biết rằng ƯCLN của chúng bằng 10, BCNN của chúng bằng 900.

Lời giải

Gọi các số phải tìm là a và b . Điều kiện: $a, b \in \mathbb{N}$. Giả sử $a \leq b$.

Ta có $(a, b) = 10$ nên $a = 10a', b = 10b', (a', b') = 1, a' \leq b'$. Do đó $ab = 100a'b'$ (1). Mặt khác $ab = [a, b] \cdot (a, b) = 900 \cdot 10 = 9000$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $a'b' = 90$. Ta có các trường hợp:

a'	1	2	3	4
b'	90	45	18	10

Suy ra:

a	10	20	50	90
b	900	450	180	100

Bài 5: Tìm hai số tự nhiên a, b sao cho tổng của ƯCLN và BCNN là 15.

Lời giải

Điều kiện: $a, b \in \mathbb{N}$. Giả sử $a < b$.

Gọi $d = \text{ƯCLN}(a, b) \Rightarrow \begin{cases} a = d \cdot a_1 \\ b = d \cdot b_1 \end{cases} (a_1 < b_1), (a_1, b_1) = 1$, và $d < 15$

Nên $\text{BCNN}(a, b) = a_1 \cdot b_1 \cdot d$

Theo bài ra ta có: $d + a_1 \cdot b_1 \cdot d = 15 \Rightarrow d(1 + a_1 \cdot b_1) = 15 \Rightarrow d \in U(15) = \{1; 3; 5; 15\}$, Mà $d < 15$, Nên

TH1: $d = 1 \Rightarrow a_1 \cdot b_1 = 14 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \Rightarrow a = 1 \\ b_1 = 14 \Rightarrow b = 14 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1 = 2 \Rightarrow a = 2 \\ b_1 = 7 \Rightarrow b = 7 \end{cases}$

$$\text{TH2 : } d=3 \Rightarrow a_1.b_1=4 \Rightarrow \begin{cases} a_1=1 \Rightarrow a=3 \\ b_1=4 \Rightarrow b=12 \end{cases}$$

$$\text{TH3 : } d=5 \Rightarrow a_1.b_1=2 \Rightarrow \begin{cases} a_1=1 \Rightarrow a=5 \\ b_1=2 \Rightarrow b=10 \end{cases}$$

Vậy các cặp số (a ; b) cần tìm là : (1 ; 14), (2 ; 7), (3 ; 12), (5 ; 10) và đảo ngược lại.

Bài 8: Tìm hai số nguyên dương a, b biết $ab=216$ và $\text{ƯCLN}(a, b)=6$.

Lời giải

Điều kiện: $a, b \in \mathbb{Z}^+$. Giả sử $a \leq b$. Ta có $\text{ƯCLN}(a, b)=6$.

$$\Rightarrow a=6m; b=6n (m, n \in \mathbb{Z}^+); \text{ƯCLN}(m, n)=1; m \leq n$$

$$\text{Biết } ab=216 \Rightarrow 6m.6n=36mn=216 \Rightarrow mn=6$$

Vì $\text{ƯCLN}(m, n)=1$ nên ta có hai trường hợp

$$\text{Trường hợp 1: } m=1, n=6 \Rightarrow a=6, b=36$$

$$\text{Trường hợp 2: } m=2, n=3 \Rightarrow a=12, b=18$$

Vậy hai số cần tìm là $(a, b) \in \{(6, 36); (12, 18)\}$.

Bài 9: Tìm hai số nguyên dương a, b biết $\frac{a}{b}=2,6$ và $\text{ƯCLN}(a, b)=5$.

Lời giải

Điều kiện: $a, b \in \mathbb{Z}^+$

$$\text{ƯCLN}(a, b)=5 \Rightarrow a=5m; b=5n (m, n \in \mathbb{Z}^+); \text{ƯCLN}(m, n)=1$$

$$\text{Biết } \frac{a}{b}=2,6 \Rightarrow \frac{m}{n}=2,6=\frac{13}{5} \text{ với } \text{ƯCLN}(m, n)=1.$$

$$\Rightarrow m=13 \text{ và } n=5 \Rightarrow a=65 \text{ và } b=25.$$

Bài 10: Tìm a, b biết $a+b=42$ và $\text{BCNN}(a, b)=72$.

Lời giải

Gọi $d = \text{ƯCLN}(a, b) \Rightarrow a = md; b = nd$ với $m, n \in \mathbb{Z}^+ \mid \text{CLN}(m, n) = 1$;

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \leq b$ nên $m \leq n$

Biết $a + b = 42 \Rightarrow dm + dn = d(m + n) = 42(1)$

Biết $\text{BCNN}(a, b) = 72 \Rightarrow m \cdot n \cdot d = 72(2)$

$\Rightarrow d$ là ước chung của 42 và 72 $\Rightarrow d \in \{1; 2; 3; 6\}$

Lần lượt thay các giá trị của d và (1) và (2) để tính m, n ta thấy chỉ có trường hợp $d = 6$ thì $m + n = 7$ và $mn = 12$

$\Rightarrow m = 3; n = 4$ (thỏa mãn các điều kiện của m và n)

Vậy $d = 6$ và $a = 3 \cdot 6 = 18; b = 4 \cdot 6 = 24$.

Bài 11: Tìm hai số nguyên dương a, b biết $ab = 180$, $\text{BCNN}(a, b) = 60$.

Lời giải

Điều kiện: $a, b \in \mathbb{Z}^+$

Đặt $\text{ƯCLN}(a, b) = d \Rightarrow a = md; b = nd$ với $\text{ƯCLN}(m, n) = 1 \Rightarrow \text{BCNN}(a, b) = m \cdot n \cdot d$

Biết $ab = 180 \Rightarrow m \cdot n \cdot d^2 = 180 \Rightarrow d \mid \text{CLN}(a, b) = \frac{ab}{\text{BCNN}(a, b)} = \frac{180}{60} = 3$

Từ đây bài toán đã biết $ab = 180$ và $\text{CLN}(a, b) = 3$

$\Rightarrow a = 3; b = 60$ hoặc $a = 12; b = 15$.

Bài 12: Tìm a, b biết $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$ và $\text{BCNN}(a, b) = 140$.

Lời giải

Đặt $\text{ƯCLN}(a, b) = d$.

Vì $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$, mặt khác $\vdots \text{CLN}(4,5)=1 \Rightarrow a=4d; b=5d$

Mà $BCNN(a,b)=140$, nên $\vdots \text{CLN}(a,b)=7$

Từ đây bài toán đã biết $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$ và $\vdots \text{CLN}(a,b)=7$
 $\Rightarrow a=28; b=35$

Bài 13: Tìm hai số tự nhiên a, b biết $a - b = 7$ và $BCNN(a, b) = 140$

Lời giải

Điều kiện: $a, b \in \mathbb{N}$.

Gọi $d = \text{ƯCLN}(a, b) \Rightarrow a = md; b = nd (m, n \in \mathbb{Z}^+); \text{ƯCLN}(m, n) = 1$

Biết $a - b = 7 \Rightarrow dm - dn = d(m - n) = 7 \quad (1)$

Biết $BCNN(a, b) = 140 \Rightarrow m \cdot n \cdot d = 140 \quad (2)$

$\Rightarrow d$ là ước chung của 7 và 140

$\Rightarrow d \in \{1; 7\}$

Thay lần lượt các giá trị d vào (1) và (2) để tính m, n ta được kết quả duy nhất $d=7$ thì $m - n = 1$ và

$mn = 20 \Rightarrow m = 5; n = 4 \quad \vdots \text{CLN}(m, n) = 1$
 (thỏa mãn)

Vậy $d = 7$ và $a = 5 \cdot 7 = 35; b = 4 \cdot 7 = 28$

Bài 14: Tìm hai số tự nhiên a, b biết $a + b = 96$ và $\text{ƯCLN}(a, b) = 6$

Lời giải

Điều kiện: $a, b \in \mathbb{N}$. Giả sử $a > b$.

$(a, b) = 6 \Rightarrow a = 6m; b = 6n (m, n \in \mathbb{Z}^+); \text{ƯCLN}(m, n) = 1; m > n$

Mà $a + b = 96$ nên $6m + 6n = 96 \Rightarrow m + n = 16$

Mà ƯCLN $(m, n) = 1$ nên có các trường hợp của số m, n như sau

Trường hợp 1: $m = 1; n = 5 \Rightarrow a = 66; b = 30$

Trường hợp 2: $m = 13; n = 3 \Rightarrow a = 78; b = 18$

Trường hợp 3: $m = 15; n = 1 \Rightarrow a = 90; b = 6$

Vậy hai số cần tìm là $(a, b) \in \{(66; 30); (78; 18); (90; 6)\}$.

Bài 15: Tìm hai số tự nhiên biết tổng của chúng bằng 504 và ƯCLN của chúng bằng 42

Lời giải

Gọi các số phải tìm là a và b . Điều kiện: $a, b \in \mathbb{N}$. Giả sử $a > b$.

Biết ƯCLN $(a, b) = 42 \Rightarrow a = 42m; b = 42n (m, n \in \mathbb{Z}^+)$; ƯCLN $(m, n) = 1 (m > n)$

Mà $a + b = 504 \Rightarrow 42m + 42n = 504 \Rightarrow m + n = 12$

Vì ƯCLN $(m, n) = 1$, nên có các trường hợp của số m, n như sau

Trường hợp 1: $m = 1; n = 1 \Rightarrow a = 42; b = 42$

Trường hợp 2: $m = 7; n = 5 \Rightarrow a = 294; b = 210$

Vậy hai số cần tìm là $(a, b) \in \{(42; 42); (294; 210)\}$.

Bài 16: Cho $n \in \mathbb{N}$, tìm số nguyên tố p có 2 chữ số sao cho $p = \text{ƯC}(2n - 3; 3n + 15)$

Lời giải

Vì số $p = \text{ƯC}(2n - 3; 3n + 15)$

$\Rightarrow p$ cũng là ước của hiệu $2(3n + 15) - 3(2n - 3) = 39$

Mà p là số nguyên tố có hai chữ số nên $p = 13$.

Vậy số nguyên tố cần tìm là $p = 13$.

Bài 17: Tìm hai số tự nhiên có tích bằng 300 và ƯCLN bằng 5.

Lời giải

Gọi các số phải tìm là a và b . Điều kiện: $a, b \in \mathbb{N}$. Giả sử $a > b$.

Biết ƯCLN $(a, b) = 5 \Rightarrow a = 5.m; b = 5.n (m, n \in \mathbb{Z}^+)$; $(m, n) = 1 (m > n)$
ƯCLN

Mà $ab = 300$ nên $\Rightarrow m.5.n.5 = 300 \Rightarrow mn = 12$

Mà ƯCLN $(m, n) = 1$ nên có các trường hợp của số m, n như sau

$m = 12; n = 1 \Rightarrow a = 60; b = 5$
Trường hợp 1:

$m = 4; n = 3 \Rightarrow a = 20; b = 15$
Trường hợp 2:

Vậy hai số cần tìm là $(a, b) \in \{(60; 5); (20; 15)\}$.

Bài 18: Tìm hai số tự nhiên a và b ($a < b$), biết: ƯCLN $(a, b) = 300$; BCNN $(a, b) = 900$.

Lời giải

Điều kiện: $a, b \in \mathbb{N}$.

Vì ƯCLN $(a, b) = 10$ và $a < b$

$\Rightarrow a = 10m; b = 10n (m, n \in \mathbb{Z}^+)$; $(m, n) = 1 (m < n) \Rightarrow BCNN(a, b) = 10.m.n$
ƯCLN

Mà $BCNN(a, b) = 900$ nên $mn = 90$. Khi đó có các trường hợp của số m, n như sau

$m = 5; n = 18 \Rightarrow a = 50; b = 180$
Trường hợp 1: (thỏa mãn)

$m = 9; n = 10 \Rightarrow a = 90; b = 100$
Trường hợp 2: (thỏa mãn)

Vậy hai số cần tìm là $(a, b) \in \{(50; 180); (90; 100)\}$.

Bài 19: Tìm hai số tự nhiên a và b , biết: $BCNN(a, b) = 300$; ƯCLN $(a, b) = 15$; $a + 15 = b$.

Lời giải

Điều kiện: $a, b \in \mathbb{N}$.

Vì $\text{ƯCLN}(a, b) = 15$, nên tồn tại các số tự nhiên m và n khác 0, sao cho:

$$a = 15m; b = 15n \quad (1) \quad ; \quad \text{CLN}(m, n) = 1 \quad (2)$$

và

Vì $\text{BCNN}(a, b) = 300$, $\text{BCNN}(15m, 15n) = 300 = 15 \cdot 20 \Rightarrow \text{BCNN}(m, n) = 20$
nên theo trên ta suy ra

$$a + 15 = b \Rightarrow 15m + 15 + 15n \Rightarrow 15(m + 1) = 15n \Rightarrow m + 1 = n$$

Vì

Trong các trường hợp thỏa mãn điều kiện (2) và (3) thì chỉ có trường hợp $m = 4; n = 5$ là thỏa mãn điều kiện (4)

Vậy $m = 4; n = 5$ ta được các số phải tìm là $a = 15 \cdot 4 = 60; b = 15 \cdot 5 = 75$.

Bài 20: Tìm hai số tự nhiên a và b , biết: $\text{BCNN}(a, b) = 420; \text{ƯCLN}(a, b) = 21; a + 21 = b$

Lời giải

Điều kiện: $a, b \in \mathbb{N}$.

Vì $\text{ƯCLN}(a, b) = 21$, nên tồn tại các số tự nhiên m và n khác 0, sao cho:

$$a = 21m; b = 21n \quad (1) \quad ; \quad \text{CLN}(m, n) = 1 \quad (2)$$

và

Vì $\text{BCNN}(a, b) = 420 \Rightarrow \text{BCNN}(21m, 21n) = 420 = 21 \cdot 20 \Rightarrow \text{BCNN}(m, n) = 20 \quad (3)$

$$a + 21 = b \Rightarrow 21m + 21 = 21n \Rightarrow 21(m + 1) = 21n \Rightarrow m + 1 = n \quad (4)$$

Vì

Trong các trường hợp thỏa mãn điều kiện (2) và (3) thì chỉ có trường hợp $m = 4; n = 5$ hoặc $m = 2; n = 3$ là thỏa mãn điều kiện (4)

Vậy $m = 4; n = 5$ hoặc $m = 2; n = 3$ ta được các số phải tìm là: $a = 21 \cdot 4 = 84; b = 21 \cdot 5 = 105$.

Bài 21: Tìm hai số tự nhiên a và b , biết: $\text{ƯCLN}(a, b) = 5; \text{BCNN}(a, b) = 300$.

Lời giải

Điều kiện: $a, b \in \mathbb{N}$. Giả sử $a > b$.

Biết ƯCLN $(a,b)=5 \Rightarrow a=5m; b=5n (m,n \in \mathbb{Z}^+)$; $\text{ƯCLN}(m,n)=1, m > n$

$$\Rightarrow BCNN(a,b)=5mn$$

$$BCNN(a,b)=300 \Rightarrow 5mn=300 \Leftrightarrow mn=50$$

Mà

$$(m,n)=1$$

Vì ƯCLN nên ta có các trường hợp của số m, n như sau

Trường hợp 1: $m=60, n=1 \Rightarrow a=300, b=5$

Trường hợp 2: $m=20, n=3 \Rightarrow a=100, b=15$

Trường hợp 3: $m=12, n=5 \Rightarrow a=60, b=25$

$$(a,b) \in \{(300;5); (100;15); (60;25)\}$$

Vậy hai số cần tìm là

Bài 22: Tìm hai số tự nhiên a và b , biết: $BCNN(a,b)=180$; $\text{CLN}(a,b)=12$

Lời giải

Điều kiện: $a, b \in \mathbb{N}$. Giả sử $a > b$.

Biết ƯCLN $(a,b)=12 \Rightarrow a=12m; b=12n (m,n \in \mathbb{Z}^+)$; $\text{ƯCLN}(m,n)=1, m > n$

$$\Rightarrow BCNN(a,b)=12mn$$

$$BCNN(a,b)=180 \Rightarrow mn=15$$

Mà

$$(m,n)=1$$

Vì ƯCLN nên ta có các trường hợp của số m, n như sau

Trường hợp 1: $m=15, n=1 \Rightarrow a=180, b=12$

Trường hợp 2: $m=5, n=3 \Rightarrow a=60, b=36$

Trường hợp 3: $m=12, n=5 \Rightarrow a=120, b=60$

$$(a,b) \in \{(180;12); (60;36); (120;60)\}$$

Vậy hai số cần tìm là

Bài 23: Tìm hai số tự nhiên biết tổng ƯCLN và BCNN của chúng bằng 23

Lời giải

Gọi hai số tự nhiên cần tìm là a, b và giả sử $a > b$

Đặt ƯCLN $(a, b) = d \Rightarrow a = md; b = nd$ với $m, n \in \mathbb{Z}^+$; $(m, n) = 1, m > n \Rightarrow BCNN(a, b) = dmn$

Mà ƯCLN $(a, b) + BCNN(a, b) = 23$ nên $d(m \cdot n + 1) = 23 \Rightarrow d \in \{1; 23\}$ là ước của 23 hay

Xét $d = 1$, ta có $mn + 1 = 23 \Leftrightarrow mn = 22$ với $\text{CLN}(m, n) = 1$ nên ta có các trường hợp của m, n như sau:

Trường hợp 1: $m = 22, n = 1 \Rightarrow a = 22, b = 1$

Trường hợp 2: $m = 11, n = 2 \Rightarrow a = 11, b = 2$

Xét $d = 3$, ta có $mn + 1 = 1 \Leftrightarrow mn = 0$ (không thỏa mãn)

Vậy hai số cần tìm là $(a, b) \in \{(22; 1); (11; 2)\}$

Bài 24: Tìm hai số tự nhiên biết hiệu của chúng bằng 84, ƯCLN của chúng bằng 28 và các số đó trong khoảng từ 300 đến 400.

Lời giải

Gọi các số phải tìm là a và b . Điều kiện: $a, b \in \mathbb{N}$.

Ta có ƯCLN $(a, b) = 28 \Rightarrow a = 28k; b = 28q$ với $k, q \in \mathbb{N}^*$ và k, q nguyên tố cùng nhau

Ta có $a - b = 84 \Rightarrow k - q = 3$

Theo bài ra ta có $300 \leq b < a \leq 440 \Rightarrow 10 < q < k < 16$. Chọn hai số có hiệu bằng 3 trong khoảng từ 11 đến 15 là 11 và 14; 12 và 15

Chi có 11 và 14 là hai số nguyên tố cùng nhau $\Rightarrow q = 11; k = 14 \Rightarrow a = 28 \cdot 11 = 308; b = 28 \cdot 14 = 392$

Vậy hai số cần tìm là 308 và 392.

PHẦN III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG

Bài 1: Tìm tất cả các số tự nhiên khác 0: a và b , sao cho: $(a, b) = 1$ và $\frac{a+b}{a^2+b^2} = \frac{7}{25}$.

Lời giải

Gọi $(a+b, a^2+b^2)=d \Rightarrow a+b;d$ và $a^2+b^2;d$

$$\Rightarrow a^2+2ab+b^2;d \Rightarrow 2ab;d \text{ vì } (a,b)=1$$

$$\Rightarrow (ab, a+b)=1 \Rightarrow (2ab, a+b)=(2, a+b)$$

$\Rightarrow d$ là ước số của $(2ab, a+b) \Rightarrow d$ là ước số của $(2, a+b)$

$\Rightarrow d$ là ước số của 2 $\Rightarrow d=1$ hoặc $d=2$.

$$\text{Nếu } d=1 \Rightarrow \begin{cases} a+b=7 \\ a^2+b^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=7 \\ ab=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a=4 \\ b=3 \end{cases}$$

$$\text{Nếu } d=2 \Rightarrow \begin{cases} a+b=14 \\ a^2+b^2=50 \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

Tóm lại $(a,b) \in \{(3;4)(4;3)\}$

Bài 2: Tìm tất cả các cặp số (a,b) nguyên dương thỏa mãn hai điều kiện:

- a, b đều khác 1 và ước số chung lớn nhất của a, b là 1.
- Số $N = ab(ab+1)(2ab+1)$ có đúng 16 ước số nguyên dương.

(Trích đề học sinh giỏi toán Đắk Lắk năm học 2017-2018)

Lời giải

Ta có: $N = ab(ab+1)(2ab+1)$ chia hết cho các số:

$$1; a; b(ab+1)(2ab+1); b; a(ab+1)(2ab+1); (ab+1); (2ab+1); (ab+1)(2ab+1); ab; ab(ab+1); ab(2ab+1); N; a(ab+1); a(2ab+1); b(ab+1); b(2ab+1)$$

Hay $N = ab(ab+1)(2ab+1)$ có 16 ước dương. Nên để N chỉ có đúng 16 ước dương thì $a; b; ab+1; 2ab+1$ là số nguyên tố. Do $a, b > 1 \Rightarrow ab+1 > 2$

Nếu a, b cùng lẻ thì $ab+1$ chia hết cho 2 nên là hợp số (vô lý). Do đó không mất tính tổng quát, giả sử a chẵn b lẻ $\Rightarrow a=2$.

Ta cũng có nếu b không chia hết cho 3 thì $2ab+1=4b+1$ và $ab+1=2b+1$ chia hết cho 3 là hợp số (vô lý) $\Rightarrow b=3$.

Vậy $a=2; b=3$.

Bài 3: Cho hai số tự nhiên m và n thoả mãn $\frac{m+1}{n} + \frac{n+1}{m}$ là số nguyên.

Chứng minh ước chung lớn nhất của m và n không lớn hơn $\sqrt{m+n}$.

(Trích đề học sinh giỏi Hải Dương năm học 2004-2005)

Lời giải

Gọi d là ƯCLN (m, n) suy ra m^2, n^2, mn cùng chia hết cho d^2 .

Do $\frac{m+1}{n} + \frac{n+1}{m} = \frac{m^2 + n^2 + m + n}{mn}$ là số nguyên nên $m^2 + n^2 + m + n$ cũng chia hết cho d^2 .

Suy ra $m+n$ chia hết cho $d^2 \Rightarrow m+n \geq d^2 \Rightarrow \sqrt{m+n} \geq d$.

Bài 4: Cho ba số nguyên dương a, b, c đôi một khác nhau và đồng thời thoả mãn các điều kiện:

i) a là ước của $b+c+bc$,

ii) b là ước của $a+c+ac$,

iii) c là ước của $a+b+ab$,

a) Hãy chỉ ra bộ ba số (a, b, c) thoả mãn các điều kiện trên.

b) Chứng minh rằng a, b, c không thể đồng thời là các số nguyên tố.

(Trích đề vào 10 Chuyên Sư Phạm Hà Nội năm 2007-2008)

Lời giải

a) Dễ thấy bộ số $(a, b, c) = (1, 3, 7)$ thoả mãn đề bài

b) Đặt $S = a + b + c + ab + bc + ca$.

Từ giả thiết suy ra S chia hết cho a, b, c .

Vì a, b, c đôi một khác nhau, do đó a, b, c đồng thời là các số nguyên tố thì $S : abc$ hay $S = k \cdot abc$ ($k \in \mathbb{N}$)

Không mất tính tổng quát, giả sử $a < b < c$.

Nếu $a=2$ thì b, c đều lẻ $\Rightarrow b+c+bc$ lẻ nên không chia hết cho 2.

Do đó $a \geq 3$ nên $b \geq 5, c \geq 7$. Từ $S = k \cdot abc$ ($k \in \mathbb{N}$) suy ra

$$0 < k = \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} < 1 \Rightarrow k \notin \mathbb{N}$$

Vậy a, b, c không thể đồng thời là các số nguyên tố.

Bài 5: Tìm a, b biết:

a) $[a, b] + (a, b) = 55$

b) $[a, b] - (a, b) = 5$

c) $[a, b] + (a, b) = 35$

Lời giải

a) Gọi $a = da'; b = db'$ và $(a', b') = 1$. Ta có: $[a, b] = \frac{ab}{d} = da'b'$

Theo đề bài, ta có: $da'b' + d = 55$ hay $d(a'b' + 1) = 55$. Như vậy $a'b' + 1$ là ước của 55, mặt khác $a'b' + 1 \geq 2$.

Ta có lần lượt

d	$a'b' + 1$	$a'b'$	a'	b'	a	b
11	5	$4 = 2^2$	1	4	11	44
5	11	$10 = 2 \cdot 5$	1 2	10 5	5 10	50 25
1	55	$54 = 2 \cdot 3^3$	1 2	54 27	1 2	54 27

b) Giải tương tự câu a) ta được: $d(a'b' - 1) = 5$. Từ đó:

d	$a'b' - 1$	$a'b'$	a'	b'	a	b
1	5	6	6 3	1 2	6 3	1 2

5	1	2	2	1	10	5

c) Có 6 cặp số (1, 36), (4, 9), (5, 40), (7, 42), (14, 21), (35, 70).

Bài 6: Tìm $[n, n+1, n+2]$

Lời giải

Đặt $A = [n, n+1]$ và $B = [A, n+2]$. Áp dụng tính chất $[a, b, c] = [[a, b], c]$, ta có $B = [n, n+1, n+2]$

Để thấy $(n, n+1) = 1$, suy ra $[n, n+1] = n(n+1)$ do $[a, b] \cdot (a, b) = ab$

Lại áp dụng tính chất $[a, b] = \frac{ab}{(a, b)}$ thế thì $[n, n+1, n+2] = \frac{n(n+1)(n+2)}{(n(n+1), n+2)}$

Gọi $d = (n(n+1), n+2)$. Do $(n+1, n+2) = 1$ nên $d = (n, n+2) = (n, 2)$

Xét hai trường hợp:

- Nếu n chẵn thì $d = 2$, suy ra $[n, n+1, n+2] = \frac{n(n+1)(n+2)}{2}$

- Nếu n lẻ thì $d = 1$, suy ra $[n, n+1, n+2] = n(n+1)(n+2)$

Bài 7: Tìm $n \in \mathbb{N}^*$ biết $n < 30$ để các số $3n+4$ và $5n+1$ có ước chung lớn hơn 1.

Lời giải

Gọi d là một ước chung của $3n+4$ và $5n+1$ ($d \in \mathbb{N}^*$)

Ta có $3n+4 : d$ và $5n+1 : d$ nên $5(3n+4) - 3(5n+1) : d \Leftrightarrow 17 : d \Rightarrow d \in \{1; 17\}$

Để $3n+4$ và $5n+1$ có ước chung lớn hơn 1, ta phải có $3n+4 : 17$

Hay $3(n-10) : 17$ mà ƯCLN $(3, 17) = 1$ nên $(n-10) : 17$

Do đó $n-10 = 17k$ ($k \in \mathbb{N}$)

Vì $n \in \mathbb{N}^*, n < 30 \Rightarrow -10 \leq n-10 < 20$ nên $k \in \{0; 1\}$.

Với $k=0 \Rightarrow n=10$, khi đó $3.10+4 : 17$ và $5.10+1 : 17$ (thỏa mãn)

Với $k=1 \Rightarrow n=27$, khi đó $3.27+4 : 17$ và $5.27+1 : 17$ (thỏa mãn)

Vậy $n \in \{10; 27\}$.

Bài 8: Tìm hai số nguyên dương biết $a + 2b = 48$ và ƯCLN $(a, b) + 3.BCNN(a, b) = 114$.

Lời giải

$$(a, b) = d \Rightarrow \begin{cases} a = d.a_1 \\ b = d.b_1 \end{cases}; (a_1, b_1) = 1$$

Gọi ƯCLN

$$\text{Mà: } a + 2b = 48 \Rightarrow d.a_1 + 2d.b_1 = 48 \Rightarrow d(a_1 + 2b_1) = 48 \Rightarrow d \in U(48) \quad (1)$$

Ta lại có: ƯCLN $(a, b) + 3.BCNN(a, b) = 114$

$$\Rightarrow d + 3.a_1.b_1.d = 114 \Rightarrow d(1 + 3.a_1.b_1) = 114 \Rightarrow d \in U(114) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $d \in UC(48, 114) = \{1; 2; 3; 6\}$

$$\text{Mà: } d(1 + 3.a_1.b_1) = 114 = 3.38 \Rightarrow d : 3 \Rightarrow d = 3 \text{ hoặc } d = 6$$

$$\text{TH1: } d = 3 \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 2b_1 = 16 \\ 1 + 3a_1.b_1 = 38 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 2b_1 = 16 \\ 3a_1.b_1 = 37 \end{cases} \quad (\text{loại})$$

$$\text{TH2: } d = 6 \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 2b_1 = 8 \\ 1 + 3a_1.b_1 = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 2b_1 = 8 \\ a_1.b_1 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \Rightarrow a = 12 \\ b_1 = 3 \Rightarrow b = 18 \end{cases}$$

Vậy $a = 12$ và $b = 18$.

Bài 9: Cho $m, n \in \mathbb{N}, 1 \leq m < n$. Chứng minh rằng: $(2^{2^n} + 1, 2^{2^m} + 1) = 1$.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} 2^{2^n} - 1 &= (2^{2^{n-1}} + 1)(2^{2^{n-1}} - 1) \\ &= (2^{2^{n-1}} + 1)(2^{2^{n-2}} + 1)(2^{2^{n-2}} - 1) \\ &= (2^{2^{n-1}} + 1)(2^{2^{n-2}} + 1) \dots (2^{2^m} + 1)(2^{2^m} - 1); d \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } (2^{2^n} + 1) - (2^{2^m} - 1) = 2 : d \Rightarrow d = 1 \quad (\text{vì } d \text{ lẻ})$$

$$\text{Vậy } (2^{2^n} + 1, 2^{2^m} + 1) = 1.$$

Bài 10: Cho $1 \leq m, n \in \mathbb{N}$. Tìm $(2^m - 1, 2^n - 1)$

Lời giải

Đặt $d = (m, n)$. Khi đó tồn tại các số tự nhiên r, s sao cho $rm - sm = d$.

Đặt $d_1 = (2^m - 1, 2^n - 1) \Rightarrow d_1$ lẻ.

Ta có:

$$2^n - 1 : 2^d - 1 \quad (\text{vì } n : d)$$

$$2^m - 1 : 2^d - 1 \quad (\text{vì } m : d)$$

Do đó $d_1 : 2^d - 1$

$$\text{Mặt khác: } \begin{cases} 2^n - 1 : d_1 \Rightarrow 2^m - 1 : d_1 \\ 2^m - 1 : d_1 \Rightarrow 2^{sm} - 1 : d_1 \end{cases} \Rightarrow 2^{rm} - 2^{sm} = 2^{sm} (2^{rm-sm} - 1) = 2^{sm} (2^d - 1) : d_1$$

$$\text{Mà } (2, d_1) = 1 \Rightarrow 2^d - 1 : d_1$$

Từ đó suy ra $d_1 = 2^d - 1$.

$$\text{Vậy } (2^m - 1, 2^n - 1) = 2^{(m,n)} - 1.$$

Bài 11: Cho a, m là các số nguyên lớn hơn 1. Chứng minh rằng: $(1 + a + a^2 + \dots + a^{m-1}, a - 1) = (m, a - 1)$.

Lời giải

Giả sử $d \mid (1 + a + \dots + a^{m-1})$ và $d \mid (a - 1)$, suy ra:

$$d \mid (a^{m-1} - 1) + (a^{m-2} - 1) + \dots + (a - 1) + m \Rightarrow d \mid m.$$

Vậy $d \mid m$ và $d \mid (a - 1)$.

Ngược lại, nếu $d \mid a$ và $d \mid (a - 1)$ thì $d \mid (a^{m-1} + \dots + a + 1)$

$$\text{Vậy } (1 + a + a^2 + \dots + a^{m-1}, a - 1) = (m, a - 1).$$

Bài 12: Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số lẻ thì $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}\right) = (a, b, c)$.

Lời giải

Giả sử $d \mid a, b, d, c \mid d$ thì d lẻ.

Ta có $a+b \vdots d$ và $a+b \vdots 2 \Rightarrow a+b \vdots 2d$ (do $(2, d) = 1$) $\Rightarrow \frac{a+b}{2} \vdots d$

Tương tự: $\frac{b+c}{2} \vdots d$ và $\frac{c+a}{2} \vdots d$

Vậy d là ước của $\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}$.

Ngược lại, giả sử d là ước của $\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}$ thì d là ước của $\frac{a+b}{2} + \frac{c+a}{2} - \frac{b+c}{2} = a$.

Tương tự $d \mid b$ và $d \mid c$.

$$\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}\right) = (a, b, c).$$

Vậy:

Bài 13: Tìm tất cả các cặp số (a, b) nguyên dương thỏa mãn hai điều kiện:

i) a, b đều khác 1 và ước số chung lớn nhất của a, b là 1.

ii) Số $N = ab(ab+1)(2ab+1)$ có đúng 16 ước số nguyên dương.

Lời giải

Ta có: $N = ab(ab+1)(2ab+1)$ chia hết cho các số :

$1; a; b; ab(ab+1)(2ab+1); b; a(ab+1)(2ab+1); ab+1; ab(2ab+1); 2ab+1; N; ab;$

$(ab+1)(2ab+1); b(ab+1); a(2ab+1); a(ab+1); b(2ab+1)$ có 16 ước dương. Nên để N chỉ có đúng 16

ước dương thì $a; b; ab+1; 2ab+1$ là số nguyên tố. Do $a, b > 1 \Rightarrow ab+1 > 2$

Nếu a, b cùng lẻ thì $ab+1$ chia hết cho 2 nên là hợp số (vô lý). Do đó không mất tính tổng quát, giả sử a chẵn b lẻ thì suy ra $a=2$.

Ta cũng có nếu b không chia hết cho 3 thì $2ab+1=4b+1$ và $ab+1=2b+1$ chia hết cho 3 là hợp số (vô lý), suy ra $b=3$.

Vậy $a=2, b=3$.

Bài 14: Tổng các số tự nhiên $a_1, a_2, \dots, a_{49}$ bằng 999. Hỏi ước số chung lớn nhất của chúng có thể nhận giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu ?

Lời giải

Giả sử $d=(a_1, a_2, \dots, a_{49})$, khi đó $a_1 + a_2 + \dots + a_{49} = 999 : d$, suy ra d là ước của $999 = 3^3 \cdot 37$.

Vì $d | a_k$ ($k=1, 2, \dots, 49$) nên $a_k \geq d, \forall k \Rightarrow 999 = a_1 + a_2 + \dots + a_{49} \geq 49d \Rightarrow d \leq \frac{99}{29} < 21$. Vậy d chỉ có thể nhận các giá trị 1, 3, 9.

Giá trị d lớn nhất bằng 9 khi $a_1 = a_2 = \dots = a_{48} = 9; a_{49} = 567$ (vì $9 \cdot 48 + 567 = 999$)

Bài 15: Cho $(a, b)=1$. Tìm $(11a+2b, 18a+5b)$

Lời giải

Giả sử $d=(11a+2b, 18a+5b)$, khi đó $d | 18a+5b$ và $d | 11a+2b$, suy ra

$$d | 11(18a+5b) - 18(11a+2b) = 19b \Rightarrow d | 19 \text{ hoặc } d | b.$$

- Nếu $d | b$ thì từ $d | 5(11a+2b) - 3(18a+5b) = a - 5b \Rightarrow d | a \Rightarrow d | (a, b) = 1 \Rightarrow d = 1$.

- Nếu $d | 19$ thì $d = 1$ hoặc $d = 19$.

Vậy $(11a+2b, 18a+5b)$ bằng 1 hoặc bằng 19.

❗ HẾT ❗

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>

Hướng dẫn tìm và tải các tài liệu ở đây

<https://forms.gle/LzVNwfMpYB9qH4JU6>