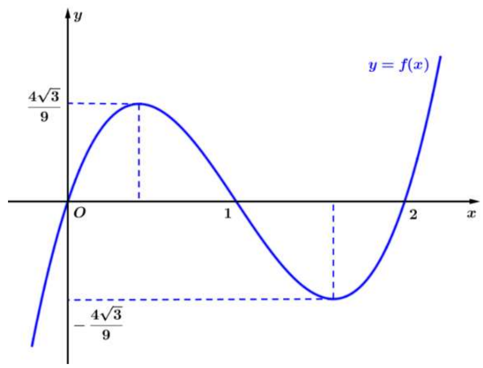
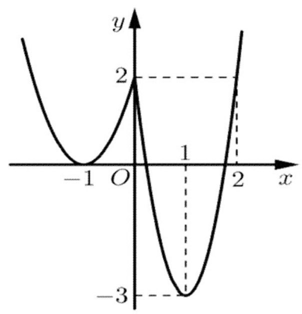
ĐỀ VDC SỐ 20 Bài toán tương giao đồ thị hàm số 01

Câu 1: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(\left|\sqrt{4-x^2}-\left|x^2-1\right|\right|\right)=\dfrac{1}{2021}$ là



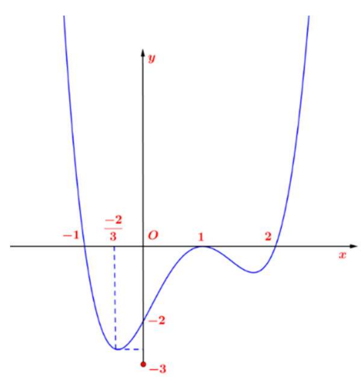
A. 24 . **B.** 14 . **C.** 12 . **D.** 10 .

Câu 2: Cho hai hàm số $u(x)=\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+3}}$ và $f(x)$, trong đó đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(u(x)) = m$ có đúng 3 nghiệm phân biệt?



A. 1. **B.** 4 . **C.** 3 . **D.** 2 .

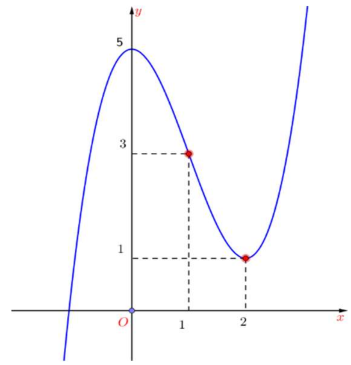
Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên R và có đồ thị $y = f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên.



Đặt $g(x) = f(f'(x)-1)$. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$. Số phần tử của tập S là

A. 8 **B.** 6 **C.** 10 **D.** 9

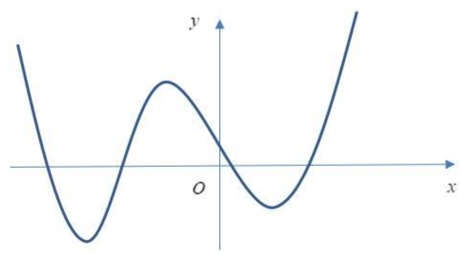
Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|\dfrac{3\sin x-\cos x-1}{2\cos x-\sin x+4}\right|+2\right)=f\left(\sqrt{(m+2)^2+4}\right)$ có nghiệm?

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.Gọi (C_1) và (C_2) lần lượt là đồ thị của hai hàm số $y=f''(x).f(x)-\left[f'(x)\right]^2$ và $y=2021^x$.Số giao điểm của (C_1) và (C_2) là

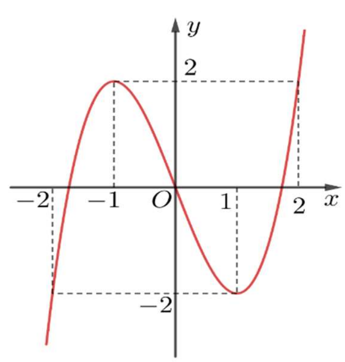


A. 1 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 4

Câu 6: Biết hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ đạt cực trị tại $x=1$ và $x=2021$. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(x)=f(m)$ có ba nghiệm phân biệt?

A. 4037. **B.** 2019. **C.** 4001. **D.** 2021.

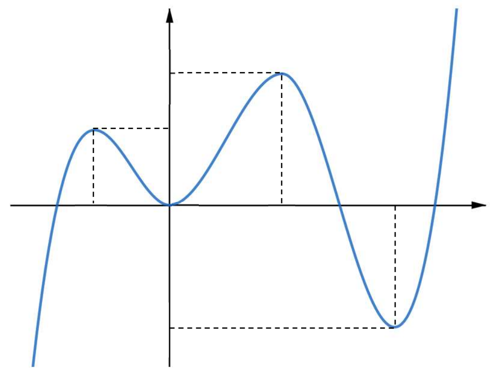
Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{4+2f(\cos x)}\right)=m$ có nghiệm $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 8: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f\left(2x^3-6x+2\right)=\dfrac{1}{2}m-5$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-1;2\right]$?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

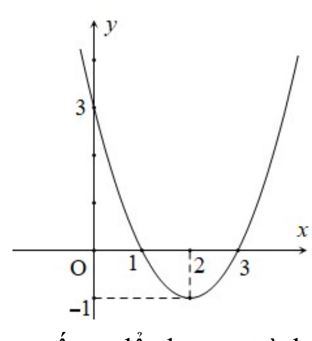
Câu 9: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-4		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $\left|f\left(f\left(x\right)\right)\right|=2$ là

A. 4. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 7.

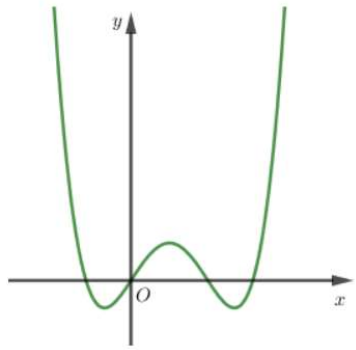
Câu 10: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^2+bx+c$ có đồ thị $\left(C\right)$



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2\left(\left|x\right|\right)+\left(m-2\right)f\left(\left|x\right|\right)+m-3=0$ có 6 nghiệm phân biệt?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 11: Biết đồ thị hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$ được cho bởi hình vẽ bên dưới. Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)=\left[f'\left(x\right)\right]^2-f\left(x\right).f''\left(x\right)$ và trục hoành:



A. 4. **B.** 0. **C.** 6. **D.** 2.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)=x+\sqrt{1+x^2}$. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $xf(x)-\dfrac{1+\sqrt{4x+m-1}}{f\left(-1-\sqrt{4x+m-1}\right)}=0$ có hai nghiệm phân biệt là

A. 2. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 13: Cho hàm số $f\left(x\right)=\left(1-m^3\right)x^3+3mx^2+\left(3m^2-2m+2\right)x+m^3+2m$ với m là tham số. Có bao nhiêu số nguyên $m\in\left[-2020;2021\right]$ sao cho $f\left(x\right)\geq 0$ với mọi $x\in\left[2020;2021\right]$?

A. 2023. **B.** 2022. **C.** 2021. **D.** 2020.

Câu 14: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=2x^3-3x^2+1$. Tập hợp các giá trị m để phương trình $f\left(f\left(\dfrac{2\sin x+1}{2}\right)\right)=f\left(m\right)$ có nghiệm là đoạn $\left[a;b\right]$. Khi đó giá trị $4a^2+8b$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(7;\dfrac{23}{2}\right)$. **B.** $\left(-2;5\right)$. **C.** $\left(\dfrac{43}{3};\dfrac{39}{2}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{37}{3};\dfrac{65}{4}\right)$.

Câu 15: Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+5x+2}{2x+1}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $2021f\left(\sqrt{3x^2-18x+28}\right)-m\sqrt{3x^2-18x+28}\geq m+4042$ nghiệm đúng với mọi x thuộc đoạn $\left[2;4\right]$.

A. 673. **B.** 808. **C.** 135. **D.** 898.

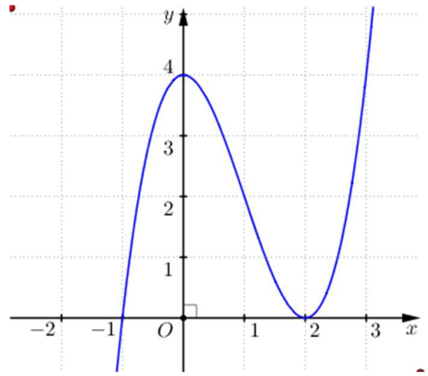
Câu 16: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		5		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	1	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Số nghiệm của phương trình $f\left(2^{3x^4-4x^2+2}\right)+1=0$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như bên dưới



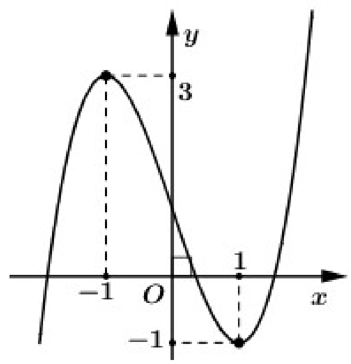
Số nghiệm phương trình $2f\left(x+1-\sqrt{6x+3}\right)=1$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 18: Cho hàm số $f(x)=x^3-\frac{1}{2}mx+m-8, x\in\mathbb{R}$ với m là một hằng số khác 0. Biết rằng phương trình $f(x)=0$ có đúng hai nghiệm phân biệt. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của k thỏa mãn phương trình $f(x)=k$ có 3 nghiệm phân biệt ?

A. 3. **B.** 34. **C.** 6. **D.** 34.

Câu 19: Cho hàm đa thức $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Đặt $g(x)=\left|f\left(x^2\right)\right|$. Số nghiệm của phương trình $g(x).\left[2g(x)-1\right]=0$ là

A. 11. **B.** 10. **C.** 13. **D.** 12.

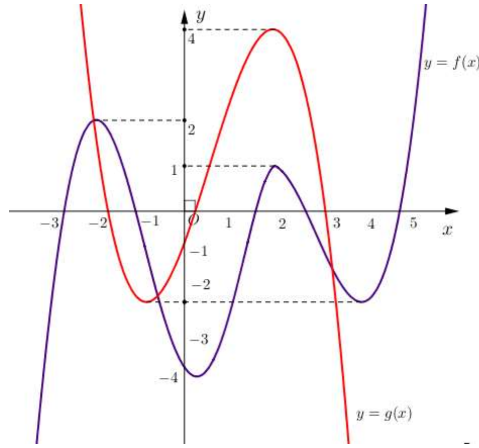
Câu 20: Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình $\left|f\left(2x^2+3\right)-2\right|=5$ có bao nhiêu nghiệm?

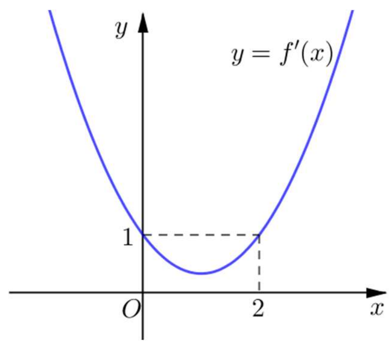
A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 21: Cho hai hàm $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Khi đó tổng số nghiệm của phương trình $f(g(x))=0$ và $g(f(x))=0$ là



A. 25. **B.** 22. **C.** 21. **D.** 26.

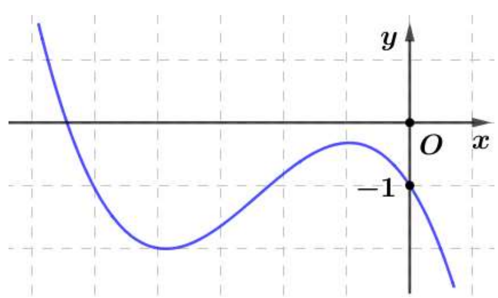
Câu 22: Cho $f(x)$ là hàm số bậc ba. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như sau:



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(e^x+1)-x-m=0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $m>f(2)$. **B.** $m>f(2)-1$. **C.** $m<f(1)-\ln 2$. **D.** $m>f(1)+\ln 2$.

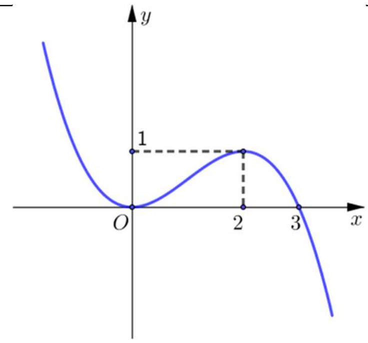
Câu 23: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(x^3f(x))+1=0$ là

A. 6. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 4.

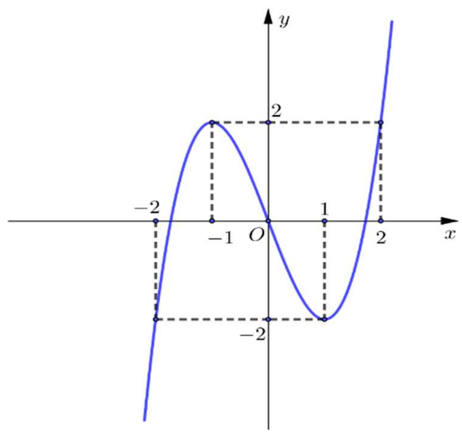
Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ với $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trên $[-5;5]$ để phương trình $f\left(-x^2+2x+m\right)=e$ có bốn nghiệm phân biệt.

A. 0. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{4+2f(\cos x)}\right)=m$ có nghiệm $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$.

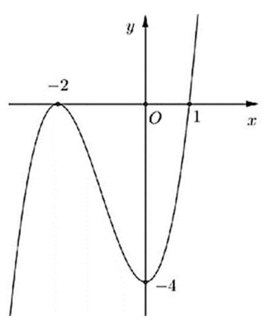


A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Câu 26: Cho hàm số $f(x)=x^3+x-2^m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(f(x)\right)=x$ có nghiệm thuộc đoạn $[1;2]$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 27: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình dưới đây

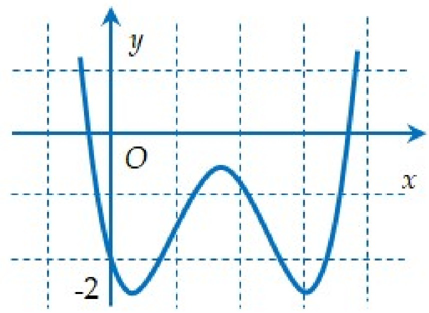


Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-5;5)$ để phương trình

$f^2(x)-(m+4)\left|f(x)\right|+2m+4=0\,(*)$ có 6 nghiệm phân biệt

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 28: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(x^2f\left(x\right)\right)+2=0$ là

A. 8. **B.** 12. **C.** 6. **D.** 9.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	2.C	3.C	4.B	5.B	6.A	7.A	8.B	9.D	10.B
11.B	12.D	13.B	14.D	15.A	16.C	17.B	18.D	19.D	20.A
21.C	22.A	23.A	24.B	25.A	26.B	27.C	28.D		

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

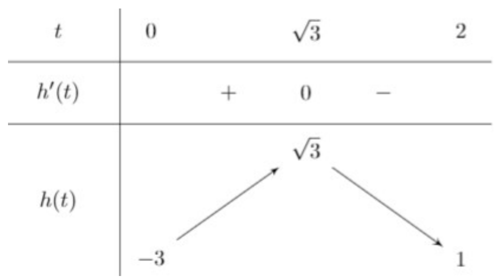
Câu 1: Chọn D

$y = g(x) = f\left(\left|\sqrt{4-x^2} - |x^2-1|\right|\right)$ với $g(x) = \dfrac{1}{2021}$

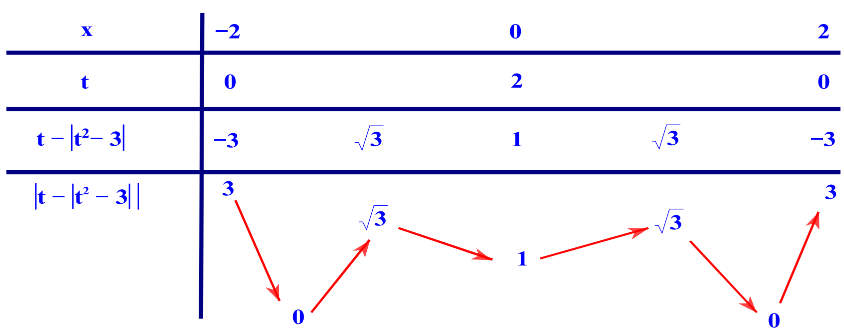
Ta đặt: $t = \sqrt{4-x^2}, \forall x \in [-2;2]$ thì suy ra $y = g(t) = f\left(\left|t - |t^2-3|\right|\right), \forall t \in [0;2]$

Suy ra: $h(t) = t - |t^2-3| = \begin{cases} t^2+t-3, t \in \left[0;\sqrt{3}\right] \\ -t^2+t+3, t \in \left[\sqrt{3};2\right] \end{cases}$.

Từ đó ta có BBT của hàm số $h(t)$ như hình vẽ bên:



Đặt $u = \left|t - |t^2-3|\right|$ thì ta cũng có BBT của u như sau:



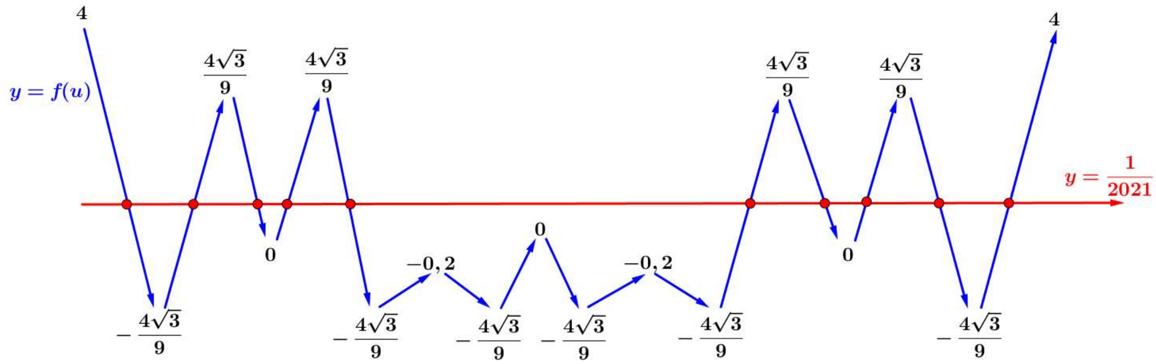
Nhìn vào đồ thị $y = f(x)$ trên ta có được:

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = ax^3+bx^2+cx, a \neq 0 \\ f(1) = f(2) = 0, f''(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{2}{3} > 0$$

Như vậy ta suy ra $f(x) = \dfrac{2}{3}x(x-1)(x-2)$. Mà hàm số đó có cực trị bằng $-\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$ tại $x = x_0$ nên suy ra $f(x_0) = \dfrac{-4\sqrt{3}}{9} \Rightarrow x_0 = \dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$

Như vậy: $f(3) = 4, f\left(\sqrt{3}\right) = -0,2, f\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{-4\sqrt{3}}{9}$

Từ đó, ta phác họa được đồ thị $y=f\left(u\right)$ với $u=\left|t-\left|t^2-3\right|\right|$ như sau:



Dựa vào hình vẽ trên, ta kết luận phương trình $g(x)=\dfrac{1}{2021}$ có tất cả 10 nghiệm phân biệt.

Câu 2: Chọn C

Đặt $t=u\left(x\right)=\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+3}}$; $u'\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{x^2+3}-\dfrac{x\left(x+3\right)}{\sqrt{x^2+3}}}{x^2+3}=\dfrac{3-3x}{\sqrt{x^2+3}\left(x^2+3\right)}$; $u'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
u′(x)		+	0	−	
u(x)	−1	↗	2	↘	1

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $u\left(x\right)\in\left(-1;2\right]$.

Phương trình $f\left(u\left(x\right)\right)=m$ trở thành $f\left(t\right)=m$, $t\in\left(-1;2\right]$.

Dựa vào đồ thị đã cho ta có:

Khi $m=2$: phương trình $f\left(t\right)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=2\end{array}\right.\Rightarrow$ phương trình $f\left(u\left(x\right)\right)=m$ có 2 nghiệm phân biệt.

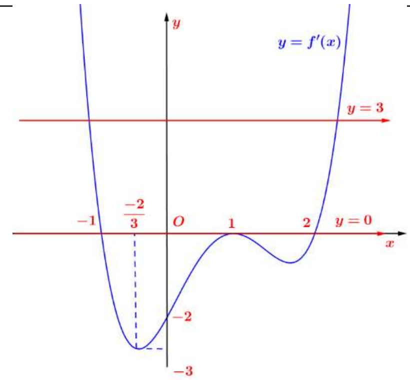
Khi $m=1$: phương trình $f\left(t\right)=1$ có 3 nghiệm $t_1\in\left(-1;0\right),t_2\in\left(0;1\right),t_3\in\left(1;2\right)\Rightarrow$ phương trình $f\left(u\left(x\right)\right)=m$ có 4 nghiệm phân biệt.

Khi $m\in\left\{0;-1;-2\right\}$: phương trình $f\left(t\right)=m$ có 2 nghiệm $t_1\in\left(0;1\right),t_2\in\left(1;2\right)\Rightarrow$ phương trình $f\left(u\left(x\right)\right)=m$ có 3 nghiệm phân biệt.

Khi $m=-3$: phương trình $f\left(t\right)=m$ có 1 nghiệm $t=1\Rightarrow$ phương trình $f\left(u\left(x\right)\right)=m$ có 1 nghiệm.

Vậy $m\in\left\{0;-1;-2\right\}$.

Câu 3: Chọn C



Ta có: $g(x)=f(f'(x)-1) \Rightarrow g'(x)=f''(x).f'(f'(x)-1)$

Phương trình $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f'(f'(x)-1)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f''(x)=0 \\ f'(x)-1=-1 \\ f'(x)-1=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f''(x)=0 \\ f'(x)=0 \\ f'(x)=3 \end{array}\right.$

Ta có đồ thị $y=f'(x)$ có cực trị tại $\left\{\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{-2}{3} \\ x=x_0 \in (1;2) \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f''(1)=0 \\ f''\left(\dfrac{-2}{3}\right)=0 \\ f''(x_0)=0 \end{array}\right. \Rightarrow f''(x)=0$ có 3 nghiệm $\left\{\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{-2}{3} \end{array}\right.; x=x_0$ cùng với $x=1$ là nghiệm bội chẵn

Tại phương trình $f'(x)=0$ ta thấy có 2 nghiệm bội lẻ $x=-1, x=2$ và nghiệm bội chẵn $x=1$

Tại phương trình $f'(x)=3$ ta thấy có 2 nghiệm mà đường thẳng $y=3$ cắt đồ thị $y=f(x)$ đó là hai điểm $x=x_1 \in (-\infty;-1)$ và $x=x_2 \in (2;+\infty)$

Vậy từ đó ta thấy phương trình $g'(x)=0$ tổng cộng có tất cả 10 nghiệm.

Câu 4: Chọn B

Ta có: $-1 \le \sin x \le 1,\ -1 \le \cos x \le 1$ nên suy ra $2\cos x - \sin x + 4 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Đặt $t = \dfrac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4} \Rightarrow t(2\cos x - \sin x + 4) = 3\sin x - \cos x - 1$

$\Leftrightarrow (2t+1)\cos x - (t+3)\sin x = -(4t+1)$.

Phương trình trên có nghiệm khi $(2t+1)^2 + (t+3)^2 \ge (4t+1)^2 \Leftrightarrow \dfrac{-9}{11} \le t \le 1 \Rightarrow 2 \le |t| + 2 \le 3$.

Nhìn vào hình trên ta thấy hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên $[2;3]$ nên phương trình $f\left(\left|\dfrac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4}\right| + 2\right) = f\left(\sqrt{(m+2)^2+4}\right)$ hay phương trình $f(|t|+2) = f\left(\sqrt{(m+2)^2+4}\right)$ có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $|t| + 2 = \sqrt{(m+2)^2+4}$ có nghiệm t thỏa mãn điều kiện $2 \le |t| + 2 \le 3 \Leftrightarrow 2 \le \sqrt{(m+2)^2+4} \le 3 \Rightarrow m^2 + 4m - 1 \le 0 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{5} \le m \le 2 + \sqrt{5}$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên có tất cả 5 giá trị m thỏa mãn.

Câu 5: Chọn B

Số giao điểm (C_1) và (C_2) là nghiệm của phương trình

$f''(x).f(x)-\left[f'(x)\right]^2=2021^x\,(*)$

Từ đồ thị ta thấy $f(x)$ cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $x_1;x_2;x_3;x_4$ nên phương trình $f(x)=0$ có bốn nghiệm phân biệt $x_1;x_2;x_3;x_4$

$\Rightarrow f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$

Nếu $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\\x=x_2\\x=x_3\\x=x_4\end{array}\right.$ thay vào $(*)$ ta thấy vế trái âm,vế phải dương nên phương trình $(*)$ vô nghiệm

Nếu $f(x)\neq 0$ nên ta có phương trình ta có phương trình $(*)$ tương đương với

$$\frac{f''(x)\cdot f(x)-\left[f'(x)\right]^2}{[f(x)]^2}=\frac{2021^x}{[f(x)]^2}\Leftrightarrow\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'=\frac{2021^x}{[f(x)]^2}$$

Ta có:

$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$

$\Rightarrow f'(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\left[\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\frac{1}{x-x_3}+\frac{1}{x-x_4}\right]$

$\Rightarrow f'(x)=f(x)\left[\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\frac{1}{x-x_3}+\frac{1}{x-x_4}\right]\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\frac{1}{x-x_3}+\frac{1}{x-x_4}$

Khi đó: $\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'=\left(\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\frac{1}{x-x_3}+\frac{1}{x-x_4}\right)'$

$=-\left(\frac{1}{(x-x_1)^2}+\frac{1}{(x-x_2)^2}+\frac{1}{(x-x_3)^2}+\frac{1}{(x-x_4)^2}\right)<0$

Mà $\frac{2021^x}{[f(x)]^2}>0$ nên phương trình $\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'=\frac{2020^x}{[f(x)]^2}$ vô nghiệm,do đó phương trình vô nghiệm.

Câu 6: Chọn A

Ta có $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+cx$

Do hàm số có 2 điểm cực trị là: $x_1=1$ và $x_2=2021$.

Nên: $\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{2b}{3a}=2022\\x_1.x_2=\frac{3}{3a}=2021\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-3033a\\c=6063a\end{cases}$

Xét phương trình: $f(x)=f(m)$

$ax^3+bx^2+cx+d=am^3+bm^2+cm+d\Leftrightarrow a\left(x^3-m^3\right)+b\left(x^2-m^2\right)+c(x-m)=0$

$\Leftrightarrow a\left(x^3-m^3\right)-3033a\left(x^2-m^2\right)+6063(x-m)=0$

$\Leftrightarrow (x-m)\left(x^2+mx+m^2-3033x-3033m+6063\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-m=0 \\ x^2+mx+m^2-3033x-3033m+6063=0 \quad (*) \end{array}\right.$

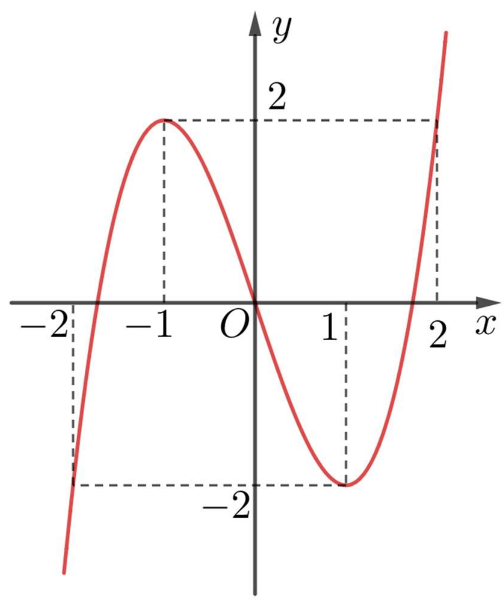
Để phương trình $f(x)=f(m)$ có 3 nghiệm phân biệt thì pt có 2 nghiệm phân biệt khác m.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=(m-3033)^2-4\left(m^2-3033m+6063\right)>0 \\ m^2+(m-3033)m+m^2-3033m+6063\neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-6063m+3033^2-4m^2+4.3033m-4.6063>0 \\ m^2+(m-3033)m+m^2-3033m+6063\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1009<m<3031 \\ m\neq 2021;\ m\neq 1 \end{cases}$

Vậy: $m\in(-1009;3031)\setminus\{1;2021\}$ có 4037 giá trị m nguyên.

Câu 7: Chọn A



Đặt $t=\cos x$, với $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow t\in(0;1)$.

Từ đồ thị suy ra $f(t)\in(-2;0)\Rightarrow 4+2f(t)\in(0;4)\Rightarrow u=\sqrt{4+2f(t)}\in(0;2)$.

Ta có $f(u)=m$ với $u\in(0;2)$.

Phương trình đã cho có nghiệm $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi phương trình $f(u)=m$ có nghiệm $u\in(0;2)\Leftrightarrow -2\le m<2$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2;-1;0;1\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 8: Chọn B

Đặt: $g(x)=f\left(2x^3-6x+2\right)$; $g'(x)=\left(6x^2-6\right).f'\left(2x^3-6x+2\right)$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2-6=0 & (1) \\ f'\left(2x^3-6x+2\right)=0 & (2) \end{cases}$$

Giải: $6x^2-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$

Giải: $f'\left(2x^3-6x+2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^3-6x+2=-2 \\ 2x^3-6x+2=0 \\ 2x^3-6x+2=3 \\ 2x^3-6x+2=6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=-2\notin[-1;2] \\ x=1 \text{ (nghiÖm kÐp)} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x\approx -1,87\notin[-1;2] \\ x\approx 0,34 \\ x\approx 1,53 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x\approx -1,64\notin[-1;2] \\ x\approx -0,16 \\ x\approx 1.81 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \text{ (nghiÖm kÐp)} \\ x=2 \end{array}\right. \end{array}\right.$

Bảng biến thiên của $g(x)$ trên đoạn $[-1;2]$

x	-1		-0.16		0.34		1		$1,53$		$1,81$		2
$g'(x)$	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+	0	−	0
$g(x)$	$-\frac{13}{4}$	↗	$\frac{7}{2}$	↘	0	↗	2	↘	0	↗	$\frac{7}{2}$	↘	$-\frac{13}{4}$

$y=\frac{1}{2}m-5$

Số nghiệm của phương trình $f\left(2x^3-6x+2\right)=\frac{1}{2}m-5$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $g(x)=f\left(2x^3-6x+2\right)$ và đường thẳng $y=\frac{1}{2}m-5$.

Kẻ đường thẳng $y=\frac{1}{2}m-5$ trên cùng bảng biến thiên của $g(x)$. Điều kiện để đường thẳng $y=\frac{1}{2}m-5$ cắt đồ thị hàm số $g(x)=f\left(2x^3-6x+2\right)$ tại 6 điểm phân biệt là:

$0<\frac{1}{2}m-5<2 \Leftrightarrow 10<m<14$. Vì $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m\in\{11;12;13\}$

Vậy có 3 số nguyên m thỏa mãn ycbt.

Câu 9: Chọn D

Ta có: $\left|f\left(f(x)\right)\right|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(f(x)\right)=2 \\ f\left(f(x)\right)=-2 \end{array}\right.$. Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

$f\left(f(x)\right)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=a\ \left(a\in(-\infty;-4)\right) \\ f(x)=b\ \left(b\in(3;+\infty)\right) \end{array}\right.$.

$$f\left(f\left(x\right)\right)=-2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=-4\\ f\left(x\right)=d\ \left(d\in\left(1;3\right)\right)\\ f\left(x\right)=e\ \left(e\in\left(3;+\infty\right)\right)\end{array}\right..$$

$f\left(x\right)=a\left(a\in\left(-\infty;-4\right)\right)$ vô nghiệm; $f\left(x\right)=b\left(b\in\left(3;+\infty\right)\right)$ có 2 nghiệm.

$f\left(x\right)=-4$ có 1 nghiệm; $f\left(x\right)=d\left(d\in\left(1;3\right)\right)$có 2 nghiệm.

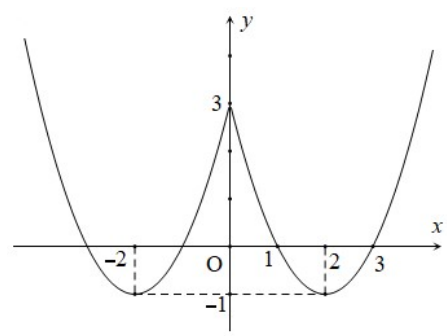
$f\left(x\right)=e\left(e\in\left(3;+\infty\right)\right)$ có 2 nghiệm$\Rightarrow\left|f\left(f\left(x\right)\right)\right|=2$ có 7 nghiệm.

Câu 10: Chọn B

Xét phương trình $f^2\left(|x|\right)+\left(m-2\right)f\left(|x|\right)+m-3=0$.

Nhận thấy $1-\left(m-2\right)+\left(m-3\right)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(|x|\right)=-1\\ f\left(|x|\right)=3-m\end{array}\right.$.

Từ đồ thị hàm số $f\left(x\right)$, suy ra đồ thị hàm số $f\left(|x|\right)$ như sau:



Với $f\left(|x|\right)=-1$, ta được 2 nghiệm x.

Để phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt, tức là phương trình $f\left(|x|\right)=3-m$ có 4 nghiệm phân biệt.

Hay $-1<3-m<3\Leftrightarrow 0<m<4\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}m\in\{1;2;3\}$.

Như vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 11: Chọn B

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y=g\left(x\right)$ và Ox là:

$$\left[f'(x)\right]^2-f\left(x\right).f''\left(x\right)=0\Leftrightarrow f\left(x\right).f''\left(x\right)-\left[f'\left(x\right)\right]^2=0\Leftrightarrow\left[\frac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}\right]'=0$$

Ta thấy đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3,x_4.

Giả sử $f\left(x\right)=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)\left(x-x_4\right),a\neq 0,x_1<x_2<x_3<x_4$

Ta có: $f'\left(x\right)=a\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)\left(x-x_4\right)+a\left(x-x_1\right)\left(x-x_3\right)\left(x-x_4\right)$

$+a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_4\right)+a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)$

Ta có: $\dfrac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}=\dfrac{1}{x-x_1}+\dfrac{1}{x-x_2}+\dfrac{1}{x-x_3}+\dfrac{1}{x-x_4}$

Ta có: $\left[\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right]' = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{(x-x_1)^2} - \dfrac{1}{(x-x_2)^2} - \dfrac{1}{(x-x_3)^2} - \dfrac{1}{(x-x_4)^2} = 0$ vô nghiệm.

Vậy số giao điểm của đồ thị hàm số $y = g(x)$ và trục hoành bằng 0.

Câu 12: Chọn D

Ta có: $f(x) = x + \sqrt{1+x^2} \Rightarrow f'(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác, ta lại có: $f(-x) = -x + \sqrt{1+x^2} = \dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1}{f(x)}$.

Nên phương trình tiếp theo tương đương với: $xf(x) - \dfrac{1+\sqrt{4x+m-1}}{f\left(-1-\sqrt{4x+m-1}\right)} = 0$.

$\Leftrightarrow xf(x) - \left(1+\sqrt{4x+m-1}\right) f\left(1+\sqrt{4x+m-1}\right) = 0$.

$\Leftrightarrow xf(x) = \left(1+\sqrt{4x+m-1}\right) f\left(1+\sqrt{4x+m-1}\right)$.

Đến đây ta xét hàm đặc trưng $y = g(t) = tf(t) = t.\left(t+\sqrt{t^2+1}\right) = t^2 + t\sqrt{t^2+1}$.

Có $g'(t) = 2t + \sqrt{t^2+1} + \dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+1}} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên suy ra $g(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow g(x) = g\left(1+\sqrt{4x+m-1}\right) \Leftrightarrow x = 1+\sqrt{4x+m-1} \Leftrightarrow \sqrt{4x+m-1} = x-1$.

Do $\sqrt{4x+m-1} \ge 0$ nên suy ra $\begin{cases} x-1 \ge 0 \\ 4x+m-1 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ m = x^2-6x+2 \end{cases}$.

Xét hàm $y = p(x) = x^2 - 6x + 2, \forall x \ge 1 \Rightarrow p'(x) = 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Ta có bảng biến thiên của hàm $p(x)$ như sau:

x	1		3		$+\infty$
$p'(x)$		$-$	0	$+$	
$p(x)$	-3	$\searrow$	-7	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT trên để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $m \in \left(p(3); p(1)\right] \Leftrightarrow m \in (-7; -3]$
.

Như vậy, ta kết luận có tất cả 4 giá trị nguyên thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 13: Chọn B

$f(x) = \left(1-m^3\right)x^3 + 3mx^2 + \left(3m^2-2m+2\right)x + m^3 + 2m \ge 0 \;\forall x \in [2020; 2021]$

$\Leftrightarrow (x+m)^3 + 2(x+m) \ge (mx)^3 + 2mx \;\forall x \in [2020; 2021] (1)$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t,\; f'(t) = 3t^2 + 2 > 0 \forall t$

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên (1) suy ra

$x+m\ge mx\ \forall x\in[2020;2021]\Leftrightarrow m\le\dfrac{x}{x-1}\ \forall x\in[2020;2021]\Leftrightarrow m\le\dfrac{2021}{2020}$.

Vậy trên đoạn $[-2020;2021]$ có 2022 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 14: Chọn D

Ta có: $y'=6x^2-6x$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Ta có: $\dfrac{2\sin x+1}{2}=\sin x+\dfrac{1}{2}\in\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right]$ suy ra $f\left(\dfrac{2\sin x+1}{2}\right)\in[0;1]$ nên $f\left(f\left(\dfrac{2\sin x+1}{2}\right)\right)\in[0;1]$.

Phương trình $f\left(f\left(\dfrac{2\sin x+1}{2}\right)\right)=f(m)$ có nghiệm $\Leftrightarrow 0\le f(m)\le 1\Leftrightarrow\begin{cases}2m^3-3m^2+1\ge 0\\2m^3-3m^2\le 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}\le m\le\dfrac{3}{2}$.

Vậy $4a^2+8b=4.\dfrac{1}{4}+8.\dfrac{3}{2}=13$.

Câu 15: Chọn A

Đặt $u=\sqrt{3x^2-18x+28}=\sqrt{3(x-3)^2+1}=\sqrt{3(x-2)(x-4)+4}$ do đó ta có với $\forall x\in[2;4]$ thì $u\in[1;2]$.

Biến đổi BPT ta được $2021f(u)-m.u\ge m+4042\Leftrightarrow 2021\left[f(u)-2\right]\ge m(u+1)$.

Ta có $f(x)=\dfrac{x^2+5x+2}{2x+1}$ nên $f(u)-2=\dfrac{u^2+5u+2}{2u+1}-2=\dfrac{u^2+u}{2u+1}$ do vậy bất phương trình được biến đổi tiếp $\dfrac{2021(u^2+u)}{2u+1}\ge m(u+1)\Leftrightarrow m\le\dfrac{2021u}{2u+1}$.

Lúc này yêu cầu bài toán tương đương $m\le\dfrac{2021u}{2u+1},\forall u\in[1;2]\Leftrightarrow m\le\min\limits_{u\in[1;2]}g(u)$.

Xét hàm số $g(u)=\dfrac{2021u}{2u+1},u\in[1;2]$ ta có $g'(u)=\dfrac{2021}{(2u+1)^2}>0,\forall u\in[1;2]$ do vậy hàm số $g(u)$ tăng trên đoạn $[1;2]$. Vì vậy $\min\limits_{u\in[1;2]}g(u)=\dfrac{2021u}{2u+1}=g(1)=\dfrac{2021}{3}$.

Kết hợp với m là các số nguyên dương ta được $m\in\{1;2;3;...;673\}$.

Vậy tìm được 673 số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 16: Chọn C

Câu 17: Chọn B

Đặt $t = x+1-\sqrt{6x+3}$, $x \ge -\dfrac{1}{2}$.

Ta có $t' = 1-\dfrac{3}{\sqrt{6x+3}} = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Khi đó bảng biến thiên của hàm số là

x	$-\dfrac{1}{2}$		1		$+\infty$
t'		$-$	0	$+$	
t	$\dfrac{1}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình đã cho trở thành $f(t) = \dfrac{1}{2}$. Dựa và đồ thị ta thấy phương trình có 3 nghiệm là

$$\left[\begin{array}{l} t = a \in (-1;0) \\ t = b \in (1;2) \\ t = c \in (2;3) \end{array}\right. .$$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $t = x+1-\sqrt{6x+3}$ ta có

Phương trình $t = a \Leftrightarrow x+1-\sqrt{6x+3} = a$ có 2 nghiệm và phương trình $t = b \Leftrightarrow x+1-\sqrt{6x+3} = b$ có 1 nghiệm và Phương trình $t = c \Leftrightarrow x+1-\sqrt{6x+3} = c$ có 1 nghiệm.

Vậy phương trình $2f\left(x+1-\sqrt{6x+3}\right) = 1$ có 4 nghiệm.

Câu 18: Chọn D

Ta có: hệ số $a = 1 > 0$ và $f(x) = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị và 1 điểm thuộc trục hoành.

$f'(x) = 3x^2 - \dfrac{m}{2}$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{m}{6}}\,(m > 0)$.

Trường hợp 1 : $\left(\sqrt{\dfrac{m}{6}}\right)^3 - \dfrac{1}{2}m\sqrt{\dfrac{m}{6}} + m - 8 = 0 \Leftrightarrow m = 24$.

$m = 24 : f(x) = x^3 - 12x + 16$.

$f(x) = k$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ $k \in (0;32)$.

Có 31 giá trị nguyên của k thỏa mãn.

Trường hợp 1 : $-\left(\sqrt{\dfrac{m}{6}}\right)^3 + \dfrac{1}{2}m\sqrt{\dfrac{m}{6}} + m - 8 = 0 \Leftrightarrow m = 6$.

$m = 6 : f(x) = x^3 - 3x - 2$.

$f(x) = k$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ $k \in (-4;0)$.

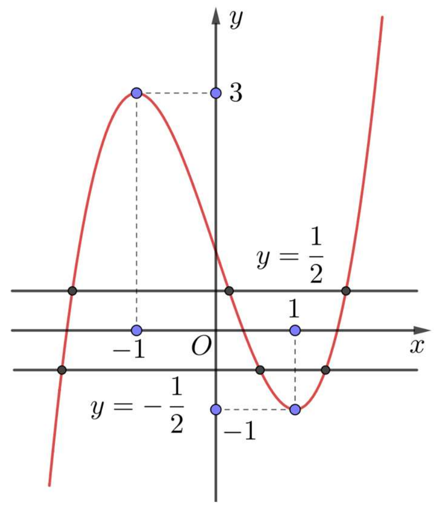
Có 3 giá trị nguyên của k thỏa mãn.

Vậy có 34 giá trị nguyên của k thỏa mãn.

Câu 19: Chọn D

Ta có $g(x).\left[2g(x)-1\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x)=0 \\ g(x)=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|f(x^2)\right|=0 \\ \left|f(x^2)\right|=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x^2)=0 & (1) \\ f(x^2)=\dfrac{1}{2} & (2) \\ f(x^2)=-\dfrac{1}{2} & (3) \end{array}\right.$.

Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ suy ra



+) $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=a<-1 \\ x^2=b\in(0;1) \\ x^2=c>1 \end{array}\right.$. Suy ra phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

+) $(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=d<-1,(d\neq a) \\ x^2=e\in(0;1),(e\neq b) \\ x^2=f>1,(f\neq c) \end{array}\right.$. Suy ra phương trình có 4 nghiệm phân biệt khác 4 nghiệm phân biệt của phương trình.

+) $(3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=m<-1,(m\neq d,a) \\ x^2=n\in(0;1),(n\neq e,b) \\ x^2=p>1,(p\neq f,c) \end{array}\right.$. Suy ra phương trình có 4 nghiệm phân biệt khác 4 nghiệm phân biệt của phương trình và 4 nghiệm phân biệt của phương trình.

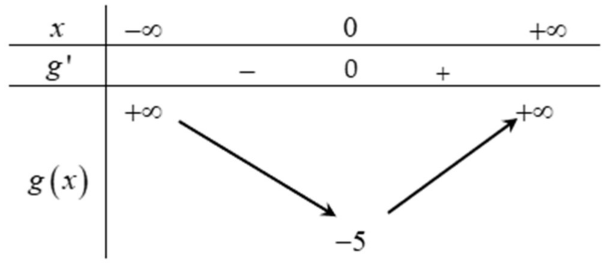
Vậy phương trình $g(x).\left[2g(x)-1\right]=0$ có tất cả 12 nghiệm

Câu 20: Chọn A

Gọi $g(x)=f\left(2x^2+3\right)-2$. Ta có: $g'(x)=4x.f'\left(2x^2+3\right)$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 2x^2+3=-1 \Leftrightarrow x=0 \\ 2x^2+3=3 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên:



Mà $|g(x)|=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x)=5 \\ g(x)=-5 \end{array}\right.$. Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình có 3 nghiệm.

Câu 21: Chọn C

Ta có $g(f(x))=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=-2 \ (1) \\ f(x)=\alpha,(\alpha\in(0;1)) \ (2) \\ f(x)=3 \ (3) \end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị hàm số $g(x)$ suy ra phương trình (1) có 4 nghiệm; phương trình (2) có 5 nghiệm và phương trình (3) có 1 nghiệm. Vậy phương trình $g(f(x))=0$ có 10 nghiệm.

Ta có $f(g(x))=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x)=-3 \ (4) \\ g(x)=-1 \ (5) \\ g(x)=1 \ (6) \\ g(x)=a,(a\in(1;2)) \ (7) \\ g(x)=b,(b\in(4;5)) \ (8) \end{array}\right.$.

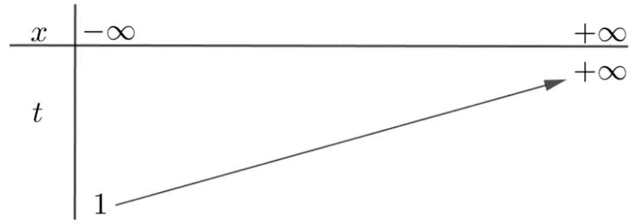
Dựa vào đồ thị hàm số $g(x)$ suy ra phương trình (4) có 1 nghiệm; phương trình $(5);(6);(7)$ mỗi phương trình có 3 nghiệm và phương trình (8) có 1 nghiệm. suy ra phương trình $f(g(x))=0$ có 11 nghiệm.

Vậy tổng số nghiệm của phương trình $f(g(x))=0$ và $g(f(x))=0$ là 21.

Câu 22: Chọn A

Ta có: $f(e^x+1)-x-m=0 \Leftrightarrow f(e^x+1)-x=m \ (1)$.

Đặt $t=e^x+1 \Rightarrow t'=e^x>0, \forall x\in\mathbb{R}$. Ta có bảng biến thiên:

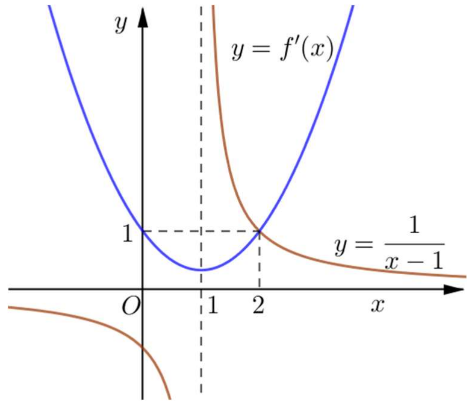


Với $t=e^x+1 \Rightarrow x=\ln(t-1)$. Ta có: $(1) \Leftrightarrow f(t)-\ln(t-1)=m \ (2)$.

Khi đó, phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm thực phân biệt lớn hơn 1.

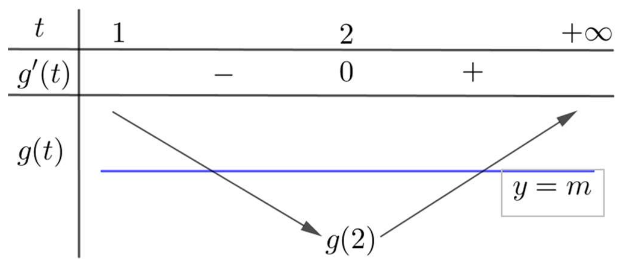
Xét hàm số $g(t)=f(t)-\ln(t-1), \forall t>1$ ta có:

$g'(t)=f'(t)-\dfrac{1}{t-1}$, $g'(t)=0 \Leftrightarrow f'(t)=\dfrac{1}{t-1}$.



Dựa vào đồ thị các hàm số $y=f'(x)$ và $y=\dfrac{1}{x-1}$ ta có: $f'(t)=\dfrac{1}{t-1} \Leftrightarrow t=2$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(t)$:



Số nghiệm của phương trình (2) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $g(t)$ và đường thẳng $y=m$.

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình (2) có hai nghiệm thực phân biệt lớn hơn 1

$\Leftrightarrow m>g(2) \Leftrightarrow m>f(2)-\ln 1 \Leftrightarrow m>f(2)$.

Câu 23: Phương trình $f\left(x^3 f(x)\right)+1=0 \Leftrightarrow f\left(x^3 f(x)\right)=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^3 f(x)=a \quad (-3<a<-1) & (1) \\ x^3 f(x)=b \quad (-5<b<-3) & (2) \\ x^3 f(x)=0 & (3) \end{array}\right.$.

Xét phương trình $x^3 f(x)=k \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{k}{x^3}$.

Đặt $g(x)=\dfrac{k}{x^3}$, $g'(x)=\dfrac{-3k}{x^4}>0, \forall x\neq 0$ và $k<0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=-\infty$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	||	$+$
$g(x)$	$0 \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow 0$

Dựa vào bảng biến thiên và đề bài, suy ra trong mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$ phương trình $f(x)=g(x)$ có đúng một nghiệm.

Vì $a,b<0$ nên phương trình (1) và (2) mỗi phương trình có 2 nghiệm phân biệt khác nhau.

Xét phương trình $(3): x^3 f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=c<0 \end{array}\right.$, với c khác các nghiệm của (1) và (2).

Vậy phương trình $f\left(x^3 f(x)\right)+1=0$ có đúng 6 nghiệm.

Câu 24: Chọn B

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$, suy ra hàm số $y=f'(x)$ là hàm số bậc 3 qua 0 không đổi dấu và đi qua 3 đổi dấu từ + sang -. Mặt khác $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=-\infty$ nên $k<0$.

Do đó, hàm số $y=f'(x)$ có dạng $f'(x)=k.x^2.(x-3)$.

Vì $f'(2)=1$ nên $k=-\frac{1}{4}$. Suy ra $f'(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{4}x^2 \Rightarrow f(x)=-\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{4}x^3+e$

Xét phương trình

$$f\left(-x^2+2x+m\right)=e \Leftrightarrow -\frac{1}{16}\left(-x^2+2x+m\right)^4+\frac{1}{4}\left(-x^2+2x+m\right)^3=0$$

$$\Leftrightarrow \left(-x^2+2x+m\right)^3\left(-x^2+2x+m-4\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x^2+2x+m=0 \ (1) \\ -x^2+2x+m-4=0 \ (2) \end{array}\right.$$

Phương trình $f\left(-x^2+2x+m\right)=e$ có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1), (2) đều có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} 1+m>0 \\ 1+m-4>0 \end{cases} \Leftrightarrow m>3$.

Mặt khác, m là số nguyên trên $[-5;5]$ nên $m\in\{4;5\}$.

Vậy có 2 giá trị nguyên của m thoả yêu cầu bài toán.

Câu 25: Chọn A

Đặt $t=\cos x$. Do $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ nên $t\in(0;1] \Rightarrow f(t)\in[-2;0)$

$$\Rightarrow \sqrt{4+2f(\cos x)}=\sqrt{4+2f(t)}\in[0;2) \Rightarrow f\left(\sqrt{4+2f(\cos x)}\right)\in[-2;2)$$

Vậy phương trình $f\left(\sqrt{4+2f(\cos x)}\right)=m$ có nghiệm $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow -2\le m<2$

Do m nguyên nên $m\in\{-2;-1;0;1\}$

Vậy có bốn giá trị của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt{4+2f\left(\cos x\right)}\right)=m$ có nghiệm $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Câu 26: Chọn B

Đặt: $y=f\left(x\right)$ ta có hệ: $\begin{cases} y=f\left(x\right) \\ f\left(y\right)=x \end{cases} \Rightarrow f\left(y\right)+y=f\left(x\right)+x\ (*)$

Xét hàm số: $g\left(t\right)=f\left(t\right)+t=t^3+2t-2^m \Rightarrow g'\left(t\right)=3t^2+2>0\ \forall t\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow g\left(t\right)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

Từ phương trình $(*)$ ta có $g\left(y\right)=g\left(x\right)\Leftrightarrow y=x\Leftrightarrow f\left(x\right)=x\Leftrightarrow x^3+x-2^m=x\Leftrightarrow x^3=2^m$

Để phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=x$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[1;2\right]$ thì $\underset{x\in[1;2]}{Min}\,x^3\le 2^m\le \underset{x\in[1;2]}{Max}\,x^3$

$\Leftrightarrow 1\le 2^m\le 8\Leftrightarrow 0\le m\le 3$, m là số nguyên nên $m\in\left\{0;1;2;3\right\}$

Vậy **Chọn B**

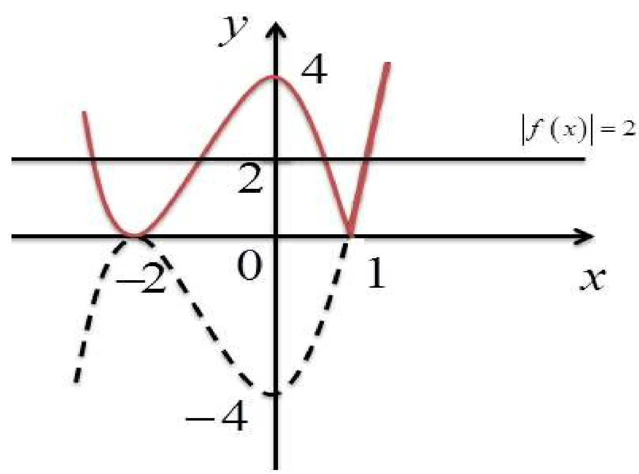
Câu 27: Chọn C

Ta có

$f^2(x)-(m+4)\left|f(x)\right|+2m+4=0$

$\Leftrightarrow \left(\left|f(x)\right|-2\right)\left(\left|f(x)\right|-2-m\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|f(x)\right|=2\left(1\right) \\ \left|f(x)\right|=2+m\left(2\right) \end{array}\right.$

Phương trình $\left(1\right)$ có 4 nghiệm phân biệt



Vậy để phương trình $(*)$ có 6 nghiệm phân biệt thì phương trình $\left(2\right)$ có 2 nghiệm phân biệt khác nghiệm của phương trình $\left(1\right)$.

Phương trình $\left(2\right)$ có hai nghiệm phân biệt khác nghiệm của phương $\left(1\right)$ khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m+2=0 \\ m+2>4 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m>2 \end{array}\right.$. Vì $m\in Z; m\in\left(-5;5\right)$ nên $m=\left\{-2;3;4\right\}$

Vậy m có 3 giá trị.

Câu 28: Ta có: $f\left(x^2 f(x)\right)+2=0 \Leftrightarrow f\left(x^2 f(x)\right)=-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 f(x)=0 \\ x^2 f(x)=\alpha \in (0;1) \\ x^2 f(x)=\beta \in (2;3) \\ x^2 f(x)=\gamma \in (3;4) \end{array}\right.$.

$x^2 f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=0 \end{array}\right.$. Phương trình $f(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0.

Xét phương trình $x^2 f(x)=m$ với $m>0$. Rõ ràng $x=0$ không là nghiệm của phương trình.

Do đó ta có: $x^2 f(x)=m \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{m}{x^2}$.

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{m}{x^2}$ có $g'(x)=\dfrac{-2m}{x^3}$. Từ đó ta có BBT của $g(x)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	$\|$	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$ $+\infty$	$\|$	$+\infty$ $\searrow$	0

Suy ra đồ thị hàm số $y=g(x)$ luôn cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 2 điểm phân biệt có hoành độ khác 0 và khác hai nghiệm của phương trình $f(x)=0$.

Vậy mỗi phương trình $x^2 f(x)=\alpha \in (0;1)$, $x^2 f(x)=\beta \in (2;3)$, $x^2 f(x)=\gamma \in (3;4)$ có hai nghiệm phân biệt. Các nghiệm của các phương trình này không trùng nhau, khác 0 và khác hai nghiệm của phương trình $f(x)=0$.

Do đó phương trình $f\left(x^2 f(x)\right)+2=0$ có 9 nghiệm thực phân biệt.