**HSG TOÁN 9 MÊ LINH 2023-2024**

Câu 1: (5 điểm)

1. Giải phương trình: $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}.$
2. Cho $S= \left(1-\frac{2}{2.3}\right)\left(1-\frac{2}{3.4}\right)…\left(1-\frac{2}{2020.2021}\right)$ là một tích của 2019 thừa số. Tính S

(kết quả để dưới dạng phân số tối giản

Câu 2: (5 điểm)

1. Biết $a, b$ là các số nguyên dương thỏa mãn $a^{2}-ab+b^{2}$ chia hết cho 9, chứng minh rằng cả $a$ và $b$ đều chia hết cho 3.
2. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $9^{n}+11$ là tích của $k (k \in N, k\geq 2)$ số tự nhiên liên tiếp .

Câu 3: (3 điểm)

1. Cho $x, y, z$ là các số thực dương nhỏ hơn 4. Chứng minh rằng trong các số $\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y},\frac{1}{y}+\frac{1}{4-z},\frac{1}{z}+\frac{1}{4-x} $luôn tồn tại ít nhất một số lớn hơn hoặc bằng 1.
2. Với các số thực dương $a, b, c$ thay đổi thỏa mãn điều kiện $a^{2}+b^{2}+c^{2}+2abc=1$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=ab+bc+ca-abc$

Câu 4 (6 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC). Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xuc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi S là giao điểm của AI và DE

1. Chứng minh tam giác IAB đồng dạng với am giác EAS.
2. Gọi K là trung điểm của AB và O là trung điểm của BC. Chứng minh rằng ba điểm K, O, S thẳng hang
3. Gọi M là giao điểm của KI và AC. Đường thẳng chứa đường cao AH của tam giác ABC cắt đường thẳng DE tại N. Chứng minh rằng AM= AN

Câu 5: (1 điểm)

Xét bảng ô vuông cỡ 10 10 × gồm 100 hình vuông có cạnh 1 đơn vị. Người ta điền vào mỗi ô vuông của bảng một số nguyên tùy ý sao cho hiệu hai số được điền ở hai ô chung cạnh bất kỳ đều có giá trị tuyệt đối không vượt quá 1. Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên xuất hiện trong bảng ít nhất 6 lần.

ĐÁP ÁN

Câu 1:

1. Giải phương trình: $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}.$

ĐKXĐ: $x\geq 1$

Đặt $\left\{\begin{array}{c}a=\sqrt[3]{2-x}\\b= \sqrt{x-1}\end{array}\right. $với $a\leq 1, b\geq 0$

$$⇒\left\{\begin{array}{c}a^{3}=2-x\\b^{2}=x-1\end{array}⇒a^{3}+b^{2}=1\right.$$

Từ (\*) ta có: $a=1-b⇒b=1-a$

Thay $b=1-a$ vào hệ thức $a^{3}+b^{2}=1⇒a^{3}+\left(1-a\right)^{2}=1⇔a^{3}+a^{2}-2a+1=1$

 $⇔a^{3}+a^{2}-2a=0⇔a\left(a^{2}+a-2\right)=0⇔a\left(a+2\right)\left(a-1\right)=0$

\*. Nếu $a=0$ (thỏa mãn) $⇒b=1.$ Ta được $\left\{\begin{array}{c}2-x=0\\x-1=1\end{array}⇔x=2\right. $(Thỏa mãn ĐKXĐ)

\*. Nếu $a+2=0 ⇔a= -2⇒b=3$ Ta được $\left\{\begin{array}{c}2-x=-8\\x-1=9\end{array}⇔x=10\right. $(Thỏa mãn ĐKXĐ)

\*. Nếu $a-1=0 ⇔a=1⇒b=0.$ Ta được $\left\{\begin{array}{c}2-x=1\\x-1=0\end{array}⇔x=1\right.$ (Thỏa mãn ĐKXĐ)

Vậy phương trình có tập nghiệm $S= \left\{1;2;10\right\}$

1. $S= \left(1-\frac{2}{2.3}\right)\left(1-\frac{2}{3.4}\right)…\left(1-\frac{2}{2020.2021}\right).$

Với $n \in N$ ta có: $1-\frac{1}{n\left(n+1\right)}=\frac{n^{2}+n-2}{n\left(n+1\right)}=\frac{\left(n-1\right)\left(n+2\right)}{n\left(n+1\right)}$

Áp dụng kết quả trên đó ta có:

$$S=\frac{1.4}{2.3}.\frac{2.5}{3.4}.\frac{3.6}{4.5}…\frac{2019.2022}{2020.2021}=\frac{\left(1.2.3…2019\right)\left(4.5.6…2022\right)}{\left(2.3.4…2020\right)\left(3.4.5…2021\right)}=\frac{1.2022}{2020.3}=\frac{337}{1010}$$

Vậy $S=\frac{337}{1010}$

Câu 2:

1. Ta có: $\left(a^{2}+ab+b^{2}\right)\vdots 0⇒4\left(a^{2}+ab+b^{2}\right)\vdots 9$

$$⇒\left[\left(2a-b\right)^{2}+3b^{2}\right]\vdots 9$$

Mà $3b^{2}\vdots 3$ nên $\left(2a-b\right)^{2}\vdots 3$ mà 3 là số nguyên tố nên $\left(2a-b\right)\vdots 3$

$$\left(2a-b\right)\vdots 3 nên \left(2a-b\right)^{2}\vdots 9$$

Từ (1) và (2) $⇒3b^{2}\vdots 9⇒b^{2}\vdots 3$ mà 3 là số nguyên tố $⇒b\vdots 3.$

$\left(2a-b\right)\vdots 3 và b\vdots 3⇒2a\vdots 3$ mà $\left(2;3\right)=1 nên a\vdots 3$

Vây cả a và b đều chia hết cho 3.

1. Ta có tích của từ ba số tự nhiên liên tiếp trở lên thì chia hết cho 3

Theo đề bài $9^{n}+11$ là tích k số tự nhiên liên tiếp mà $9^{n}+11$ không chia hết cho 3 nên

$$k=2$$

Đặt $9^{n}+11=a\left(a+1\right)$ với a là số nguyên dương

$$9^{n}+11=a\left(a+1\right)⇔4.9^{n}+45=4a^{2}+4a+1$$

$$⇔\left(2a+1\right)^{2}-\left(2.3^{n}\right)^{2}=45⇔\left(2a+1-2.3^{n}\right)\left(2a+1+2.3^{n}\right)=45$$

Vì $a, n$ nguyên dương và $2a+1+2.3^{n}\geq 9$ nên xảy ra các trường hợp sau:

TH1: $\left\{\begin{array}{c}2a+1-2.3^{n}=9\\2a+1+2.3^{n}=5\end{array}\right. \begin{matrix}\left(1\right)\\\left(2\right)\end{matrix}$

Từ (1) và (2) ta có $4a+2=14⇔a=3⇒9^{n}+11=12⇔9^{n}=1⇔n=0\left(Loại\right)$

TH2: $\left\{\begin{array}{c}2a+1-2.3^{n}=15\\2a+1+2.3^{n}=3\end{array} \begin{matrix}\left(3\right)\\\left(4\right)\end{matrix}\right.$

Từ (3) và (4) ta có $4a+2=18⇔a=4⇒9^{n}+11=20⇔9^{n}=9⇔n=1\left(thỏa\right)$

TH3: $\left\{\begin{array}{c}2a+1-2.3^{n}=45\\2a+!+2.3^{n}=1\end{array}\right. \begin{matrix}\left(5\right)\\\left(6\right)\end{matrix} $

Từ (5) và (6) ta có $4a+2=46 ⇔a=11 ⇒9^{n}+11=132 ⇔9^{n}=121⇔n\in ∅$

Vậy n = 1.

Câu 3:

1. Ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y}>0;\frac{1}{y}+\frac{1}{4-z}>0;\frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}>0$

Theo bất đẳng tức Cauchy Schwarz ta có:

$$36=\left(\sqrt{x}.\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{4-y}.\frac{1}{\sqrt{4-y}}+\sqrt{y}.\frac{1}{\sqrt{y}}+\sqrt{4-z}.\frac{1}{\sqrt{4-z}}+\sqrt{z}.\frac{1}{\sqrt{z}}\sqrt{4-x}.\frac{1}{\sqrt{4-x}}\right)^{2}$$

$$\leq \left(x+4-y+y+4-z+z+4-x\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y}+\frac{1}{y}+\frac{1}{4-z}+\frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}\right)$$

$$⇔36\leq 12\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y}+\frac{1}{y}+\frac{1}{4-z}+\frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}\right)$$

$⇔\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y}\right)+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{4-z}\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}\right)\geq 3$ (\*)

Giả sử 3 số $\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y},\frac{1}{y}+\frac{1}{4-z},\frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}$ đều nhỏ hơn 1

$$⇒\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y}\right)+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{4-z}\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}\right)<1+1+1=3 (trái với\*)$$

Do đó trong các số $\frac{1}{x}+\frac{1}{4-y},\frac{1}{y}+\frac{1}{4-z},\frac{1}{z}+\frac{1}{4-x}$ luôn tồn tại ít nhất một số lớn hơn hoặc bằng 1

b)

Ta có $2P=2\left(ab+bc+ca\right)-2abc$

$2\left(ab+bc+ca\right)+a^{2}+b^{2}+c^{2}-1 $vì $\left(-2abc=a^{2}+b^{2}+c^{2}-1\right)$

$$=\left(a+b+c\right)^{2}-1$$

Mặt khác: $a^{2}+b^{2}+c^{2}+2abc=1$

$$⇔a^{2}b+2abc+c^{2}=1-a^{2}-b^{2}+a^{2}b^{2}$$

$$⇔\left(ab+c\right)^{2}=\left(1-a^{2}\right)\left(1-b^{2}\right)$$

Từ $a^{2}+b^{2}+c^{2}+2abc=1⇒a^{2}<1, b^{2}<1 ⇒1-a^{2}>0, 1-b^{2}>0$

Theo bất đẳng thức $AM-GM$ với hai số $1-a^{2}, 1-b^{2}$ ta có:

$$\left(ab+c\right)^{2}=\left(1-a^{2}\right)\left(1-b^{2}\right)\leq \left(\frac{2-a^{2}-b^{2}}{2}\right)^{2}$$

$$⇔ab+c\leq \frac{2-a^{2}-b^{2}}{2}$$

$$⇔c\leq \frac{2-\left(a+b\right)^{2}}{2} (1) $$

Mặt khác theo băt đẳng thức $AM-GM$ với hai số $\left(a+1\right)^{2}$ và 1 ta có:

$$\left(a+b\right)^{2}+1\geq 2.\sqrt{\left(a+b\right)^{2}.1}=2\left(a+b\right)$$

$$⇒a+b\leq \frac{\left(a+b\right)^{2}+1}{2} (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $a+b+c\leq \frac{\left(a+b\right)^{2}+1}{2}+\frac{2-\left(a+b\right)^{2}}{2}=\frac{3}{2}$

Do đó $2P\leq \frac{9}{4}-1=\frac{5}{4}⇒P\leq \frac{5}{8}$

Dấu “=” xảy ra khi $\left\{\begin{array}{c}1-a^{2}=1-b^{2}\\\left(a+b\right)^{2}=1\\a^{2}+b^{2}+c^{2}+2abc=1\end{array}⇔a=b=c=\frac{1}{2}\right.$

Vậy $MaxP=\frac{5}{8}⇔a=b=c=\frac{1}{2}$

Câu 4:



1. Ta có AI là tia phân giác của $\hat{BAC}$ nên $\hat{IAB} =\frac{1}{2} \hat{BAC}$,

BI là tia phân giác của $\hat{ABC}$ nên $\hat{IBA} =\frac{1}{2}\hat{ABC}$

Theo tính chất tổng ba góc trong $Δ$AIB, ta có

Góc $\hat{AIB} = 180^{0} –(\hat{IAB}+\hat{IBA})=180^{0}-\frac{\hat{BAC}+\hat{ABC}}{2}$

= $180^{0}-180^{0}-\hat{C}/2$ (Do $\hat{BAC}+\hat{ABC}= 180^{0}-\hat{C}$ theo tính chất tổng ba góc của tam giác)

=$90^{0}+\frac{\hat{C}}{2}$

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: $CE = CD$ $⇒$ $Δ$CED cân tại C

Suy ra $\hat{DEC} = 180^{0}-\frac{\hat{C}}{2}$

Lại có góc $\hat{AES}= 180^{0}-\hat{DEC} $(hai góc kề bù)

=$180^{0}-\frac{180^{0}-\hat{C}}{2}=90^{0}+\hat{\frac{C}{2}}$

Suy ra AIB = AES=90+c/2

Mặt khác $\hat{EAS}=\hat{IAB}$ (tính chất tia phân giác)

Do đó $Δ$IAB$\~Δ$EAS(g-g)

b)

Ta có $Δ$IAB$\~Δ$EAS(g-g) suy ra $\hat{ASE}=\hat{ABI}=\hat{IBD}$

Tứ giác IBDS có $IBD + ISD=ASE+ISD=180^{0}$ $⇒$ Tứ giác IBDS nội tiếp

Suy ra $\hat{ISB} = \hat{IDB} = 90^{0}$(Góc nội tiếp cùng chắn cung BI nhỏ) mà $\hat{IAB} =\frac{1}{2}\hat{BAC}=45^{0} $(Tính chất tia phân giác) suy ra $Δ$ASB vuông cân tại S

$Δ$ASB vuông cân tại S có SA là đường trung tuyến nên SA là đường trung trực của AB. (\*)

Mặt khác $Δ$ABC vuông có AO là trung tuyến nên $OA=OB=\frac{1}{2}BC$

Suy ra O thược đường trung trực của AB (\*\*)

Từ (\*) và (\*\*) suy ra aba điểm K, O, S thẳng hàng

c)

Vì AI là tia phân giác của $Δ$AMK nên $\frac{AK}{AM}=\frac{IK}{IM} $ (1)

$IF//AM$ (cùng vuông góc với AB ) $⇒$ $\frac{IK}{IM}=\frac{FK}{FA}$ (định lý ta lét) (2)

Từ (1) và (2) $⇒$ $\frac{AK}{AM} =\frac{FK}{FA}$ suy ra $\frac{AK}{FK} =\frac{AM}{AF}$ (3)

Mặt khác $ID// AN$(cùng vuông góc với BC) $⇒$ $\frac{AN}{ID}=\frac{SA}{SI}$(Hệ quả định lý ta let)

Mà $IF//KS$(cùng vuông góc với AB) $⇒$ $\frac{SA}{SI} =\frac{AK}{FK}$ $nên\frac{AN}{ID}=\frac{AK}{FK}$ (4)

Từ (3) và (4) ta có $\frac{AM}{AF}=\frac{AN}{ID}$

Tứ giác AEIF có $\hat{EAF}=\hat{AFI}=\hat{AEI}=90^{0}$ nên tứ giác AEIF là hình chữ nhật

Suy ra $AF=EI=ID$

Ta có $AF=ID$ và $\frac{AM}{AF}=\frac{AN}{ID}$ nên $AM=AN$

Câu 5:

Ta thấy hai ô vuông ở hai góc đối của hình vuông là xa nhau nhất

Gọi các số được điền vào mỗi ô vuông đó lần lượt là $a\_{1}, a\_{2}, a\_{3},…, a\_{19}$

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$a\_{1}$$ | $$a\_{2}$$ | $$a\_{3}$$ | $$a\_{4}$$ | $$a\_{5}$$ | $$a\_{6}$$ | $$a\_{7}$$ | $$a\_{8}$$ | $$a\_{9}$$ | $$a\_{10}$$ |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  | $$a\_{11}$$ |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  | $$a\_{12}$$ |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  | $$a\_{13}$$ |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  | $$a\_{14}$$ |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  | $$a\_{15}$$ |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  | $$a\_{16}$$ |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  | $$a\_{17}$$ |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  | $$a\_{18}$$ |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  | $$a\_{19}$$ |

Ta có

$$⇔-1<a\_{1}-a\_{2}<1$$

Tương tự ta có:

$$⇔-1<a\_{2}-a\_{3}<1$$

$…$……………………; $\left|a\_{1}-a\_{2}\right|<1$

$$-1<a\_{18}-a\_{19}<1$$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta có:

$-18<a\_{1}-a\_{19}<1$8 $⇔\left|a\_{1}-a\_{19}\right|<18$

Vì $a\_{1}, a\_{2}, a\_{3},…, a\_{19}$ là các số nguyên nên chỉ có tối đa 19 số nguyên khác nhhau được điền vào trong bảng

Có 100 ô vuông trên bảng nên theo nguyên lý Dirichle thì sẽ có một số xuất hiện trên bảng ít nhất là $\left[\frac{100}{19}\right]+1=6$ (lần)