LÊ VIỆT HẢI - ĐÀO THÁI HIỆP
Phổ thông năng khiếu – ĐHQG TP.HCM

SEMINAR

HẰNG ĐẲNG THỨC và PHƯƠNG TRÌNH HÀM

I/ Giới thiệu

Như ta đã biết, hàm số là một phần quan trọng của toán học. Việc giải phương trình hàm vì thế mà cũng được quan tâm.

Trong các kì thi học sinh giỏi, Olympic, ... đôi khi vẫn có những bài toán phương trình hàm làm khó dễ thí sinh, nhưng tựu chung lại, đó vẫn là những bài toán có những nét rất thú vị.

Trong seminar, tác giả muốn trình bày đến cho các bạn một cách sáng tạo phương trình hàm đơn giản, nhưng lại có rất nhiều điều đặc biệt và đôi lúc thực sự "hóc búa". Đó là việc đề xuất ra các bài phương trình hàm dựa trên các đẳng thức, hằng đẳng thức.

Rất khó có thể nói được ứng dụng của những bài phương trình hàm này, nhưng qua việc giải chúng, các bạn sẽ có thêm được kĩ năng giải toán, và thực sự, đây là một điều rất có ích.

Những bài phương trình hàm được trình bày trong seminar này đã được tác giả tìm kiếm và chọn lọc, có những bài dễ và cũng có bài khó, nhưng mỗi bài đều có cái hay riêng của mình, việc phát hiện chúng và giải được chúng là một công việc thú vị mà tác giả muốn chia sẻ với bạn đọc.

Do thời gian chuẩn bị không nhiều và kiến thức có hạn của tác giả, nên sơ suất và những điều còn chưa được giải quyết là điều không thể tránh khỏi, nên rất mong nhận được sự quan tâm và giúp đỡ của mọi người để vấn đề này trở nên đặc sắc và thú vị hơn.

Xin cảm ơn,

Thân.

Trong Seminar này, tác giả xin trình bày 6 phần

Phần I: Giới thiệu.

Phần II: Bổ đề áp dụng – Phần này nhằm chứng minh những bổ đề cần thiết, và trong các cách chứng minh đó, có những ý tưởng được dùng để giải những bài toán khác.

Phần III: Phương trình hàm và các đẳng thức hiển nhiên – Phần này nhằm giới thiệu các phương trình hàm xuất phát từ những điều hiển nhiên như $x = x, x + y = x + y,...$

Phần IV: Phương trình hàm và các hằng đẳng thức – Phần này nhằm giới thiệu các phương trình hàm xuất phát từ các hằng đẳng thức.

Phần V: Tổng kết.

Phần VI: Tài liệu tham khảo.

Tác giả sẽ trình bày những bài toán và kèm theo lời giải nếu có, đồng thời kèm theo những lời dẫn dắt. Ở phần cuối một vài bài toán, tác giả có thêm phần **Chú ý** nhằm kết lại những ý tưởng được dùng, đồng thời trình bày một số hướng tổng quát.

II/ Bổ đề áp dụng

Những phương trình hàm chúng ta sắp đề cập tới đây đều có một điểm chung là xuất phát từ các đẳng thức, nên quá trình giải chúng cũng sẽ có một vài điểm giống nhau.

Sau khi xem xét kĩ, tác giả xin trình bày bổ đề sau, là một công cụ hữu hiệu để giải khá nhiều các phương trình hàm.

Bổ đề. *Tìm tất cả các hàm* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thoả mãn:*

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \qquad \forall x,\ y\in R$$

Trong các trường hợp sau:

a) $f(x)$ *là hàm liên tục.*

b) $f(x)$ *là hàm đơn điệu.*

c) $|f(x)|<M\ \ \forall x\in[a,b]$.

d) $f^2(x)=f\left(x^2\right)\ \ \forall x\in R$

e) $f^3(x)=f\left(x^3\right)\ \ \forall x\in R$

Lời giải. Cho $x=y=0$, ta được: $f(0)=2f(0)\Rightarrow f(0)=0$.

Thay $y=-x$, ta được: $f(0)=f(x)+f(-x)\ \Rightarrow -f(x)=f(-x)\ \forall x\in R$.

Đặt $f(1)=c=const$. Ta có:

$$f(1)=f\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+...+\frac{1}{n}\right)=nf\left(\frac{1}{n}\right)\Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{c}{n}\ \ \forall n\in N^*.$$

Với mọi số hữu tỷ dương $x=\frac{m}{n}\ \left(m,n\in N^*,(m,n)=1\right)$. Ta có:

$$f(x)=f\left(\frac{m}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+...+\frac{1}{n}\right)=mf\left(\frac{1}{n}\right)=c.\frac{m}{n}=cx.$$

Vậy $f(x)=cx$ với mọi số hữu tỷ dương *x*. Do f là hàm lẻ và $f(0)=0$, ta suy ra được, với mọi số hữu tỷ *x* thì $f(x)=cx$.

a) f *là hàm liên tục:*

Với mọi số vô tỷ *x* luôn tồn tại một dãy số hữu tỷ $\{x_n\}$ hội tụ về *x*. Như vậy, dựa vào tính liên tục của *f*, ta có:

$$f(x)=\lim_{x_n\to x}f\left(x_n\right)=\lim_{x_n\to x}cx_n=cx.$$

Vậy $f(x)=cx\ \ \forall x\in R$ là hàm thỏa. ☺

b) f là hàm đơn điệu:

(*Xin giải ở trường hợp* $f(x)$ *đồng biến, nghịch biến chứng minh tương tự*)

Vì $f\left(x\right)$ đồng biến nên $c=f(1)\geq f(0)=0$.

Giả sử tồn tại x_0 là số vô tỷ sao cho $f(x_0)>cx_0$ (trường hợp $f(x_0)<cx_0$ chứng minh tương tự).

Do x_0 là số vô tỷ dễ dàng suy ra được $f(x_0),cx_0$ đều là số vô tỷ. Khi đó tồn tại số hữu tỷ y sao cho $f(x_0)>cy>cx_0$. Tuy nhiên, $f(x_0)>f\left(y\right)=cy>cx_0\Rightarrow x_0>y>x_0$ (vô lý).
Vậy $f(x_0)=cx_0$. Suy ra $f(x)=cx\ \ \forall x\in R$ là hàm thỏa. ☺

c) $\left|f(x)\right|<M\ \ \forall x\in[a,b]$:

Chúng ta chứng minh rằng $f\left(x\right)$ cũng bị chặn trên đoạn $\left[0,b-a\right]$. Với $x\in\left[0,b-a\right]$, thì $x+a\in\left[a,b\right]$. Ta có: $f(x+a)=f(x)+f(a)\Rightarrow f(x)=f(x+a)-f(a)$
$\Rightarrow -2M<f(x)<2M\Rightarrow\left|f(x)\right|<2M$.

Đặt $b-a=d>0$, vậy $f\left(x\right)$ bị chặn trên $[0;d]$. Đặt $c=\dfrac{f(d)}{d}$ và $g(x)=f\left(x\right)-cx$.

Suy ra: $g(x+y)=f(x+y)-c(x+y)=f(x)-cx+f(y)-cy=g(x)+g(y)\ \forall x,y\in R$.

Hơn nữa: $g(d)=f(d)-\dfrac{f(d)}{d}.d=0$. Vậy $g(x+d)=g(x)\ \ \forall x\in R$, do đó g là hàm tuần hoàn. Hơn nữa, $g(x)=f\left(x\right)-cx$ nên g cũng bị chặn trên $[0;d]$, cộng thêm tính tuần hoàn chu kì d của g, ta suy ra g bị chặn trên R.
Giả sử tồn tại x_0 sao cho $g(x_0)\neq 0$. Khi đó, ta có với mọi số tự nhiên n thì

$$g(nx_0)=ng(x_0)\Rightarrow\left|g(nx_0)\right|=\left|ng(x_0)\right|.$$

Do $g(x_0)\neq 0$, nên nếu chọn n đủ lớn ta có thể cho $\left|ng(x_0)\right|$ lớn hơn bao nhiêu cũng được, suy ra $\left|g(nx_0)\right|$ lớn bao nhiêu cũng được, trái với điều kiện bị chặn của g. Vậy $g(x)=0$ $\forall x\in R$. Do đó, $f(x)=cx\ \ \forall x\in R$. ☺

d) $f^2(x)=f\left(x^2\right)\ \ \forall x\in R$: (1)

Từ (1) ta suy ra $f(x) \geq 0$ với mọi số thực không âm x. Khi đó, với mọi $x > y \geq 0$ thì: $f(x) - f(y) = f(x-y) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.

Vậy f là hàm không giảm, áp dụng câu *b*), $f(x) = cx\ \forall x \in R$. Thay vào (1) ta thu được $c = 0 \vee c = 1$. Vậy có 2 hàm thỏa đó là $f(x) = x\ \ \forall x \in R$, $f(x) = 0\ \forall x \in R$.

e) $f^3(x) = f\left(x^3\right)\ \ \forall x \in R : (2)$

Ta có:

$$f^3(x+y) = \left(f(x) + f(y)\right)^3 = f\left((x+y)^3\right) = f\left(x^3 + y^3 + 3xy(x+y)\right)\ \ \forall x, y \in R$$

$$\Rightarrow f^3(x) + f^3(y) + 3f(x)f(y)f(x+y) = f(x^3) + f(y^3) + 3f\left(xy(x+y)\right)\ \ \forall x, y \in R$$

$$\Rightarrow f(x)f(y)f(x+y) = f\left(xy(x+y)\right)\ \ \forall x, y \in R$$

Từ (2) suy ra $f^3(1) = f(1) \Rightarrow f(1) = 0 \vee f(1) = 1 \vee f(1) = -1$.

+Nếu $f(1) = 0$:

Ta có: $f(x^2 + x) = f(x)f(1)f(x+1) = 0\ \ \forall x \in R$.

Do $x^2 + x$ nhận mọi giá trị lớn hơn hoặc bằng $-\frac{1}{4}$, suy ra $f(x) = 0\ \ \forall x \geq -\frac{1}{4}$.

Do $f(x)$ là hàm lẻ nên $f(x) = 0\ \ \forall x \in R$ (đây là một hàm thỏa)

+Nếu $f(1) = 1 \vee f(1) = -1$. Đặt $f(1) = c$.

Ta có:

$$f(x^2 + x) = f(x)f(1)f(x+1) \Leftrightarrow f(x^2) + f(x) = cf(x)\left(f(x) + c\right) = cf^2(x) + c^2 f(x) = cf^2(x) + f(x)$$

Suy ra $f(x^2) = cf^2(x)$. Tùy vào $c = 1$ hay $c = -1$, và làm tương tự câu *d*) ta suy ra 2 hàm tương ứng thỏa là $f(x) = x\ \forall x \in R$ và $f(x) = -x\ \ \forall x \in R$. ☺

Chú ý: 1) Hàm mà thỏa điều kiện trên gọi là hàm cộng tính, và được Augustin Louis Cauchy phát hiện ra, nên đây còn gọi là phương trình hàm Cauchy. Ngoài hàm $f(x) = cx$ thỏa ra, nhà toán học G.Hamel còn tìm ra thêm một hàm "đặc biệt" khác cũng thỏa. Các bạn có thể tham khảo qua 2 link sau:

http://www.jstor.org/pss/2689122

http://www.ams.org/journals/bull/1942-48-02/S0002-9904-1942-07615-4/S0002-9904-1942-07615-4.pdf

2) Trên thực tế, có một định lý có thể bao hàm hết tất cả những gì mà tác giả đã trình bày ở trên, định lý đó như sau:

Nếu $f : R \to R$ *là hàm cộng tính nhưng không tuyến tính, thì đồ thị* $G(f) = (x, f(x))$ *trù mật trong* R^2.

<u>Khái niệm trù mật trong không gian 2 chiều:</u> Tập A được gọi là trù mật trong tập B nếu lấy một điểm $X \in B$ làm tâm và vẽ một đường tròn bán kính $\varepsilon > 0$ bé tùy ý, thì luôn tồn tại điểm $Y \in A$ sao cho điểm Y nằm trong đường tròn đã vẽ.

Chứng minh của định lý trên, các bạn có thể đọc trong tài liệu **IMO Training Camp 2010** (http://forum.mathscope.org/showpost.php?p=58909&postcount=2) hoặc trong cuốn **Functional Equations A Problem Solving Approach** – Venkatchala (cuốn này không có Ebook, các bạn phải đặt mua từ nước ngoài)

3) Điều kiện *d*) và *e*) của bổ đề có thể thay đổi thành $f^n(x) = f(x^n)\ \forall x \in R$ với $n > 1$. Các bạn hãy thử giải trường hợp này.

4) Ngoài ra, điều kiện *d*) và *e*) còn có một hướng tổng quát như sau: Cho đa thức $P(x)$ có bậc lớn hơn 1, thỏa $P(f(x)) = f(P(x))\ \ \forall x \in R$. Hãy tìm tất cả hàm f thỏa.

III/ Phương trình hàm và các đẳng thức hiển nhiên

Trong phần này, xin giới thiệu cho các bạn một vài bài phương trình hàm dựa trên các đẳng thức hiển nhiên "nhất" ví dụ như $x = x$, $x + y = x + y, \ldots$ Đây coi như là một "bước đệm", trước khi đi vào phần chính của seminar, mỗi bài dưới đây đều có mang một ý tưởng riêng, đa số lời giải là dựa trên phương trình hàm Cauchy.

Đầu tiên, xin giới thiệu 1 bài trong đề thi chọn đội tuyển tham dự Olympic Toán Sinh viên của trường Đại học KHTN Hà Nội:

Bài toán 3.1.*(IMC 2010) Tìm tất cả các hàm liên tục $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn:* $$f(xy+x+y)=f(xy)+f(x)+f(y)\ \forall x,\, y\in R$$

Lời giải.

Cách 1:

Xét $P(x,y)$ là phép thế (x,y) vào phương trình ban đầu. Ta giải quyết bài toán lần lượt theo các bước chứng minh sau:

- $f(x)$ là hàm lẻ.

$P(-x,x)\ :\ f(-x^2) = f(-x^2) + f(x) + f(-x)\ \forall x\in\mathbb{R}$. Như vậy $f(-x)=-f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

- $f(3x) = 3f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$.

$P(x,1)\ :\ f(2x+1) = 2f(x) + f(1)\ \forall x\in\mathbb{R}$. Như vậy $f(3)=3f(1)$ và $f(2x-1)$ $=2f(x-1)+1$.

$$P(3,x^2-1)\ :\ f(4x^2-1) = f(3(x^2-1)) + f(3) + f(x^2-1)$$

$$= f(3(x^2-1)) + 3f(1) + f(x^2-1)\ \forall x\in\mathbb{R}. \qquad (1)$$

$$P(1,2x^2-1)\ :\ f(4x^2-1) = 2f(2x^2-1) + f(1)$$

$$= 2f(2f(x^2-1) + f(1)) + f(1)$$

$$= 4f(x^2-1) + 3f(1)\ \forall x\in\mathbb{R}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra $f\left(3\left(x^2-1\right)\right) = 3f\left(x^2-1\right)$. Mặt khác, với mọi $x \geq 0$, luôn tồn tại $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $x = \alpha^2 - 1$. Như vậy $f(3x) = 3f(x)\ \forall x \geq 0$.

Hơn nữa với $x < 0$, $f(3x) = f(-3(-x)) = -f(3(-x)) = -3f(-x) = 3f(x)$.
Vậy $f(3x) = 3f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

- $f(x+1) = f(x) + f(1)\quad \forall x \geq 0$.

$P\left(3,-x^2-1\right)$: $f\left(-4x^2-1\right) = f\left(-3\left(x^2+1\right)\right) + f(3) + f\left(-x^2-1\right)$

$$= -4f\left(-x^2-1\right) + 3f(1)\ \forall x \in \mathbb{R}. \qquad (3)$$

$P\left(1,-2x^2-1\right)$: $f\left(-4x^2-1\right) = 2f\left(-2x^2-1\right) + f(1)$

$$= -2f\left(2f\left(x^2\right) + f(1)\right) + f(1)$$

$$= -4f\left(x^2\right) - f(1)\ \forall x \in \mathbb{R}. \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) ta suy ra $f\left(x^2+1\right) = f\left(x^2\right) + f(1)\ \forall x \in \mathbb{R}$. Mặt khác, với mọi $x \geq 0$, luôn tồn tại $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $x = \alpha^2$.
Như vậy, $f(x+1) = f(x) + f(1)\ \forall \mathrm{x} \geq 0$.

- $f(x) = Cx\ \forall x \in \mathbb{Q}$.

Xét $f(1) = C = const$. Bằng quy nạp ta chứng minh được $f(nx) = f(x)$
$+ (n-1)Cx\ \forall x \in \mathbb{N}$.

Với $x = \dfrac{1}{n}$ và $n \in \mathbb{N}$, ta có $f\left(n.\dfrac{1}{n}\right) = f\left(\dfrac{1}{n}\right) + C\dfrac{n-1}{n}$. Suy ra $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = C\dfrac{1}{n}\ \forall x \in \mathbb{N}$.

Với $x = \dfrac{m}{n}$ và *m,n* là các số nguyên nguyên tố cùng nhau, ta có:

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(m.\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) + C\frac{m-1}{n} = C\frac{1}{n} + C\frac{m-1}{n} = C\frac{m}{n}.$$

Như vậy $f(x) = Cx\ \forall x \in \mathbb{Q}$.

- $f(x) = Cx\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Do f liên tục, nên sử dụng bổ đề, ta có ngay $f(x) = Cx\ \forall x \in R$ là hàm thỏa. ☺

Chú ý: 1) Cách giải trên được trình bày theo đúng hướng suy nghĩ của tác giả, tuy rằng có hơi rắc rối, nhưng tác giả muốn trình bày lời giải này đến các bạn
2) Thực ra, bài toán trên xuất phát từ bài toán:

Cho hàm $f: R \to R$*, chứng minh rằng:* $f(xy+x+y) = f(xy) + f(x) + f(y)$ $\forall x, y \in R$ *khi và chỉ khi* $f(x+y) = f(x) + f(y)$ $\forall x, y \in R$

Lời giải xin để dành cho các bạn.

Trong một "cố gắng tạo nên sự khác biệt", tác giả đã thử sáng tạo và ra được bài toán sau:

Bài toán 3.2. *Tìm tất cả các hàm* $f: R \to R$ *thoả mãn:*

$$f\left(x + y^2 + z^3\right) = f(x) + f^2(y) + f^3(z) \quad \forall x, y, z \in R$$

<u>Lời giải.</u> Điều "khác biệt" chính là việc bậc của các biến khác nhau.

Xét $P\left(x, y, z\right)$ là phép thế $\left(x, y, z\right)$ vào phương trình ban đầu. Ta có:

$P(0,0,0): f(0)^2 + f(0)^3 = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \vee f(0) = -1$.

Như vậy, ta xét 2 trường hợp:

<u>Trường hợp 1:</u> $f(0) = 0$

$P(0,0,z): f(z^3) = f(z)^3 \quad \forall z \in R$ (1)

$P(x,0,z): f(x+z^3) = f(x) + f(z)^3 = f(x) + f(z^3) \quad \forall x, z \in R$ (2)

$P(0,y,0): f(y^2) = f^2(y) \quad \forall y \in R$ (1')

Với mọi $\alpha \in R$, luôn tồn tại $z \in R$ sao cho $z = \alpha^3$. Do vậy từ (2) ta suy ra:

$f(x+z) = f(x) + f(z) \quad \forall x, z \in R$. Kết hợp với (1') và áp dụng bổ đề, ta suy ra ngay 2 hàm thỏa là $f(x) = 0 \quad \forall x \in R$, và $f(x) = x \quad \forall x \in R$.

<u>Trường hợp 2:</u> $f(0) = -1$

$P(0,y,0): f(y^2) = f(y)^2 - 2 \quad \forall y \in R$

Từ đây suy ra: $f(x^2) = f(x)^2 - 2 = f(-x)^2 - 2 \Rightarrow f^2\left(x\right) = f^2\left(-x\right) \; \forall x \in R$ (3)

$P(x,0,z): f(x+z^3) = f(x) + f(z)^3 + 1 = f(x) + f(z^3) + 1 \quad \forall x, z \in R$

Thay $z = -\sqrt[3]{x}$, ta được: $f(0) = f(x) + f(-x) + 1 \Rightarrow f(x) + f(-x) = -2 \quad \forall x \in R$ (4)

Từ (3) và (4), coi $f(x)$, $f(-x)$ là 2 ẩn, dễ dàng giải ra được: $f(x) = f(-x) = -1$.

Như vậy: $f(x) = -1 \quad \forall x \in R$.

Tóm lại có ba hàm thoả mãn phương trình hàm ban đầu: $f(x)=0 \ \forall x\in R$, $f(x)=x\ \forall x\in R$, $f(x)=-1 \ \forall x\in R$. ☺

Chú ý: 1) Thực tế, với cách giải như trên, các bạn có thể giải được bài toán tổng quát sau:

Bài toán 3.4. *Tìm tất cả các hàm $f: R\to R$ thoả mãn:*

$$f(x_1+x_2^2+...+x_n^n)=f(x_1)+f(x_2)^2+...+f(x_n)^n \quad \forall x_1,...,x_n\in R\,(n>1, n\in N^*)$$

Cũng là một sự "khác biệt" khác, tác giả có bài toán sau:

Bài toán 3.5. *Tìm tất cả các hàm $f:\ Z\ \to\ Z$ thoả mãn $f(x)\neq 0\ \ \forall x\neq 0$ và*

$$\frac{f(x+y)}{f(xy)}=\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f(y)} \quad \forall x,y\in Z$$

Lời giải. Xét $P(x,y)$ là phép thế (x,y) vào phương trình ban đầu.

$$P(1,1): \frac{f(2)}{f(1)}=\frac{2}{f(1)} => f(2)=2.$$

Ta giải quyết bài toán lần lượt theo các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $f(0)\neq 0$

$$P(0,0): 1=\frac{2}{f(0)} => f(0)=2.$$

$$P(1,0): \frac{f(1)}{2}=\frac{1}{f(1)}+\frac{1}{2} => (f(1)+1)(f(1)-2)=0$$

- Xét $f(1)=-1$:

$$P(x,1): \frac{f(x+1)}{f(x)}=\frac{1}{f(x)}-1 \Rightarrow f(x)+f(x+1)=1\ \forall x\in Z.$$

Ta tính được $f(0)=f(2)=2, f(3)=f(1)=-1$. Bằng quy nạp, ta suy ra

$f(x)=\begin{cases}2 \Leftrightarrow x\,\vdots\,2\\ -1\Leftrightarrow x\,\not\vdots\,2\end{cases}$. Dễ thấy đây là hàm thỏa.

- Xét $f(1)=2$:

$$P(x,1): \frac{f(x+1)}{f(x)}=\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{2}\Rightarrow f(x+1)=1+\frac{f(x)}{2}\ \forall x\in Z.$$

Ta suy ra được, nếu $f(x)=2$ thì $f(x-1), f(x+1)$ cũng bằng 2. Do đó, $f(x)=2$ $\forall x \in Z$, dễ thấy đây là hàm thỏa.

<u>*Trường hợp 2:*</u> $f(0)=0$

$$P(x,-x): 0=\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f(-x)} \Rightarrow f(-x)=-f(x)\ \forall x \neq 0.$$

$$P(2,-1): \frac{f(1)}{-2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{f(1)} \Rightarrow \left(f(1)-1\right)\left(f(1)+2\right)=0.$$

- Xét $f(1)=1$:

$$P(x,1): \frac{f(x+1)}{f(x)}=\frac{1}{f(x)}+1 \Rightarrow f(x+1)=f(x)+1\ \ \forall x \neq 0.$$

Từ đây dễ dàng suy ra được: $f(x)=x\ \ \forall x \in Z$, dễ thấy đây là hàm thỏa.

- Xét $f(1)=-2$:

$$P(2,1): \frac{f(3)}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow f(3)=0 \text{ (trái với giả thiết)}$$

Tóm lại, có ba hàm thoả mãn phương trình ban đầu: $f(x)=x\ \ \forall x \in Z$, $f(x)=2\ \ \forall x \in Z$,

$$f(x)=\begin{cases} 2 \Leftrightarrow x \vdots 2 \\ -1 \Leftrightarrow x \not\vdots\, 2 \end{cases} \forall x \in Z.$$

Chú ý: 1) Thực ra lúc đầu, tác giả cho $f: R \to R$, nhưng cảm thấy khá khó, nên đành thay đổi, cuối cùng ra được bài toán mà lời giải cũng khá thú vị

2) Các bạn hãy thử giải nếu $f: R \to R$, nếu cảm thấy khó khăn, hãy cho thêm các điều kiện để giải.

Bài toán sau là một bài trong đề dự bị của kì thi chọn đội tuyển trường Phổ thông năng khiếu, cảm thấy khá thú vị, tác giả xin đề cập đến ở đây.

> ***Bài toán 3.6.*** *Tìm tất cả các hàm liên tục $f: R \to R$ thỏa mãn:*
>
> $f_{2009}(x)=x\ \ \forall x \in R$ *(Kí hiệu: $f_n(x)=f(f(...(f(x))...))$, n lần f).*

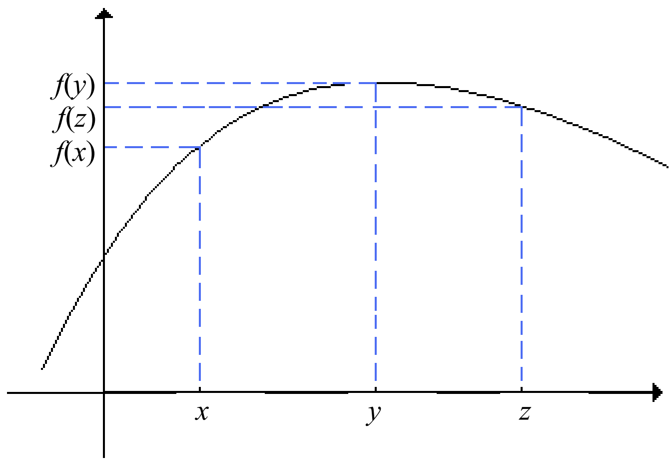
<u>Lời giải.</u> Trước tiên, ta chứng minh f là đơn ánh, thật vậy, nếu $\exists x_1, x_2$ sao cho: $f(x_1)=f(x_2)$, ta có: $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow f_{2009}(x_1)=f_{2009}(x_2) \Leftrightarrow x_1=x_2$. Vậy f là đơn ánh. Ta chứng minh bổ đề sau:

Nếu $f: R \to R$ vừa là hàm đơn ánh, vừa là hàm liên tục, thì f đơn điệu.

Chứng minh. Vì f là đơn ánh, ta chứng minh nếu tồn tại $x < y$ sao cho $f(x) < f(y)$ thì f đồng biến (nếu với mọi $x < y$ mà $f(x) > f(y)$ thì hiển nhiên f nghịch biến). Giả sử f không đồng biến, tức là sẽ có 3 trường hợp sau xảy ra: Tồn tại z sao cho:

1) $z < x < y$ và $f(z) > f(x)$, $f(x) < f(y)$
2) $x < y < z$ và $f(z) < f(y)$, $f(x) < f(y)$
3) $x < z < y$ và $\left[f(z) - f(x)\right]\left[f(z) - f(y)\right] > 0$.

Chúng ta có thể hiểu điều trên một cách trừu tượng tức là, đồ thị của hàm số này có một đoạn là nó sẽ "đi lên" rồi "đi xuống" (tức là không đồng biến):



Hình minh họa.

Ta sẽ chỉ chứng minh 1) sai, 2) tương tự, 3) sai được suy ra từ 1) và 2) sai.

Ta có, chọn M sao cho: $f(x) < M < \min\left\{f(y), f(z)\right\}$. Theo tính chất hàm liên tục, vì $z < x < y$ nên $\exists a$ sao cho $z < a < x$ và $f(a) = M$, đồng thời $\exists b$ sao cho $x < b < y$ và $f(b) = M$. Suy ra $f(a) = f(b)$ suy ra $a = b$ vì f đơn ánh, nhưng điều này không thể xảy ra vì $a < x < b$.

Vậy ta có điều giả sử là sai, tóm lại f là hàm đơn điệu.

Đối với bài toán này, ta chứng minh f là hàm đồng biến.

Giả sử f nghịch biến, ta có, với $x < y$ thì $f(x) > f(y)$.

Suy ra $f_2(x) = f(f(x)) < f(f(y)) = f_2(y)$. Cứ tiếp tục như thế ta sẽ có được:

$f_{2009}(x) > f_{2009}(y) \Rightarrow x > y$ (mâu thuẫn).

Vậy f là hàm đồng biến.

Ta chứng minh $f(x) = x \quad \forall x \in R$.

Giả sử tồn tại x sao cho $f(x) > x$, khi đó: $f_2(x) = f(f(x)) > f(x)$, bằng quy nạp, ta suy ra ngay: $x = f_{2009}(x) > f_{2008}(x) > f_{2007}(x) > ... > f_2(x) > f(x)$ (mâu thuẫn). Tương tự với $f(x) < x$ cũng suy ra mâu thuẫn. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Hàm thỏa duy nhất của bài toán này là $f(x) = x \quad \forall x \in R$.

Chú ý: 1) Với cách giải trên, dễ dàng tổng quát rằng, nếu thay số 2009 bằng một số tự nhiên lẻ bất kỳ, ta sẽ giải được bài toán.

2) Các bạn suy nghĩ thế nào nếu thay 2009 là một số tự nhiên chẵn khác không ?.

IV/ Phương trình hàm và các hằng đẳng thức

Đây là phần chính của seminar này.

Trước tiên, xin giới thiệu đến các bạn 4 bài phương trình hàm đơn giản trước, xuất phát từ những hằng đẳng thức cơ bản. Mỗi bài đều có thể giải được bằng những ý tưởng đã được chúng ta sử dụng trước đó, nó giúp ta rèn luyện một vài kĩ năng trước khi đi vào giải một "series" phương trình hàm xuất phát từ hằng đẳng thức quen thuộc: $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

Tại sao tác giả lại chọn hằng đẳng thức trên? Nó thực sự quen thuộc. Và thực ra, các bài mà tác giả sưu tầm được liên quan đến hằng đẳng thức trên là nhiều hơn so với các loại khác, hơn nữa, một vài bài trong số đó khá là "hóc búa" và lời giải có thể không được tự nhiên lắm, nhưng lại có những ý tưởng thực sự thú vị. Mong các bạn cùng thưởng thức, và có thể học được một vài điều qua các bài phương trình hàm này.

Trước tiên, là một bài toán đơn giản, xuất phát từ hằng đẳng thức quen thuộc: $x^n - y^n$ $= (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + ... + xy^{n-2} + y^{n-1})$.

Bài toán 4.1. *Tìm tất cả các hàm $f : R \to R$ thỏa mãn:*
$f\left(x^n\right) - f\left(y^n\right) = \left(f(x) - f(y)\right)\left(x^{n-1} + x^{n-2}y + ... + xy^{n-2} + y^{n-1}\right)\ \forall x, y \in R, n \in N^*, n > 1$

<u>Lời giải.</u>

+<u>Với $n = 2$:</u>

Phương trình hàm trở thành: $f(x^2) - f(y^2) = \left(f(x) - f(y)\right)\left(x + y\right)\ \ \forall x, y \in R$.

Trước tiên, ta có vài nhận xét về phương trình hàm này. Thứ nhất, ta không thể tính được $f(0)$. Thứ hai, dễ dàng thấy $f(x) = x$ là một hàm thỏa, nhưng thực tế, nếu chúng ta quen làm phương trình hàm hơn thì sẽ thấy ngay: $f(x) = ax + b\ \ \forall x \in R, a, b \in R$ cũng là hàm thỏa. Như vậy việc không tính được $f(0)$ cũng là điều dễ hiểu.

Trong trường hợp này, ta sẽ đặt hàm số $g : R \to R$ sao cho: $g(x) = f(x) - f(0)\ \ \forall x \in R$. Như vậy, ta sẽ có được: $g(0) = 0$. Hơn nữa, khi thay trở vào phương trình hàm ban đầu, ta sẽ có được phương trình tương tự:

$$g(x^2) - g(y^2) = \left(g(x) - g(y)\right)\left(x + y\right)\ \ \forall x, y \in R. \qquad (1)$$

Thay $y = 0$, ta có: $g(x^2) = xg(x)\ \ \forall x \in R$. Thay trở lại vào phương trình (1) ta có:

$$g(x)y = g(y)x\ \ \forall x, y \in R.$$

Đến đây, chỉ việc cho $y = 1$, ta sẽ ra kết quả bài toán. Như vậy, hàm thỏa phương trình hàm ban đầu sẽ là $f(x) = ax + b \quad \forall x \in R, a, b \in R$. ☺

+<u>Với $n = 3$:</u> (*Moldova 2004*)

Phương trình hàm trở thành: $f(x^3) - f(y^3) = \left(f(x) - f(y)\right)\left(x^2 + xy + y^2\right) \quad \forall x, y \in R$.

Cũng với những nhận xét như ở trường hợp $n = 2$, ta đặt hàm số $g: R \to R$ sao cho: $g(x) = f(x) - f(0) \ \forall x \in R$. Suy ra, $g(0) = 0$. Thay vào phương trình hàm ban đầu, ta được:

$$g(x^3) - g(y^3) = \left(g(x) - g(y)\right)\left(x^2 + xy + y^2\right) \quad \forall x, y \in R \quad (2)$$

Thay $y = 0$, ta có: $g(x^3) = x^2 g(x) \quad \forall x \in R$. Thay trở lại vào phương trình (2) ta có:

$$(x + y)g(x)y = (x + y)g\left(y\right)x \quad \forall x, y \in R.$$

Đến đây, chúng ta không được quyền triệt tiêu $(x + y)$ ở hai vế của phương trình hàm trên, vì biết đâu với 2 số *x,y* nào đó sao cho $x + y = 0$ mà $g(x)y \neq g\left(y\right)x$, khi đó ta sẽ không thể suy ra được hàm thỏa. Tuy vậy, ta vẫn có thể chứng minh được:

$g(x)y = g(y)x \quad \forall x, y \in R$.

Do $g(x) = 0 \quad \forall x \in R$ là hàm thỏa, nên ta có thể giả sử $g(x)$ không đồng nhất với 0, khi đó dễ dàng chứng minh được: $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Ta có, với mọi số thực *x,y* bất kỳ, luôn tồn tại số $x_0 \neq 0$ sao cho cả $x_0 + x, x_0 + y$ đều khác không (điều này là dễ thấy), suy ra:

$$\begin{cases} g(x)x_0 = g\left(x_0\right)x \\ g(y)x_0 = g\left(x_0\right)y \end{cases} \Rightarrow x_0 g\left(x_0\right) g\left(x\right) y = x_0 g\left(x_0\right) g(x) y \Rightarrow g\left(x\right) y = g(x) y$$

Vì vậy, $g(x)y = g(y)x \quad \forall x, y \in R$.

Do đó, ta cũng có được hàm thỏa phương trình hàm ban đầu sẽ là $f(x) = ax + b$ $\forall x \in R, a, b \in R$. ☺

+<u>Với $n \geq 4$</u>: Cách giải hoàn toán tương tự, xin để dành cho bạn đọc. Hàm thỏa vẫn là $f(x) = ax + b \quad \forall x \in R, a, b \in R$. ☺

Bài toán trên giới thiệu cho chúng ta một phương pháp giải phương trình hàm đó là xét một hàm mới liên quan, từ đó suy ra các phương trình mới từ các phương trình hàm cũ, mà việc giải chúng dễ dàng hơn. Đồng thời cũng cho ta thấy rằng, không phải lúc nào ta cũng tính được *f*(0) như mong muốn, vì vậy ta cần phải xử lý một cách linh hoạt hơn.

Tiếp theo là một bài toán trong một kì thi IMO, có sự kết hợp giữa kiến thức về đa thức và phương trình hàm.

Bài toán 4.2.*(IMO 2004) Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn:*

$$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2P(a+b+c)\ \ \forall a,b,c\in R: ab+bc+ca=0$$

Lời giải. Trước khi đi vào lời giải, chúng ta sẽ cùng phân tích đôi điều về bài toán.

Đây coi như là một điểm "khác" ở phần này, vì đề bài yêu cầu ta phải tìm một đa thức, khác với một hàm số. Về mặt kĩ thuật để giải bài toán, ta có thể yên tâm đôi chút vì đa thức dễ suy ra nhiều điều hơn là hàm số, nhưng bù lại ta không thể thay các biến một cách tùy tiện mà phải thỏa điều kiện ràng buộc đã cho. Chính vì vậy, công việc chọn các biến sao cho phù hợp và thuận tiện nhất là vô cùng quan trọng.

Xét $P(a,b,c)$ là phép thế (a,b,c) vào phương trình thỏa mãn $ab+bc+ca=0$. Ta có:

$P(0,0,0): 3P(0)=6P(0)\Rightarrow P(0)=0$. Từ đây suy ra hệ số tự do của $P(x)$ là bằng 0.

$P(0,0,c): P(0)+P(-c)+P(c)=2\left(2P(0)+P(c)\right)\Rightarrow P(-c)=P(c)\ \ \forall c\in R$.

Như vậy, $P(x)$ là hàm chẵn, trên phương diện đa thức, ta khẳng định ngay, hệ số bậc lẻ của $P(x)$ đều bằng 0, và bậc của $P(x)$ phải là số chẵn.

Để dễ dàng thay a,b,c, ta triệt tiêu c như sau:

$$P\left(a,b,-\frac{ab}{a+b}\right): P(a-b)+P\left(a+\frac{ab}{a+b}\right)+P\left(b+\frac{ab}{a+b}\right)=2P\left(a+b-\frac{ab}{a+b}\right)\ \ \forall a+b\neq 0$$

Để đơn giản hơn nữa, ta muốn mất đi phân thức $\frac{ab}{a+b}$, khi đó ta cần chọn m,n sao cho $a=mx, b=nx$ và $\frac{mn}{m+n}\in Z$. Ta sẽ nghĩ đến việc cho $m+n=\pm 1$ là đơn giản nhất, với $m+n=1$, ta nhẩm được bộ $(m=3, n=-2)$ là nhỏ nhất và không làm đồng nhất 2 vế.

$$P\left(-2x,3x,\frac{6x^2}{x}\right): P(-5x)+P(-2x-6x)+P(3x-6x)=2P(-2x+3x+6x)\ \ \forall x\neq 0$$

$$\Rightarrow P(5x)+P(8x)+P(3x)=2P(7x)\ \ \forall x\neq 0. \qquad (1)$$

Gọi $n=\deg P(x)$ $(n\in N)$:

+Nếu $n = 0$, suy ra $P(x) = P(0) \quad \forall x \in R$

+Nếu $n > 0$, áp dụng định lý so sánh hệ số đa thức, từ (1), ta phải có:

$$5^n + 8^n + 3^n = 2.7^n \qquad (2)$$

Do n là số chẵn, ta dễ dàng tìm được $n = 2,4$ là nghiệm của phương trình (2). Ta chứng minh với mọi $n > 4$ thì $5^n + 8^n > 2.7^n$. Ta chứng minh bằng quy nạp theo n.

+Với $n = 5$, tính trực tiếp, ta được : 35893 > 33614 (đúng)

+Giả sử đúng với $n = k$ ($k > 4$), tức là $5^k + 8^k > 2.7^k$.

+Với $n = k + 1$, ta có, áp dụng giả thiết quy nạp:

$$5^{k+1} + 8^{k+1} > 5\left(2.7^k - 8^k\right) + 8^{k+1} = 10.7^k + 8^k.3$$

Hơn nữa, với $k > 4$ thì $\left(\frac{8}{7}\right)^k > \left(\frac{8}{7}\right)^3 > \frac{4}{3} \Rightarrow 8^k.3 > 7^k.4$

Vậy $5^{k+1} + 8^{k+1} > 14.7^{k+1} = 2.7^{k+1}$ (ĐPCM).

Do đó $n = 2$ và $n = 4$ là nghiệm của phương trình (2).

Vậy đa thức $P(x)$ có dạng $c_1x^4 + c_2x^2$ với $c_1, c_2 \in R$.

Thay vào phương trình hàm ban đầu, ta được $P(x) = c_1x^4 + c_2x^2$ là đa thức thỏa, trong đó $c_1, c_2 \in R$ bất kỳ. ☺

Chú ý:

1) Thực ra việc chọn m,n để thay $a = mx, b = nx$ có rất nhiều cách, nhưng ở trên là cách đơn giản và phù hợp nhất.

2) Đa thức trên xuất phát từ 2 đẳng thức sau:

$$2(a+b+c)^2 = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 + 6(ab+bc+ca)$$

$$2(a+b+c)^4 = (a-b)^4 + (b-c)^4 + (c-a)^4 + 2(ab+bc+ca)\left[2\left(a^2+b^2+c^2\right) - \left(ab+bc+ca\right)\right]$$

3) Nếu thay số "2" bởi hằng số "k" bất kỳ trong phương trình hàm, với điều kiện tương tự, ta sẽ có bài toán tổng quát hơn như sau:

- $k = 0$: $P(x) = cx$ ($c \in R$)
- $k = 2$: $P(x) = c_1x^4 + c_2x^2$ ($c_1, c_2 \in R$)
- $k = 3$: $P(x) = c$ ($c \in R$)
- $k \notin \{0,2,3\}$: $P(x) = 0$

Đây xem như là bài tập, cách giải hoàn toàn tương tự. Mong các bạn giải quyết. ☺

Và một bài toán khác cũng trong kì thi IMO, xuất phát từ đẳng thức được dùng khá nhiều trong chứng minh bất đẳng thức: $(x^2+y^2)(a^2+b^2) = (xa+yb)^2 + (xb-ya)^2$.

> ***Bài toán 4.3.****(IMO 2002) Tìm tất cả các hàm $f: R \to R$ thỏa mãn:*
> $$\left(f(x)+f(z)\right)\left(f(y)+f(t)\right) = f\left(xy-zt\right)+f\left(xt+yz\right) \ \forall x,y,z,t \in R$$

<u>Lời giải.</u> Cho $x=y=z=t=0$, ta thu được: $4f^2(0) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0 \vee f(0) = \frac{1}{2}$.

Ta xét 2 trường hợp:

<u>Trường hợp 1:</u> $f(0) = \frac{1}{2}$. Thay $z=y=t=0$, ta có: $\left(f(x)+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \ \forall x \in R$.

Suy ra: $f(x) = \frac{1}{2} \ \forall x \in R$. Thử lại thấy hàm này thỏa.

<u>Trường hợp 2:</u> $f(0) = 0$. Thay $z=t=0$, ta thu được: $f\left(xy\right) = f\left(x\right)f\left(y\right) \ \forall x,y \in R$.

Do vậy f nhân tính, suy ra $f(x^2) = f^2(x) \ \forall x \in R$, do vậy f sẽ nhận giá trị không âm với mọi x không âm.

Cho $x = 0$, ta có:
$f(z)\left(f(y)+f(t)\right) = f(-zt)+f(yz) \Rightarrow f(zt) = f(-zt) \Rightarrow f(z) = f(-z) \ \forall z \in R$.

Như vậy f là hàm chẵn.

Trước tiên, ta có $f(x) = 0 \ \forall x \in R$ là hàm thỏa, như vậy ta xét f không đồng nhất với 0. Khi đó, ta chứng minh: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Giả sử $\exists x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, x_1 \neq x_2$ sao cho: $f\left(x_1\right) = 0, f\left(x_2\right) \neq 0$. Vì f nhân tính, nên ta có:

$f\left(x_2\right) = f\left(\frac{x_2}{x_1}.x_1\right) = f\left(\frac{x_2}{x_1}\right)f\left(x_1\right) = 0$ (suy ra mâu thuẫn). Như vậy $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Do đó, ta cũng sẽ có: $f(x) > 0 \ \forall x > 0$

Xét mọi $x,y > 0$:

Cho $z = t = \sqrt{xy}$, ta thu được:

$$\left(f(x)+f(\sqrt{xy})\right)\left(f(y)+f(\sqrt{xy})\right)=f\left(x\sqrt{xy}+y\sqrt{xy}\right)$$

mà do f nhân tính $\begin{cases}\left(f(x)+f(\sqrt{xy})\right)\left(f(y)+f(\sqrt{xy})\right)=f\left(\sqrt{xy}\right)\left(f\left(\sqrt{x}\right)+f\left(\sqrt{y}\right)\right)^2\\ f\left(x.\sqrt{xy}+y.\sqrt{xy}\right)=f\left(\sqrt{xy}\right)f\left(x+y\right)\end{cases}$

Nên ta suy ra:

$$f\left(x+y\right)=\left(f\left(\sqrt{x}\right)+f\left(\sqrt{y}\right)\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{f(x+y)}=f\left(\sqrt{x}\right)+f\left(\sqrt{y}\right) \ \ \forall x,y>0$$

Hơn nữa, $f(x)=f^2\left(\sqrt{x}\right)\Leftrightarrow\sqrt{f(x)}=f\left(\sqrt{x}\right) \ \ \forall x>0$.

Vậy $\sqrt{f(x+y)}=\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)} \ \ \forall x,y>0$.

Ta xét hàm $g:R^+\to R^+$ sao cho: $\sqrt{f(x)}=g(x) \ \ \forall x>0$.

Dễ dàng suy ra được g vừa là hàm nhân tính, vừa là hàm cộng tính. Khi đó, ta dễ dàng có: $g(x)=x \ \ \forall x>0$, dẫn đến $f(x)=x^2 \ \ \forall x>0$, mà f lại là hàm chẵn và $f(0)=0$, ta sẽ có ngay kết quả: hàm cần tìm là $f(x)=x^2 \ \ \forall x\in R$.

Vậy có 3 hàm thỏa phương trình ban đầu là $f(x)=x^2 \ \ \forall x\in R$, $f(x)=0 \ \ \forall x\in R$ và

$f(x)=\frac{1}{2} \ \ \forall x\in R$. ☺

Chú ý: 1) Điểm nhấn của lời giải trên chính là việc suy ra được tính chẵn của hàm số f và tính không âm với các giá trị của biến không âm. Đây được coi là 2 điều quan trọng, không chỉ đối với bài toán này, mà còn hữu dụng trong rất nhiều bài phương trình hàm khác.

2) Việc ta dự đoán "khá chính xác" $f(x)=x^2 \ \forall x\in R$ là một hàm thỏa, đã đưa ta đến việc xét hàm số $g(x)=\sqrt{f(x)}$, và thực sự, điều này giúp ta giải quyết bài toán một cách khá dễ dàng. Đây cũng là một kinh nghiệm nhỏ, khi ta dự đoán một hàm nào đó thỏa phương trình hàm đã cho, ta có thể xét một hàm mới liên quan, mà việc giải hàm mới này "dễ dàng" hơn, từ đó suy ra hàm cần tìm.

3) Lời giải chính thức của bài toán trên dựa trên phương trình hàm sau:

$$f(x-y)+f(x+y)=2\left(f(x)+f(y)\right) \ \ \forall x,y\in R.$$

Đồng thời ta cũng có thể chứng minh được: $f(x)$ là hàm đồng biến trên $[0;+\infty)$. Các bạn hãy thử giải phương trình hàm trên dựa trên ý tưởng này.

Bài toán trên cũng là một ví dụ cho thấy tính hiệu quả của việc đặt hàm mới, đồng thời rèn luyện kĩ năng thế các giá trị của biến sao cho phù hợp.

Chúng ta cùng qua một bài toán khác trong kì thi China MO, xuất phát từ hằng đẳng thức quen thuộc: $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$, điều đặc biệt là đề bài không yêu cầu ta tìm các hàm thỏa:

> ***Bài toán 4.4.***(*China MO 1996*) *Cho hàm số $f: R\to R$ thỏa mãn:*
>
> $$f(x^3+y^3)=(x+y)\left(f^2(x)-f(x)f(y)+f^2(y)\right)\quad \forall x,y\in R$$
>
> *Chứng minh rằng:* $f(1996x)=1996f(x)\ \forall x\in R$.

<u>Lời giải.</u> Để tổng quát hơn, cũng là vì yêu cầu khá "đặc biệt" của bài toán, ta sẽ chứng minh rằng: $f(nx)=nf(x)\ \ \forall n\in N$.

Gọi $P(x,y)$ là phép thế (x,y) vào phương trình ban đầu. Ta có:

$P(0,0): f(0)=0$.

$P(x,0): f(x^3)=xf^2(x)\ \ \forall x\in R$. (1)

Từ đây, ta suy ra ngay: $f(x)\ge 0,\forall x\ge 0$, $f(x)\le 0,\forall x\le 0$.

Ta gọi tập hợp X là $X=\{a\mid f(ax)=af(x),\forall x\in R\}$.

Ta chứng minh nếu $a\in X$ và $a>0$ thì $a+1\in X$.

Giả sử: $f(ax)=af(x),\forall x\in R$ (2)

Vì $f[(a+1).0]=(a+1)f(0)=0$, nên ta xét $x\neq 0$.

Ta có:

$$P(x,\sqrt[3]{ax}): f(x^3+ax^3)=(x+\sqrt[3]{a}x)\left[f^2(x)-f(x)f(\sqrt[3]{a}x)+f^2(\sqrt[3]{a}x)\right]\ \ \forall x\in R. \quad (3)$$

Theo hệ thức (1) và (2), ta có:

$$axf^2(x)=af(x^3)=f(ax^3)=f\left[(\sqrt[3]{a}x)^3\right]=\sqrt[3]{a}xf^2(\sqrt[3]{a}x)\quad \forall x\in R^*$$

$\Rightarrow \sqrt[3]{a^2}f^2(x)=f^2(\sqrt[3]{a}x)\Rightarrow \sqrt[3]{a}f(x)=f(\sqrt[3]{a}x)\ \ \forall x\in R^*$ (do $x,\sqrt[3]{a}x$ cùng dấu vì $a>0$)

Khi đó, hệ thức (3) sẽ trở thành:

$$f\left[(a+1)x^3\right]=x(1+\sqrt[3]{a})\left[f^2(x)-f(x)\sqrt[3]{a}f(x)+\sqrt[3]{a^2}f^2(x)\right]$$

$$=xf^2(x)(1+\sqrt[3]{a})\left(1-\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}\right)=f(x^3)(a+1)\ \ \forall x\in R^*.$$

Do mỗi số thực đều có căn bậc 3, nên ta suy ra: $f\left[(a+1)x\right]=(a+1)f(x)\ \ \forall x\in R^*$.

Từ đây suy ra điều phải chứng minh. Vì $1\in X$ nên $n\in X\ \ \forall n\in N^*$.

Vậy $f\left(nx\right)=nf(x)\ \ \forall n\in N$. Cho n = 1996, ta có ngay kết quả bài toán. ☺

Chú ý: 1) Do yêu cầu "đặc biệt" của bài toán, nên tự nhiên ta sẽ nghĩ ngay là có thể chứng minh điều đó đúng với mọi số tự nhiên, và qua đó, sẽ nghĩ ngay đến hướng quy nạp.

2) Việc suy ra dấu của $f(x)$ từ hệ thức (1) là quan trọng, nó giúp ta triệt tiêu bình phương mà không cần xét dấu, đây cũng là một điều đáng lưu ý trong rất nhiều bài tập khác.

Những bài phương trình hàm ở trên là những bước đi khởi động cho những bài phương trình hàm sau đây, tất cả đều dựa trên hằng đẳng thức $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$. Tất cả những lời giải sắp được trình bày dưới đây đều có những ý tưởng "sử dụng lại", mà công việc của các bạn là tìm ra, hiểu và áp dụng chúng.

Bài toán sau được lấy trong đề China TST, có một chút "biến thể", là xuất phát từ đẳng thức sau: $\left(\dfrac{x+y}{xy}\right)^2=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{xy}+\dfrac{1}{y^2}$.

Bài toán 4.5.*(China TST 2007) Tìm tất cả các hàm $f:Q^+\to Q^+$ thỏa mãn:*

$$f(x)+f(y)+2xyf(xy)=\frac{f(xy)}{f(x+y)}\quad\forall x,y\in Q^+$$

<u>Lời giải.</u> Việc hàm f không xác định tại $x=0$ đã gây một chút khó khăn khi 'dự đoán' hàm f là hàm gì. Trong những trường hợp này, ta thường hay thử tính các giá trị của f tại các giá trị đặc biệt nào đó, và thường là $f(1), f(2), f(3),...$ (do ta đang làm trên tập các số hữu tỷ dương).

Gọi $P(x,y)$ là phép thế x,y tương ứng vào phương trình hàm.

Ta có:

$$P(1,1)\Leftrightarrow 4f(1)=\frac{f(1)}{f(2)}\Leftrightarrow f\left(2\right)=\frac{1}{4}$$

$$P(2,2) \Leftrightarrow \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+8f(4)=\frac{f(4)}{f(4)} \Rightarrow f\left(4\right)=\frac{1}{16}$$

$$P(1,2) \Leftrightarrow f(1)+\frac{1}{4}+1=\frac{1}{4f(3)} \qquad (1)$$

$$P(1,3) \Leftrightarrow f(1)+f(3)+6f(3)=\frac{f(3)}{f(4)}=16f(3) \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) dễ dàng giải ra được: $f(1)=1, f(3)=\frac{1}{9}$.

Đến đây, gần như đã quá rõ ràng rồi, ta có thể đoán được hàm $f(x)$ mà thỏa có lẽ là $f(x)=\frac{1}{x^2}$ $\forall x \in Q^+$ (thử lại thì quả thấy đúng). Như vậy ta sẽ đi chứng minh $f(x)=\frac{1}{x^2}$ $\forall x \in Q^+$.

Nên nhớ, ta đang làm trên tập hữu tỷ dương, bởi vậy cách tốt nhất là chứng minh trên tập số nguyên dương trước rồi suy ra trên tập hữu tỷ.

Ta có:

$$P(x,1) \Leftrightarrow f(x)+1+2xf(x)=\frac{f(x)}{f(x+1)} \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}+2x+1=\frac{1}{f(x+1)}$$

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp: $f(n)=\frac{1}{n^2}$ $\forall n \in N^+$:

+Với $n = 1$, $f(1)=1$ (đúng)

+Giả sử đúng với $n = k$ ($k > 1$), tức là: $f\left(k\right)=\frac{1}{k^2}$

+Với $n = k + 1$, ta có:

$$\frac{1}{f(k+1)}=\frac{1}{f(k)}+2k+1=k^2+2k+1=(k+1)^2 \Rightarrow f(k+1)=\frac{1}{(k+1)^2}.$$

Vậy ta có $f(n)=\frac{1}{n^2}$ $\forall n \in N^+$.

Tiếp đến, ta sẽ chứng minh rằng $f\left(nx\right)=\frac{f(x)}{n^2}$ $\forall n \in N^+, x \in Q^+$. Ta cũng sẽ chứng minh bằng quy nạp:

+Với $n = 1$: $f(x)=f(x)$ (hiển nhiên đúng)

+Giả sử đúng với $n = k$ ($k > 1$), tức là: $f\left(kx\right)=\dfrac{f(x)}{k^2}$.

+Với $n = k + 1$, ta có:

$$P(x,k)\Leftrightarrow f(x)+\frac{1}{k^2}+2xkf(xk)=\frac{f(xk)}{f(x+k)}\Leftrightarrow f(x)+\frac{1}{k^2}+\frac{2xf(x)}{k}=\frac{f(x)}{k^2f(x+k)}$$

$$\Rightarrow k^2+2xk+\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{f(x+k)}.$$

$$P(x,1)\Leftrightarrow\frac{1}{f(x)}+2x+1=\frac{1}{f(x+1)}\Rightarrow\frac{1}{f(x+k)}+2(x+k)+1=\frac{1}{f(x+k+1)}.$$

Từ 2 điều trên, ta suy ra: $\dfrac{1}{f(x+k+1)}=k^2+2xk+\dfrac{1}{f(x)}+2(x+k)+1$.

Ta lại có:

$$P(x,k+1)\Leftrightarrow f(x)+\frac{1}{(k+1)^2}+2x(k+1)f\left(x(k+1)\right)=\frac{f\left(x(k+1)\right)}{f(x+k+1)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{f(x)}{f\left(x(k+1)\right)}+\frac{1}{(k+1)^2f\left(x(k+1)\right)}+2x(k+1)=\frac{1}{f(x+k+1)}$$

Như vậy:

$$\frac{f(x)}{f\left(x(k+1)\right)}+\frac{1}{(k+1)^2f\left(x(k+1)\right)}+2x(k+1)=k^2+2xk+\frac{1}{f(x)}+2(x+k)+1$$

$$\Rightarrow\frac{f(x)}{f\left(x(k+1)\right)}+\frac{1}{(k+1)^2f\left(x(k+1)\right)}=\left(k+1\right)^2+\frac{1}{f(x)}$$

Với $g(x)=f\left(x(k+1)\right)$, coi trên như là phương trình theo ẩn $f(x)$, dễ dàng giải ra được:

$f(x)=(k+1)^2g(x)\Rightarrow f\left(x(k+1)\right)=\dfrac{f(x)}{(k+1)^2}$ (ĐPCM).

Như vậy, $f\left(nx\right)=\dfrac{f(x)}{n^2}\quad\forall n\in N^+,x\in Q^+$.

Cho số hữu tỷ dương $x=\frac{m}{n}$ bất kỳ, trong đó *m,n* là các số nguyên dương, ta có:

$$f\left(n.\frac{m}{n}\right)=\frac{f\left(\frac{m}{n}\right)}{n^2}\Rightarrow f\left(\frac{m}{n}\right)=n^2f(m)=\frac{n^2}{m^2}\ .$$

Như vậy, hàm duy nhất thỏa phương trình hàm ban đầu là $f(x)=\frac{1}{x^2}\ \ \forall x\in Q^+$. ☺

Bài toán sắp được trình bày do tác giả đề xuất, nhưng vẫn chưa nhận được lời giải nào cả, phía dưới là một lời giải khá "rắc rối" của tác giả. Mong các bạn xem xét kĩ.

Bài toán 4.6. *Tìm tất cả các hàm $f:R\to R$ thỏa mãn:*

$$f^2\left(x+y\right)=f\left(x^2\right)+2f\left(x\right)f\left(y\right)+f\left(y^2\right)\ \forall x,y\in R$$

Lời giải. Cho $x=y=0$, ta có: $f^2(0)=2f(0)+2f^2(0)\Leftrightarrow f(0)=0\vee f(0)=-2$. Như vậy, ta xét 2 trường hợp:

Trường hợp 1: $f(x)=0$. Cho $y=0$, ta thu được: $f^2(x)=f(x^2)\ \ \forall x\in R$. Đến đây ta suy ra được $f(x)\ge 0,\forall x\ge 0$.

Thay $f^2(x)=f(x^2)$, $f^2(y)=f(y^2)$ vào phương trình ban đầu, ta được:

$$f^2(x+y)=\left[f(x)+f(y)\right]^2\ \ \forall x,y\in R.\quad (1)$$

Thay $y=-x$ ta dễ dàng suy ra được f là hàm lẻ. Như vậy $f(x)\ge 0,\forall x\ge 0$ và $f(x)\le 0,\forall x\le 0$. Do đó, (1) sẽ tương đương với: $f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right)$ với mọi *x, y* cùng dấu.

Công việc còn lại mà ta cần làm là chứng minh f cộng tính ngay cả khi *x,y* trái dấu (hiển nhiên đúng khi 1 trong 2 số bằng 0).

Nếu *x,y* là 2 số trái dấu, thì $x+y$ phải cùng dấu với $-x$ hoặc $-y$, suy ra:

$f(x+y)+f(-y)=f(x)$ hoặc $f(x+y)+f(-x)=f(y)$, cả 2 điều này kết hợp với tính lẻ của hàm *f*, ta đều thu nhận được: $f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right)$.

Như vậy f là hàm cộng tính trên *R*, kết hợp với $f^2(x)=f(x^2)$ ta suy ra $f(x)=0\ \ \forall x\in R$ và $f(x)=x\ \ \forall x\in R$ là 2 hàm thỏa.

Trường hợp 2: $f(0)=-2$. Ta có, gọi $P(x,y)$ là phép thế (x,y) vào phương trình ban đầu:

$P(x,0): f^2(x) = f(x^2) - 4f(x) - 2 \Leftrightarrow f(x^2) = f^2(x) + 4f(x) + 2 \quad \forall x \in R$. (2)

Thế (2) trở lại vào phương trình ban đầu, ta thu được:

$$f^2(x+y) = f^2(x) + 4f(x) + 2 + 2f(x)f(y) + f^2(y) + 4f(y) + 2$$

$$= \left(f(x) + f(y) + 2\right)^2 \quad \forall x, y \in R \qquad (3)$$

Đến đây, thông thường, ta sẽ xét 3 trường hợp sau:

1) $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2 \quad \forall x, y \in R$
2) $f(x+y) = -f(x) - f(y) - 2 \quad \forall x, y \in R$
3) $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2 \quad \forall x, y \in X$ và $f(x+y) = -f(x) - f(y) - 2 \quad \forall x, y \in Y$ sao cho $X \cup Y = R$.

Và ta sẽ thử chứng minh trường hợp 2) và 3) là sai (vì các hàm mà tác giả dự đoán không thỏa 2), 3) !!!). Tuy nhiên, sau một thời gian thử, tác giả thấy điều này khá khó. Chính vì thế, tác giả đã vô tình phát hiện ra lời giải sau:

Thay $y = -x$ ở phương trình (3), ta có:

$$\left(f(x) + f(-x) + 2\right)^2 = f^2(0) = 4 \quad \forall x \in R.$$

Đến đây, ta cũng sẽ xét 3 trường hợp:

1) $f(x) + f(-x) + 2 = -2, \forall x \in R$
2) $f(x) + f(-x) + 2 = 2, \forall x \in R$
3) $f(x) + f(-x) + 2 = -2 \quad \forall x \in X$ và $f(x) + f(-x) + 2 = 2 \quad \forall x \in Y$ sao cho $X \cup Y = R$.

Ta chứng minh 2) và 3) là sai. Do đó, ta chứng minh không tồn tại số thực a sao cho: $f(a) + f(-a) + 2 = 2 \Leftrightarrow f(a) + f(-a) = 0$. Giả sử tồn tại một số a như vậy, dễ thấy $a \neq 0$, và ta có thể giả sử $a > 0$ (tại sao ?). Mục đích của chúng ta là suy ra điều vô lý dựa trên ý tưởng: $f(y) \neq f(y)$ với số y nào đó, tức là ta sẽ tính $f(y)$ theo 2 cách và cho ra 2 kết quả khác nhau.

Gọi $F(x)$ là phép thế x vào phương trình (2). Ta có:

$$F(a): f^2(a) = f(a^2) - 4f(a) - 2$$

$$F(-a): f^2(-a) = f\left((-a)^2\right) - 4f(-a) - 2 = f(a^2) - 4f(-a) - 2$$

Hơn nữa $f^2(a) = f^2(-a)$ vì $f(a) + f(-a) = 0$, nên: $f(a) = f(-a)$, từ đó suy ra: $f(a) = f(-a) = 0$.

Ta có:

$F\left(\sqrt{a}\right): f^2\left(\sqrt{a}\right) = f(a) - 4f\left(\sqrt{a}\right) - 2 = -4f\left(\sqrt{a}\right) - 2$

$$\Leftrightarrow f^2\left(\sqrt{a}\right) + 4f\left(\sqrt{a}\right) + 2 = 0$$

Coi $f\left(\sqrt{a}\right)$ là ẩn, ta giải được: $f\left(\sqrt{a}\right) = \sqrt{2} - 2 \vee f\left(\sqrt{a}\right) = -\sqrt{2} - 2$. (4)

Ta có:

$F(a): f^2(a) = f(a^2) - 4f(a) - 2 \Rightarrow f(a^2) = 2$ (vì $f(a) = 0$).

$P(a,a): f^2(2a) = 2f(a^2) + 2.0.0 = 4$

$P(2a,-a): 0 = f^2(a) = f^2(2a-a) = f(4a^2) + 2f(2a)f(-a) + f(a^2) = f(4a^2) + 2 \Rightarrow f(4a^2) = -2$

$P(2a,2a): f^2(4a) = 2f(4a^2) + 2f^2(2a) = 2.(-2) + 2.4 = 4$.

$$\Rightarrow f(4a) = 2 \vee f(4a) = -2 \qquad (5)$$

$F(2\sqrt{a}): f^2\left(2\sqrt{a}\right) = f(4a) - 4f\left(2\sqrt{a}\right) - 2$

$$\Rightarrow f^2\left(2\sqrt{a}\right) = -4f\left(2\sqrt{a}\right) \vee f^2\left(2\sqrt{a}\right) = -4f\left(2\sqrt{a}\right) - 4 \qquad \text{(do (5))}$$

Coi $f\left(2\sqrt{a}\right)$ là ẩn, ta giải được: $f\left(2\sqrt{a}\right) = 0 \vee f\left(2\sqrt{a}\right) = -4 \vee f\left(2\sqrt{a}\right) = -2$. (6)

Tuy nhiên, ta lại có:

$P(\sqrt{a},\sqrt{a}): f^2\left(2\sqrt{a}\right) = f(a) + 2f^2\left(\sqrt{a}\right) + f(a) = 2f^2\left(\sqrt{a}\right)$

$$\Rightarrow f^2\left(2\sqrt{a}\right) = 2\left(\sqrt{2} - 2\right)^2 \vee f^2\left(2\sqrt{a}\right) = 2\left(\sqrt{2} + 2\right)^2 \qquad \text{(do (4))}$$

Kết hợp với (6), ta suy ra điều vô lý !!!.

Vậy ta phải có: $f(x) + f(-x) + 2 = -2, \forall x \in R$, hay là: $f(x) + f(-x) = -4 \ \ \forall x \in R$.

Ta xét hàm g: $R \to R$ sao cho: $g(x) = f(x) + 2$. Khi đó ta có:

$f(x) + f(-x) = -4 \Leftrightarrow g(x) + g(-x) = 0 \ \ \forall x \in R$. (7)

Từ phương trình hàm ban đầu, ta thu được:

$\left(g(x+y) - 2\right)^2 = g(x^2) + 2\left(g(x) - 2\right)\left(g(y) - 2\right) + g(y^2) - 4$

$\Leftrightarrow g^2(x+y) - 4g(x+y) = g(x^2) + g(y^2) + 2g(x)g(y) - 4\left(g(x) + g(y)\right) \ \ \forall x, y \in R$. (8)

Từ hệ thức (2), ta thu được:

$\left(g(x)-2\right)^2 = g(x^2)-2-4\left(g(x)-2\right)-2 \Leftrightarrow g^2(x)=g(x^2)\ \ \forall x\in R$. (9)

Thế $-x$ vào x và $-y$ vào y ở hệ thức (8), kết hợp với (7), (9), ta có:

$$g^2(-x-y)-4g(-x-y)=g(x^2)+g(y^2)+2g(-x)g(-y)-4\left(g(-x)+g(-y)\right)$$

$$\Leftrightarrow g^2(x+y)+4g(x+y)=g(x^2)+g(y^2)+2g(x)g(y)+4\left(g(x)+g(y)\right)\ \ \forall x,y\in R.$$

Kết hợp với (8), ta suy ra ngay: $g(x)+g(y)=g(x+y)\ \ \forall x,y\in R$.

Kết hợp với (9) và sử dụng bổ đề, ta suy ra: $g(x)=x\ \ \forall x\in R$ hoặc $g(x)=0\ \ \forall x\in R$, do đó: $f(x)=x-2\ \ \forall x\in R$ hoặc $f(x)=-2\ \ \forall x\in R$, đây là 2 hàm thỏa.

Nói tóm lại, phương trình hàm ban đầu có 4 hàm thỏa đó là: $f(x)=0\ \ \forall x\in R$, $f(x)=x\ \ \forall x\in R$, $f(x)=x-2\ \ \forall x\in R$ và $f(x)=-2\ \ \forall x\in R$. ☺

Chú ý: 1) Phương trình hàm trên là do tác giả đề xuất trên mathlinks, nhưng không nhận được thêm lời giải nào, lời giải trên có vẻ khá rắc rối nhưng hoàn toàn dễ hiểu và sơ cấp.

2) Mong ai quan tâm đến bài toán này và tìm ra một lời giải khác, xin gửi về email của tác giả. Xin chân thành cám ơn.

Cũng từ bài trên, tác giả thay đổi một chút để ra một bài toán mới, tuy dễ hơn nhưng cũng khá thú vị:

Bài toán 4.7. *Tìm tất cả các hàm $f:R\to R$ thỏa mãn:*

$$f^2(x-y)=f(x^2)-2f(x)f(y)+f(y^2)\ \ \forall x,y\in R.$$

Lời giải. Xét $P(x,y)$ là phép thế (x,y) vào phương trình hàm ban đầu. Ta có:

$$P(0,0): f^2(0)=2f(0)-2f^2(0)\Leftrightarrow f(0)=0\vee f(0)=\frac{2}{3}.$$

Ta xét 2 trường hợp:

Trường hợp 1: $f(0)=\frac{2}{3}$. Ta có:

$$P(x,0): f^2(x)=f(x^2)-\frac{4}{3}f(x)+\frac{2}{3}\ \ \forall x\in R.$$

$$P(x,x): \frac{4}{9}=2f(x^2)-2f^2(x)\Rightarrow f(x^2)=\frac{2}{9}+f^2(x)\ \ \forall x\in R.$$

Từ 2 điều trên, ta suy ra: $f^2(x)=\frac{2}{9}+f^2(x)-\frac{4}{3}f(x)+\frac{2}{3}\Rightarrow f(x)=\frac{2}{3}\ \ \forall x\in R$.

Vậy $f(x)=\dfrac{2}{3}\ \forall x\in R$ là một hàm thỏa.

<u>Trường hợp 2:</u> $f(0)=0$. Ta có:

$P(x,0): f^2(x)=f(x^2)\ \forall x\in R$. (1)

Thay vào phương trình hàm ban đầu, ta được:

$$f^2(x-y)=f^2(x)-2f(x)f(y)+f^2(y)=\left[f(x)-f(y)\right]^2\ \forall x,y\in R. \quad (2)$$

Tất nhiên ta sẽ không thể triệt tiêu bình phương ở 2 vế, nhưng nó có dạng khá giống với **Bài toán 4.6** ở trên, vì vậy ta sẽ đi chứng minh f là hàm lẻ.

Ta có:

$P(-x,y): f^2(-x-y)=f(x^2)-2f(-x)f(y)+f(y^2)$

$P(x,-y): f^2(x+y)=f(x^2)-2f(x)f(-y)+f(y^2)$

Hơn nữa, $f^2(-x-y)=f^2(x+y)=f\left[(x+y)^2\right]$, vậy ta thu được:

$$f(-x)f(y)=f(x)f(-y)\ \forall x,y\in R. \quad (3)$$

Dễ dàng thấy rằng $f(x)=0\ \forall x\in R$ là một hàm thỏa. Ta giả sử $\exists a\neq 0$ sao cho $f(a)\neq 0$. Từ (1), ta suy ra: $f^2(a)=f^2(-a)=f(a^2)$. Ta lại có:

+Nếu $f(a)=f(-a)$. Từ (3) ta suy ra : $f(x)=f(-x)\ \forall x\in R$.

Khi đó, thay $y=-x$ vào (2), ta thu được: $f^2(x+x)=\left[f(x)-f(-x)\right]^2=0$ suy ra: $f^2(2x)=0\Rightarrow f(x)=0\ \forall x\in R$ (sai vì $f(a)\neq 0$).

Vậy $f(a)=-f(-a)$. Từ (3) ta suy ra: $f(x)=-f(-x)\ \forall x\in R$.

Khi đó, thay y bởi $-y$ ở (2), ta được: $f^2(x+y)=\left[f(x)+f(y)\right]^2\ \forall x,y\in R$.

Áp dụng kết quả **Bài toán 4.6**, ta suy ra: $f(x)=x\ \forall x\in R$.

Tóm lại, có 3 hàm thỏa đó là $f(x)=\dfrac{2}{3}\ \forall x\in R$, $f(x)=0\ \forall x\in R$ và $f(x)=x\ \forall x\in R$. ☺

Chú ý: 1) Chính nhờ việc chứng minh được f là hàm lẻ ta mới suy ra được kết quả bài toán, từ đó cho thấy tầm quan trọng trong việc chứng minh tính chẵn lẻ của hàm trong các bài toán phương trình hàm nói chung.

2) Bước giả sử tồn tại a sao cho $f(a)\neq 0$ cũng là một bước quan trọng.

Cũng từ ý tưởng tương tự, ta có bài toán sau:

Bài toán 4.8. *Tìm tất cả các hàm số* $f: R \to R$ *thỏa mãn:*

$$f^2(x+y) = f(x^2) + 2f(xy) + f(y^2) \qquad \forall x, y \in R$$

Lời giải. Cho $P(x,y)$ là phép gán (x,y) vào phương trình hàm ban đầu.

$P(0,0): f^2(0) = 4f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0 \vee f(0) = 4$

Ta xét 2 trường hợp:

Trường hợp 1: $f(0) = 4$. Ta có:

$P(x,0): f^2(x) = f(x^2) + 3f(0) = f(x^2) + 12 \qquad \forall x \in R$

$P(-x,0): f^2(-x) = f(x^2) + 3f(0) = f(x^2) + 12 \qquad \forall x \in R$

Vậy $f^2(x) = f^2(-x) \ \ \forall x \in R$

$P(x,-x): f^2(0) = 2f(x^2) + 2f(-x^2) \Leftrightarrow 8 = f(x^2) + f(-x^2) \Leftrightarrow 8 = f(x) + f(-x) \quad \forall x \in R$

Coi $f(x)$ và $f(-x)$ là 2 ẩn, từ 2 điều trên ta suy ra:

$f(x) = f(-x) = 4 \ \ \forall x \in R$

Vậy $f(x) = 4 \ \ \forall x \in R$, đây là 1 hàm thỏa.

Trường hợp 2: $f(0) = 0$. Ta có:

$P(x,0): f^2(x) = f(x^2) \ \ \forall x \in R \qquad (1)$

Suy ra: $f(x) \geq 0, \forall x \geq 0$. Hơn nữa:

$P(x,-x): f^2(0) = 2f(x^2) + 2f(-x^2) \Leftrightarrow 0 = f(x^2) + f(-x^2) \Leftrightarrow 0 = f(x) + f(-x) \ \ \forall x \in R$.

Vậy f là hàm lẻ.

Dễ thấy hàm $f(x) = 0 \ \ \forall x \in R$ là hàm thỏa. Ta xét f không đồng nhất với 0, khi đó ta chứng minh $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Giả sử $\exists x_1, x_2 \in R^*, x_1 \neq x_2$ sao cho $f(x_1) \neq 0$, $f(x_2) = 0$. Do f là hàm lẻ, giả sử $x_1, x_2 > 0$.

Từ phương trình hàm ban đầu và hệ thức (1), ta suy ra:

$f^2(x+y) \geq f^2(y) \ \ \forall x, y > 0 \Rightarrow f(x) \geq f(y) \ \ \forall x > y > 0$.

Ta có: $P(x_2, x_2): f^2(2x_2) = 2f^2(x_2) + 2f^2(x_2) = 0 \Rightarrow f(2x_2) = 0$. Như vậy, nếu $f(x_2) = 0$ thì $f(2x_2) = 0$. Khi đó, ta dễ dàng có: $f(2^n x_2) = 0 \ \ \forall n \in N$. Chọn *n* đủ lớn sao cho: $2^n x_2 > x_1$. Khi đó, ta có:

$$0 = f(2^n x_2) \geq f(x_1) \neq 0 \text{ (vô lý)}$$

Vậy $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Khi đó, từ hệ thức (1) suy ra: $f^2(1) = f(1) \Rightarrow f(1) = 1$. Ta chứng minh: $f(nx) = nf(x)$ $\forall x > 0$ $(\forall n \in N)$ (2). Ta chứng minh bằng quy nạp theo n như sau:

+Với n = 0: $f(0) = 0$ (đúng)

+Giả sử (2) đúng với $n = k$ ($k \geq 0$), tức là $f(kx) = kf(x)$ $\forall x > 0$

+Với $n = k + 1$, ta có:

$$P(kx,x): f^2\left[(k+1)x\right] = f^2(kx) + 2f(kx^2) + f^2(x) = k^2 f^2(x) + 2kf^2(x) + f^2(x)$$

$$= (k^2 + 2k + 1)f^2(x) = (k+1)^2 f^2(x) \quad \forall x > 0$$

$$\Rightarrow f\left[(k+1)x\right] = (k+1)f(x) \quad \forall x > 0$$

Vậy $f(nx) = nf(x)$ $\forall x > 0$ $(\forall n \in N)$. Do f là hàm lẻ, ta suy ra ngay: $f(nx) = nf(x)$ $\forall x \in R$ $(\forall n \in Z)$. Từ đây ta dễ dàng có được: $f(q) = q$ $\forall q \in Q$.

Vậy ta có được những điều sau:

+ f là hàm đồng biến trên *R*.

+ $f(q) = q$ $\forall q \in Q$.

Bằng cách tương tự ở **Phần II/**, ta dễ dàng có được: $f(x) = x$ $\forall x \in R$, và đây là một hàm thỏa.

Tóm lại, có 3 hàm thỏa phương trình ban đầu: $f(x) = x$ $\forall x \in R$, $f(x) = 0$ $\forall x \in R$, $f(x) = 4$ $\forall x \in R$. ☺

Chú ý: 1) Việc dự đoán hàm thỏa ở bài này là khá dễ dàng. Tuy nhiên ở Trường hợp 2, có một điều thú vị là ta không suy ra f cộng tính, nhưng lại có tính chất của hàm cộng tính, đó là $f(nx) = nf(x)$, và từ đó suy ra kết quả bài toán. Qua đó, cho ta được một kinh nghiệm, nếu không suy ra "tính chất" nào đó của hàm f thì hãy thử đi tìm những tính chất khác có mối quan hệ mật thiết với "tính chất" mà mình cần.

2) Đây cũng là một ví dụ, cho thấy được sự hiệu quả từ việc chứng minh trên tập *N*, dẫn đến tập *Q* và kết luận ở tập *R*.

3) Xin giới thiệu bài toán tổng quát, đây xem như là bài tập dành cho các bạn.

Với $n > 1$*, tìm tất cả các hàm* $f: R \to R$ *thỏa mãn:*

$$f^2(x_1 + x_2 + ... + x_n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^2) + 2\sum_{1 \leq j < k \leq n} f\left(x_j x_k\right) \qquad \forall x_1, x_2, ..., x_n \in R.$$

Điều làm tác giả băn khoăn nhất, chính là bài toán sau, được tìm thấy từ IMO Shortlist 2004, mặc dù đã đọc được lời giải, tuy rằng cảm thấy rất hay, nhưng khá khó hiểu, mong ai quan tâm có thể giải quyết bài toán này và liên hệ với tác giả qua email, xin cám ơn.

Bài toán 4.9.*(IMO Shortlist 2004) Tìm tất cả các hàm* $f: R \to R$ *thỏa mãn:*

$$f(x^2 + y^2 + 2f(xy)) = f^2(x+y) \quad \forall x, y \in R$$

Lời giải. Có những 3 hàm thỏa, đó là $f(x) = x \ \ \forall x \in R$, $f(x) = 0 \ \ \forall x \in R$ và một hàm khá đặc biệt, cũng là điều làm nên tính "hóc búa" của bài toán này: $f(x) = \begin{cases} 1 & \forall x \notin X \\ -1 & \forall x \in X \end{cases}$

trong đó X là tập bất kỳ thỏa $X \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$.

Lời giải chính thức các bạn có thể tìm đọc trên mạng hoặc có trong Ebook **IMO Conpendium** (Download: http://www.mediafire.com/download.php?507ihdrg5paytg3).

V/ Các bài toán tham khảo

Xin trình bày một số bài phương trình hàm liên quan để các bạn có thể luyện tập:

Bài toán 1. Tìm tất cả các hàm $f: R \to R$ thỏa mãn:

i) $f(x+y) = f(x) + f(y) \ \ \forall x, y \in R$.

ii) $f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \ \ \forall x \in R^*$.

Bài toán 2. Tìm tất cả các hàm $f: R \to R$ thỏa mãn:

$$f(2x + f(y)) = f(2x) + xf(2y) + f(f(y)) \ \ \forall x, y \in R.$$

Bài toán 3. (IMO 1999) Tìm tất cả các hàm $f: R \to R$ thỏa mãn:

$$f(x - f(y)) = f(x) + xf(y) + f(f(y)) - 1 \ \ \forall x, y \in R.$$

Bài toán 4. (IMO 1992) Tìm tất cả các hàm $f: R \to R$ thỏa mãn:

$$f(x^2 + f(y)) = y + f^2(x) \ \ \forall x, y \in R.$$

Bài toán 5. Tìm tất cả các hàm $f: R \to R$ thỏa mãn:

$$f(x^2 + f(y) - y) = f^2(x) \ \ \forall x, y \in R.$$

VI/ Tổng kết

Bài Seminar đến đây là kết thúc.

Tác giả đã cố gắng trình bày hết tất cả những gì mà tác giả sưu tầm được một cách khá chi tiết và sơ cấp nhất.

Tuy nhiên, chắc chắn sẽ có những khuyết điểm, và bài seminar này sẽ không thể hoàn thành nếu không có sự đóng góp ý kiến của mọi người. Rất cám ơn mọi người.

Điều mà tác giả mong muốn nhất qua bài seminar này, là mọi người sẽ có thêm một cái nhìn đa chiều về phương trình hàm, rằng nó cũng rất thú vị, qua nhiều bài phương trình hàm, ta có thể học được khả năng dự đoán, kĩ năng thay biến sao cho phù hợp, và đôi khi là sự sáng tạo trong lời giải. Đồng thời, cũng rất mong mọi người sẽ đóng góp thêm lời giải, bài toán mới và các ý kiến về những gì tác giả đã trình bày trong seminar này, bởi vì cũng còn rất nhiều vấn đề mà chính tác giả chưa đủ trình độ để giải quyết, rất cần có sự giúp đỡ của cộng đồng mạng.

Một lần nữa xin cám ơn mọi người, chúc mọi người luôn có niềm đam mê với môn toán và học toán thật tốt.

Thân,

Tác giả.

VII/ Tài liệu tham khảo

[1]: **Functional Equations A Problem Solving Approach** – Venkatchala

[2]: Topic **Functional Equations Marathon** – ArtofProblemSolving Forum – http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=36&t=350187

[3]: **Problem Books in Mathematics** – P.Winkler – Springer .

[4]: Ebook **Functional Equation** – Marko Radovanovic – http://www.mediafire.com/download.php?y4lsicy8rkzkkzt.

[5]: Forum **Mathscope** – mathscope.org.

[6]: Forum **ArtofProblemSolving** – http://www.artofproblemsolving.com/.