

ĐS6. CHUYÊN ĐỀ 4:

ƯỚC CHUNG LỚN NHẤT VÀ BỘI CHUNG NHỎ NHẤT

CHỦ ĐỀ 2: CHỨNG MINH HAI SỐ NGUYÊN TỔ CÙNG NHAU

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Ước và Bội của một số nguyên

$$a, b \in \mathbb{Z} \quad b \neq 0, \quad a = bq$$

Với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $b \neq 0$. Nếu có số nguyên q sao cho $a = bq$ thì ta nói a chia hết cho b . Ta còn nói a là bội của b và b là ước của a .

2. Nhận xét

$$a = bq \quad a : b = q$$

- Nếu $a = bq$ thì ta nói a chia cho b được q và viết $a : b = q$.
- Số 0 là bội của mọi số nguyên khác 0. Số 0 không phải là ước của bất kì số nguyên nào.
- Các số 1 và -1 là ước của mọi số nguyên.

3. Ước chung của hai hay nhiều số là ước của tất cả các số đó.

Ước chung của các số a, b, c được kí hiệu là $ƯC(a, b, c)$.

4. Ước chung lớn nhất

- Ước chung lớn nhất của hai hay nhiều số là số lớn nhất trong tập hợp các ước chung của các số đó.

5. Các tính chất

$$\vdots \text{ CLN}(a, 1) = 1; \text{ BCNN}(a, 1) = a$$

-

$$a : b \Rightarrow \vdots \text{ CLN}(a, b) = b; \text{ BCNN}(a, b) = a$$

- Nếu

$$\Rightarrow (a, b) = 1; [a, b] = a.b$$

- Nếu a, b nguyên tố cùng nhau

- $ƯC(a, b) = Ư(ƯCLN(a, b))$ và $BC(a, b) = B(BCNN(a, b))$

$$\exists \text{ CLN}(a,b)=d; \begin{cases} a=dm \\ b=dn \end{cases} \Rightarrow \exists \text{ CLN}(m,n)=1;$$

- Nếu

$$\exists \text{ CLN}(10,15)=5; \begin{cases} 10=2.5 \\ 15=3.5 \end{cases} \Rightarrow \exists \text{ CLN}(2,3)=1$$

Ví dụ

$$BCNN(a,b)=c; \begin{cases} c=am \\ c=bn \end{cases} \Rightarrow \exists \text{ CLN}(m,n)=1;$$

- Nếu

$$BCNN(10,15)=30; \begin{cases} 30=10.3 \\ 30=15.2 \end{cases} \Rightarrow \exists \text{ CLN}(2,3)=1$$

Ví dụ

$$ab = \exists \text{ CLN}(a,b).BCNN(a,b)$$

-

PHẦN II. BÀI TẬP:

Dạng 1: Tìm ƯCLN của các số:

I. Phương pháp giải

$$\exists \text{ CLN}(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Bài toán: Tìm

$$\exists \text{ CLN}(a_1, a_2, \dots, a_n) = d$$

Phương pháp giải thường dùng: Giả sử

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 : d \\ a_2 : d \\ \dots \\ a_n : d \end{cases} \Rightarrow d = ?$$

II. Bài toán

$$n \in \mathbb{N}^*$$

Bài 1: Cho . Chứng minh rằng

$$| \text{CLN}(n+3, 2n+5) = 1$$

a)

$$| \text{CLN}(3n+3, 4n+9) = 1$$

b)

Lời giải:

$$| \text{CLN}(n+3, 2n+5) = d (d \in \mathbb{N}^*)$$

a) Gọi

$$\Rightarrow \begin{cases} n+3 : d \\ 2n+5 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n+6 : d \\ 2n+5 : d \end{cases}$$

$$\Rightarrow [(2n+6) - (2n+5)] : d$$

$$\Rightarrow (2n+6 - 2n - 5) : d$$

$$\Rightarrow 1 : d \Rightarrow d = 1$$

$$(n+3, 2n+5) = 1$$

Vậy

$$| \text{CLN}(3n+3, 4n+9) = d (d \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow \begin{cases} 4(3n+7) : 7 \\ 3(4n+9) : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12n+28 : d \\ 12n+27 : d \end{cases}$$

b) Gọi

$$\Rightarrow [(12n+28) - (12n+27)] : d$$

$$\Rightarrow (12n+28 - 12n - 27) : d$$

$$\Rightarrow 1 : d \Rightarrow d = 1$$

$$| \text{CLN}(3n+3, 4n+9) = 1$$

Vậy

$$a, b \in \mathbb{N} \quad | \quad \text{CLN}(a, ab+128) = 1$$

Bài 2: Cho a, b là số tự nhiên lẻ, $b \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng $\text{CLN}(a, ab+128) = 1$.

Lời giải:

$$d = \text{CLN}(a, ab+128) \Rightarrow \begin{cases} a : d \\ ab+128 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a : d \\ 128 : d \end{cases}$$

Đặt d và 128 và d và 128

$$\Rightarrow 2^7 : d \Rightarrow 2 : d \Rightarrow d = 1$$

$$(a, ab+128) = 1$$

Vậy

$$17n^2 + 1 : 6 (n \in \mathbb{N}^*) \quad | \quad \text{CLN}(n, 2) = 1; \quad \text{CLN}(n, 3) = 1$$

Bài 3: Chứng tỏ rằng nếu $17n^2 + 1 : 6$ thì $\text{CLN}(n, 2) = 1$ và $\text{CLN}(n, 3) = 1$.

Lời giải:

$$17n^2 + 1 : 6 \Rightarrow 17n^2 + 1 : 2 \Rightarrow 17n^2 + 1 \Rightarrow n \Rightarrow n \not\equiv 2 \Rightarrow (n, 2) = 1$$

+) Theo đầu bài ta có: $17n^2 + 1 : 6$ chẵn lẻ

$$17n^2 + 1 : 6 \Rightarrow 17n^2 + 1 : 3 \Rightarrow n \not\equiv 3 \Rightarrow (n, 3) = 1$$

+) Vì

$$n : 3 \Rightarrow 17n^2 : 3 \Rightarrow 17n^2 + 1 : 3 \Rightarrow 17n^2 + 1 \Rightarrow n \not\equiv 3$$

(nếu $n \equiv 3$).

$$a, b \in \mathbb{N} \quad 11a + 2b \quad 18a + 5b$$

Bài 4: Cho hai số nguyên tố cùng nhau a, b và $11a + 2b$ và $18a + 5b$ hoặc là số nguyên tố cùng nhau hoặc có 1 ước chung là 19.

Lời giải

$$d = (11a + 2b, 18a + 5b)$$

Gọi

$$\Rightarrow 5(11a + 2b) - 2(18a + 5b) : d$$

$$\Rightarrow 19a : d$$

$$19a = dk (k \in N^*) \Rightarrow dk : 19 \Rightarrow \begin{cases} d : 19 \\ k : 19 \end{cases} \Rightarrow$$

Đặt đpcm

$$k : 19 \Rightarrow k = 19q \Rightarrow 19a = dk = d \cdot 19 \cdot q \Rightarrow a = dq \Rightarrow a : d$$

- Nếu

$$\Rightarrow \begin{cases} 2b : d \\ 5b : d \end{cases} \Rightarrow b : d \Rightarrow d \in \{1\} \quad C(a, b) = 1 \Rightarrow d = 1$$

$$\{1\} \quad \text{CLN}(a, b) = 1$$

Bài 5: Chứng minh rằng: và a, b khác tính chẵn lẻ thì

$$\{1\} \quad \text{CLN}(a^m + b^n, a^m - b^n) = 1 \quad \forall m, n \in N^* \quad a^m - b^n > 0$$

và

Lời giải:

$$d \in \{1\} \quad \text{CLN}(a^m + b^n, a^m - b^n) \Rightarrow \begin{cases} a^m + b^n : d \\ a^m - b^n : d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^m : d \\ 2b^n : d \end{cases}$$

a)

$$\Rightarrow \begin{cases} a^m : d \\ b^n : d \end{cases}$$

Vì a, b khác tính chẵn lẻ nên d lẻ

$$d > 1 \Rightarrow d \quad p$$

Giả sử có ít nhất một ước số là số nguyên tố, giả sử ước nguyên tố đó là

$$\begin{cases} a^m : p \\ b^n : p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a : p \\ b : p \end{cases} \Rightarrow p \in \{1\} \quad C(a, b); m, n : (a, b) = 1 \Rightarrow 1 : p \Rightarrow p = 1 \Rightarrow$$

vô lý

$$d \leq 1 \Rightarrow d = 1 \Rightarrow$$

Vậy đpcm.

$$2n+1 \quad 3n+1 \quad n \in N$$

Bài 6: Tìm ƯCLN của và với

Lời giải:

$$d \mid \text{CLN}(2n+1, 2n+3) \Rightarrow d \in N^*$$

Gọi

$$\begin{cases} 2n+1 : d \\ 3n+2 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(2n+1) : d \\ 2(3n+2) : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6n+3 : d \\ 6n+4 : d \end{cases}$$

Khi đó ta có :

$$\Rightarrow (6n+4) - (6n+3) : d \Rightarrow 1 : d$$

$$\Rightarrow d \in \mid (1) = \{1; -1\}$$

$$\mid \text{C}(2n+1, 3n+1)$$

Do đó là ước của d, hay là ước của 1

Vì ước của 1 hay ước của -1 có chung 1 tập hợp

$$\mid \text{C}(2n+1, 3n+1) \Rightarrow (1) = \{-1; 1\}$$

Vậy

$$9n+24 \quad 3n+4$$

Bài 7: Tìm ƯCLN của và .

Lời giải:

$$\mid \text{CLN}(9n+24, 3n+4) = d \Rightarrow d \in N^*$$

Gọi

$$\begin{cases} 9n+24 : d \\ 3n+4 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9n+24 : d \\ 9n+12 : d \end{cases}$$

Khi đó ta có:

$$\Rightarrow (9n+24) - (9n+12) = d \Rightarrow 12 : d$$

$$\Rightarrow d \in \mid (12) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 12\}$$

$$(3n+4) : d, \quad 3n+4 \quad d \in \{3; 6; 12\}$$

Do mà không chia hết cho 3, nên (loại)

$$d \in \{1; 2; 4\}$$

Do đó

$$d = 2$$

- Để thì n phải chẵn

$$d = 4$$

- Để thì n phải chia hết cho 4

$$d = 1$$

- Để thì n là số lẻ

$$n = 4k + 2 (k \in \mathbb{N}) \quad ; \quad \text{CLN}(9n + 24, 3n + 4) = 2$$

Vậy thì

$$n = 4k (k \in \mathbb{N}) \quad ; \quad \text{CLN}(9n + 24, 3n + 4) = 4$$

thì

$$n = 2k + 1 (k \in \mathbb{N}) \quad ; \quad \text{CLN}(9n + 24, 3n + 4) = 1$$

thì

$$21n + 5 \quad 14n + 3$$

Bài 8: Cho n là số tự nhiên, tìm ƯCLN của và

Lời giải:

$$; \quad \text{CLN}(21n + 5, 14n + 3) \Rightarrow d \in \mathbb{N}^*$$

a) Gọi

$$\begin{cases} 14n + 3 : d \\ 21n + 4 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(14n + 3) : d \\ 2(21n + 4) : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 42n + 9 : d \\ 42n + 8 : d \end{cases}$$

Khi đó ta có:

$$\Rightarrow (42n + 9) - (42n + 8) : d \Rightarrow 1 : d \Rightarrow d = 1$$

$$; \quad \text{CLN}(21n, 14n + 3) = 1$$

Vậy

$$18n + 2 \quad 30n + 3$$

Bài 9: Cho n là số tự nhiên, tìm ƯCLN của và

Lời giải:

$$\vdots \text{ CLN}(18n+2, 30n+3) \Rightarrow d \in N^*$$

Gọi

$$\begin{cases} 18n+2 \vdots d \\ 30n+3 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(18n+2) \vdots d \\ 3(30n+3) \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 90n+10 \vdots d \\ 90n+9 \vdots d \end{cases}$$

Khi đó ta có:

$$\Rightarrow (90n+10) - (90n+9) \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d = 1$$

$$\vdots \text{ CLN}(18n+2, 30n+3) = 1$$

Vậy

Bài 10: Cho n là số tự nhiên, tìm ƯCLN của $24n+7$ và $18n+5$

Lời giải:

$$\vdots \text{ CLN}(24n+7, 18n+5) \Rightarrow d \in N^*$$

Gọi

$$\begin{cases} 24n+7 \vdots d \\ 18n+5 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(24n+7) \vdots d \\ 4(18n+5) \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 72n+21 \vdots d \\ 72n+20 \vdots d \end{cases}$$

Khi đó ta có:

$$\Rightarrow (72n+21) - (72n+20) \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d = 1$$

$$\vdots \text{ CLN}(24n+7, 18n+5) = 1$$

Vậy

$$\vdots \text{ CLN}(a, b) = 95 \quad \vdots \text{ CLN}(a+b, a-b)$$

Bài 11: Biết . Tìm .

Lời giải:

$$(a+b, a-b) = d \Rightarrow d \in N^*$$

Gọi

$$\begin{cases} a+b;d \\ a-b;d \end{cases} \Rightarrow 2b;d \Rightarrow d \in \mid (2) \quad d \in \mid (b)$$

hoặc

$$\begin{cases} a+b;d \\ a-b;d \end{cases} \Rightarrow 2a;d \Rightarrow d \in \mid (2) \quad d \in \mid (a)$$

và

hoặc

hoặc

$$(a, b) = 95, \quad d = 95 \quad d = 2$$

mà

nên

hoặc

$$(a+b, a-b) = 2 \quad d = 95$$

Vậy

hoặc

.

m, n

A

m

n

B

Bài 12: Cho $11m+5n$ và $9m+4n$ là hai số tự nhiên. Gọi A là tập hợp các ước số chung của $11m+5n$ và $9m+4n$, B là tập hợp các ước số chung của A và B . Chứng minh rằng $A=B$.

Lời giải:

$$d \in \mid \text{CLN}(11m+5n, 9m+4n) \Rightarrow d \in N^*$$

Gọi

$$\begin{cases} 11m+5n;d \\ 9m+4n;d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9(11m+5n);d \\ 11(9m+4n);d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 99m+45n;d \\ 99m+44n;d \end{cases}$$

Khi đó ta có:

$$\Rightarrow (99m+45n) - (99m+44n);d \Rightarrow n;d$$

(1)

$$\begin{cases} 11m+5n;d \\ 9m+4n;d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4(11m+5n);d \\ 5(9m+4n);d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 44m+20n;d \\ 45m+20n;d \end{cases}$$

Tương tự ta có:

$$\Rightarrow (45m+20n) - (44m+20n) \Rightarrow m;d$$

(2)

$$d \in \mid C(m, n) \Rightarrow d \in \mid (A)$$

Từ (1) và (2) ta có :

$$B \in \mathbb{Z} \mid (d) = \mathbb{Z} \mid (A). \quad A = B$$

và $\mathbb{Z} \mid (d)$ Vậy

$$2n+1 \quad 3n+1 \quad n \in \mathbb{N}$$

Bài 13: Tìm ƯC của $2n+1$ và $3n+1$ với $n \in \mathbb{N}$

Lời giải:

$$d = \mathbb{Z} \mid \text{CLN}(2n+1, 3n+1) \Rightarrow d \in \mathbb{N}^*$$

Gọi

Khi đó ta có :

$$\begin{cases} 2n+1; d \\ 3n+2; d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(2n+1); d \\ 2(3n+2); d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6n+3; d \\ 6n+4; d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (6n+4) - (6n+3); d \Rightarrow 1; d \Rightarrow d \in \mathbb{Z} \mid (1) = \mathbb{Z} \mid (1; -1)$$

$$\mathbb{Z} \mid \text{C}(2n+1, 3n+1) \quad d \quad 1$$

Do đó d là ước của 1 , hay là ước của -1

Vì ước của 1 hay ước của -1 có chung 1 tập hợp

$$\mathbb{Z} \mid \text{C}(2n+1, 3n+1) = \mathbb{Z} \mid (1) = \mathbb{Z} \mid (1; -1)$$

Vậy

$$3n+1 \quad 5n+4 \quad \mathbb{Z} \mid \text{CLN}(3n+1, 5n+4)$$

Bài 14: Cho hai số $3n+1$ và $5n+4$ là hai số không nguyên tố cùng nhau, tìm

Lời giải:

$$\mathbb{Z} \mid \text{CLN}(3n+1, 5n+4) = d$$

Gọi

Khi đó

$$\begin{cases} 3n+1; d \\ 5n+4; d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(3n+1); d \\ 3(5n+4); d \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3(5n+4) - 5(3n+1); d \Rightarrow 7; d \Rightarrow d \in \{1; 7\}$$

$d \neq 1$ $d = 7$
Mà nên

$$; \text{CLN}(2n-1, 9n+4) \quad n \in \mathbb{N}$$

Bài 15: Tìm với

Lời giải:

$$d = ; \text{CLN}(2n-1, 9n+4) \Rightarrow d \in \mathbb{N}^*$$

Gọi ,

Khi đó ta có :

$$\begin{cases} 2n-1; d \\ 9n+4; d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9(2n-1); d \\ 2(9n+4); d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 18n-9; d \\ 18n+8; d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (18n+8) - (18n-9); d \Rightarrow 17; d$$

$$\Rightarrow d \in ; (17) = \{ \pm 1; \pm 17 \}$$

$d = 1$ $d = 17$
Mà là các số dương nên ta có : hoặc

$$; \text{CLN}(2n-1, 9n+4) = 1$$

Vậy hoặc 17

Dạng 2: Chứng minh hai số nguyên tố cùng nhau

I. Phương pháp giải

$$; \text{CLN}(a, b) = 1$$

Bài toán: Chứng minh hai số a, b nguyên tố cùng nhau:

$$d = ; \text{CLN}(a, b)$$

Phương pháp giải: Giả sử

$$d = 1$$

Cách 1: Chỉ ra

Cách 2:

$$d \neq 1 (d \geq 2)$$

+) Giả sử (phương pháp phản chứng)

+) Gọi p là ước nguyên tố của d

$$p = 1$$

+) Chỉ ra rằng (vô lý)

$$d = 1$$

+) Kết luận

II. Bài toán

$$n+1 \quad 3n+4 (n \in \mathbb{N})$$

Bài 1: Chứng minh rằng hai số và là hai số nguyên tố cùng nhau.

Lời giải:

$$d = \text{CLN}(n+1, 3n+4) \Rightarrow d \in \mathbb{N}^*$$

Gọi , nên ta có:

$$\begin{cases} n+1 : d \\ 3n+4 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3n+3 : d \\ 3n+4 : d \end{cases} \Rightarrow (3n+4) - (3n+3) : d \Rightarrow 1 : d$$

$$n+1 \quad 3n+4 \quad (n \in \mathbb{N})$$

Vậy hai số và là hai số nguyên tố cùng nhau với .

$$2n+1 \quad 2n+3$$

Bài 2: Chứng minh rằng và là hai số nguyên tố cùng nhau.

Lời giải:

$$d = \text{CLN}(2n+1, 2n+3) \Rightarrow d \in \mathbb{N}^*$$

Gọi

$$\begin{cases} 2n+1;d \\ 2n+3;d \end{cases} \Rightarrow (2n+3) - (2n+1);d \Rightarrow 2;d \Rightarrow d \in \{1, 2\}$$

Khi đó ta có:

Mà ta lại có $(2n+1);d$ mà $2n+1$ là số lẻ nên $d=2$ (loại), do đó $d=1$

Vậy hai số $2n+1$ và $2n+3$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Bài 3: Chứng minh rằng $14n+3$ và $21n+4 (n \in \mathbb{N})$ là hai số nguyên tố cùng nhau

Lời giải:

$$d = \text{CLN}(2n+1, 2n+3) \Rightarrow d \in \mathbb{N}^*$$

Gọi

Khi đó ta có:

$$\begin{cases} 14n+3;d \\ 21n+4;d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(14n+3);d \\ 2(21n+4);d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 42n+9;d \\ 42n+8;d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (42n+9) - (42n+8);d \Rightarrow 1;d$$

Vậy hai số $14n+3$ và $21n+4$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Bài 4: Cho m là số tự nhiên lẻ, n là số tự nhiên. Chứng minh rằng m và $mn+4$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Lời giải:

Giả sử m và $(mn+4)$ cùng chia hết cho số tự nhiên d , khi đó ta có:

$$\begin{cases} m;d \\ mn+4;d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m.n;d \\ m.n+4;d \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4 \nmid d \Rightarrow d \in \{2; 4; 1\} \quad m \nmid d \quad \Rightarrow d = 2 \quad d = 4$$

, do và m lẻ hoặc (loại)

$$d = 1$$

Vậy

$$m \quad mn + 4$$

Khi đó và là hai số nguyên tố cùng nhau.

$$\nmid \text{CLN}(a, b) = 1 \quad 8a + 3 \quad 5b + 1$$

Bài 5: Cho . Chứng tỏ rằng và là nguyên tố cùng nhau.

Lời giải:

$$\nmid \text{CLN}(8a + 3, 5b + 1) = d \Rightarrow d \in \mathbb{N}^*$$

Gọi

$$\begin{cases} 8a + 3b \vdots d \\ 5a + b \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(8a + 3b) \vdots d \\ 8(5a + b) \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 40a + 15b \vdots d \\ 40a + 8b \vdots d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (40a + 15b) - (40a + 8b) \Rightarrow 7b \vdots d$$

$$\begin{cases} 8a + 3b \vdots d \\ 3(5a + b) \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8a + 3b \vdots d \\ 15a + 3b \vdots d \end{cases}$$

và

$$\Rightarrow (15a + 3b) - (8a + 3b) \vdots d \Rightarrow 7a \vdots d$$

$$\nmid \text{CLN}(a, b) = 1 \quad d = 1 \quad d = 7$$

Vì nên hoặc .

$$2n + 1 \quad 6n + 5$$

Bài 6: Chứng minh rằng và là hai số nguyên tố cùng nhau

Lời giải:

$$d = \nmid \text{CLN}(2n + 1, 6n + 5), \Rightarrow d \in \mathbb{N}^*$$

Gọi

Khi đó ta có :

$$\begin{cases} 2n+1;d \\ 6n+5;d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(2n+1);d \\ 6n+5;d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6n+3;d \\ 6n+5;d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (6n+5) - (6n+3);d \Rightarrow 2;d \Rightarrow d \in \mid (2) = \{1;2\}$$

Do $2n+1;d$, mà $2n+1$ lại là số lẻ nên $d=2$ loại, do đó $d=1$

Vậy hai số $14n+3$ và $21n+4$ là hai số nguyên tố cùng nhau

Bài 7: Chứng minh rằng với mọi $n \in N$ thì các số $7n+10$ và $5n+7$ nguyên tố cùng nhau

Lời giải:

$$d = \mid \text{CLN}(7n+10, 5n+7), \Rightarrow d \in N^*$$

Gọi

Khi đó ta có :

$$\Rightarrow (35n+50) - (35n+49);d \Rightarrow 1;d$$

$$d=1$$

Do đó

Vậy hai số $7n+10$ và $5n+7$ là hai số nguyên tố cùng nhau

Bài 8: Chứng minh rằng với mọi $n \in N$ thì các số $2n+3$ và $4n+8$ nguyên tố cùng nhau

Lời giải:

$$d = \mid \text{CLN}(2n+3, 4n+8), \Rightarrow d \in N^* \quad \begin{cases} 2n+3;d \\ 4n+8;d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(2n+3);d \\ 4n+8;d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4n+6;d \\ 4n+8;d \end{cases}$$

Gọi

Khi đó ta có:

$$\Rightarrow (4n+8) - (4n+6);d \Rightarrow 2;d \Rightarrow d \in \{1;2\}$$

Vì $2n+3 \vdots d$, mà $2n+3$ là số lẻ nên $d=2$ (loại)

$d=1$
 Khi đó

Vậy hai số $2n+3$ và $4n+8$ là hai số nguyên tố cùng nhau

$$\vdots \text{CLN}(a,b)=1 \quad \vdots \text{CLN}(a,a+b)=1$$

Bài 9: Cho . Chứng minh rằng

Lời giải:

$$d = \vdots \text{CLN}(a+b, a), \Rightarrow d \in N^*$$

Ta có đặt

$$\begin{cases} a+b \vdots d \\ a \vdots d \end{cases} \Rightarrow a+b-a \vdots d \Rightarrow b \vdots d \quad \vdots \quad d \in \vdots C(a,b) \quad d \in \vdots (1) \Rightarrow d=1$$

mà a d nên hay

$$\vdots \text{CLN}(12n+1, 30n+1)=1$$

Bài 10: CMR: với mọi số tự nhiên n

Lời giải:

$$\vdots \text{CLN}(12n+1, 30n+1)=d \quad d \in N^*$$

Gọi , suy ra khi đó ta có :

$$\begin{cases} 12n+1 \vdots d \\ 30n+1 \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(12n+1) \vdots d \\ 2(30n+1) \vdots d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 60n+5 \vdots d \\ 60n+2 \vdots d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (60n+5)(60n+2) \vdots d \Rightarrow 3 \vdots d \Rightarrow d \in \{1, 3\}$$

$12n+1$ 3 $d=3$
 Vì là một số không chia hết cho nên loại

$d=1$ $\vdots \text{CLN}(12n+1, 30n+1)=1$
 Vậy , khi đó

a, b

Bài 11: Cho là hai số nguyên tố cùng nhau. CMR các số sau cũng nguyên tố cùng nhau :

a) a^2 và $a+b$

b) ab và $a+b$

Lời giải:

a) Giả sử a^2 và $a+b$ cùng chia hết cho số nguyên tố

Khi đó $a:d$, $b:d \Rightarrow a, b$ cùng chia hết cho số nguyên tố d , trái với giả thiết
 $\text{CLN}(a, b) = 1$

Vậy a^2 và $a+b$ là hai số nguyên tố cùng nhau

b) Giả sử ab và $a+b$ cùng chia hết cho số nguyên tố

Suy ra tồn tại một trong hai số a hoặc b chia hết cho

Khi $a:d \Rightarrow b:d$ hoặc $b:d \Rightarrow a:d$

a và b cùng chia hết cho d , trái với $(a, b) = 1$

Vậy ab và $a+b$ nguyên tố cùng nhau

Dạng 3: Tìm điều kiện để hai số nguyên tố cùng nhau

Bài 1: Tìm $n \in \mathbb{N}$ để: $7n+10$ và $5n+7$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Lời giải:

$$d = (7n+10; 5n+7) \Rightarrow d \in \mathbb{N}^*$$

Gọi

Khi đó ta có:

$$\begin{cases} 7n+10;d \\ 5n+7;d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(7n+10);d \\ 7(5n+7);d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 35n+50;d \\ 35n+49;d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (35n+50)-(35n+49);d \Rightarrow 1;d$$

$$d=1$$

Do đó

Vậy với mọi $n \in \mathbb{N}$ hai số $7n+10$ và $5n+7$ là hai số nguyên tố cùng nhau

$$n \in \mathbb{N} \quad (2n+3) \quad (4n+8)$$

Bài 2: Tìm để: và là hai số sau nguyên tố cùng nhau

Lời giải :

$$d=(2n+3;4n+8) \Rightarrow d \in \mathbb{N}^*$$

Gọi

Khi đó ta có:

$$\begin{cases} 2n+3;d \\ 4n+8;d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(2n+3);d \\ 4n+8;d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4n+6;d \\ 4n+8;d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (4n+8)-(4n+6);d \Rightarrow 2;d \Rightarrow d \in \{1;2\}$$

$$(2n+3);d \quad (2n+3) \quad d=2$$

Vì , mà là một số lẻ nên (loại)

$$d=1.$$

Khi đó

$$n \in \mathbb{N} \quad (2n+3) \quad (4n+8)$$

Vậy với mọi hai số và là hai số nguyên tố cùng nhau.

Bài 3: Tìm $n \in \mathbb{N}$ để: $18n+3$ và $21n+7$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Lời giải:

$$UCLN(18n+3, 21n+7) = d \Rightarrow d \in \mathbb{N}^*$$

Gọi

$$\begin{cases} 18n+3 : d \\ 21n+7 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7(18n+3) : d \\ 6(21n+7) : d \end{cases}$$

Khi đó ta có:

$$\Rightarrow (126n+42) - (126n+21) : d \Rightarrow 21 : d$$

$$\Rightarrow d \in \{ (21) = \{ \pm 1; \pm 3; \pm 7; \pm 21 \} \}$$

Do $(21n+7) : 7$ và $21n+7$ không chia hết cho 3 nên $d=1$ hoặc $d=7$

Để hai số $18n+3$ và $21n+7$ là hai số nguyên tố thì d khác 7, hay

$$18n+3 \not\vdots 7 \Rightarrow 18n+3 - 21 \not\vdots 7 \Rightarrow 18n - 18 \not\vdots 7 \Rightarrow 18(n-1) \not\vdots 7 \Rightarrow n-1 \not\vdots 7 \Rightarrow n-1 \neq 7k \Rightarrow n \neq 7k+1$$

Vậy

$n \neq 7k+1$ với k là số tự nhiên thì $18n+3$ và $21n+7$ là hai số nguyên tố.

$$\{ (7n+3, 8n-1) \mid n \in \mathbb{N}^* \}$$

Bài 3: Tìm n với $(7n+3, 8n-1)$. Khi nào thì hai số đó nguyên tố cùng nhau.

Lời giải:

$$d = \{ (7n+3, 8n-1) \mid n \in \mathbb{N}^* \}$$

Gọi

Khi đó ta có:

$$\begin{cases} 7n+3 : d \\ 8n-1 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8(7n+3) : d \\ 7(8n-1) : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 56n+24 : d \\ 56n-7 : d \end{cases}$$

$$\Rightarrow 56n + 24 - 56n + 7 : d \Rightarrow 31 : d \Rightarrow d = 1 \quad d = 31$$

hoặc .

$$d = 1 \quad d \neq 31 \quad 7n + 3 : 31 \Rightarrow 7n + 3 - 31 : 31 \Rightarrow 7n - 28 : 31$$

Để thì hay

$$\Rightarrow 7(n - 4) : 31 \Rightarrow n - 4 : 31$$

$$n - 4 \neq 31k \Rightarrow n \neq 31k + 4 \quad k$$

Hay (là số tự nhiên)

$$7n + 3 \quad 8n - 1 \quad n \neq 31k + 4 \quad k$$

Vậy để và là hai số nguyên tố cùng nhau thì (là số tự nhiên)

$$n \quad 9n + 24 \quad 3n + 4 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Bài 4: Tìm để và là hai số nguyên tố cùng nhau

Lời giải:

$$d = \text{CLN}(9n + 24, 3n + 4)$$

Gọi

$$\Rightarrow \begin{cases} 9n + 24 : d \\ 3n + 4 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9n + 24 : d \\ 3(3n + 4) : d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (9n + 24) - (9n + 12) : d \Rightarrow 12 : d$$

$$\Rightarrow d \in \{ \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 12 \}$$

$$d \in \{ \pm 2; \pm 4; \pm 6; \pm 12 \} \Rightarrow 9n + 24 \quad 3n + 4 \Rightarrow d \in \{ \pm 2; \pm 4; \pm 6; \pm 12 \}$$

Nếu chẵn và, chẵn loại

$$d = \pm 3 \Rightarrow 3n + 4 : 3 \Rightarrow$$

Nếu Vô lý $d = 3$ (loại)

$$d = 1 \Rightarrow 9n + 24, 3n + 4 \Rightarrow 9n + 24 \Rightarrow n \quad 3n + 4 \Rightarrow n$$

Nếu là số lẻ lẻ lẻ và lẻ lẻ

n
Vậy là

Bài 5: Tìm số tự nhiên n để $4n+3$ và $2n+3$ nguyên tố cùng nhau.

Lời giải:

Gọi $\text{ƯCLN}(4n+3; 2n+3) = d$, $d \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{cases} 4n+3 : d \\ 2n+3 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4n+3 : d \\ 4n+6 : d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (4n+6) - (4n+3) : d \Rightarrow 3 : d \Rightarrow d \in \{1; 3\}$$

Để $4n+3$ và $2n+3$ là hai số nguyên tố cùng nhau thì d khác 3 hay

$$2n+3 \nmid 3 \Rightarrow 2n \nmid 3 \Rightarrow n \nmid 3 \Rightarrow n \neq 3k \quad (k \in \mathbb{N})$$

Vậy $n \neq 3k \quad (k \in \mathbb{N})$ thì $4n+3$ và $2n+3$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Bài 6: Tìm số tự nhiên n để $7n+13$ và $2n+4$ nguyên tố cùng nhau.

Lời giải:

$$\text{ƯCLN}(7n+13, 2n+4) = d \Rightarrow d \in \mathbb{N}^*$$

b, Gọi d ,

$$\begin{cases} 7n+13 : d \\ 2n+4 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 14n+26 : d \\ 14n+28 : d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (14n+28) - (14n+26) : d \Rightarrow 2 : d \Rightarrow d \in \{1; 2\}$$

Để $7n+13$ và $2n+4$ là hai số nguyên tố cùng nhau thì d khác 2 hay

$$7n+13 \not\vdash 2 \Rightarrow 7n \vdash 2 \Rightarrow n \vdash 2 \Rightarrow n \text{ chẵn}$$

Vậy n chẵn thì $7n+13$ và $2n+4$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Bài 7: Tìm số tự nhiên n để các số $18n+3$ và $21n+7$ nguyên tố cùng nhau.

Lời giải:

$$d = \text{CLN}(18n+3, 21n+7)$$

Gọi

$$\Rightarrow \begin{cases} 18n+3 \vdash d \\ 21n+7 \vdash d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7(18n+3) \vdash d \\ 6(21n+7) \vdash d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 126n+21 \vdash d \\ 126n+42 \vdash d \end{cases}$$

$$\Rightarrow (126n+42) - (126n+21) \vdash d \Rightarrow 21 \vdash d \Rightarrow d \in \text{CLN}(21) = \{1; 3; 7; 21\}$$

$$d=3 \Rightarrow 21n+7 \vdash 3$$

Nếu (Vô lý)

$$d \in \{1; 7\}$$

Nếu , để 2 số trên là nguyên tố thì

$$d \neq 7 \Rightarrow 18n+3 \not\vdash 7 \Rightarrow 18n+3 - 21 \not\vdash 7 \Rightarrow n - 1 \not\vdash 7 \Rightarrow n \neq 7k+1$$

$$n \neq 7k+1 (k \in \mathbb{N})$$

Vậy với thì hai số trên nguyên tố cùng nhau

Bài 8: Chứng minh rằng: có vô số số tự nhiên n để $n+15$ và $n+72$ là 2 số nguyên tố cùng nhau

Lời giải:

$$d \in \text{CLN}(n+15, n+72) \Rightarrow 57 \vdash d \quad n+15 \vdash d, 57 \vdash d$$

Gọi , do ,

$$n \quad n+15 = 57k+1 \quad d=1 \quad k=1; 2; 3; \dots$$

Nên tồn tại sao cho thì , với

Vậy có vô sốⁿ

❗ HẾT

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>

Hướng dẫn tìm và tải các tài liệu ở đây

<https://forms.gle/LzVNwfMpYB9qH4JU6>