



CLB Toán học

NOKIA
Connecting People

Đề số 8 (Hạn chót nộp bài 24/1/2010)

Bài 1. Giải phương trình

$$x\sqrt{x} = (1 + \sqrt{x+1})\sqrt{x-1}$$

Lời giải :

Điều kiện : $x \geq 1$

Phương trình trên tương đương với $x\sqrt{x} = \sqrt{x-1} + \sqrt{x^2-1}$

Đặt $a = \sqrt{x-1}; b = \sqrt{x^2-1}$ ($a, b \geq 0$) thì phương trình thành :
 $\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)} = a+b.$

Mặt khác, theo bất đẳng thức BCS, ta có : $\sqrt{(a^2+1)(1+b^2)} \geq a+b$

Vì $a, b \geq 0$ nên dấu « = » xảy ra khi và chỉ khi

$$a = \frac{1}{b} \Leftrightarrow ab = 1 \Leftrightarrow (x^2-1)(x-1) = 1 \Leftrightarrow x(x^2-x-1) = 0$$

Vì $x \geq 0$ nên ta nhận nghiệm $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Bài 2. Tìm tất cả các hàm liên tục $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thoả mãn điều kiện

$$f(x)f(y) = f(xy) + f\left(\frac{x}{y}\right)$$

với mọi x, y thuộc $\mathbb{R}^+$. Ở đây $\mathbb{R}^+$ là tập hợp tất cả các số thực dương.

Lời giải :

Đặt $g(x) = f(e^x)$, ta có g liên tục $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ và $f(x) = g(\ln x)$ và :
 $g(\ln x)g(\ln y) = g(\ln x + \ln y) + g(\ln x - \ln y) \forall x, y \in \mathbb{R}^+$

Nghĩa là : $g(x)g(y) = g(x+y) + g(x-y) \forall x, y \in R^*$

Thay y bởi x , ta được $g(x)^2 = g(2x) + g(0)$.

Thay x bởi 0 ta có ngay $g(0) = 2$ ($g(0) > 0$). Vậy $g(x)^2 = g(2x) + 2$

Xét $\{T_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) xác định như sau :
$$\begin{cases} T_1 = \sqrt{2} \\ T_{n+1} = \sqrt{T_n + 2} \quad \forall n \in N^* \end{cases}$$

Vì $\{T_n\}$ tăng và bị chặn trên tại 2 nên hội tụ. Ta kiểm tra được $\lim T_n = 2$

Ta CM bằng quy nạp rằng $g(x) > T_n \quad \forall n \in N^*, x \in R$

Thật vậy, $\forall x \in R, g(x)^2 = g(2x) + 2 > 2$ nên $g(x) > T_1 = \sqrt{2}$

Giả sử $g(x) > T_n \quad \forall x \in R$, ta có $g(x)^2 = g(2x) + 2 > T_n + 2 \rightarrow g(x) > T_{n+1}$

Vậy $g(x) > T_n \quad \forall n \in N^*, x \in R$. Cho $n \rightarrow +\infty$, ta có $g(x) \geq 2 \quad \forall x \in R$

Vậy, ta có thể đặt $g(1) = a + \frac{1}{a}$ ($a > 0$)

Trong (*) ta thay $y = 1$, ta được $(a + \frac{1}{a})g(x) = g(x+1) + g(x-1)$

Ta CM bằng quy nạp rằng $g(m) = a^m + \frac{1}{a^m} \quad \forall m \in N$

Đẳng thức đúng với $m = 0, 1$. Giả sử đẳng thức đúng với mọi $1 \leq k \leq m$, ta có

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)g(m) = g(m+1) + g(m-1) \rightarrow g(m+1) = \left(a + \frac{1}{a}\right)\left(a^m + \frac{1}{a^m}\right) - a^{m-1} - \frac{1}{a^{m-1}} = a^{m+1} + \frac{1}{a^{m+1}}$$

. Vậy $g(m) = a^m + \frac{1}{a^m} \quad \forall m \in N^*$

Ta CM bằng quy nạp theo n rằng $g\left(\frac{m}{2^n}\right) = a^{\frac{m}{2^n}} + \frac{1}{a^{\frac{m}{2^n}}} \quad \forall m, n \in N$

Đẳng thức đúng với $n = 0$. Giả sử đẳng thức đúng với mọi $1 \leq k \leq n$, ta có

$$g\left(\frac{m}{2^{n+1}}\right)^2 = g\left(\frac{m}{2^n}\right) + 2 = \left(a^{\frac{m}{2^n}} + \frac{1}{a^{\frac{m}{2^n}}}\right)^2 \rightarrow g\left(\frac{m}{2^{n+1}}\right) = a^{\frac{m}{2^{n+1}}} + \frac{1}{a^{\frac{m}{2^{n+1}}}}$$

Vậy $g\left(\frac{m}{2^n}\right) = a^{\frac{m}{2^n}} + \frac{1}{a^{\frac{m}{2^n}}} \quad \forall m, n \in N$

Mặt khác $\forall r \in R^+, \exists \{m_k\}, \{n_k\}$ là 2 dãy số dương mà $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{m_k}{2^{n_k}} = r$

Nên $g(r) = a^r + \frac{1}{a^r} \quad \forall r \in R^+$. Mặt khác, khi thay đổi vai trò x, y ta được $g(x)$ là

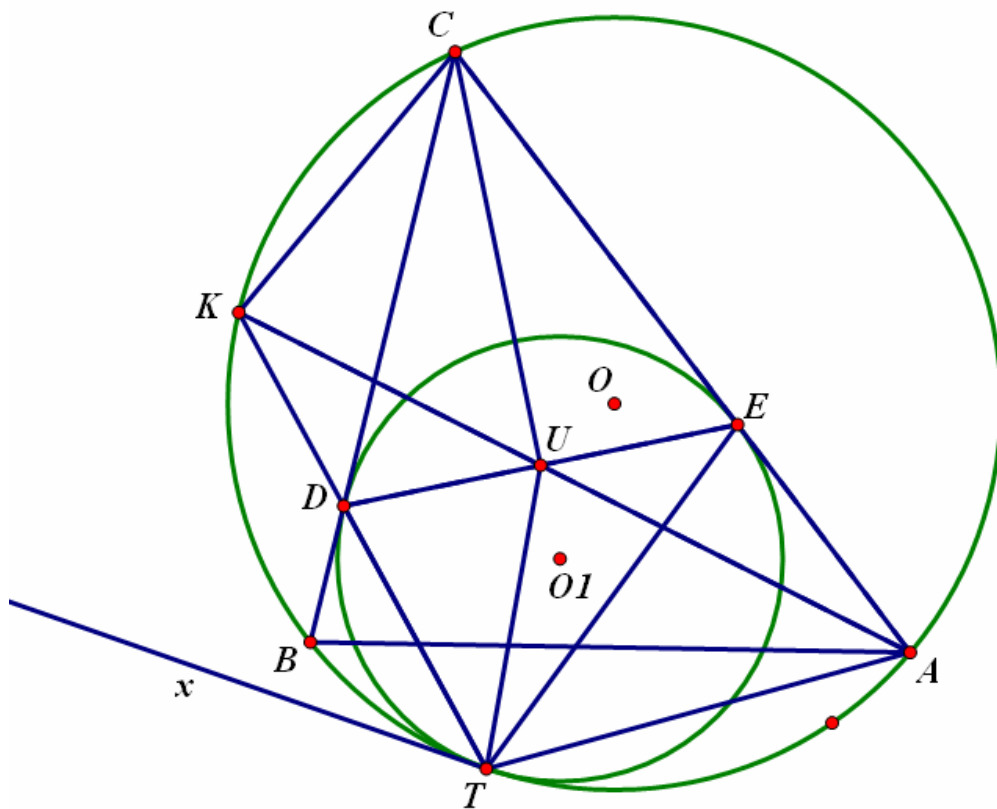
hàm chẵn nên ta có $g(r) = a^r + \frac{1}{a^r} \quad \forall r \in R$

Nên $f(x) = a^{\ln x} + \frac{1}{a^{\ln x}} = x^k + \frac{1}{x^k} \quad (k = \ln a)$

Vậy $f(x) = x^k + \frac{1}{x^k}$ là hàm số cần tìm. Đặc biệt, trong trường hợp $k = 0$, ta có $f(x) \equiv 2$.

Bài 3. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O, bán kính R. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC. Vẽ đường tròn O_1 tiếp xúc với BC tại D, AC tại E và tiếp xúc trong với đường tròn (O, R). Chứng minh rằng I là trung điểm DE.

Lời giải :



Gọi T là giao điểm của (O_1) và (O) ; K là giao điểm của TD và (O)

Xét phép vị tự H tâm T, tỉ số là $\frac{R}{R_1}$ (R_1 là bán kính (O_1)). H biến $\begin{cases} (O_1) \rightarrow (O) \\ D \rightarrow K \\ BC \rightarrow Kt \end{cases}$

Với Kt là tiếp tuyến tại K của (O) , cũng là 1 đường thẳng song song với BC.
 Vậy tiếp tuyến từ K của (O) song song với BC nên K là điểm giữa cung BC.

Gọi $U \equiv AK \cap DE$, ta có U nằm trên phân giác góc A .

T kẻ tiếp tuyến chung Tx của (O_1) và (O) . Ta có $\begin{cases} \angle xTD = \angle TED \\ \angle xTD = \angle TAK \end{cases}$
 $\rightarrow \angle TAU = \angle TEU$. Suy ra tứ giác $TAEU$ nội tiếp. Vậy
 $\angle TUA = \angle TEA \rightarrow 180^\circ - \angle TUA = 180^\circ - \angle TEA \rightarrow \angle KUT = 180^\circ - \angle TDE = \angle KDU$

Suy ra tam giác KDU và tam giác KUT đồng dạng. Vậy nên $KU^2 = KD \cdot KT$

Mặt khác, ta có $\angle KBD = \angle KTB$ (do K là điểm giữa cung BC) nên tam giác KBD và tam giác KTB đồng dạng nên ta có $KB^2 = KD \cdot KT$

Vậy $KC = KB = KU$. Suy ra tam giác KCU cân tại K . Suy ra
 $\angle KCU = \angle KUC \rightarrow \angle KCB + \angle BCU = \angle UCA + \angle UAC \rightarrow \angle BCU = \angle UCA \rightarrow U$
thuộc phân giác góc C .

Vậy U là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Suy ra tâm nội tiếp I thuộc DE .
Xét tam giác CDE cân tại C có CI là phân giác, ta suy ra I là trung điểm DE .

Vậy tâm nội tiếp I là trung điểm DE .

Bài 4. Tìm tất cả các cặp số nguyên tố p, q sao cho $p^2 + 1 \mid 2003^q + 1$ và $q^2 + 1 \mid 2003^p + 1$.

Lời giải :

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $p \leq q$.

Nếu $p = 2$ thì từ $5 \mid 2003^q + 1$ dễ dàng suy ra q chẵn, từ đó $q = 2$ và đây là nghiệm của bài toán.

Tiếp theo giả sử $p > 2$. Khi đó p lẻ. Ta có $p^2 + 1 > 4$ và $p^2 + 1 \equiv 2 \pmod{4}$ nên $p^2 + 1$ không có dạng 2^k .

Vậy, ta gọi r là một ước nguyên tố lẻ của $p^2 + 1$. Ta có $p^2 \equiv -1 \pmod{r}$ nên -1 là SCP $\pmod{r}$. Suy ra $r \equiv 1 \pmod{4}$.

Ta có $2003^q + 1 \equiv 0 \pmod{p^2 + 1}$ nên $2003^q \equiv -1 \pmod{r}$.

Gọi h là cấp của 2003 theo $\pmod{r}$, ta có $\begin{cases} h \mid 2q \\ h \nmid q \end{cases}$ Suy ra $h = 2$ v $h = 2q$

TH1: $h = 2$, ta có $2003^2 - 1 \equiv 0 \pmod{r} \rightarrow r \mid 2004$ v $2003 \equiv 1 \pmod{r}$

Nếu $2003 \equiv 1 \pmod{r}$, ta suy ra $2003^q + 1 \equiv 2 \equiv 0 \pmod{r}$ (Vô lý)

Nếu r là ước nguyên tố lẻ của 2004, ta dẫn điều vô lý vì 2004 không có ước nguyên tố lẻ dạng $4k + 1$

Trường hợp 1 bị loại hoàn toàn.

TH2: $h = 2q$. Ta có $r - 1 \vdots h$ nên $r \geq 2q + 1 \rightarrow q \geq 2q + 1$ (Vô lý)

Trường hợp 2 bị loại hoàn toàn.

Vậy $(p, q) = (2, 2)$ là nghiệm duy nhất của bài toán.

Bài 5. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho nếu $a_1, a_2, \dots, a_n$ là n số phân biệt tùy ý được chọn từ tập hợp $X = \{1, 2, 3, \dots, 17\}$ ta luôn tìm được số nguyên dương k sao cho phương trình $a_i - a_j = k$ có ít nhất k nghiệm.

Lời giải :

Ta gọi một số nguyên $1 \leq n \leq 17$ là một số « tốt » nếu như nếu $a_1, a_2, \dots, a_n$ là n số phân biệt tùy ý được chọn từ tập hợp $X = \{1, 2, 3, \dots, 17\}$ ta luôn tìm được số nguyên dương k sao cho phương trình $a_i - a_j = k$ có ít nhất k nghiệm. Yêu cầu bài toán tương đương với việc tìm số “tốt” nhỏ nhất.

Ta CM mọi số nguyên $7 \leq n \leq 17$ đều là số « tốt ».

Thật vậy, giả sử tồn tại n thỏa mãn $7 \leq n \leq 17$ không là số tốt, nghĩa là $\forall k$ nguyên dương, phương trình $a_i - a_j = k$ có ít hơn k bộ nghiệm.

Giả sử $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq 17$. Ta gọi $b_i = a_{i+1} - a_i > 0 \ (i = \overline{1; n-1})$.

Ta có $\sum_{i=1}^{n-1} b_i = a_n - a_1 \leq 16$

Mặt khác do :

❖ Phương trình $a_i - a_j = 1$ vô nghiệm nên $b_i \geq 2 \ \forall i = \overline{1; n-1}$

❖ Phương trình $a_i - a_j = 2$ có không quá 1 nghiệm nên $|\{i | b_i = 2\}| \leq 1$

Nên $16 \geq \sum_{i=1}^{n-1} b_i \geq 2 + 3(n-2) = 6n - 4$. Suy ra $n \leq 6$ (Vô lý)

Mặt khác 6 không phải là số tốt vì tập $\{1, 3, 6, 9, 13, 17\}$ là tập có 6 số mà là $\forall k$ nguyên dương, phương trình $a_i - a_j = k$ có ít hơn k bộ nghiệm.

Vậy số n cần tìm là $n = 7$.