

ĐỀ CHÍNH THỨC

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (8,0 điểm)

Hãy chọn chỉ một phương án trả lời đúng

Câu 1. Kết quả rút gọn biểu thức $A = \sqrt{x} - \sqrt{x - \sqrt{x} + \frac{1}{4}}$ khi $x \geq 0$ là

A. $A = \frac{1}{2}$.

B. $A = 2\sqrt{x} + \frac{1}{2}$.

C. $A = \frac{1}{2}$ hoặc $A = 2\sqrt{x} - \frac{1}{2}$.

D. $A = 2\sqrt{x} - \frac{1}{2}$.

Câu 2. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện

$\sqrt{a-3} + \sqrt{b-2} + \sqrt{c-1} = \frac{a+b+c-3}{2}$ thì $a+2b+3c$ có giá trị bằng

A. 13.

B. 17.

C. 18.

D. 16.

Câu 3. Cho $x = \sqrt[3]{2+2\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2-2\sqrt{3}} - 1$. Giá trị của biểu thức $P = x^3(x^2 + 3x + 9)^3$ là

A. -3.

B. -27.

C. 27.

D. 9.

Câu 4. Giá trị của m để phương trình $(4m^2 - 9)x - 2m^2 - m + 3 = 0$ vô số nghiệm là

A. $m = -\frac{3}{2}$.

B. $m = 1$.

C. $m = \frac{3}{2}$.

D. $m = \frac{2}{3}$.

Câu 5. Số giá trị của m để ba đường thẳng

$(m+2)x - (2m-1)y + 6m - 8 = 0$; $x - 2y + 6 = 0$ và $2x + y - 8 = 0$ đồng quy tại một điểm là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. Vô số.

Câu 6. Cho hai đường thẳng $(d_1): y = ax + b$; $(d_2): y = \frac{-1}{9}x + 2021$. Biết $d_1 \perp d_2$ và (d_1) luôn đi qua điểm $M(6;17)$. Giá trị của $a+b$ bằng

A. 28.

B. 46.

C. -46.

D. -28.

Câu 7. Biết rằng đường thẳng $(d): y = (m^2 - 4m - 4)x + 3m - 2$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $2cm^2$ (với m là tham số và đơn vị đo trên các trục tọa độ là cm). Tổng các giá trị của m là

A. $\frac{-28}{13}$.

B. 0.

C. $\frac{28}{13}$.

D. Không tính được.

Câu 8. Tam giác ABC vuông tại A . Gọi M, N theo thứ tự thuộc hai cạnh AB, AC sao cho $MN \parallel BC$. Biết $AB = 9cm$; $AM = 3cm$; $AN = 4cm$. Độ dài BC bằng

- A. $10cm$. B. $16cm$. C. $12cm$. D. $15cm$.

Câu 9. Cho điểm I nằm trong tam giác ABC . Các tia AI, BI, CI cắt các cạnh BC ,

AC, AB theo thứ tự tại D, E, F . Khi đó $\frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC}$ bằng

- A. $\frac{AI}{AD}$. B. $\frac{AI}{ID}$. C. $\frac{BD}{DC}$. D. $\frac{DC}{BD}$.

Câu 10. Cho hình thang cân có đường chéo vuông góc với cạnh bên. Biết đáy nhỏ bằng $14cm$, đáy lớn bằng $50cm$. Diện tích hình thang cân đó bằng

- A. $768cm^2$. B. $786cm^2$. C. $864cm^2$. D. $432cm^2$.

Câu 11. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = \sqrt{5}$, đường cao $AH = 2$. Kẻ HK vuông góc với AC ($K \in AC$). Độ dài CK bằng

- A. $\frac{5\sqrt{5}}{5}$. B. $\frac{16\sqrt{5}}{5}$. C. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{8\sqrt{5}}{5}$.

Câu 12. Cho tam giác ABC vuông tại A , phân giác AD ($D \in BC$). Cho $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Độ dài cạnh AD bằng

- A. $\frac{a(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}$. B. $\frac{a(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$. C. $\frac{a(3\sqrt{2}-\sqrt{6})}{2}$. D. $\frac{a(3\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4}$.

Câu 13. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $AB = 3cm$, $AA' = 6cm$ và diện tích tứ giác $AA'C'C$ bằng $30cm^2$. Thể tích hình hộp chữ nhật đó là

- A. $108cm^3$. B. $96cm^3$. C. $84cm^3$. D. $72cm^3$.

Câu 14. Cho đường tròn tâm O , bán kính $13cm$. Hai dây AB, CD song song với nhau có độ dài lần lượt là $24cm; 10cm$. Khoảng cách lớn nhất giữa hai dây là

- A. 17 . B. 12 . C. 7 . D. 24 .

Câu 15. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH ($H \in BC$). Đường tròn đường kính AH cắt AB, AC lần lượt tại E, F . Hệ thức nào sau đây là đúng

- A. $EF^2 = EB.CF$. B. $EF^3 = EB.BC.CF$.
C. $CF^2 = EF.BC$. D. $EF^3 = AC.BC.AB$.

Câu 16. Một cửa hàng bán bưởi Đoàn Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50 nghìn đồng. Với giá bán này thì mỗi ngày cửa hàng chỉ bán được 40 quả. Cửa hàng dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 1 nghìn đồng thì số bưởi bán tăng thêm được là 10 quả. Xác định giá bán để cửa hàng thu được lợi nhuận cao nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu cho mỗi quả là 30 nghìn đồng.

- A. 45 nghìn đồng. B. 40 nghìn đồng.
C. 42 nghìn đồng. D. 50 nghìn đồng.

II. PHẦN TỰ LUẬN (12 điểm).

Câu 1 (3,0 điểm).

- a) Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2 - xy - y = -2$.
- b) Tìm số nguyên n sao cho $A = n^4 + 6n^3 + 14n^2 + 16n + 8$ là số chính phương.
- c) Cho biểu thức $A = (a^{2021} + b^{2021} + c^{2021}) - (a^{2017} + b^{2017} + c^{2017})$ với a, b, c là các số nguyên dương. Chứng minh A chia hết cho 30.

Câu 2 (4,0 điểm).

- 1) Cho $x, y, z > 0$ và $xy + yz + zx = 2021$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{2021+x^2} + \frac{y}{2021+y^2} - \frac{z}{2021+z^2} = \frac{2xy}{\sqrt{(2021+x^2)(2021+y^2)(2021+z^2)}}.$$

- 2) Giải các phương trình sau:

- a) $\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} = 2$
- b) $2 + \sqrt{x-1} + \sqrt{3x-5} = x$.

Câu 3 (4,0 điểm).

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Các đường tròn (O) đường kính AB , và (I) đường kính AC cắt nhau tại điểm thứ hai là $H (H \neq A)$. Đường thẳng (d) thay đổi đi qua A cắt đường tròn (O) tại M và cắt đường tròn (I) tại N (A nằm giữa hai điểm M và N).

- a) Đoạn thẳng OI lần lượt cắt các đường tròn (O) , (I) tại D, E . Chứng minh OI là đường trung trực của đoạn thẳng AH và $AB + AC - BC = 2DE$.
- b) Chứng minh giao điểm S của hai đường thẳng OM và IN di chuyển trên một đường tròn cố định khi đường thẳng (d) quay quanh A .
- c) Giả sử đường thẳng MH cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai là $T (T \neq H)$. Chứng minh rằng ba đường thẳng MS, AT, NH đồng quy.

Câu 4 (1,0 điểm).

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $xyz = 1$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{x^2 + 2y^2 + 3} + \frac{1}{y^2 + 2z^2 + 3} + \frac{1}{z^2 + 2x^2 + 3} \leq \frac{1}{2}$.

-----Hết-----

Họ và tên thí sinh:....., SBD:.....

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm./.

A. MỘT SỐ LƯU Ý

Đáp án dưới đây dựa vào lời giải sơ lược của một cách giải. Thí sinh giải cách khác mà đúng thì tổ chấm cho điểm từng phần ứng với thang điểm của hướng dẫn chấm.

B. ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (8,0 điểm)

Mỗi câu trả lời đúng cho 0,5 điểm

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Đáp án	C	D	B	A	D	D	C	D	B	A	D	C	D	A	B	C

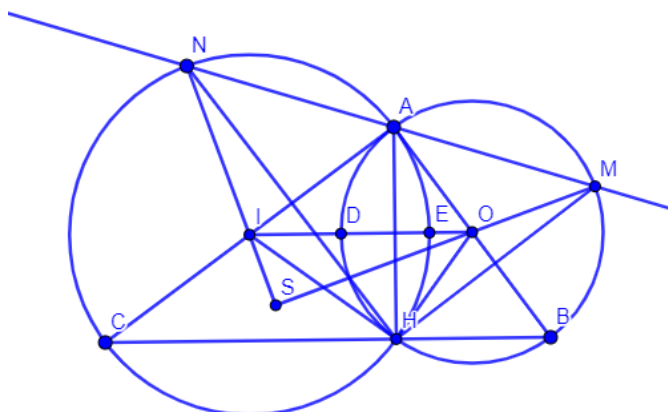
II. PHẦN TỰ LUẬN (12 điểm)

Câu	Đáp án	Điểm
Câu 1 (3,0 điểm)		
a)	Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2 - xy - y = -2$.	
b)	Tìm số nguyên n sao cho $A = n^4 + 6n^3 + 14n^2 + 16n + 8$ là số chính phương.	
c)	Cho biểu thức $A = (a^{2021} + b^{2021} + c^{2021}) - (a^{2017} + b^{2017} + c^{2017})$ với a, b, c là các số nguyên dương. Chứng minh A chia hết cho 30.	
a	$x^2 - xy - y = -2 \Leftrightarrow (x+1)y = x^2 + 2$ Nếu $x+1=0 \Rightarrow x^2 + 2 = 0$ (Vô lý), suy ra $x+1 \neq 0$	0,25
	$\Rightarrow y = \frac{x^2 + 2}{x+1} = x - 1 + \frac{3}{x+1}$	0,25
	Đề y là số nguyên thì $\frac{3}{x+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x+1 \in \{\pm 1; \pm 3\} \Rightarrow x \in \{-4; -2; 0; 2\}$ Vậy $(x, y) \in \{(-4; -6), (-2; -6), (0; 2), (2; 2)\}$	0,50
b	Ta có $A = n^4 + 6n^3 + 14n^2 + 16n + 8 = (n+2)^2 (n^2 + 2n + 2)$ + Nếu thì $n+2=0 \Leftrightarrow n=-2$ thì $A=0$ là một số chính phương	0,25
	+ Nếu $n+2 \neq 0 \Leftrightarrow n \neq -2$ thì A là số chính phương khi và chỉ khi $n^2 + 2n + 2 = k^2 \quad (k \in \mathbb{Z})$ $\Leftrightarrow (n+1)^2 - k^2 = -1 \Leftrightarrow (n+1+k)(n+1-k) = -1$	0,25

	$\Leftrightarrow \begin{cases} n+1+k=1 \\ n+1-k=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=-1 \\ k=1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} n+1+k=-1 \\ n+1-k=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=-1 \\ k=-1 \end{cases}$ Vậy $n = -2$ hoặc $n = -1$ thì A là số chính phương	0,50
c	Theo định lí Fermat bé, do 2; 3; 5 là các số nguyên tố và a là số nguyên dương bất kỳ ta có : $a^2 \equiv a \pmod{2} \Rightarrow a^4 \equiv a^2 \equiv a \pmod{2} \Rightarrow a^5 \equiv a \pmod{2} \quad (1)$ $a^3 \equiv a \pmod{3} \Rightarrow a^5 \equiv a^3 \cdot a^2 \equiv a \cdot a^2 \equiv a \pmod{3} \Rightarrow a^5 \equiv a \pmod{3} \quad (2)$ $a^5 \equiv a \pmod{5} \quad (3)$	0,25
	Có BCNN(2;3;5) = 30 Từ (1);(2) và (3) suy ra $a^5 \equiv a \pmod{2.3.5} \Rightarrow a^5 \equiv a \pmod{30} \Rightarrow (a^5 - a) : 30$ Tương tự: $(b^5 - b) : 30$; $(c^5 - c) : 30$	0,25
	Ta có: $A = (a^{2021} + b^{2021} + c^{2021}) - (a^{2017} + b^{2017} + c^{2017})$ $= (a^{2021} - a^{2017}) + (b^{2021} - b^{2017}) + (c^{2021} - c^{2017})$ $= a^{2016} (a^5 - a) + b^{2016} (b^5 - b) + c^{2016} (c^5 - c)$	0,25
	Do $(a^5 - a) : 30$; $(b^5 - b) : 30$; $(c^5 - c) : 30$ nên $A : 30$ Vậy A chia hết cho 30.	0,25
Câu 2 (4,0 điểm) 1) Cho $x, y, z > 0$ và $xy + yz + zx = 2021$. Chứng minh rằng: $\frac{x}{2021+x^2} + \frac{y}{2021+y^2} - \frac{z}{2021+z^2} = \frac{2xy}{\sqrt{(2021+x^2)(2021+y^2)(2021+z^2)}}.$ 2) Giải các phương trình sau: a) $\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} = 2$ b) $2 + \sqrt{x-1} + \sqrt{3x-5} = x.$		
1	Ta có $2021+x^2 = xy + yz + zx + x^2 = (x+y)(x+z)$ $2021+y^2 = xy + yz + zx + y^2 = (x+y)(y+z)$ $2021+z^2 = xy + yz + zx + z^2 = (y+z)(x+z)$	0,5
	Ta có $x, y, z > 0$, suy ra: $\frac{x}{2021+x^2} + \frac{y}{2021+y^2} - \frac{z}{2021+z^2} = \frac{x}{(x+y)(x+z)} + \frac{y}{(x+y)(y+z)} - \frac{z}{(y+z)(x+z)}$ $= \frac{x(y+z) + y(x+z) - z(x+y)}{(x+y)(y+z)(x+z)} = \frac{2xy}{(x+y)(y+z)(x+z)}$	0,25
	$= \frac{2xy}{\sqrt{[(x+y)(y+z)(x+z)]^2}} = \frac{2xy}{\sqrt{(2021+x^2)(2021+y^2)(2021+z^2)}}.$	0,25

2	a) Giải phương trình $\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} = 2$ ĐKXD: $x \neq 0; x \neq -1$ Ta có: $\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} - 1 = 1 - \frac{3}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}$	0.5
	$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(1-x)}{x^2} = \frac{x(x-1)}{(x+1)^2} \Leftrightarrow \frac{x(x-1)}{(x+1)^2} + \frac{(x-1)(x+1)}{x^2} = 0$ $\Leftrightarrow (x-1) \left(\frac{x}{(x+1)^2} + \frac{x+1}{x^2} \right) = 0$	0.5
	TH1: $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ (TMĐK) TH2: $(x+1)^3 = (-x)^3 \Leftrightarrow x+1 = -x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ (TMĐK) Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ 1; -\frac{1}{2} \right\}$	0.5
	b) Giải phương trình: $2 + \sqrt{x-1} + \sqrt{3x-5} = x$.	
	Điều kiện: $x \geq \frac{5}{3}$	0,25
	Phương trình đã cho tương đương với $2(x-2) - 2(\sqrt{x-1} + \sqrt{3x-5}) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow (\sqrt{x-1} + \sqrt{3x-5})(\sqrt{3x-5} - \sqrt{x-1}) - 2(\sqrt{x-1} + \sqrt{3x-5}) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow (\sqrt{x-1} + \sqrt{3x-5})(\sqrt{3x-5} - \sqrt{x-1} - 2) = 0$	
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{3x-5} = 0 \\ \sqrt{3x-5} - \sqrt{x-1} - 2 = 0 \end{cases}$	0,25
	Nếu $\sqrt{x-1} + \sqrt{3x-5} = 0$: Vô nghiệm	
	Nếu $\sqrt{3x-5} - \sqrt{x-1} - 2 = 0$ $\Leftrightarrow x-4 = 2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x^2 - 12x + 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ (x-2)(x-10) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=10$ Vậy phương trình có nghiệm: $x=10$.	0,5
Câu 3 (4,0 điểm) Cho $\triangle ABC$ vuông tại A. Các đường tròn (O) đường kính AB, và (I) đường kính AC cắt nhau tại điểm thứ hai là $H (H \neq A)$. Đường thẳng (d) thay đổi đi qua A cắt đường tròn (O) tại M và cắt đường tròn (I) tại N (A nằm giữa hai điểm M và N). a) Đoạn thẳng OI lần lượt cắt các đường tròn (O), (I) tại D, E. Chứng minh OI là đường trung trực của đoạn thẳng AH và $AB + AC - BC = 2DE$. b) Chứng minh giao điểm S của hai đường thẳng OM và IN di chuyển trên một đường tròn cố định khi đường thẳng (d) quay quanh A.		

c) Giả sử đường thẳng MH cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai là T ($T \neq H$). Chứng minh rằng ba đường thẳng MS, AT, NH đồng quy.



a) Ta có:

$OA = OH$ (cùng là bán kính của (O))

$IA = IH$ (cùng là bán kính của (I))

Suy ra OI là đường trung trực của đoạn thẳng AH .

Ta có:

O là tâm đường tròn đường kính $AB \Rightarrow OD = OA = OB = \frac{1}{2} AB$

I là tâm đường tròn đường kính $AC \Rightarrow IE = IA = IC = \frac{1}{2} AC$.

Xét $\triangle ABC$ ta có OI là đường trung bình của $\triangle ABC$

$\Rightarrow OI = \frac{1}{2} BC$.

$DE = OD + IE - OI = \frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} AC - \frac{1}{2} BC$

$\Leftrightarrow 2DE = AB + AC - BC$

b) Ta có: $\angle BAC = 90^\circ \Rightarrow \angle IAO = 90^\circ$

Suy ra: $\angle IAN + \angle OAM = 180^\circ - \angle IAO = 90^\circ$

Lại có: $\angle OAM = \angle OMA$ (tam giác AOM cân tại O)

$\Rightarrow \angle SMN = \angle OAM$

$\angle IAN = \angle INA$ (Tam giác AIN cân tại I)

$\angle SNM = \angle IAN$

Xét tam giác SMN , ta có:

$\angle SMN + \angle SNM = \angle OAM + \angle IAN = 90^\circ$

$\Rightarrow \square SMN$ vuông tại $S \Rightarrow \angle MSN = 90^\circ$ hay $\angle ISO = 90^\circ$

Suy ra S thuộc đường tròn đường kính OI .

Mà O và I cố định nên đường tròn đường kính OI cố định.

Vậy S di chuyển trên đường tròn đường kính OI cố định khi đường thẳng (d) quay quanh A .

	$\angle THN = 90^\circ \Rightarrow NH \perp MT$ $\angle MSN = 90^\circ \Rightarrow MS \perp NT$ Xét $\triangle MNT$ ta có MS, NH, AT là ba đường cao. Do đó MS, NH, AT đồng quy.	
Câu 4 (1,0 điểm) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz = 1$. Chứng minh rằng $\frac{1}{x^2 + 2y^2 + 3} + \frac{1}{y^2 + 2z^2 + 3} + \frac{1}{z^2 + 2x^2 + 3} \leq \frac{1}{2}$.		
	Đặt $P = \frac{1}{x^2 + 2y^2 + 3} + \frac{1}{y^2 + 2z^2 + 3} + \frac{1}{z^2 + 2x^2 + 3}$ Sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có $x^2 + y^2 \geq 2xy; y^2 + 1 \geq 2y$ Cộng lại theo vế ta được: $x^2 + 2y^2 + 3 \geq 2(xy + y + 1) > 0$ (vì x, y dương)	0,25
	Suy ra $\frac{1}{x^2 + 2y^2 + 3} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{xy + y + 1}$ Tương tự ta có $\frac{1}{y^2 + 2z^2 + 3} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{yz + z + 1}; \frac{1}{z^2 + 2x^2 + 3} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{xz + x + 1}$	0,25
	Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được $P \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{xy + y + 1} + \frac{1}{yz + z + 1} + \frac{1}{xz + x + 1} \right)$ (1)	
	Ta có: $\frac{1}{xy + y + 1} + \frac{1}{yz + z + 1} + \frac{1}{xz + x + 1}$ $= \frac{1}{xy + y + 1} + \frac{xy}{xyyz + xyz + xy} + \frac{y}{xyz + xy + y}$ $= \frac{1}{xy + y + 1} + \frac{xy}{y + 1 + xy} + \frac{y}{1 + xy + y} = 1$ (vì $xyz = 1$) (2)	0,25
	Từ (1) và (2) suy ra $P \leq \frac{1}{2}$. Vậy $\frac{1}{x^2 + 2y^2 + 3} + \frac{1}{y^2 + 2z^2 + 3} + \frac{1}{z^2 + 2x^2 + 3} \leq \frac{1}{2}$.	0,25

-----HẾT-----