|  |  |
| --- | --- |
| **SỞ GD & ĐT NGHỆ AN**  **TRƯỜNG THPT NGUYỄN XUÂN ÔN** | **ĐỀ KSCL ĐỘI TUYỂN HSG CẤP TỈNH LỚP 12**  **NĂM HỌC 2022-2023** |
|  | Thời gian làm bài: **150 phút** (*không kể thời gian giao đề*)  **ĐỀ 39** |

**Câu 1: (5,0 điểm)**

a) Cho hàm số  có đồ thị . Gọi  là các điểm cực trị của . Tìm tọa độ điểm  thuộc Parabol  sao cho tam giác  vuông tại .

b) Cho hàm số . Tìm tất cả các giá trị của tham số  để phương trình  có đúng  nghiệm thực.

**Câu 2: (5,0 điểm)**

a) Giải hệ phương trình 

b)Một đội ngũ cán bộ khoa học gồm 8 nhà Toán học nam, 5 nhà Vật lý nữ và 3 nhà Hóa học nữ. Người ta chọn ra từ đó 4 người để đi công tác, tính xác suất sao cho trong 4 người được chọn phải có nữ và có đủ ba bộ môn.

**Câu 3: (2,0 điểm)**

Cho các số thực dương  thỏa mãn . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau: 

**Câu 4: (5,0 điểm)**

Cho hình chóp tứ giác đều  biết , góc giữa hai mặt phẳng  và mặt phẳng  bằng .

a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau  và .

b) Lấy các điểm ,  lần lượt thuộc các cạnh ,  sao cho , . Gọi  là giao điểm của  và mặt phẳng . Tính thể tích của khối đa diện .

**Câu 5: (3,0 điểm)**

Cho hình hộp  có tất cả các mặt là hình thoi cạnh , . Gọi  lần lượt là trung điểm . Mặt phẳng  đi qua  cắt các cạnh  lần lượt tại  . Gọi  lần lượt là thể tích các khối chóp . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  theo 

**…………. Hết……………**

**Họ tên thí sinh:**………………………………………………**SBD:**……………………………..

**ĐÁP ÁN ĐỀ THI THỬ HỌC SINH GIỎI**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu** | **Nội dung** | **Điểm** |
| **Câu 1:**  **(3,0đ)** | **a) Cho hàm số  có đồ thị . Gọi  là các điểm cực trị của . Tìm tọa độ điểm  thuộc Parabol  sao cho tam giác  vuông tại .** |  |
| .  Ta có các điểm cực trị của (C) là:  và . | **0,25**  **0,5** |
| Gọi  thuộc . Khi đó:  và . Vì  không thuộc  nên tam giác  vuông tại | **0,5**  **0,75** |
| .  Vậy có ba điểm thuộc  để tam giác  vuông tại  là . | **0,5**  **0,5** |
| **(2,0đ)** | **b) Cho hàm số . Tìm tất cả các giá trị của tham số  để phương trình  có đúng  nghiệm thực.** |  |
| Ta có .  Mà .  Mặt khác    Xét hàm số  trên .  Khi đó .  đồng biến trên .  Từ . | **0,25**  **0,5**  **0,5** |
|  | Do đó phương trình  có đúng  nghiệm thực   có  nghiệm thực.  Ta có bảng biến thiên của hàm số .    Từ bảng biến thiên . | **0,25**  **0,5** |
| **Câu 2:**  **(3,0đ)** | **a) Giải hệ phương trình** |  |
| Xét hệ phương trình  .  Điều kiện  . Từ (1) .  Ta có (1)    . | **0,5**  **0,5** |
| Chú ý , vậy .  Khi đó  .  Điều kiện: .  Mặt khác . | **0,25**  **0,5**  **0,5** |
| Do đó  .  Từ đó:  : thỏa điều kiện. Vậy hệ có nghiệm duy nhất . | **0,5**  **0,25** |
| **(2,0đ)** | **Một đội ngũ cán bộ khoa học gồm 8 nhà Toán học nam, 5 nhà Vật lý nữ và 3 nhà Hóa học nữ. Người ta chọn ra từ đó 4 người để đi công tác, tính xác suất sao cho trong 4 người được chọn phải có nữ và có đủ ba bộ môn.** |  |
| Chọn ngẫu nhiên 4 nhà khoa học trong 16 nhà khoa học có  cách.  Chọn 4 người đi công tác thỏa mãn yêu cầu bài toán có các trường hợp sau:  Chọn 2 nhà Toán học nam, 1 nhà Vật lỹ nữ, 1 nhà Hóa học nữ có  cách.  Chọn 1 nhà Toán học nam, 2 nhà Vật lỹ nữ, 1 nhà Hóa học nữ có  cách.  Chọn 1 nhà Toán học nam, 1 nhà Vật lỹ nữ, 2 nhà Hóa học nữ có  cách. | **0,25**  **0,25**  **0,25**  **0,25** |
| Số cách chọn đoàn công tác là  cách.  Vậy, xác suất cần tìm là: | **0,5**  **0,5** |
| **Câu 3:**  **(2,0đ)** | **Cho các số thực dương  thỏa mãn . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:** |  |
| Theo bất đẳng thức AM – GM ta có :    Áp dụng bất đẳng thức trên ta có:    Vậy  Đặt thì ta có . | **0,5**  **0,5** |
| Ta lại có đánh giá sau đây:  Vậy ta có . Xét hàm số với , ta có  với mọi  nên . Vậy  Dấu đẳng thức xảy ra khi:  Vậy  khi | **0,5**  **0,5** |
| **Câu 4:**  **(3,0đ)** | **Cho hình chóp tứ giác đều  biết , góc giữa hai mặt phẳng  và mặt phẳng  bằng .**  **a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau  và .** |  |
| **a)** Gọi  là trung điểm .  Khi đó ta có .  Suy ra góc giữa hai mặt phẳng  và mặt phẳng là góc  hay .  Trong  vuông tại  ta có: ; ;  . | **0,5**  **0,5** |
| Do  .  Trong  kẻ  với .  Do .  Từ (1) và (2) suy ra . Vậy . | **0,5**  **0,5** |
|  | Trong  vuông tại  ta có:  .  Vậy . | **0,5**  **0,25** |
| **(2,0đ)** | **b) Lấy các điểm ,  lần lượt thuộc các cạnh ,  sao cho , . Gọi  là giao điểm của  và mặt phẳng . Tính thể tích của khối đa diện .** |  |
|  | Gọi  là giao điểm của  và .  Ta có .  Gọi  là giao điểm của  và .  Do .  Trong  có , ,  thẳng hàng nên theo định lý Menelaus ta có  .  Thể tích tứ diện  là  (đvtt).  Ta thấy  (c – g – c) .  . | **0,5**  **0,5** |
| .  .  .  (đvtt).  Thể tích khối đa diện  là  (đvtt).  Vậy thể tích khối đa diện  là  (đvtt). | **0,5**  **0,5** |
| **Câu 5**  **(3,0đ)** | **Cho hình hộp  có tất cả các mặt là hình thoi cạnh , . Gọi  lần lượt là trung điểm . Mặt phẳng  đi qua  cắt các cạnh  lần lượt tại  . Gọi  lần lượt là thể tích các khối chóp . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  theo** |  |
|  | **Bổ đề:** Cho tứ diện  có . Một mặt phẳng  thay đổi qua trọng tâm  của tứ diện lần lượt cắt  tại . .  **Chứng minh:**    Gọi  là trọng tâm . Theo tính chất trọng tâm của tứ diện ta có  thẳng hàng và . Thêm nữa .  Ta có:  (Lưu ý ).  Lập luận tương tự thu được  và .  Cộng theo vế các đẳng thức , ,  ta được    . | **0,5** |
|  | Quay lại bài toán đã cho:    là trung điểm đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh đối của tứ diện  nên  là trọng tâm tứ diện. Coi  là một đơn vị dài. Áp dụng bổ đề trên cho tứ diện  với  là trọng tâm tứ diện và  lần lượt là giao điểm của mặt phẳng  qua  với các cạnh . Ta có:  .  Đặt  ta được .  Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có .  Dấu bằng xảy ra khi  (mặt phẳng (P) song song với ). | **0,5**  **0,5** |
|  | Mặt khác  ; ;  và    Suy ra    Mà  đạt được khi mp  song song với mp . | **0,75**  **0,75** |

Lưu ý: Học sinh có cách giải khác đúng vẫn cho điểm tối đa