

Người làm: Trần Thị Hào
 Zalo: Tran Thi Hao
 Email: haotrantpgl@gmail.com

- số đt zalo: 0973734899

CD4: CÁC DẠNG TOÁN CHỨNG MINH CHIA HẾT

Dạng 1. Chứng minh chia hết

Câu 1. (HSG 7 huyện Nam Sách 2017 - 2018; huyện Tân Lạc; Ngọc Lặc 2015 - 2016)

Chứng minh rằng $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10 với mọi số nguyên dương n .

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n &= 3^n \cdot 9 - 2^n \cdot 4 + 3^n - 2^n \\ &= 3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5 = 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot 10 \\ &= 10 \cdot (3^n - 2^{n-1}) : 10\end{aligned}$$

Vậy $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10 với mọi số nguyên dương n .

Câu 2. (HSG 7 trường Hồng Thái, Sơn Dương 2017 - 2018; huyện Thái Thụy 2015 - 2016)

Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Biết $f(1) : 3; f(0) : 3; f(-1) : 3$. Chứng minh rằng a, b, c đều chia hết cho 3.

Lời giải

$$\begin{aligned}f(x) &= ax^2 + bx + c \\ \Rightarrow f(0) &= c; f(1) = a + b + c; f(-1) = a - b + c\end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } f(0) : 3 \Rightarrow c : 3$$

$$f(1) : 3 \Rightarrow (a + b + c) : 3 \Rightarrow (a + b) : 3 \quad (1)$$

$$f(-1) : 3 \Rightarrow (a - b + c) : 3 \Rightarrow (a - b) : 3 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } [(a + b) + (a - b)] : 3 \Rightarrow 2a : 3 \Rightarrow a : 3 \quad \text{mà } (2; 3) = 1 \Rightarrow b : 3$$

Vậy a, b, c đều chia hết cho 3

Câu 3. (HSG 7 trường Phan Đình Phùng 2017 - 2018; huyện Lâm Thao 2016 - 2017)

Chứng tỏ rằng $M = 75 \cdot (4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25$ chia hết cho 10^2 .

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } M &= 75 \cdot (4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25 \\ &= 25 \cdot (4 - 1) (4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25 \\ &= 25 \cdot (4^{2019} + 4^{2018} + \dots + 4^3 + 4^2 + 4) - 25 \cdot (4^{2018} + 4^{2017} + \dots + 4^2 + 4 + 1) + 25 \\ &= 25 \cdot 4^{2019} = 25 \cdot 4 \cdot 4^{2018} = 100 \cdot 4^{2018} = 10^2 \cdot 4^{2018} : 10^2\end{aligned}$$

Vậy $M \vdots 10^2$.

Câu 4. (HSG 7 huyện Cẩm Khê 2017 - 2018; huyện Tân Kỳ 2015 - 2016)

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta luôn có: $5^{n+2} + 3^{n+2} - 3^n - 5^n$ chia hết cho 25.

Lời giải

Ta có: $5^{n+2} + 3^{n+2} - 3^n - 5^n = (5^{n+2} - 5^n) + (3^{n+2} - 3^n) = 5^n \cdot 24 + 3^n \cdot 8$

Vì n nguyên dương nên $5^n \cdot 24$ chia hết cho 24 ; $3^n \cdot 8$ chia hết cho 24

Vậy $5^{n+2} + 3^{n+2} - 3^n - 5^n$ chia hết cho 24 với mọi số nguyên dương n .

Câu 5. (HSG 7 trường Nghĩa Điền 2017 - 2018)

Chứng minh rằng: $(81^7 - 27^9 - 9^{13}) : 405$

Lời giải

Ta có: $81^7 - 27^9 - 9^{13} = 3^{28} - 3^{27} - 3^{26}$
 $= 3^{26} \cdot (3^2 - 3 - 1) = 3^{22} \cdot 3^4 \cdot 5 = 3^{22} \cdot 405 : 405$
 $\Rightarrow (81^7 - 27^9 - 9^{13}) : 405$

Câu 6. (HSG 7 trường Giao Tân 2016 - 2017)

Chứng minh rằng: $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$ chia hết cho 31 .

Lời giải

Đặt: $D = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$ (có 100 số hạng)
 $= (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) + (2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10}) + \dots + (2^{96} + 2^{97} + 2^{98} + 2^{99} + 2^{100})$
 $= 2 \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + 2^6 \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + \dots + 2^{96} \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4)$
 $= 2 \cdot 31 + 2^6 \cdot 31 + \dots + 2^{96} \cdot 31$
 $= 31 \cdot (2 + 2^6 + \dots + 2^{96}) : 31$

Vậy $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$ chia hết cho 31 .

Câu 7. (HSG 7 trường Lê Quý Đôn 2016 - 2017; huyện Việt Yên 2016 - 2017)

Chứng minh rằng: $(3a + 2b) : 17$ khi và chỉ khi $(10a + b) : 17$ ($a, b \in \mathbb{Z}$).

Lời giải

$\Leftrightarrow (3a + 2b) : 17 \Rightarrow (10a + b) : 17$

Ta có: $(3a + 2b) : 17 \Rightarrow 9(3a + 2b) : 17$
 $\Rightarrow (27a + 18b) : 17$

$$\Rightarrow (17a + 17b) + (10a + b) : 17$$

$$\Rightarrow (10a + b) : 17$$

$$\oplus (10a + b) : 17 \Rightarrow (3a + 2b) : 17$$

$$(10a + b) : 17 \Rightarrow 2(10a + b) : 17$$

Ta có:

$$\Rightarrow (20a + 2b) : 17$$

$$\Rightarrow (17a + 3a + 2b) : 17$$

$$\Rightarrow (3a + 2b) : 17$$

Vậy với $a, b \in \mathbb{Z}$ thì $(3a + 2b) : 17$ khi và chỉ khi $(10a + b) : 17$.

Câu 8. (HSG 7 huyện Thanh Hà 2016 - 2017)

Chứng minh rằng: $3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+100}$ chia hết cho 120 ($x \in \mathbb{N}$).

Lời giải

Ta có: $3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+100}$

$$= (3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4}) + (3^{x+5} + 3^{x+6} + 3^{x+7} + 3^{x+8}) + \dots + (3^{x+97} + 3^{x+98} + 3^{x+99} + 3^{x+100})$$

$$= 3^x \cdot (3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + 3^{x+4} \cdot (3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + \dots + 3^{x+96} \cdot (3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4)$$

$$= 3^x \cdot 120 + 3^{x+4} \cdot 120 + \dots + 3^{x+96} \cdot 120$$

$$= 120(3^x + 3^{x+4} + \dots + 3^{x+96}) : 120$$

Vậy $3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + \dots + 3^{x+100}$ chia hết cho 120 ($x \in \mathbb{N}$).

Câu 9. (HSG 7 trường Trục Ninh 2016 - 2017; Phú Thiện 2014 - 2015)

Chứng minh rằng số có dạng $\overline{abcabc}$ luôn chia hết cho 11.

Lời giải

Ta có: $\overline{abcabc} = a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$

$$= a \cdot 10^2 \cdot (10^3 + 1) + b \cdot 10 \cdot (10^3 + 1) + c \cdot (10^3 + 1)$$

$$= (10^3 + 1) \cdot (a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c)$$

$$= 1001 \cdot (a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c)$$

$$= 11 \cdot 91 \cdot (a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c) : 11$$

Vậy $\overline{abcabc} : 11$.

Câu 10. (HSG 7 trường Hiền Quan 2015 - 2016)

Với a, b là các số nguyên dương sao cho $a+1$ và $b+2007$ chia hết cho 6 . Chứng minh rằng: $4^a + a + b$ chia hết cho 6 .

Lời giải

Vì a nguyên dương nên ta có $4^a \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 4^a + 2 \equiv 0 \pmod{3}$

$$(4^a + 2) \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow (4^a + 2) : 2$$

Mà

Khi đó ta có $4^a + a + b = 4^a + 2 + a + 1 + b + 2007 - 2010$ chia hết cho 6 .

Vậy với a, b là các số nguyên dương sao cho $a+1$ và $b+2007$ chia hết cho 6 thì $4^a + a + b$ chia hết cho 6 .

Câu 11. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn 2015 - 2016)

Chứng minh rằng : Số $A = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ chia hết cho 133 , với mọi $n \in \mathbb{N}$

Lời giải

Ta có: $A = 11^{n+2} + 12^{2n+1} = 11^2 \cdot 11^n + 12 \cdot (12^2)^n = 121 \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n$

$$= (133 - 12) \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n = 133 \cdot 11^n - 12 \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n$$

$$= 133 \cdot 11^n + 12 \cdot (144^n - 11^n)$$

Ta thấy : $133 \cdot 11^n : 133$

$$(144^n - 11^n) : (144 - 11) = 133 \Rightarrow 12 \cdot (144^n - 11^n) : 133$$

Do đó suy ra $133 \cdot 11^n + 12 \cdot (144^n - 11^n)$ chia hết cho 133

Vậy: số $A = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ chia hết cho 133 , với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Dạng 2. Tìm chữ số tận cùng

Câu 1. (HSG 7 huyện Đất Mũi 2016 - 2017)

Tìm chữ số tận cùng của A biết: $A = 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$.

Lời giải

Ta có: $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n = 3^n \cdot 9 - 2^n \cdot 4 + 3^n - 2^n$

$$= 3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5 = 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot 10$$

$$= 10 \cdot (3^n - 2^{n-1}) : 10$$

Vậy chữ số tận cùng của A là 0 .

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>