# Chuyên đề 11: CÁC BÀI TOÁN SUY LUẬN

#### (Đề thi HSG Huyện Thuận An)

Hai máy cày cùng làm việc trên một cánh đồng . Nếu cả hai máy cùng làm việc thì sau 4 ngày sẽ cày xong cả cánh đồng .Trên thực tế thì hai máy cùng làm việc trong hai ngày ,sau đó máy 1 bị điều động đi nơi khác làm việc .Máy hai làm một mình thì sau 6 ngày nữa thì cày xong cánh đồng . Hỏi nếu làm một mình thì mỗi máy cày xong cánh đồng trong bao lâu?

**Lời giải**

Cả hai máy cùng làm việc 4 ngày cày xong cánh đồng

Và cả hai máy cùng làm việc trong hai ngày

Suy ra còn  cánh đồng máy 2 phải hoàn thành công việc 1 mình.

Mà máy 2 phải cày một mình  cánh đồng đó trong 6 ngày

Suy ra máy 2 cày xong hết cánh đồng mất 12 ngày.

Ta có: 1 ngày, máy 2 cày được  cánh đồng

Suy ra 2 ngày, máy 2 cày được: cánh đồng

Mà 2 máy, 2 ngày cày chung được  cánh đồng

Suy ra 2 ngày máy 1 cày được  cánh đồng

Do đó 1 ngày máy 1 cày được  cánh đồng

Suy ra máy 1 cày hết cánh đồng hết 6 ngày

Vậy máy 1 cày hết cánh đồng mất 6 ngày.

Máy 2 cày hết cánh đồng mất 12 ngày.

#### (Đề thi HSG 8 Huyện Thuận An 2012-2013)

Giải bài toán bằng cách lập phương trình.

Nếu tử của một phân số tối giản bé hơn 1 được nâng lên lập phương còn mẫu của nó được tăng thêm 3 đơn vị thì phân số đã cho tăng lên gấp ba lần. Tìm phân số đó.

**Lời giải**

+ Gọi phân số phải tìm là  (a < b , ƯCLN (a, b = 1))

+ Theo bài ra có phương trình: 



Vì 

+ Nếu a = 1  (loại)

+ Nếu a = 2 ⇒ b = 9 ta được phân số  (TM)

+ Nếu a ≥ 3 ⇒ a2 ≥ 3a + 9 (vô lý)

Vậy phân số cần tìm là: 

#### (Đề thi HSG 8 Huyện Vĩnh Tường 2012-2013)

Trên một đường tròn viết 1996 số 0 và một số 1. Một bước đi cho phép chọn một số và đổi hai số liền kề của số đã chọn đó, từ 0 thành 1 và 1 thành 0. Hỏi có thể đổi tất cả các số 0 thành số 1 được không?

**Lời giải**

Nhóm 1996 số 0 thành 499 nhóm, mỗi nhóm có 4 số 0. Lần thứ nhất chọn số ở vị trí thứ hai trong mỗi nhóm và thực hiện đổi số; Hai số 0 thứ nhất và thứ ba trở thành số 1.

Lần thứ hai chọn số ở vị trí thứ ba và đổi nốt hai số 0 ở vị trí thứ hai và thứ tư; Như vậy ta được 4 số 1. Cứ tiếp tục như vậy ta được ta được 1997 số 1;Vậy có thể đổi tất cả các số 0 thành số 1.

#### (Đề thi HSG Huyện Can Lộc 2018-2019)

Cho  đoạn thẳng có độ dài từ  đến . Chứng minh rằng: luôn chọn được  đoạn thẳng trong  đoạn thẳng đã cho lập thành ba cạnh của một tam giác.

**Lời giải**

Trước hết sắp xếp các đoạn đã cho theo thứ tự tăng dần của độ dài  và chứng minh rằng trong dãy đã xếp luôn tìm được 3 đoạn thẳng liên tiếp sao cho tổng của 2 đoạn đầu lớn hơn đoạn cuối (vì điều kiện để  đoạn thẳng lập thành ba cạnh của một tam giác là tổng độ dài của 2 đoạn thẳng bất kì lớn hơn độ dài đoạn còn lại).

Giả sử điều cần chứng minh là không xảy ra. Suy ra



Từ giả thiết, suy ra:



 (mẫu thuận với giả thiết)

Do đó điều giả sử chứng minh không xảy ra.

Vậy luôn chọn được  đoạn thẳng trong  đoạn thẳng đã cho lập thành ba cạnh của một tam giác.

#### (Đề thi HSG Huyện Tam Dương 2016-2017)

Trong một đề thi có 3 bài toán A, B, C. Có 25 học sinh mỗi người đều đã giải được ít nhất một trong 3 bài đó. Biết rằng:

- Trong số thí sinh không giải được bài A thì số thí sinh đã giải được bài B nhiều gấp hai lần số thí sinh đã giải được bài C.

- Số học sinh chỉ giải được bài A nhiều hơn số thí sinh giải được bài A và thêm bài khác là một người.

- Số thí sinh chỉ giải được bài A bằng số thí sinh chỉ giải được bài B cộng với số thí sinh chỉ giải được bài C.

Hỏi có bao nhiêu thí sinh chỉ giải được bài B?

**Lời giải**

Gọi a là số học sinh chỉ giải được bài A, b là số thí sinh chỉ giải được bài B, c là số thí sinh chỉ giải được bài C, d là số thí sinh giải được 2 bài B và C nhưng không giải được bài A. Khi đó số thí giải được bài A và thêm ít nhất một bài trong hai bài B và C là:



Theo bài ra ta có:  và 

từ các đẳng thức trên ta có:

Vậy số thí sinh chỉ giải được bài B là 6 thí sinh.

#### (Đề thi HSG 8 Huyện Sông Lô 2015-2016)

Trong bảng ô vuông kích thước 88 gồm 64 ô vuông đơn vị, người ta đánh dấu 13 ô bất kì. Chứng minh rằng với mọi cách đánh dấu luôn có ít nhất 4 ô được đánh dấu không có điểm chung (hai ô có điểm chung là 2 ô chung đỉnh hoặc chung cạnh)

Lời giải

Chia 64 ô vuông của bảng 8x8 thành 4 loại như hình vẽ (Các ô cùng loại được đánh số giống nhau). Khi đó theo cách chia này rõ ràng các ô trong cùng loại sẽ không có điểm chung.

Khi đánh dấu 13 điểm bất kì, thì 13 điểm này sẽ thuộc 4 loại ô vừa chia. Vì 13=4.3+1 nên theo nguyên lí Đirichlê sẽ tồn tại ít nhất 4 ô thuộc cùng 1 loại, khi đó 4 ô này sẽ không có điểm chung. Suy ra đpcm.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 |
| 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 | 3 | 4 |

#### (Đề thi 8 HSG Huyện Thạch Hà 2016-2017)

Câu 1. Giải vô địch bóng đá quốc gia Việt Nam 2016-2017 có 14 đội tham gia. Mỗi đội phải thi đấu cới các đội còn lại 1 trận ở sân nhà và một trận ở sân khách. Kết thúc mùa giải có tất cả bao nhiêu trận đấu?

Câu 2. Trong 1 hộp có 60 viên bi màu, gồm 25 bi màu đỏ, 20 bi màu xanh, và 15 bi màu vàng. Cần lấy ra ít nhất là bao nhiêu viên bi (mà không cần nhìn vào hộp) để có 3 viên bi khác màu?

Lời giải

Câu 1. Đáp số: 182 trận

Câu 2. Đáp số: 46 viên bi

#### (Đề thi HSG 8 Huyện Thạch Hà)

Cho một lưới ô vuông có kích thước 5x5 ô. Người ta điền vào mỗi ô của lưới một trong các số -1; 0; 1. Xét tổng của các số theo từng cột, theo từng hàng và theo từng hàng chéo. Chứng minh rằng trong tất cả các tổng đó luôn tồn tại hai tổng có giá trị bằng nhau.

Lời giải

Lưới ô vuông kích thước 5x5 ô có 5 hàng ngang, 5 cột dọc và 2 đường chéo (theo các ô), nên có 12 tổng. Do các số được điền vào ô là một trong các số: -1; 0; 1 nên giá trị mỗi tổng thuộc tập hợp . Như vậy, có 12 tổng là các số nguyên, nhưng nhận nhiều nhất 11 giá trị khác nhau, nên có ít nhất hai tổng nhận cùng một giá trị (đpcm).

#### (Đề thi HSG 8 Huyện Nam Trực)

Cần dùng ít nhất bao nhiêu tầm bìa hình tròn có bán kính bắng 1 để phủ kín một tam giác đều có cạnh bằng 3, với giả thiết không được cắt tấm bìa,

**Lờigiải**

Giả sử ABC là tam giác đều có cạnh bằng 3 .Chia mỗi cạnh của tam giác ABC thành ba phần bằng nhau.Nối các điểm chia bởi các đoạn thẳng saong song với các cạnh , tam giác ABC được chia thành 9 tam giác đều có cạnh bằng 1.

Gọi I, J, K lần lượt là ba điểm trên cạnh BC , CA và AB sao cho IC – JA = KB =1, Ba đường tròn bán kính bằng 1, tâm tương ứng là I,J,K sẽ phủ kín được tam giác ABC ( Mỗi hình tròn phủ được 3 tam giác nhỏ ).Như vậy dùng 3 tấm bìa sẽ phủ kín được tam giác ABC

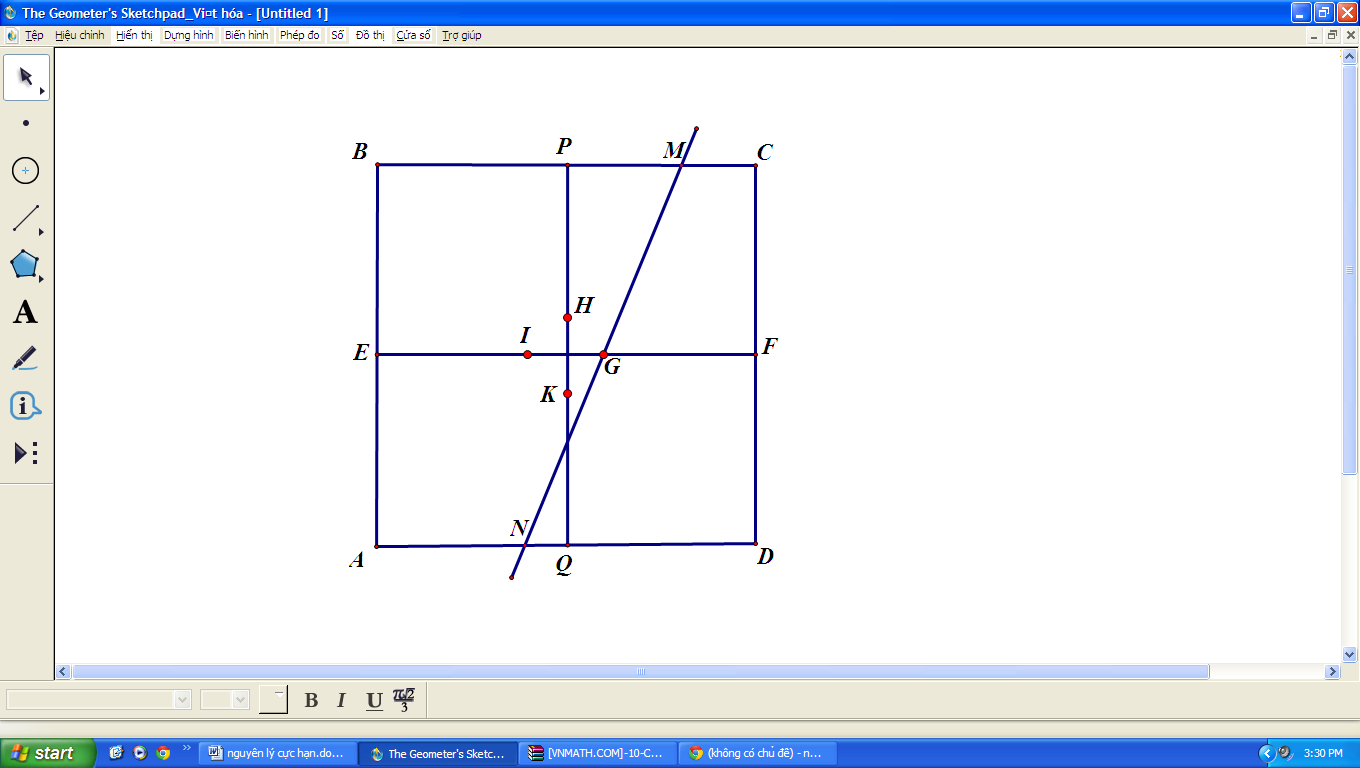
Số tấm bì ít nhất phải dùng là 3, bởi vì nếu ngược lại sẽ phải có hai trong ba đỉnh của tam giác ABC thuộc một hình tròn bán kính bằng 1.Điều này không thể xảy ra bởi vì cạnh của tam giác ABC bằng 3)



#### (Đề thi HSG 8 Huyện Vĩnh Bảo)

Cho hình vuông ABCD và 2018 đường thẳng cùng có tính chất chia hình vuông này thành hai tứ giác có tỉ số diện tích bằng . Chứng minh rằng có ít nhất 505 đường thẳng trong 2018 đường thẳng trên đồng quy.

**Lời giải**



Gọi E, F, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC và AD. Lấy các điêrm I, G trên EF và K, H trên PQ thỏa mãn: 

Xét d là một trong các đường thẳng bất kỳ đã cho cắt hai AD, BC, EFlần lượt tại M, N, G’. Ta có 

hay d qua G

Từ lập luận trên suy ra mỗi đường thẳng thỏa mãn yêu cầu của đề bài đều đi qua một trong 4 điểm G, H, I, K.

Do có 2018 đường thẳng đi qua 1 trong 4 điểm G, H, I, K, theo nguyên lý Dirichlet phải tồn tại ít nhất đường thẳng cùng đi qua một điểm trong 4 điểm trên. Vậy có ít nhất 505 đường thẳng trong số 2018 đường thẳng đã cho đồng quy.

#### (Đề thi HSG 8 Huyện Vĩnh Tường)

Cho hình lục giác đều ABCDEG. Người ta tô màu đỏ hai đỉnh A và D, tô màu xanh 4 đỉnh còn lại. Sau đó người ta đổi màu các đỉnh đó theo quy tắc sau: Mỗi lần đổi màu phải chọn 3 đỉnh của một tam giác cân rồi đổi màu đồng thời cả 3 đỉnh đó *(đỏ thành xanh, xanh thành đỏ)*. Hỏi sau một số lần đổi màu theo quy tắc đó có thu được kết quả là đỉnh C có màu đỏ còn 5 đỉnh còn lại màu xanh không ?

**Lời giải**

Ta thấy hai đỉnh đối nhau qua tâm của lục giác không thể cùng là đỉnh của một tam giác cân nào (ví dụ đỉnh A và đỉnh D). Ngoài ra trong 4 đỉnh B, C, E, G không thể có 3 đỉnh nào là 3 đỉnh của một tam giác cân (vì B, C, E, G là 4 đỉnh của hình chữ nhật);

Vậy nếu có một tam giác là tam giác cân mà 3 đỉnh là 3 đỉnh của lục giác thì phải có một đỉnh là đỉnh A hoặc đỉnh D;

Mỗi lần áp dụng quy tắc đổi màu thì chỉ có đỉnh A hoặc đỉnh D đổi màu, vì A và D màu đỏ (đối xứng nhau qua tâm O) đổi thành màu xanh thì số lần áp dụng quy tắc đổi màu phải là chẵn;

Để đỉnh C màu xanh đổi thành màu đỏ thì số lần áp dụng quy tắc đổi màu phải là lẻ;

Vậy để có kết quả đỉnh C màu đỏ và 5 đỉnh còn lại màu xanh thì số lần áp dụng quy tắc đổi màu vừa phải chẵn vừa phải lẻ (vô lý). Vậy không thể thực hiện được.

#### (Đề thi HSG 8 Huyện Nghĩa Đàn 2018-2019)

Trong hình vuông có cạnh bằng  cho  điểm bất kỳ. Chứng minh rằng trong các điểm đã cho có thể tìm được  điểm lập thành tam giác có diện tích không lớn hơn .

**Lời giải**

Chia hình vuông cạnh bằng *32* thành *16* hình vuông có diện tích bằng nhau (mỗi cạnh chai làm *4* phần bằng nhau). Vì  nên theo nguyên lý Dirichlet có một hình vuông con (cạnh *8*) chứa ít nhất *3* trong *33* điểm đã cho. Ta chứng minh *3* điểm này lập nên một tam giác có diện tích không lớn hơn *32.* Ta xét hai trường hợp sau đây:

Trường hợp 1: Có một cạnh của tam giác nằm trên cạnh của hình vuông.



Giả sử cạnh  của tam giác nằm trên cangh  của hình vuông. Kẻ đường cao . Ta có 

Trường hợp 2: Không có cạnh nào của tam giác nằm trên cạnh của hình vuông.



Qua đỉnh , ta kẻ đường thẳng song saong với cạnh hình vuông và cắt cạnh  tại . Gọi lần lượt là đường cao tam giác 

Xét 



Vậy trong mọi trường hợp ta luôn có 

#### (Đề thi HSG 8 Huyện Chương Mỹ 2017-2018)

Cho dãy các số . Tìm số nhỏ nhất sao cho nếu chọn bộ  số bất kỳ nào của dãy trên cũng luôn tồn tại 2 số mà số này chia hết cho số kia

**Lời giải**

+) Nếu chọn  thì bộ số  không tìm được 2 số nào thỏa mãn đề bài, suy ra 

+) Chứng minh  . Thật vậy,

Chọn dãy 26 số bất kỳ 

Ta đặt  (Trong đó lẻ với )

suy ra 

Vì tập các số lẻ nhỏ hơn 50 này có 25 số nên tồn tại 2 số bằng nhau.

Giả sứ và , khi đó chia hết cho .

#### (Đề thi HSG 8 Quận Hà Đông 2017 - 2018)

Cho số, mỗi số nhận giá trị  hoặc . Chứng minh rằng trong số đó, tồn tại một hoặc nhiều số mà tổng của chúng bằng tổng các số còn lại.

**Lời giải**

Giả sử trongsốcósố nhận giá trị vàsố nhận giá trị.

Khi đó, vìlà số chẵn nêncũng là số chẵn. Vậycùng tính chẵn lẻ.

- Nếulà số chẵn thìlà số chẵn, khi đó chọnsố bằng vàsố bằng

Khiđó:

Tổng các số chọn ra là 

Tổng các số còn lại.

Vậy tổng các số được chọn ra bằng tổng các số còn lại.

- Nếulà số lẻ thìlà số lẻ.

Đặt

Ta chọnsố bằngvàsố bằng

Khi đó:

Tổng các số chọn ra là 

Tổng các số còn lại.

Vậy tổng các số được chọn ra bằng tổng các số còn lại.

Do đó trong số , mỗi số nhận giá trị hoặc thì tồn tại một hoặc nhiều số mà tổng của chúng bằng tổng các số còn lại.

#### (Đề thi HSG 8 HSG Huyện Hương Khê 2017-2018)

Trên một mặt phẳng cho trước, giả sử rằng mỗi điểm đều được tô màu đỏ hoặc màu xanh. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác vuông cân có 3 đỉnh cùng màu?

Xét hình vuông ABCD tâm O. 5 điểm A, B, C, D, O được tô bởi 2 màu. tồn tại ít nhất 3 điểm cùng màu.

\*) Giả sử 3 điểm đó Tìm được tam giác vuông cân.

\*) Giả sử 3 điểm đó là (A; B; O); (A; D; O); (D; O; C); (B; O; C). Tìm được tam giác vuông cân.

\*) Giả sử ba điểm đó là A; O; C ( tô đỏ) B, D xanh. Dựng hình vuông CDFE tâm I

+) Nếu F đỏ tam giác ACF vuông cân.

+) Nếu F xanh:

-) E xanh: Tam giác DEF vuông cân

-) E đỏ:

+) I đỏ: tam giác CEI vuông cân

+) I xanh tam giác DIF vuông cân

Tóm lại luôn tồn tại tam giác vuông cân thỏa mãn điều kiện.

#### (Đề thi HSG 8 Huyện Hoàng Mai 2016-2017)

Có 2017 viên gạch được đánh số theo các số tự nhiên từ 1 đến 2017. Người ta sơn các viên gạch này

bằng các màu phân biệt sao cho mỗi viên gạch được sơn 1 màu và không có hai số nào cùng màu chia

hết cho nhau. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu màu?

Nhận xét: Trong  không có hai số nào chia hết cho nhau.

Chứng minh: Giả sử tồn tại m, p sao cho  (Vì  thì thương bé nhất là 2).

Mặt khác 

(mâu thuẫn giả thiết )

Áp dụng:Từ 1 đến 2017 có các đoạn sau không có 2 số nào chia hết cho nhau.



Vậy từ 1 đến 2017 ta cần tô ít nhất là 11 màu để thỏa mãn đề bài.

#### (Đề thi HSG 8 Huyện Vĩnh Bảo 2018)

Cho một đa giác đều gồm 2019 đỉnh. Người ta tô mỗi đỉnh của đa giác bởi một màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng luôn tìm được ba đỉnh của đa giác là ba đỉnh của một tam giác cân được đánh dấu bở cùng một màu.

**Lời giải**

Vì đa thức đã cho có số đỉnh lẻ nên tồn tại 2 đỉnh kề nhau được đánh dấu cùng màu, ta gọi hai đỉnh đó là  và . Như vậy ở đa giác đã xét, còn đỉnh  nào đó thuộc đường trung trực của 

+ Nếu  được đánh dấu cùng màu với  và thì tam giác  thỏa mãn điều kiện đề bài.

+ Nếu  được đánh dấu khác màu với  và thì đỉnh  kề với đỉnh  và đỉnh  kề với đỉnh 

Trường hợp  và đánh dấu khác màu với  và  thì tam giác là tam giác thỏa mãn điều kiện đề bài. Còn khi có ít nhất một trong các đỉnh  hoặc  cùng màu với  và  chẳng hạn, đỉnh  thì tam giác  thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Vậy luôn tìm được ba đỉnh của đa giác là ba đỉnh của một tam giác cân được đánh dấu bở cùng một màu.

#### (Đề thi HSG 8 Huyện Tiền Hải 2018-2019)

Cho  số nguyên dương phân biệt, mỗi số không vượt quá . Chứng minh rằng trong các số đó luôn tồn tại số có tổng bằng 

**Lời giải**

Gọi  số đó là .

Xét hai tập hợp:  và 

Hai tập hợp trên có tất cả  phần tử. Mà phần tử là các số từ  nên tồn tại hai phần tử thuộc hai tập hợp bằng nhau, hay là tồn tại  sao cho  (đpcm).