

Người làm: Lê Thị Hải Yến

Zalo: Hải Yến - Số đt zalo: 0987470504

Email: yenlethcsmolao@gmail.com

CD8: CÁC DẠNG TOÁN VỀ PHÂN SỐ

Dạng 1: Tìm phân số thỏa mãn điều kiện cho trước
Dạng 2: Chứng minh phân số đã cho là tối giản
Dạng 3: Tìm điều kiện để phân số là phân số tối giản
Dạng 4: Tìm số tự nhiên n để phân số rút gọn được
Dạng 5: Một số bài toán có lời văn
Dạng 6: Các bài toán về so sánh

Dạng 1. Tìm phân số thỏa mãn điều kiện cho trước

A. Trắc nghiệm (nếu có)

Câu 1. (HSG 7 huyện Tân An 2017 - 2018)

Giá trị của x trong biểu thức $(\sqrt{x} - 1)^2 = 25$ là:

- A.** $\frac{9}{4}; \frac{1}{4}$
 B. $-\frac{1}{4}; -\frac{9}{4}$
 C. $\frac{9}{4}; -\frac{1}{4}$
 D. $-\frac{9}{4}; \frac{1}{4}$

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Sầm Sơn, tỉnh Thanh Hoá: 2017 - 2018)

Tìm x biết $\left| \frac{2}{3}x + 1 \right| + \frac{1}{4} = 2$

Lời giải

$$\left| \frac{2}{3}x + 1 \right| + \frac{1}{4} = 2 \Rightarrow \left| \frac{2}{3}x + 1 \right| = \frac{7}{4} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}x + 1 = \frac{7}{4} \\ \frac{2}{3}x + 1 = -\frac{7}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}x = \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3}x = -\frac{11}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{8} \\ x = -\frac{33}{8} \end{cases}$$

Câu 2. (HSG 7 huyện Bồ Trách, tỉnh Quảng Bình: 2017 - 2018)

Tìm x, y biết: $\left(2x - \frac{1}{6} \right)^2 + |3y + 12| \leq 0$

Lời giải

Vì $\left(2x - \frac{1}{6} \right)^2 \geq 0$ mọi x; $|3y + 12| \geq 0$ mọi y

Do đó: $\left(2x - \frac{1}{6} \right)^2 + |3y + 12| \geq 0$ mọi x, y

Theo đề bài thì $\left(2x - \frac{1}{6} \right)^2 + |3y + 12| \leq 0 \Rightarrow \left(2x - \frac{1}{6} \right)^2 + |3y + 12| = 0$

Khi đó ta có: $2x - \frac{1}{6} = 0$ và $3y + 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{12}; y = -4$

Câu 3. (HSG 7: 2017 - 2018)

Tìm x biết:

a) $\left|x - \frac{1}{3}\right| + \frac{4}{5} = \left|(-3, 2) + \frac{2}{5}\right|$

b) $(x-7)^{x+1} - (x-7)^{x+11} = 0$

Lời giải

a) $\left|x - \frac{1}{3}\right| + \frac{4}{5} = \left|(-3, 2) + \frac{2}{5}\right| \Rightarrow \left|x - \frac{1}{3}\right| + \frac{4}{5} = \frac{14}{5} \Rightarrow \left|x - \frac{1}{3}\right| = 2$

$$x - \frac{1}{3} = 2 \Rightarrow x = \frac{7}{3}$$

Trường hợp 1:

$$x - \frac{1}{3} = -2 \Rightarrow x = -\frac{5}{3}$$

Trường hợp 2:

$$x \in \left\{\frac{7}{3}; -\frac{5}{3}\right\}$$

Vậy

b) $(x-7)^{x+1} - (x-7)^{x+11} = 0 \Rightarrow (x-7)^{x+1} [1 - (x-7)^{10}] = 0$

Suy ra $(x-7)^{x+1} = 0$ hoặc $1 - (x-7)^{10} = 0$

$\Rightarrow x-7 = 0$ hoặc $x-7 = 1$

$\Rightarrow x = 7$ hoặc $x = 8$

Câu 4. (HSG 7 cấp huyện thái Thụy, tỉnh Thái Bình 2017 - 2018)

$$\frac{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}{3^5 + 3^5 + 3^5} \cdot \frac{6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5}{2^5 + 2^5} = 2^x$$

Tìm x thỏa mãn:

Lời giải

$$\frac{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}{3^5 + 3^5 + 3^5} \cdot \frac{6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5}{2^5 + 2^5} = \frac{4 \cdot 4^5}{3 \cdot 3^5} \cdot \frac{6 \cdot 6^5}{2 \cdot 2^5} = \frac{4^6}{3^6} \cdot \frac{6^6}{2^6} = \left(\frac{6}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{4}{2}\right)^6 = 2^{12}$$

$\Rightarrow 2^x = 2^{12}$

$\Rightarrow x = 12$

Câu 5. (HSG 7 huyện Hoàng Hoá, tỉnh Thanh Hóa 2017 - 2018)

$$(2x-3)^2 = 16$$

a) Tìm x biết:

$$(2x-5)^{2012} + (3y+4)^{2014} \leq 0$$

b) Tìm x, y biết rằng:

$$a - b = 2(a+b) = a:b$$

c) Tìm hai số hữu tỷ a và b biết:

Lời giải

a) $(2x-3)^2 = 16 \Rightarrow 2x-3 = 4$ hoặc $2x-3 = -4 \Rightarrow x = 3,5$ hoặc $x = -0,5$

$$b) \begin{cases} (2x-5)^{2012} \geq 0 \\ (3y+4)^{2014} \geq 0 \Rightarrow (2x-5)^{2012} + (3y+4)^{2014} \geq 0 \end{cases}$$

Theo đề bài: $(2x-5)^{2012} + (3y+4)^{2014} \leq 0$

$$\Rightarrow (2x-5)^{2012} + (3y+4)^{2014} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (2x-5)^{2012} = 0 \\ (3y+4)^{2014} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\frac{1}{2} \\ y = -1\frac{1}{3} \end{cases}$$

c) Theo đề bài: $a-b=2(a+b) \Rightarrow a-b=2a+2b \Rightarrow -a=3b \Rightarrow a=-3b$

Mặt khác: $a-b=a:b \Rightarrow -3b-b=-3b:b \Rightarrow -4b=-3 \Rightarrow b=\frac{3}{4}$

$$\Rightarrow a=-3 \cdot \frac{3}{4} = -\frac{9}{4}$$

Câu 6. (HSG 7 huyện Tân An 2017 - 2018)

Cho đa thức $A=2x(x-3)-x(x-7)-5x+2015$. Tìm x để $A=2015$

Lời giải

Ta có $A=2x^2-6x-x^2+7x-5x+2015=x^2-4x+2015$

$$A=x^2-4x+2015$$

Theo đề bài:

$$A=2015 \Leftrightarrow x^2-4x+2015=2015 \Rightarrow x^2-4x=0 \Rightarrow x(x-4)=0 \Rightarrow x=0 \text{ hoặc } x=4$$

Câu 7. (HSG 7 huyện Năm Căn, huyện Dương Nam, NH: 2017 - 2018)

Tìm số nguyên x để tích hai phân số $\frac{6}{x+1}$ và $\frac{x-1}{3}$ là một số nguyên.

Lời giải

$$A = \frac{6}{x+1} \cdot \frac{x-1}{3} = \frac{2}{x+1} \cdot \frac{x-1}{1} = \frac{2(x-1)}{x+1} = \frac{2x-2}{x+1} = \frac{2(x+1)-4}{x+1} = 2 - \frac{4}{x+1}$$

Để A nhận giá trị nguyên thì $x+1 \in U(4) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$

Suy ra $x \in \{0; -2; 1; -3; 3; -5\}$

Câu 8. (HSG 7 huyện Bồ Trách, tỉnh Quảng Bình, NH: 2017 - 2018)

x , $|x+1|+|x+2|+|x+3|=4x$
Tìm x biết:

Lời giải

$$|x+1|+|x+2|+|x+3|=4x \quad (1)$$

Vì $VT \geq 0 \Rightarrow 4x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$, do đó: $|x+1|=x+1; |x+2|=x+2; |x+3|=x+3$ (2)

Từ (1) (2) $\Rightarrow x+1+x+2+x+3=4x$

$$\Rightarrow x=6$$

Câu 9. (HSG 7, trường THCS Trường Sa, NH: 2017 - 2018)

- a) Tìm x biết: $5 \cdot \left| \frac{3}{4} - \frac{2}{3}x \right| - 3,25 = -2 \left[(1,25)^2 - 2,5 \cdot 0,25 + (-0,25)^2 \right]$
- b) Tìm x, y biết: $|3 + y| + |2x + y| = 0$

Lời giải

a) Tính được $\left| \frac{3}{4} - \frac{2}{3}x \right| = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{3}{4}$ hoặc $x = \frac{3}{2}$

b) Vì $|3 + y| \geq 0, |2x + y| \geq 0 \Rightarrow |3 + y| + |2x + y| \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} |3 + y| = 0 \\ |2x + y| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -3 \end{cases}$$

Câu 10. (HSG 7 huyện Triệu Sơn, tỉnh Thanh Hoá, NH: 2017 - 2018)

- 1) Tìm x, y biết: $x(x - y) = \frac{3}{10}$ và $y(x - y) = -\frac{3}{50}$
- 2) Tìm x biết: $(x - 3)\left(x + \frac{1}{2}\right) > 0$

Lời giải

1) Trừ từng vế hai đẳng thức đã cho ta được:

$$x(x - y) - y(x - y) = \frac{3}{10} - \left(-\frac{3}{50}\right) \Rightarrow (x - y)(x - y) = \frac{9}{25} \Rightarrow (x - y)^2 = \left(\pm \frac{3}{5}\right)^2$$

Suy ra $x - y = \pm \frac{3}{5}$

Thay $x - y = \frac{3}{5}$ vào hai đẳng thức đã cho ta được $x = \frac{1}{2}; y = -\frac{1}{10}$

Thay $x - y = -\frac{3}{5}$ vào hai đẳng thức đã cho ta được $x = -\frac{1}{2}; y = \frac{1}{10}$

2) Từ $(x - 3)\left(x + \frac{1}{2}\right) > 0$ suy ra: $x - 3$ và $x + \frac{1}{2}$ cùng dấu

Để thấy $x - 3 < x + \frac{1}{2}$ nên ta có:

Nếu $x - 3$ và $x + \frac{1}{2}$ cùng dương $\Rightarrow x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$

Nếu $x - 3$ và $x + \frac{1}{2}$ cùng âm $\Leftrightarrow x + \frac{1}{2} < 0 \Rightarrow x < -\frac{1}{2}$

Vậy $x > 3$ hoặc $x < -\frac{1}{2}$

Câu 11. (HSG 7 huyện Sông Lô, NH: 2017 - 2018)

a) Tìm x biết: $\frac{1}{2016} : 2015x = -\frac{1}{2015}$

b) Tìm các giá trị nguyên của n để phân số $M = \frac{3n-1}{n-1}$ có giá trị là số nguyên

Lời giải

a) $\frac{1}{2016} : 2015x = -\frac{1}{2015} \Rightarrow \frac{1}{2016 \cdot 2015} x = \frac{-1}{2015} \Rightarrow x = -\frac{1}{2015} : \frac{1}{2016 \cdot 2015} \Rightarrow x = -2016$

b) $M = \frac{3n-1}{n-1}$ có giá trị là một số nguyên $\Rightarrow 3n-1 : (n-1)$
 $\Rightarrow 3(n-1) + 2 : (n-1) \Rightarrow 2 : (n-1) \Rightarrow (n-1) \in U(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$
 $\Rightarrow n \in \{0; 2; -1; 3\}$ thì M nguyên

Câu 12. (HSG 7, trường THCS Nguyễn Chí, huyện Đông Sơn, NH: 2017 - 2018)

Tìm x biết:

a) $-\frac{15}{12}x + \frac{3}{7} = \frac{6}{5}x - \frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{49}{99}$

Lời giải

a) $-\frac{15}{12}x + \frac{3}{7} = \frac{6}{5}x - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{6}{5}x + \frac{5}{4}x = \frac{3}{7} + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{49}{20}x = \frac{13}{14} \Rightarrow x = \frac{130}{343}$

b) $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{49}{99}$

$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} \right) = \frac{49}{99}$

$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2x+1} \right) = \frac{49}{99}$

$1 - \frac{1}{2x+1} = \frac{98}{99}$

$\frac{1}{2x+1} = \frac{1}{99}$

$2x+1 = 99$

$x = 49$

Câu 13. (HSG 7, huyện Cẩm Phả, tỉnh Quảng Ninh, NH: 2017 - 2018)

Tìm x, y biết: $\left(2x - \frac{1}{6} \right)^2 + |3y + 12| \leq 0$

Lời giải

Vì $\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 \geq 0$ với mọi x ; $|3y + 12| \geq 0$ với mọi y , do đó: $\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| \geq 0$ với mọi x, y

Theo đề bài thì $\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| \leq 0 \Rightarrow \left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| = 0$

Khi đó ta có: $2x - \frac{1}{6} = 0$ và $3y + 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{12}; y = -4$

Câu 14. (HSG 7, huyện Tam Đự, NH: 2017 - 2018)

Tìm x, y, z biết:

a) $2009 - |x - 2009| = x$

b) $(2x - 1)^{2008} + \left(y - \frac{2}{5}\right)^{2008} + |x + y - z| = 0$

Lời giải

a) $2009 - |x - 2009| = x \Rightarrow 2009 - x = |x - 2009|$

$\Rightarrow |x - 2009| = -(x - 2009) \Rightarrow x \leq 2009$

b) $x = \frac{1}{2}; y = \frac{2}{5}; z = \frac{9}{10}$

Câu 15. (HSG 7, trường THCS Tào Sơn, huyện Anh Sơn, NH: 2017 - 2018)

Tìm x biết:

a) $\left|x - \frac{1}{3}\right| + \frac{4}{5} = \left|(-3, 2) + \frac{2}{5}\right|$

b) Tìm x biết $2^{x+2} \cdot 3^{x+1} \cdot 5^x = 10800$

Lời giải

a) $\left|x - \frac{1}{3}\right| + \frac{4}{5} = \left|(-3, 2) + \frac{2}{5}\right| \Rightarrow \left|x - \frac{1}{3}\right| + \frac{4}{5} = \frac{14}{5} \Rightarrow \left|x - \frac{1}{3}\right| = 2$

$\Rightarrow x - \frac{1}{3} = 2$ hoặc $x - \frac{1}{3} = -2 \Rightarrow x = \frac{7}{3}$ hoặc $x = \frac{-5}{3}$

b) $2^{x+2} \cdot 3^{x+1} \cdot 5^x = 10800$

$\Rightarrow 2^x \cdot 4 \cdot 3^x \cdot 3 \cdot 5^x = 10800$

$$\Rightarrow 30^x = 10800 : 12 = 900$$

$$\Rightarrow 30^x = 30^2 \Rightarrow x = 2$$

Câu 16. (HSG 7, huyện Kim Sơn, NH: 2017 - 2018)

Tìm x biết:

a) $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{12} \cdot \dots \cdot \frac{30}{62} \cdot \frac{31}{64} = 2^x$

b) $\frac{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}{3^5 + 3^5 + 3^5} \cdot \frac{6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5}{2^5 + 2^5} = 2^x$

Lời giải

a) $\frac{1}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2}{2 \cdot 3} \cdot \frac{3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4}{2 \cdot 5} \cdot \frac{5}{2 \cdot 6} \cdot \dots \cdot \frac{30}{2 \cdot 31} \cdot \frac{31}{2^6} = 2^x$

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 30 \cdot 31}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 30 \cdot 31 \cdot 2^{30} \cdot 2^6} = 2^x \Rightarrow \frac{1}{2^{36}} = 2^x \Rightarrow x = -36$$

b) $\frac{4 \cdot 4^5}{3 \cdot 3^5} \cdot \frac{6 \cdot 6^5}{2 \cdot 2^5} = 2^x \Rightarrow \frac{4^6}{3^6} \cdot \frac{6^6}{2^6} = 2^x$

$$\Rightarrow \left(\frac{6}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{4}{2}\right)^6 = 2^x \Rightarrow 2^{12} = 2^x \Rightarrow x = 12$$

Câu 17. (HSG 7, huyện Hương Khê, NH: 2017 - 2018)

$$|x - 1| = \frac{2}{3}$$

Tìm x biết

Lời giải

$$|x - 1| = \frac{2}{3}$$

$$x - 1 = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{5}{3} \Rightarrow A = \frac{14}{27}$$

Trường hợp 1:

$$x - 1 = -\frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow A = -\frac{2}{9}$$

Trường hợp 2:

Câu 18. (HSG 7, trường Thực Hành Sài Gòn, THCS Tào Sơn (huyện Anh Sơn), NH: 2017 - 2018)

$$\frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6}$$

Số A được chia thành 3 số tỉ lệ theo $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6}$. Biết rằng tổng các bình phương của ba số đó bằng 24309. Tìm số A.

Lời giải

Gọi $a; b; c$ là ba số được chia ra từ số A

Theo đề bài ta có: $a : b : c = \frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6}$ (1) và $a^2 + b^2 + c^2 = 24309$ (1)

$$\Rightarrow \frac{a}{\frac{2}{5}} = \frac{b}{\frac{3}{4}} = \frac{c}{\frac{1}{6}} = k \Rightarrow a = \frac{2}{5}k; b = \frac{3}{4}k; c = \frac{k}{6}$$

(2)

Do đó từ (1) và (2) suy ra $k^2 \cdot \left(\frac{4}{25} + \frac{9}{16} + \frac{1}{36} \right) = 24309 \Rightarrow \begin{cases} k = 180 \\ k = -180 \end{cases}$

Với $k = 180 \Rightarrow a = 72; b = 135; c = 30 \Rightarrow A = 237$

Với $k = -180 \Rightarrow a = -72; b = -135; c = -30 \Rightarrow A = -237$

Câu 19. (HSG 7 cấp huyện Thạch Thành, tỉnh Thanh Hoá 2017 - 2018)

Tìm số hữu tỉ x , sao cho tổng của số đó với nghịch đảo của nó có giá trị là một số nguyên.

Lời giải

Gọi $x = \frac{m}{n}$ với $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, (m, n) = 1$, UCLN

$$x + \frac{1}{x} = \frac{m}{n} + \frac{n}{m} = \frac{m^2 + n^2}{mn} \quad (1)$$

Khi đó:

Để $x + \frac{1}{x}$ nguyên thì $m^2 + n^2 : mn$
 $\Rightarrow m^2 + n^2 : m \Rightarrow n^2 : m \Rightarrow n : m$

Mà UCLN $(m, n) = 1 \Rightarrow m = 1$ hoặc $m = -1$

*) Với $m = 1$

Từ (1), ta có: $x + \frac{1}{x} = \frac{1^2 + n^2}{1 \cdot n} = \frac{1 + n^2}{n}$ Để $x + \frac{1}{x}$ nguyên thì $1 + n^2 : n \Rightarrow 1 : n$ hay $n = \pm 1$

*) Với $m = -1$

Từ (1), ta có: $x + \frac{1}{x} = \frac{(-1)^2 + n^2}{(-1) \cdot n} = \frac{1 + n^2}{-n}$

Để $x + \frac{1}{x}$ nguyên thì $1 + n^2 : (-n) \Rightarrow 1 : (-n)$ hay $n = \pm 1$

Khi đó $x = \frac{m}{n}$ nên $x = \pm 1$

Câu 20. (HSG 7 huyện Thái Thụy, NH: 2017-2018)

Cho biểu thức $A = \frac{x^4 + 3}{x - 2}$

- Tìm điều kiện của x để giá trị của biểu thức A không xác định được
- Với những giá trị nào của x thì biểu thức A nhận giá trị là số âm
- Tìm tất cả các số nguyên x để biểu thức A nhận giá trị nguyên

Lời giải

a) Giá trị của biểu thức A không xác định khi $x = 2$

$$x^4 \geq 0 \quad \forall x \Rightarrow x^4 + 3 > 0 \quad \forall x$$

b) Nhận xét

Suy ra A nhận giá trị là số âm khi $x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$

$$A = \frac{x^4 + 3}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x^3 + 2x^2 + 4x + 8) + 19}{x - 2} = (x^3 + 2x^2 + 4x + 8) + \frac{19}{x - 2}$$

c)

$$A = \frac{x^4 + 3}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x^3 + 2x^2 + 4x + 8) + 19}{x - 2} = (x^3 + 2x^2 + 4x + 8) + \frac{19}{x - 2}$$

$$\text{Với } x \in \mathbb{Z} \text{ thì } x^3 + 2x^2 + 4x + 8 \in \mathbb{Z} \text{ nên để } A \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{19}{x - 2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 19 : (x - 2) \\ \Rightarrow x - 2 \in \{-1; 1; -19; 19\} \Rightarrow x \in \{1; 3; -17; 21\}$$

Kết hợp điều kiện ta được $x \in \{1; 3; -17; 21\}$

Dạng 2. Chứng minh phân số đã cho là tối giản (Không có)

Dạng 3. Tìm điều kiện để phân số là phân số tối giản (Không có)

Dạng 4. Tìm số tự nhiên n để phân số rút gọn được (Không có)

Dạng 5. Một số bài toán có lời văn

A. Trắc nghiệm (Không có)

B. Tự luận

Dạng 6. Các bài toán về so sánh

A. Trắc nghiệm (Không có)

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Hương Sơn, tỉnh Hà Tĩnh 2017 - 2018)

Cho ba số dương $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$

Lời giải

Vì $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$ nên:

$$(a-1)(b-1) \geq 0 \Rightarrow ab+1 \geq a+b \Rightarrow \frac{1}{ab+1} \leq \frac{1}{a+b} \Rightarrow \frac{c}{ab+1} \leq \frac{c}{a+b} \quad (1)$$

Tương tự: $\frac{a}{bc+1} \leq \frac{a}{b+c} \quad (2); \quad \frac{b}{ac+1} \leq \frac{b}{a+c} \quad (3)$

Do đó: $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \quad (4)$

Mà $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{a+b+c} + \frac{2c}{a+b+c} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2 \quad (5)$

Từ (4) và (5) suy ra: $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$ (đpcm)

Câu 2. (HSG 7 trường THCS Hương - Điền – Nam Hương năm 2017-2018)

Chứng minh: $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2005^2} < 1$

Lời giải

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{1.2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \quad \dots; \quad \frac{1}{2005^2} < \frac{1}{2004.2005} = \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2005^2} < \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2004} - \frac{1}{2005}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2005^2} < 1 - \frac{1}{2005}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2005^2} < 1 \quad (\text{đpcm})$$

Câu 3. (HSG 7 huyện Năm Căn, huyện Dương Nam Căn NH: 2017-2018)

Cho các số $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{15}$. Chứng minh rằng: $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{15}}{a_5 + a_{10} + a_{15}} < 5$

Lời giải

Ta có: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 < 5a_5$

$$a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} < 5a_{10}$$

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} < 5a_{15}$$

Suy ra $a_1 + a_2 + \dots + a_{15} < 5(a_5 + a_{10} + a_{15})$

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{15}}{a_5 + a_{10} + a_{15}} < 5$$

Vậy $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{15}}{a_5 + a_{10} + a_{15}} < 5$

Câu 5. (HSG 7, trường THCS Nguyễn Chí, huyện Đông Sơn, NH: 2017-2018)

Cho $B = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \frac{24}{25} + \dots + \frac{2499}{2500}$. Chứng tỏ B không phải là số nguyên.

Lời giải

Ta đặt $M = \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{50^2} \right) < \left(\frac{1}{2.1} + \frac{1}{3.2} + \frac{1}{4.3} + \frac{1}{5.4} + \dots + \frac{1}{50.49} \right)$

$$M < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{49} - \frac{1}{50} = 1 - \frac{1}{50} < 1$$

Ta lại có:

$$M > \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{50.51} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{50} - \frac{1}{51}$$

$$\Rightarrow M > \frac{1}{2} - \frac{1}{51} = \frac{49}{101} > 0$$

Từ đó suy ra $0 < M < 1 \Rightarrow B = 49 - M$ không phải là một số nguyên.

Câu 6. (HSG 7, trường THCS Tào Sơn, huyện Anh Sơn, NH: 2017-2018)

Chứng minh rằng: $A = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{19}{9^2 \cdot 10^2} < 1$

Lời giải

Ta có:

$$A = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{19}{9^2 \cdot 10^2} = \frac{2^2 - 1^2}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{3^2 - 2^2}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{4^2 - 3^2}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{10^2 - 9^2}{9^2 \cdot 10^2}$$

$$A = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{10^2} = 1 - \frac{1}{10^2} < 1$$

Câu 7. (HSG 7, trường THCS Trường Sa, NH: 2017-2018)

Biết $x \in \mathbb{Q}$ và $0 < x < 1$. Chứng minh $x^n < x$ với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$;

Lời giải

Xét $x^n - x = x(x^{n-1} - 1)$

Vì $0 < x < 1, n \geq 2 \Rightarrow x^{n-1} < 1 \Rightarrow x^{n-1} - 1 < 0$ mà $x > 0 \Rightarrow x^n - x < 0$ nên $x^n < x$ (đpcm)

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>