Tìm và trình bày một lời giải như thế nào?

Trần Nam Dũng
(tường thuật trực tiếp từ diễn đàn `www.mathscope.org`)*

Xuất phát từ một đề nghị không chính thức của bạn Khoa (`nbkschool`): "Có lẽ phải mở một khóa "How to write solution" quá!".

Đề nghị này xuất phát từ vấn đề nóng hổi là: Trong các kỳ thi VMO, VTST, Olympic 30/4 có nhiều bạn có điểm số không như dự đoán.

Bỏ qua vấn đề chấm sai, ta hãy thử tìm nguyên nhân và giải pháp khắc phục. Tại sao các bạn lại được ít điểm hơn trông đợi? Làm sao có thể trình bày bài toán một cách chắc chắn nhất mà vẫn nhanh? Khi bàn đến vấn đề trình bày lời giải, dĩ nhiên là ta không thể bỏ qua vấn đề tìm kiếm lời giải như thế nào, có lời giải thì mới trình bày được chứ.

Do vậy, chủ đề mà tôi muốn đưa ra là "Tìm và trình bày một lời giải như thế nào?". Thực ra, hai vấn đề này có mối liên hệ trực tiếp với nhau. Nếu ta hiểu rõ quá trình đi đến lời giải thì phần trình bày cũng dễ hiểu, chặt chẽ và súc tích. Đây là một chủ đề lớn, có rất nhiều vấn đề cần thảo luận. Dưới đây tôi đưa ra một số câu hỏi:

1. Tiếp cận một bài toán mới như thế nào?
2. Đâu là chiến thuật tối ưu trong một ngày thi (với 5 bài toán, 3 bài toán)?
3. Trình bày một lời giải như thế nào?
4. Khi không giải được một bài toán, làm thế nào để vẫn kiếm được điểm của bài này?

Khi tôi đặt vấn đề này, bạn `tqdung` có góp ý: *Cuốn "Sáng tạo Toán học" của Polya. Em thấy nó ghi rất rõ về việc suy nghĩ, làm bài như thế nào đấy.*

Tôi công nhận là *"Bộ ba cuốn sách: "Giải bài toán như thế nào?", "Toán học và những suy luận có lý" và "Sáng tạo Toán học" của Polya là một bộ sách hay, tôi rất khuyên các bạn trẻ yêu toán đọc và suy ngẫm, các thầy cô giáo trẻ cũng nên nghiên cứu bộ sách này." (Xem phụ lục 1).*

Tôi bắt đầu bài viết này bằng việc trích dẫn lời khuyên của A. Kanel-Belov và A. K. Kovaldzi dành cho các bạn thi Olympic (đây là hai tác giả rất nổi tiếng của Nga, có nhiều bài toán được chọn làm đề IMO).

1. Hãy đọc đề bài tất cả các bài toán và xác định xem các bạn sẽ giải các bài toán theo trình tự nào. Chú ý là thông thường thì các bài toán được sắp xếp theo thứ tự khó dần.
2. Nếu như bài toán, theo ý bạn, có thể theo nhiều nghĩa khác nhau, thì đừng chọn cách dễ nhất cho bạn mà tốt nhất hãy hỏi giám thị.

*Cảm ơn các thành viên Mathscope.org đã cùng tôi thực hiện chuyên đề này. Các bạn luôn là nguồn cảm hứng bất tận để tôi làm việc.

3. Nếu bài toán được giải một cách quá dễ dàng thì rất đáng ngờ. Có thể bạn hiểu không đúng đề bài hoặc đã sai ở đâu đó.

4. Nếu bạn không giải được bài toán, hãy thử làm đơn giản nó (xét các số nhỏ hơn, xét các trường hợp đặc biệt . . .) hoặc giải bằng phản chứng, hay thay các số bằng các ký hiệu . . .

5. Nếu như không rõ là một khẳng định có đúng không, hãy thử vừa chứng minh, vừa phủ định nó.

6. Đừng dính vào một bài toán: thỉnh thoảng phải rời nó ra và đánh giá tình hình. Nếu có một chút thành tựu thì có thể làm tiếp, còn nếu ý tưởng cứ lòng vòng thì tốt nhất là hãy bỏ bài toán đó (ít nhất là một thời gian).

7. Nếu bạn thấy mệt, hãy nghỉ một vài phút (có thể là ngắm trời mây hoặc đơn giản là . . . nghỉ).

8. Nếu giải được bài toán, hãy lập tức trình bày lời giải. Điều này giúp bạn kiểm tra tính đúng đắn của lời giải và giúp bạn tập trung hơn cho các bài toán khác.

9. Mỗi một bước của lời giải đều phải được trình bày, ngay cả khi nó là hiển nhiên. Sẽ rất tiện lợi nếu viết lời giải dưới dạng các bổ đề hoặc nhận xét. Điều này giúp người chấm dễ đọc và dễ cho điểm hơn.

10. Trước khi nộp bài, hãy đọc lại bài làm bằng con mắt của người chấm – họ có hiểu được lời giải của bạn không?

Đây là các lời khuyên hết sức bổ ích. Tôi sẽ lần lượt minh họa các ý trên bằng các ví dụ.

Sau khi gửi lời khuyên của Koval-Belov và Kovaldzi lên, chủ đề bắt đầu trở nên sôi động và một số câu hỏi đã được đặt ra:

`hocsinh`: *Thế lỗi cẩu thả có cách nào khắc phục không hả thầy?*

`nbkschool`: *Thế trong khi thi có nên trình bày ra nháp trước không? Và có nên ghi vào bài thi khi chưa tìm ra lời giải hoàn toàn? Thời gian nào là thích hợp để "rà soát" lại bài thi của mình? Mong các thầy và các bạn giải đáp những câu hỏi này.*

`Phuonglvt`: *Em thường nghe thầy giáo của mình nói về những điều này. Một học sinh giỏi Toán không chỉ cần có tư duy mà còn cần cả kỹ năng.*

Tôi trả lời: *Lỗi cẩu thả chỉ có cách khắc phục là . . . cẩn thận. Đầu tiên, hãy học cách cẩn thận bằng cách sử dụng bút mực hoặc bút bi ngòi nhỏ, mực ra đều để viết đẹp, sau đó sử dụng thước để viết phân số, căn thức. Cách đây vài năm, tôi có dạy một học sinh, cậu ấy có tật nhanh nhẩu đoảng, rất hay sai vặt. Tôi bèn ra quy định, mỗi lần cậu ấy sai phải nộp phạt* $10,000$ *VND, còn nếu cả buổi học cậu không sai thì được* $50,000$ *VND. Bây giờ cậu ấy không những bớt ẩu mà viết chữ đẹp, cẩn thận, không còn sai linh tinh nữa, ở lớp (Đại học) còn được nêu gương.*

Nói chung nếu làm nháp cẩn thận thì cũng không cần phải trình bày bài trước ra nháp (thời gian cũng không có nhiều!), chỉ cần viết ra những bước chính của lời giải. Nếu chưa có lời giải hoàn toàn thì vẫn nên viết ra những kết quả mình đã đạt được (phần này sẽ bàn sau – làm thế nào để kiếm điểm ở những bài chưa có lời giải hoàn toàn). Chúng ta nên làm bài nào hoàn chỉnh bài đó và kiểm tra luôn sau khi làm xong. Nếu các bài đã được trình bày cẩn thận thì thời gian để rà soát lại chỉ cần 5 – 10 phút.

Kỹ năng dĩ nhiên là cũng rất quan trọng rồi. Tuy nhiên, trong các kỳ thi Olympic thì người ta chú trọng đến tư duy nhiều hơn. Vì vậy những lời giải hình học bằng phương pháp tọa độ thường bị "thị phi", các lời giải quá dài dòng, vét cạn hoặc khai triển cũng vậy. Nếu đã chọn hướng đi này cần phải trình bày hết sức chặt chẽ, chính xác và sáng sủa. Sai một cái là bị gạch bỏ liền. Một vấn đề khác là kỹ năng trình bày. Cái này thì không thể thiếu được. Và bạn có kỹ năng trình bày tốt cũng chứng tỏ là bạn có tư duy tốt.

Bạn `99` có góp ý: *Nói chung bây giờ học sinh và sinh viên viết lời giải một bài toán hơi dở (nói chung thôi). Nguyên nhân thì có lẽ là nguyên nhân có hệ thống từ cấp 1 cho đến cấp Đại học.*

Các lời khuyên mà thầy Dũng trích dẫn ở trên rất có ích. `99` *xin phép góp thêm kinh nghiệm cá nhân thế này: Để trình bày bài cho sáng sủa thì nên trình bày theo kiểu diễn dịch, nghĩa là phát biểu ý định chứng minh trước. Sau đó trình bày chứng minh ý đó.*

Ví dụ: Ta chứng minh tam giác ABC là tam giác đều. Thật vậy, ...

Trình bày bài theo kiểu quy nạp thì cần phải khéo léo, ai vụng thì nên tránh.

Ngoài ra, cần phải học tốt lô-gíc học và ngữ pháp tiếng Việt cho tốt, chịu khó sử dụng các cặp liên từ cho đúng, hạn chế tối đa dùng các dấu "⇒". Giám khảo nói chung không thoải mái lắm với những cái dấu đó.

Có một cách nữa để luyện viết cho tốt đó là đi học ngoại ngữ, cụ thể là học viết những ngôn ngữ có cấu trúc ngữ pháp chặt (như Anh, Pháp, ... chẳng hạn). Học những món đó sẽ giúp bản thân mình viết bài rất tốt.

Tôi rất đồng ý với ý kiến của `99`, đặc biệt là ý về ngoại ngữ. Riêng vấn đề quy nạp thì tôi nghĩ không thể tránh được. Học Toán mà không có quy nạp thì khác nào chặt đi một cánh tay. Do đó nếu vụng thì phải học để hết vụng thôi.

Tôi bắt đầu minh họa ý thứ nhất trong lời khuyên của Kanel-Belov và Kovaldzi bằng cách phân tích đề thi VMO 2010.

Đề thi học sinh giỏi quốc gia môn Toán năm 2010

Ngày thi 11/3/2010. Thời gian làm bài: 180 phút.

Bài 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^4 - y^4 = 240 \\ x^3 - 2y^3 = 3(x^2 - 4y^2) - 4(x - 8y) \end{cases}.$$

Bài 2. Cho dãy số (a_n) xác định bởi

$$a_1 = 5, \quad a_n = \sqrt[n]{a_{n-1}^{n-1} + 2^{n-1} + 2 \cdot 3^{n-1}} \quad \text{với mọi } n = 2,\ 3,\ 4,\ \dots$$

(a) Tìm công thức tổng quát tính a_n.

(b) Chứng minh dãy (a_n) giảm.

Bài 3. Cho đường tròn (O). Hai điểm B, C cố định trên đường tròn, BC không phải đường kính. Lấy A là một điểm trên đường tròn không trùng với B, C. AD, AE là các đường phân giác trong và ngoài của góc BAC. I là trung điểm của DE.Qua trực tâm tam giác ABC kẻ đường thẳng vuông góc với AI cắt AD, AE tại M, N.

(a) Chứng minh rằng MN luôn đi qua một điểm cố định.

(b) Tìm vị trí điểm A sao cho diện tích tam giác AMN lớn nhất.

Bài 4. Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương, phương trình $x^2 + 15y^2 = 4^n$ có ít nhất n nghiệm tự nhiên.

Bài 5. Cho bảng 3×3 và n là một số nguyên dương cho trước. Tìm số các cách tô màu không như nhau khi tô mỗi ô bởi một trong n màu. (Hai cách tô màu gọi là như nhau nếu một cách nhận được từ cách kia bởi một phép quay quanh tâm.)

Nếu là cá nhân tôi, tôi sẽ sắp xếp thứ tự làm bài của mình như sau:

(1) Bài 2. Bài này hướng đi quá rõ ràng. Trình bày cũng đơn giản. Ở dưới tôi sẽ phân tích rõ các hướng giải quyết và cách trình bày.

(2) Bài 1. Bài này đặt ở vị trí bài 1, chắc là không khó.

(3) Bài 3. Hình học, dù không phải là sở trường nhưng chắc cũng không khó.

(4) Bài 4. Bài này thấy quen quen, vì ít nhất thì tôi cũng biết cái hằng đẳng thức Fibonacci: $(x^2 + 15y^2)(a^2 + 15b^2) = (xa + 15yb)^2 + 15(xb - ya)^2$.

(5) Bài 5. Bài này chắc để làm vào cuối cùng. Tổ hợp thường là khó mà.

Phân tích lời giải bài 2. Lũy thừa n hai vế đẳng thức truy hồi, ta được

$$a_n^n = a_{n-1}^{n-1} + 2^{n-1} + 3 \cdot 2^{n-1}.$$

Từ đây dễ dàng suy ra $a_n^n = 2^n + 3^n$, hay $a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$.

Bây giờ ta chứng minh (a_n) là dãy số giảm. Có ba hướng suy nghĩ chính.

Hướng 1. Chứng minh $a_n^{n+1} > a_{n+1}^{n+1}$ (khử căn một vế), tức là $a_n(2^n + 3^n) > 2^{n+1} + 3^{n+1}$. Điều này tương đương với $(a_n - 2)2^n + (a_n - 3)3^n > 0$. Như vậy chỉ cần chứng minh $a_n > 3$ là xong, mà điều này thì hiển nhiên!

Hướng 2. Chứng minh $a_n^{n(n+1)} > a_{n+1}^{(n+1)n}$ (khử căn cả hai vế). Trong trường hợp này, ta cần chứng minh $(2^n + 3^n)^{n+1} > (2^{n+1} + 3^{n+1})^n$. Khi khai triển ra, chú ý vế trái có $n + 2$ số hạng, còn vế phải có $n + 1$ số hạng, một ý tưởng là chứng minh bằng cách bắt cặp. Nếu làm theo cách này:

1. Phải bắt cặp cho đúng.
2. Trình bày chặt chẽ.

Trong thực tế nhiều bạn làm theo cách này đã bị trừ điểm hoặc thậm chí không cho điểm vì

1. Bắt cặp sai (dẫn đến các bất đẳng thức trung gian không đúng).
2. Trình bày ẩu, sơ sài.
3. Tính toán nhầm.

Hướng 3. Khảo sát hàm số $f(x) = (2^x + 3^x)^{1/x}$ với $x > 0$ và chứng minh hàm số này giảm. Để chứng minh điều này, ta xét hàm $y = \ln f(x) = \dfrac{\ln(2^x + 3^x)}{x}$. Tính đạo hàm y' ta được

$$y' = \frac{2^x[\ln 2^x - \ln(2^x + 3^x)] + 3^x[\ln 3^x - \ln(2^x + 3^x)]}{(2^x + 3^x)x^2} < 0,$$

do $\ln 2^x < \ln(2^x + 3^x)$ và $\ln 3^x < \ln(2^x + 3^x)$.

Vậy y là hàm giảm suy ra $f(x)$ là hàm giảm, suy ra $f(n) > f(n+1)$, tức là $a_n > a_{n+1}$ hay dãy (a_n) giảm (đpcm).

Tôi tiếp tục phân tích lời giải của mình cho bài toán 3 (bài 1 sau một hồi làm thử thấy chưa tiến triển gì nhiều, chỉ mới đặt $x = 2u$, $y = 2v$ để rút gọn bớt các hằng số và tìm được nghiệm $u = 2$, $v = 1$).

Đầu tiên là tôi vẽ hình. Tôi xét trường hợp A nằm trên cung lớn BC và lệch về phía C. Tôi đặt $\angle BAC = \alpha$. Gọi H là trực tâm tam giác ABC.

Tôi vẽ hình và còn nhớ được mấy điều sau:

1. Về D, E, I. Tam giác DAE vuông tại A và I là trung điểm cạnh huyền.
2. $AH = 2R\cos\alpha$ không đổi.

Tôi bắt đầu đi chứng minh MN, tức là đường thẳng (d) qua H vuông góc với AI đi qua một điểm cố định. Lý luận đối xứng cho tôi thấy ngay rằng điểm cố định phải nằm trên trung trực của BC. Vì thế tôi gọi X là giao điểm của (d) và trung trực của BC, và tôi muốn chứng minh rằng X cố định. Trên trung trực của BC còn có một điểm đặc biệt nữa là tâm O đường tròn ngoại tiếp. Muốn chứng minh X cố định, tôi cần chứng minh OX không đổi. Bây giờ hình vẽ chính xác của tôi cho phép tôi dự đoán là OA vuông góc AI.

Như thế, tôi đã quy bài toán về việc chứng minh AI vuông góc với OA. Với bài này thì có nhiều cách giải.

Cách 1. IA vuông góc với $OA \Leftrightarrow IA^2 = IC \cdot IB \Leftrightarrow ID^2 = IB \cdot IC$ (do $IA = ID$). Cái này là hệ thức Newton của hàng điểm điều hòa $(BCDE)$. (Hoặc sử dụng đẳng thức $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{EB}{EC}$ (tính chất phân giác) $\Leftrightarrow \dfrac{IB - ID}{ID - IC} = \dfrac{IB + ID}{IC + ID} \Leftrightarrow ID^2 = IB \cdot IC$ (chú ý $ID = IE$) – đây chính là cách chứng minh hệ thức Newton).

Cách 2. Dùng góc: Ta có $\angle AOC = 2\angle B$, suy ra $\angle OAC = 90^\circ - \angle B$. Từ đó

$$\angle OAD = 90^\circ - \angle B - \frac{1}{2}\angle A.$$

Mặt khác $\angle DAI = \angle IDA = \angle CDA = 180^\circ - \angle C - \dfrac{1}{2}\angle A$. Suy ra

$$\angle OAD + \angle DAI = \left(90^\circ - \angle B - \frac{1}{2}\angle A\right) + \left(180^\circ - \angle C - \frac{1}{2}\angle A\right) = 90^\circ,$$

tức là $\angle OAD = 90^\circ$ (đpcm).

Bây giờ sang câu (b). Dùng góc ta thấy ngay H là trung điểm của MN (cụ thể là các tam giác HAM, HAN cân). Mà ta lại có $HA = 2R\cos\alpha$ không đổi, nên $MN = 4R\cos\alpha$. Suy ra ngay là diện tích tam giác không lớn hơn $\dfrac{MN \cdot AH}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi AH vuông góc với MN. Vì $MN \parallel OA$ (chứng minh trên) nên điều này tương đương với AH vuông góc OA. Điều này xảy ra khi A trùng với các giao điểm của đường thẳng qua O song song với BC và đường tròn (O).

Vậy là xong. Với bài toán này, chú ý đến các vị trí tương đối của A và nên đặt α là độ lớn của góc chắn cung nhỏ BC. Nếu trong lý luận dùng góc A và đại lượng $\cos A$ có thể bị bắt bẻ (khi A tù thì $2R\cos A < 0$).

Trong mọi trường hợp, tôi đã nói rõ ở trên là xét trường hợp A nằm trên cung nhỏ BC và lệch về phía A. Hình vẽ minh họa được vẽ đúng cho trường hợp này.

Tôi tiếp tục trình bày cách tìm tòi và trình bày lời giải cho bài 4 của VMO (Trong quá trình "thi", sau khi đã hoàn tất bài 2, 3, tôi thấy bài 1 vẫn không có gì tiến triển nên chuyển sang bài 4).

Bài này yêu cầu chứng minh phương trình $x^2 + 15y^2 = 4^n$ có ít nhất n nghiệm tự nhiên.

Với $n = 1$, ta tìm được nghiệm $(2,\ 0)$, với $n = 2$, có hai nghiệm $(4,\ 0)$ và $(1,\ 1)$.

Ta gọi phương trình $x^2 + 15y^2 = 4^n$ là phương trình PT(n). Dễ thấy nếu $(x,\ y)$ là nghiệm của phương trình PT(n) thì $(2x,\ 2y)$ là nghiệm của phương trình PT$(n+1)$.

Vì vậy, ta nghĩ đến ý tưởng chứng minh quy nạp: Nếu phương trình PT(n) có n nghiệm $(x_1,\ y_1), (x_2,\ y_2), \ldots, (x_n,\ y_n)$ thì PT$(n+1)$ có ít nhất là n nghiệm $(2x_1,\ 2y_1), (2x_2,\ 2y_2), \ldots, (2x_n,\ 2y_n)$. Như vậy ta chỉ cần tìm thêm một nghiệm nữa của PT$(n+1)$. Vì các nghiệm được xây dựng bằng quy nạp ở trên đều có x, y chẵn nên một cách tự nhiên, ta đi tìm một nghiệm của PT$(n+1)$ có x, y lẻ. Bài toán ban đầu đã được đưa về một bài toán mới:

$(*)$ *Chứng minh rằng với mọi $n > 1$, phương trình $x^2 + 15y^2 = 4^n$ có ít nhất một nghiệm lẻ.*

Bài toán này không tương đương với bài toán ban đầu, nhưng nếu chứng minh được nó thì bài toán ban đầu được giải quyết bằng lý luận quy nạp như nói ở trên.

Vấn đề còn lại là làm thế nào để giải quyết bài toán $(*)$?

(Cũng chú ý rằng, theo đáp án, nếu trình bày được đến đây, nêu ra mệnh đề bài toán ban đầu sẽ được giải quyết xong nếu ta chứng minh được bổ đề $(*)$ thì thí sinh được 1 điểm).

Cách 1. Tôi nhớ ngay đến đẳng thức Fibonacci:

$$(x^2 + 15y^2)(a^2 + 15b^2) = (xa + 15yb)^2 + 15(xb - ya)^2 = (xa - 15yb)^2 + 15(xb + ya)^2.$$

Từ đây nếu chọn $a = b = 1$ thì ta có mệnh đề sau: *Nếu $(x,\ y)$ là nghiệm của* PT(n) *thì* $(x + 15y,\ |x - y|), (|x - 15y|,\ |x + y|)$ *là nghiệm tự nhiên của* PT$(n+2)$.

Mệnh đề này có hai điểm yếu:

1. $n \to n + 2$.

2. Do $x,\ y$ luôn cùng tính chẵn lẻ nên nghiệm sinh ra bằng cách này luôn chẵn $\rightarrow$ Không giải quyết được vấn đề.

Phải làm thế nào bây giờ? Suy nghĩ một chút, ta thấy hai điểm yếu này hợp lại thành một điểm mạnh. Do $x,\ y$ cùng tính chẵn lẻ nên nếu ta chọn $a = b = \dfrac{1}{2}$ thì ta được: *Nếu* $(x,\ y)$ *là nghiệm của* PT(n) *thì* $\left(\dfrac{x + 15y}{2},\ \left|\dfrac{x - y}{2}\right|\right)$, $\left(\left|\dfrac{x - 15y}{2}\right|,\ \dfrac{x + y}{2}\right)$ *là nghiệm tự nhiên của* PT$(n + 1)$.

Như vậy vấn đề 1 được giải quyết. Chỉ còn vấn đề 2. Tức là liệu nghiệm sinh ra bằng cách này có thể là nghiệm lẻ hay không?

Ta nhận thấy rằng vì $\dfrac{x + y}{2} + \dfrac{x - y}{2} = x$ lẻ nên trong hai số $\dfrac{x + y}{2}$ và $\dfrac{x - y}{2}$ có một số lẻ (và một số chẵn), do đó trong hai nghiệm nói trên có một nghiệm lẻ (Nếu $(x,\ y)$ là nghiệm thì $x,\ y$ cùng tính chẵn lẻ, do đó khi ta nói có nghiệm lẻ tức là cả x và y cùng lẻ).

Bây giờ ta có thể hình dung lại toàn bộ lời giải để trình bày lại cho gọn gàng, súc tích.

Cách 2. Cách này dành cho các bạn không biết hoặc không nhớ ra hằng đẳng thức Fibonacci. Biết ít thì phải tốn thời gian hơn. Bằng phương pháp thử và sai, ta tìm được các cặp nghiệm $(x,\ y)$ lẻ ứng với $n = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots$ như sau $(1,\ 1)$, $(7,\ 1)$, $(11,\ 3)$, $(17,\ 7)$, $(61,\ 5)$, ... Ở đây cần công sức lao động và óc nhận xét một chút. Công sức lao động đã bỏ ra để tính nghiệm như trên. Bây giờ là cần óc nhận xét.

Để ý một chút ta sẽ thấy rằng các nghiệm y ứng với $n = 3,\ 4,\ 5,\ 6$ được tính từ các nghiệm $(x,\ y)$ của phương trình trước theo công thức sau:

$$1 = \frac{1 + 1}{2}, \quad 3 = \frac{7 - 1}{2}, \quad 7 = \frac{11 + 3}{2}, \quad 5 = \frac{17 - 7}{2}.$$

Ô, thật thú vị! Ta thử kiểm tra với số tiếp theo, nhưng lần này là kiểm tra xuôi. Ta sẽ kiểm tra rằng phương trình $x^2 + 15y^2 = 4^7$ sẽ có nghiệm $y = \dfrac{61 + 5}{2} = 33$. Thậy vậy $4^7 - 15 \cdot 33^2 = 49 = 7^2$ và ta có nghiệm $(7,\ 33)$.

Sau khi đã dự đoán được nghiệm $y_{n+1} = \dfrac{x_n \pm y_n}{2}$, ta tính

$$x_{n+1}^2 = 4^{n+1} = 4(x_n^2 + 15y_n^2) - 15\left(\frac{x_n \pm y_n}{2}\right)^2 = \left(\frac{x_n \mp 15y_n}{2}\right)^2.$$

Từ đó cũng dẫn đến lời giải tương tự như ở trên.

Tóm lại ở bài này:

1. Có thể dễ dàng lấy được 1 điểm nếu trình bày sáng sủa ý đầu.
2. Nếu nhớ hằng đẳng thức Fibonacci thì có thể tìm được lời giải hoàn chỉnh khá nhanh.
3. Nếu không, nếu còn thời gian và có óc nhật xét tốt, kiên trì tính toán thì vẫn có thể làm được.

Tôi sẽ tiếp tục phân tích con đường đi đến cách giải cho các bài 1 và 5 trong các post tiếp theo. Tuy nhiên, nói về một bài toán đã biết lời giải thì cũng khó và dễ bị đánh giá là "đã biết lời giải rồi thì nói thế nào chẳng được". Và cũng để tạo hứng thú cho các bạn, tôi post lên đây đề thi USAMO vừa qua để chúng ta cùng giải và phân tích.

Đề thi USAMO 2010

Ngày thi thứ nhất 27/4/2010. Thời gian làm bài 4:30.

Bài 1. Cho $AXYZB$ là ngũ giác lồi nội tiếp trong nửa đường tròn đường kính AB. Gọi P, Q, R, S là chân đường vuông góc hạ từ Y xuống AX, BX, AZ, BZ tương ứng. Chứng minh rằng góc nhọn hợp bởi PQ và RS bằng một nửa $\angle XOZ$ trong đó O là trung điểm của AB.

Bài 2. Có n học sinh xếp thành một hàng dọc. Các học sinh này có chiều cao $h_1 < h_2 < \cdots < h_n$. Nếu học sinh có chiều cao h_k đứng ngay sau học sinh có chiều cao h_{k-2} hoặc thấp hơn thì cho phép hai học sinh này đổi chỗ. Chứng minh rằng không thể thực hiện nhiều hơn C_n^3 phép đổi chỗ như vậy cho đến khi không thể thực hiện một phép đổi chỗ như vậy nữa.

Bài 3. Cho 2010 số dương $a_1, a_2, \ldots, a_{2010}$ thỏa mãn điều kiện $a_i a_j \le i + j$ với mọi chỉ số $i \ne j$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của $a_1 a_2 \cdots a_{2010}$.

Ngày thi thứ nhất 28/4/2010. Thời gian làm bài 4:30.

Bài 4. Cho tam giác ABC có $\angle A = 90°$. Các điểm D và E nằm trên các cạnh AC và AB tương ứng sao cho $\angle ADB = \angle DBC$. Các đoạn BD và CE cắt nhau tại I. Hỏi có thể xảy ra tình huống các đoạn AB, BC, BI, CI, DI, EI đều có độ dài nguyên?

Bài 5. Cho $q = \dfrac{3p-5}{2}$ trong đó p là một số nguyên tố lẻ và đặt

$$S_q = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{q(q+1)(q+2)}.$$

Chứng minh rằng nếu $\dfrac{1}{p} - 2S_q = \dfrac{m}{n}$ với m, n nguyên thì $m - n$ chia hết cho p.

Bài 6. Trên bảng có 68 cặp số nguyên khác 0. Giả sử rằng với mọi số nguyên dương k, nhiều nhất một trong hai cặp $(k,\ k)$ và $(-k,\ k)$ được có trên bảng. Một học sinh xóa một số số trong 136 số với điều kiện là không có hai số nào được xóa có tổng bằng 0. Với mỗi cặp số trong đó có ít nhất một số bị xóa, học sinh đó được 1 điểm. Hãy tìm số điểm N lớn nhất mà học sinh đó có thể có bất chấp 68 cặp số trên bảng là những cặp số nào.

Sau đây là bài tập dành cho các bạn:

1. Hãy lập ra chiến thuật làm bài cho từng ngày.

2. Hãy cố gắng giải và trình bày đầy đủ các bài mà bạn có lời giải hoành chỉnh.

3. Hãy thử kiếm điểm ở những bài toán khác.

Chú ý, thời gian làm bài mỗi ngày là 4 giờ 30 phút.

Tôi bắt đầu phân tích chiến thuật và tìm lời giải cho các bài ngày 1 của USAMO.

Bài 1 rõ ràng là dễ nhất. Dù sở trường của tôi không phải là hình nhưng vẫn cảm thấy như vậy. Chứng minh góc với một đống góc vuông như vậy chắc chỉ dùng mấy cái tứ giác nội tiếp là ra.

Trong hai bài 2 và 3 tôi thấy bài 3 vẫn dễ chịu hơn. Ít ra là đề bài rất rõ ràng. Vì thế tôi sẽ làm bài 3 trước.

Như vậy chiến thuật của tôi là 1 – 3 – 2. Bây giờ tôi bắt tay vào tìm lời giải bài 1.

Đầu tiên tôi vẽ cái hình to, rõ, đẹp. Để không đưa ra một trường hợp đặc biệt, tôi chọn X, Y, Z không đối xứng. Nối PQ, RS cắt nhau tại I, tôi thấy I nằm trên AB và hơn thế nữa YI vuông góc AB. Lạ ghê! Nhưng nhìn kỹ lại cấu hình thì thấy điều này là hiển nhiên vì nếu I là hình chiếu của I lên AB thì P, Q, I là đường thẳng Simson của tam giác ABX còn S, R, I là đường thẳng Simson của tam giác ABZ.

Vậy thì ngon lành quá rồi còn gì! Nhìn kỹ một chút ta có ngay: Trong tứ giác nội tiếp $YPAI$ thì

$$\angle YIP = \angle YAP = \frac{1}{2}\text{sđ}(XY).$$

Tương tự trong tứ giác nội tiếp $YSBI$ ta có $\angle YIS = \angle YBS = \frac{1}{2}\text{sđ}(YZ)$. Cộng lại ta có điều phải chứng minh.

Phù, mất có 15 phút để tìm ra lời giải. Cộng thêm 15 phút nữa để trình bày cho ngon lành. Vậy là tiết kiệm được 1 giờ cho 2 bài còn lại.

Bạn `LTL` *cũng có nhận xét bổ sung cho bài toán này như sau: Bài này có thể tổng quát: Cho năm điểm A, X, Y, Z, $B \in (O)$. Chứng minh góc tạo bởi hai đường thẳng Simson của Y ứng với hai tam giác AXB và AZB bằng một nửa cung XZ.*

Lời giải sử dụng tính chất sau: Từ Y kẻ đường vuông góc với AB và cắt (O) lần hai tại T thì XT song song với đường thẳng Simson của Y ứng với tam giác ABC.

Quay trở lại với bài VMO 2010. Sau khi hoàn tất lời giải ba bài 2, 3, 4, tôi chỉ còn 15 phút dành cho bài 5 và bài 1. Với bài 5, tôi ghi được các ý sau:

1. Nếu $n = 1$ thì có đúng 1 cách tô (hiển nhiên quá, chắc không được điểm).

2. Có n^9 cách tô màu cho 9 ô. Ta phải tìm cách loại đi những cách tô màu bị đếm trùng.

3. Ta nhận xét rằng, qua một phép quay thì ô ở giữa không thay đổi, do đó đáp số cần tìm sẽ bằng n nhân với số cách tô 8 ô chung quanh, trong đó không có cách tô nào thu được từ nhau bằng một phép quay.

Đến đây thì hết giờ. Tôi chấp nhận là làm được ba bài hoàn toàn và viết được một số ý của bài 5. Dù không hoàn toàn như ý nhưng tôi rất tự tin là sẽ được giải, vì các lời giải của tôi khá chặt chẽ. Kết quả là tôi được 13 điểm (bị trừ 0.5 điểm ở bài hình và được 0.5 điểm ở bài 5), đủ điểm tham dự vòng 2. Ra ngoài phòng thi, tôi cũng hơi tiếc vì không làm được bài 1, mà ý giải hóa ra là rất đơn giản. Nhưng tôi cũng mừng là mình đã không sa lầy vào bài đó và cuối cùng đã giải được bài 4 để thay thế (dù bài 4 khó hơn và chỉ được 3 điểm). Bài 5 thì tôi cũng giải ra ngay sau đó. Tuy nhiên, lời giải hai bài này tôi không đưa vào phần phân tích mà chỉ đính kèm đáp án đề nghị ở đây để mọi người tham khảo (Xem phụ lục 2).

Lúc này một ý kiến góp ý về bài 2 USAMO được đưa ra bởi bạn `truongln`: *Ngay khi tiếp cận bài 2 của đề thi USAMO thì mình thấy giá trị max của số lần đổi nếu tính theo n thì cũng chỉ có thể là hàm bậc 2, không thể là hàm bậc 3. Theo cảm tính, gọi $f(n)$ là số lần đổi max cho n người. Xét $n+1$ người. Ta sẽ thấy số lần đổi giữa những người $1 \to n$ là không quá $f(n)$ và người $n+1$ chỉ có thể đổi với $n-1$ người trong n người còn lại trừ người n, từ đó dễ thấy $f(n+1) \leq f(n)+n-1$. Truy hồi thì ra được $f(n)$ có cận trên là một hàm bậc 2. Như vậy, đề toán có thể sai.*

*Lên mạng tìm đề USAMO thì thấy là **There are n students is standing in a circle, one behind the other**.*

Thầy Nam Dũng đính chính lại đề cho anh em còn suy nghĩ tiếp.

Tôi trả lời: *Ah, mãi cũng có người phát hiện ra đề sai. Tôi đã cố tình dịch sai đấy. Cảm ơn* `truongln` *đã thông báo. Rõ ràng là nếu xếp trên hàng dọc thì bài toán sẽ dễ hơn rất nhiều (chứ không phải sai) vì số phép chuyển sẽ nhỏ hơn*

$$(n-2)+(n-3)+\cdots+1=\frac{(n-2)(n-1)}{2} \leq C_n^3.$$

Cần đọc lại đề như sau: Có n học sinh đứng trên một vòng tròn, người này xếp sau người kia. Các học sinh này có chiều cao $h_1 < h_2 < \cdots < h_n$. Nếu học sinh có chiều cao h_k đứng ngay sau học sinh có chiều cao h_{k-2} hoặc thấp hơn thì cho phép hai học sinh này đổi chỗ. Chứng minh rằng không thể thực hiện nhiều hơn C_n^3 phép chuyển như vậy cho đến khi không thể thực hiện một phép chuyển như vậy nữa.

Bây giờ quay trở lại với ngày thứ nhất của USAMO. Như đã trình bày ở trên, sau khi hoàn tất bài 1 một cách gọn gàng (tôi cũng tự thấy bất ngờ vì tôi vốn kém hình học) tôi chọn làm tiếp bài 3 vì bất đẳng thức là sở trường của tôi.

Với bài này có một sự cố mà tôi muốn kể ra đây để minh họa cho ý thứ ba trong lời khuyên ở trên.

Số là khi đọc đề (bản tiếng Anh), tôi không để ý đến chữ distinct và hiểu đề bài như sau: *Cho $a_1, a_2, \ldots, a_{2010}$ là các số dương thỏa mãn điều kiện $a_i a_j \leq i+j$ $(*)$ với mọi chỉ số i, j. Tìm giá trị lớn nhất của $a_1 a_2 \cdots a_{2010}$.*

Tôi viết các bất đẳng thức này ra, và trường hợp $i=j$ cho tôi $a_i^2 \leq 2i$, hay $a_i \leq \sqrt{2i}$. Từ đó suy ra

$$a_1 a_2 \cdots a_{2010} \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{4020}=\sqrt{2^{2010} \cdot 2010!}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $a_i=\sqrt{2i}$. Vấn đề là các số này có thỏa mãn điều kiện $(*)$ hay không?

Thay các giá trị này vào $(*)$, tôi thấy để kiểm tra $(*)$, ta cần chứng minh: $\sqrt{2i}\sqrt{2j} \leq i+j$. Nhưng điều này là hiển nhiên theo AM-GM. Ura! Bài số 3 đã giải xong!

Chỉ mất có 10 phút! Mình đúng là thiên tài!

Tuy nhiên, sau đôi phút bay bổng, tôi bắt đầu tỉnh trí lại. Không lẽ bài số 3 của một đề thi làm trong 4 giờ 30 phút mà có thể làm trong vòng 10 phút. Chắc là có vấn đề gì đây. Tôi đọc lại đề và phát hiện ra chữ **distinct.** Hey, thế là lời giải trên sụp đổ. May mà phát hiện ra sớm.

Nhưng thất bại trên của tôi hóa ra lại rất giúp ích cho tôi trong việc tìm kiếm lời giải cho bài toán 3 mà tôi sẽ trình bày ở post sau. Tôi phát hiện ra một điều là: trong hệ gồm $\frac{n(n-1)}{2}$ bất phương trình **chỉ có một số bất phương trình là quan trọng, số còn lại là hệ quả của các bất phương trình mà ta chọn ra đó.**

Tôi sẽ trình bày con đường đi tới lời giải tại seminar. Còn bây giờ, các bạn hãy thử tự suy nghĩ cho bài 3 xem sao?

Đến lúc này thì bạn `truongln` hình như đã tìm ra lời giải cho bài 2 USAMO:

Tiếp tục với bài 2 USAMO.

Đầu tiên là sửa đề toán lại là xét trên đường tròn. Bây giờ ta phải đếm số lần đổi chỗ lớn nhất. Ta thấy hành động đổi chỗ là liên quan đến hai người đứng kề nhau, như vậy để đếm số lần đổi chỗ ta có thể đếm theo hai cách:

- Cách 1. đếm số lần đổi của từng người, cộng tất cả lại, sau đó chia đôi.
- Cách 2. xem mỗi lần đổi chỗ chỉ là hành động của một trong hai người, như thế ta phải đếm mỗi người có bao nhiêu hành động rồi cộng lại.

Hai cách trên chỉ là cảm tính khi đọc đề, làm thử thì hiển nhiên thấy cách đếm thứ hai là đơn giản và hiệu quả hơn. Dựa vào đó ta có thể xem mỗi lần đổi chỗ chỉ là hành động của người đứng trước hoặc người đứng sau, hoặc là người đứng trước nhảy ra sau lưng người đứng sau hoặc là người đứng sau nhảy ra trước mặt người đứng trước. Nói chung thì chúng ta ai cũng muốn tiến lên, vậy mình chọn cách là: "xem như mỗi lần đổi chỗ là người đứng sau nhảy lên trước mặt người đứng trước, còn người đứng trước không thực hiện hành động gì!".

Ý tưởng đầu tiên mình nghĩ đến là quy nạp. Bây giờ phải nghĩ xem là quy nạp như thế nào. Mất khoảng 30 phút suy nghĩ quy nạp theo n. Cuối cùng vẫn mù tịt, không rút ra được kết quả gì. Cái khó là đứng trên vòng tròn, nên rất khó để tìm được một đánh giá giữa cái khác của $n+1$ người và n người. Sau đây mình định thử xem có cố định được hai đỉnh kề nhau nào đó, hoặc là bằng cách nào đó đưa về đường thẳng không, cũng vô phương. Tóm lại là sao gần 1 tiếng vẫn vô phương (ở trong phòng thi chắc cũng hoảng rồi).

Từ bỏ quy nạp theo n. Bây giờ mình thấy là người k chỉ có thể nhảy qua những người $k-2$, $k-3$, $k-4, \ldots$, như vậy k càng lớn thì khả năng số lần nhảy của người này cũng càng lớn. Vậy thử quy nạp theo k (người thứ k).

Bây giờ, gọi số lần nhảy của người k là n_k. Theo ý tưởng quy nạp thì ta sẽ đánh giá n_k theo $n_{k-1}, n_{k-2}, \ldots$ Trong những người này, chỉ có người $k-1$ là người k không thể nhảy qua. Như vậy người k chỉ có thể nhảy qua những người đứng trước người k và đứng sau người $k-1$, hoặc là nhảy qua tiếp những người mà người $k-1$ nhảy qua để lại ở phía sau. Ban đầu ở giữa người k và người $k-1$ chỉ có thể có $k-2$ người là người k có khả năng nhảy qua là $1, 2, \ldots,$ $k-2$, còn số người người $k-1$ nhảy qua để lại phía sau để người k có thể nhảy qua tiếp là s_{k-1} (theo định nghĩa). Như vậy, người k có thể nhảy nhiều nhất là $s_{k-1}+k-2$ lần (phù, cuối cùng cũng tìm được một công thức truy hồi).

Rõ ràng người $1, 2$ không nhảy qua được ai cả. Suy ra $s_1 = s_2 = 0$. Từ đó suy ra

$$s_k \leq \frac{(k-2)(k-1)}{2}$$

với mọi $k \geq 3$. Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} s_k &\leq \sum_{k=3}^{n} \frac{(k-1)(k-2)}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1^2 - 2^2 - 3\left(\frac{n(n+1)}{2} - 1 - 2\right) + 2(n-2)\right] \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = C_n^3 \text{ (đpcm).}\end{aligned}$$

Ở đây chú ý biến đổi cuối cùng có thể làm gọn hơn

$$\begin{aligned}\sum_{k=3}^{n} \frac{(k-1)(k-2)}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)(k-2)}{2} &= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\left[k(k-1)(k-2) - (k-1)(k-2)(k-3)\right] \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.\end{aligned}$$

Bạn `huynhcongbang` cũng đóng góp một ý kiến kiến giải cho việc tìm tòi lời giải bài 1 trong đề thi VMO 2010:

"Thoạt nhìn, em nghĩ bài hệ này có hệ số toàn là số nguyên hết nên chắc không quá rắc rối. Theo kinh nghiệm bản thân thì các bài phương trình, hệ phương trình ở những đề thi học sinh giỏi thường là sử dụng bất đẳng thức để giải, sử dụng đạo hàm khảo sát hàm số hoặc biến đổi đại số để tìm nghiệm. Nhìn vào đề toán này em không thấy có hướng nào để đi theo con đường bất đẳng thức như đề năm trước hết, cũng khó có thể rút được ra một hàm số nào cả, có lẽ là phải biến đổi đại số thôi.

Nhưng muốn biến đổi đại số thì chắc chắn là phải nhẩm nghiệm của nó đã, đây là điều hết sức tự nhiên, mò mẫn đi đến lời giải thì ít ra cũng phải biết mình đi tìm cái gì chứ. Nếu biến đổi mà biết nghiệm trước rồi thì sẽ khỏe hơn rất nhiều. Với phương trình kiểu này thì chắc nhẩm được nghiệm nguyên là hết sức, nếu không ra nghiệm nguyên thì chắc là mệt lắm. Em bắt đầu thử với phương trình đầu (tất nhiên rồi, nó chỉ có 2 số hạng chứa biến, dù bậc cao nhưng tính vẫn khỏe hơn so với 6 số hạng ở phương trình thứ sau nhiều).

Việc nhẩm này cũng không quá khó khăn vì thông thường, em chỉ dám thử với các số nhỏ nhỏ như $1, 2, 3, 4, 5$ thôi và một chút tính toán cũng thấy được $x = 4, y = 2$ là phù hợp. Cũng mừng một chút nhưng không biết với phương trình kia thì sao. Hy vọng rằng khi thế chúng phương trình sau cũng thỏa luôn! Thay các giá trị vào một cách cẩn thận vào và tính, may mắn thay, hai vế của phương trình đều là 48. Vậy cặp $(x,\ y) = (4,\ 2)$ là nghiệm rồi. Đến đây dù gì cũng an tâm hơn một chút và tự tin hơn rằng có thể giải được cái phương trình này. Nhưng đến đây thì tiếp tục như thế nào thì quả là không dễ!

Cũng theo kinh nghiệm giải những phương trình tương tự loại này, em thử đặt ẩn phụ thêm coi sao: $a = x - 4, b = y - 2$ rồi thay vô cả hai phương trình để thử xem có ra được một phương trình tích nào không bởi vì khi đó, chắc chắn hệ nhận được phải có nghiệm là $a = b = 0$. Hào hứng biến đổi, khai triển hằng đẳng thức bậc $2, 3, 4$ khoảng 10 phút, khử được mất số 240, mất hết các số hạng tự do nhưng hình như vẫn không thấy tiến triển gì. Hai biến a, b cũng chẳng có liên hệ gì với nhau cả, mỗi số hạng đều chứa hoặc là a hoặc là b thôi, không có cái nào mà a, b chung hết thì sao mà phân tích thành nhân tử để có phương trình tích đây. Có lẽ cách này không khả quan lắm!

Đến đây em mới phát hiện ra rằng các biến x, y ban đầu cũng vậy, không có liên hệ nhiều lắm, dường như chúng xuất phát từ hai biểu thức rời nhau. Em thử biến đổi ở phương trình hai, chuyển số hạng chứa x về một bên, số hạng chứa y về một bên để xem có phát hiện gì mới không. Thực ra ý này ban đầu cũng có nghĩ ra rồi nhưng tại vì thấy có nghiệm cũng đẹp nên muốn thử cách đặt ẩn phụ, ai ngờ không thành công, thôi quay lại thử xem. Em có một đẳng thức khác, tuy chưa tiến triển mấy nhưng có vẻ sáng sủa hơn một chút

$$x^3 - 3x^2 + 4x = 2(y^3 - 16y^2 + 16y).$$

Đến đây, điều nghi ngờ nay giờ có vẻ rõ rõ hơn rồi, có khi nào các số hạng x, y này là các số hạng trong các hằng đẳng thức không. Các số hạng ở hai vế của phương trình cũng giống giống với các hệ số của khai triển lũy thừa 4 với số a, b em mới làm hồi nãy, một chút khác biệt có thể do bị đặt nhân tử chung nào đó ra rồi bỏ đi rồi. Do mới khai triển hằng đẳng thức với a, b ở trên một lần rồi nên em cũng không ngại làm thêm lần nữa, công sức nãy giờ bỏ đi thì tiếc thật, thử hướng này coi sao. Do ở hai vế của phương trình dưới có số âm, số dương nên phải chọn một hiệu của x với số nào đó mà tính, thử số 4 đi, trước sau gì thì x cũng ra 4 thôi! (Thực ra nếu chọn một biểu thức kiểu này để đánh giá thì $(x-4)^4$ là tự nhiên và dễ thấy nhất).

Em tính được $(x-4)^4 = x^4 - 16x^3 + 96x^2 - 256x + 256$. À, tới đây có khả quan lắm, nhóm những cái cần nhóm lại thử xem!

$$(x-4)^4 = x^4 + 256 - 16(x^3 - 6x^2 + 16x).$$

Còn với y thì sao nhỉ, xét thêm một hiệu nữa, x đã trừ cho 4 rồi thì y trừ 2 thôi, y trước sau gì cũng ra 2 mà. Biến đổi như ở trên, khoảng 1 phút sau, em có

$$(y-2)^4 = y^4 - 8y^3 + 24y^2 - 32y + 16 = y^4 + 16 - 8(y^3 - 3y^2 + 4y).$$

Dừng lại một chút nghỉ mệt để ngắm lại hai biểu thức vừa tính. Chợt em phát hiện sao hệ số của x, y trong dấu ngoặc giống với hệ số trong phương trình hai vậy. Hoàn toàn y hệt nhưng mà khoan, chúng đã bị đổi chỗ rồi, phải mà cho $x^3 - 6x^2 + 16x = y^3 - 3y^2 + 4y$ thì tốt quá. Đang lúng túng suy nghĩ cách khắc phục thì chợt nghĩ ra, thay vì mình đổi đề như vậy thì mình đi đổi biểu thức đi, đúng rồi! Đúng quá rồi! Phải đổi biểu thức, thay vì tính $(x-4)^4$, ta tính $(x-2)^4$ xem sao; với y cũng vậy luôn, phải tính $(y-4)^4$ thôi. Lại một lần nữa biến đổi, à thực ra thì chỉ thay chữ x bởi y, y bởi x trong hai biểu thức trên thôi. Viết hai biểu thức liền nhau, chợt em nhận ra một điều cực kì thú vị

$$(x-2)^4 = x^4 + 16 - 8(x^3 - 3x^2 + 4x), \quad (y-4)^4 = y^4 + 256 - 16(y^3 - 6y^2 + 16y).$$

Cả 4 vế của hai phương trình đã cho đều gần như xuất hiện đầy đủ cả, có điều mỗi vế nằm ở một phương trình thôi. Đã có hệ số x, y giống đề cho rồi, còn có thêm $\dfrac{16}{8} = \dfrac{2}{1}$ nữa, quá hay! Như thế thì trừ từng vế là mất một biểu thức phức tạp rồi, trừ ngay mới được

$$(x-2)^4 - (y-4)^4 = (x^4 + 16) - (y^4 + 256).$$

Một lần nữa, quá tuyệt vời! Bên vế phải hình như quen quen, phải rồi, nó là phương trình một ban đầu, và nó cũng bằng 0 luôn. Như vậy là $(x-2)^4 - (y-4)^4 = 0$, hay là $(x-2)^4 = (y-4)^4$.

Đến đây, em đã thấy đích đến không còn xa nữa rồi, bỏ ngay cái căn bậc 4, không quên dấu $\pm$, em có liền hai cái quan hệ x, y cực kì đẹp: $x - 2 = y - 4 \Leftrightarrow x = y - 2$, $x - 2 = 4 - y \Leftrightarrow x = 6 - y$.

Xong rồi, một chút nữa thôi. Ra được quan hệ này rồi thì sử dụng phương pháp thế là hay nhất. Mà thế thì thế vào phương trình hai là tốt hơn, ra phương trình bậc 3 là cái chắc, có một nghiệm đã biết rồi nữa thì phương trình bậc hai còn lại chỉ giải quyết nhanh gọn thôi. Nghiệm bao nhiêu lấy hết, đâu có điều kiện gì đâu. Tính toán thêm khoảng 5 phút nữa, em tìm thêm được một nghiệm cũng đẹp không kém là $(x,\ y) = (-4,\ -2)$. Bắt tay vào việc trình bày lời giải thôi.

Các suy luận ở trên có thể kéo dài từ 10 – 30 phút nên theo em nghĩ một cách tự nhiên rằng kết thúc bài số 1 khoảng từ 20 – 40 phút là hợp lí! Dưới đây là lời giải của em, tuy có vài bước chưa tự nhiên nhưng rõ ràng quá trình suy nghĩ ở trên là hoàn toàn tự nhiên!

Từ hệ phương trình đã cho suy ra

$$\begin{cases} x^4 + 16 = y^4 + 256 \\ x^3 - 3x^2 + 4x = 2(y^3 - 6y^2 + 16y) \end{cases}. \tag{$*$}$$

Ta có

$$(x-2)^4 = x^4 + 16 - 8(x^3 - 3x^2 + 4x), \quad (y-4)^4 = y^4 + 256 - 16(y^3 - 6y^2 + 16y).$$

Trừ từng vế hai đẳng thức này, kết hợp với $(*)$, ta được:

$$(x-2)^4 - (y-4)^4 = (x^4+16) - (y^4+256) - 8[(x^3 - 3x^2 + 4y) - 2(y^3 - 6y^2 + 16y)] = 0,$$

suy ra $(x-2)^4 = (y-4)^4$, hay $x - 2 = y - 4 \Leftrightarrow x = y - 2 \vee x - 2 = 4 - y \Leftrightarrow x = 6 - y$.

Xét từng trường hợp.

- Nếu $x = y - 2$, thay vào phương trình thứ hai của hệ $(*)$ và biến đổi, ta được

  $$y^3 - 3y^2 + 4y + 28 = 0 \Leftrightarrow (y+2)(y^2 - 5y + 14) = 0 \Leftrightarrow y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = -2$$

  (do $y^2 - 5y + 14 > 0, \forall y$). Suy ra $x = -2 - 2 = -4$.

- Nếu $x = 6 - y$, thay vào phương trình thứ hai của hệ $(*)$ và biến đổi, ta được

  $$3y^3 - 27y^2 + 108y - 132 = 0 \Leftrightarrow (y-2)(y^2 - 7y + 22) = 0 \Leftrightarrow y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2$$

  (do $y^2 - 7y + 22 > 0, \forall y$). Suy ra $x = 6 - 2 = 4$.

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $(x,\ y) = (-4,\ -2), (4,\ 2)$."

Bây giờ tôi sẽ phân tích con đường đi đến lời giải bài 3 USAMO của tôi.

Nhắc lại đề bài là: *Cho $a_1, a_2, \ldots, a_{2010}$ là các số dương thỏa mãn điều kiện $a_i a_j \le i + j$ với mọi chỉ số $i \ne j$. Tìm giá trị lớn nhất của $a_1 a_2 \cdots a_{2010}$.*

Con số 2010 rõ ràng là rất nhân tạo. Vì vậy tôi nghĩ ngay đến việc tổng quát hóa bài toán thay 2010 bằng n và xét các trường hợp n nhỏ để tìm quy luật (looking for pattern).

Với $n = 2$, bài toán là hiển nhiên vì chỉ có một điều kiện $a_1 a_2 \le 3$ và dĩ nhiên giá trị lớn nhất của $a_1 a_2$ là 3.

Với $n = 3$, bài toán cũng tầm thường vì từ $a_1a_2 \le 3$, $a_1a_3 \le 4$, $a_2a_3 \le 5$ ta suy ra $a_1a_2a_3 \le \sqrt{60}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = \dfrac{\sqrt{60}}{5}$, $a_2 = \dfrac{\sqrt{60}}{4}$, $a_3 = \dfrac{\sqrt{60}}{3}$.

Với $n = 4$, vấn đề trở nên khó khăn hơn khi có đến 6 điều kiện: $a_1a_2 \le 3$, $a_1a_3 \le 4$, $a_1a_4 \le 5$, $a_2a_3 \le 5$, $a_2a_4 \le 6$, $a_3a_4 \le 7$. Việc nhân các bất đẳng thức lại vế theo vế như trường hợp $n = 3$ để tìm GTLN rõ ràng không ổn vì rõ ràng các bất đẳng thức $(a_1a_3)(a_2a_4) \le 4 \cdot 6 = 24$ và bất đẳng thức $(a_1a_4)(a_2a_3) \le 5 \cdot 5 = 25$ là hệ quả của bất đẳng thức $(a_1a_2)(a_3a_4) \le 3 \cdot 7 = 21$. $(*)$

Một cách tự nhiên, ta nghĩ rằng 21 chính là giá trị lớn nhất của $a_1a_2a_3a_4$. Vấn đề bây giờ chỉ là tìm được a_1, a_2, a_3, a_4 thỏa mãn điều kiện $a_1a_2 = 3$, $a_3a_4 = 7$ và thỏa mãn các bất đẳng thức $a_1a_3 \le 4$, $a_1a_4 \le 5$, $a_2a_3 \le 5$, $a_2a_4 \le 6$. Theo như lý luận ở $(*)$, thì nếu chọn ai sao cho $a_2a_3 = 5$, $a_2a_4 = 6$ thì bất đẳng thức $a_1a_3 \le 4$ và $a_1a_4 \le 5$ sẽ hiển nhiên đúng. Như vậy ta có thể chọn $a_2 = \sqrt{\dfrac{5 \cdot 6}{7}}$, $a_3 = \sqrt{\dfrac{5 \cdot 7}{6}}$, $a_4 = \sqrt{\dfrac{6 \cdot 7}{5}}$, $a_1 = \dfrac{3}{\sqrt{\dfrac{5 \cdot 6}{7}}}$ thì tất cả các yêu cầu đều được thỏa mãn.

Trực quan cho thấy rằng trường hợp $n = 4$ chính là trường hợp "chốt" của bài toán. Một cách tự nhiên ta nghĩ rằng nếu $n = 2k$ thì đáp số của bài toán đến từ đánh giá

$$a_1a_2a_3a_4 \cdots a_{2k-1}a_{2k} = (a_1a_2)(a_3a_4) \cdots (a_{2k-1}a_{2k}) \le 3 \cdot 7 \cdot (4k - 1).$$

Vấn đề là phải tìm được các số dương $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{2k-1}, a_{2k}$ thỏa mãn điều kiện

$$a_1a_2 = 3, \quad a_3a_4 = 7, \quad \ldots, \quad a_{2k-1}a_{2k} = 4k - 1. (**)$$

đồng thời thỏa mãn hệ điều kiện $a_ia_j \le i + j$ với mọi chỉ số $i \ne j$ $(***)$.

Ta sẽ xem, ngoài các hệ thức $(**)$, các hệ thức chính nào sẽ được chọn? Đương nhiên, các ứng cử viên đầu tiên là $a_2a_3 = 5, \ldots, a_{2k-2}a_{2k-1} = 4k - 3$. Lúc đó các a_i sẽ hoàn toàn xác định nếu biết a_1. Đặt $a_1 = x$ thì ta tính được

$$a_{2i} = \frac{3 \cdot 7 \cdots (4i-1)}{5 \cdots (4i-3)x}, \; a_{2i+1} = \frac{5 \cdot 9 \cdots (4i+1)}{3 \cdots (4i-1)}x.$$

Bây giờ ta sẽ cần chọn x sao cho $(**)$ đúng.

Dựa theo ý tưởng các bất đẳng thức $(*)$, ta có nếu $j - i > 2$ thì

$$a_ia_j = \frac{(a_ia_{i+1})(a_{i+2}a_j)}{a_{i+1}a_{i+2}} = \frac{2i+1}{2i+3}a_{i+2}a_j.$$

Cho nên, nếu $(**)$ đúng với $i + 2, j$thì ta sẽ có

$$a_ia_j \le \frac{2i+1}{2i+3}(i + j + 2) < i + j.$$

Vì $(**)$ trở thành đẳng thức khi $j = i + 1$ nên ta chỉ còn cần chọn x sao cho $(**)$ đúng với $j = i + 2$, tức là

$$a_{2i}a_{2i+2} \le 4i + 2, \quad a_{2i-1}a_{2i+1} \le 4i,$$

hay là

$$\frac{3\cdot 7\cdots(4i-1)}{5\cdots(4i-3)x}\cdot\frac{3\cdot 7\cdots(4i+3)}{5\cdots(4i+1)x}\le 4i+2,\ \frac{5\cdot 9\cdots(4i-3)}{3\cdots(4i-5)}x\frac{5\cdot 9\cdots(4i+1)}{3\cdots(4i-1)}x\le 4i+3.$$

Từ đó suy ra

$$x^2\ge\frac{3\cdot 7\cdots(4i-1)}{5\cdots(4i-3)}\cdot\frac{3\cdot 7\cdots(4i+3)}{5\cdots(4i+1)}\cdot\frac{1}{4i+2}=u_i\quad\forall i=1,\ 2,\ \ldots,\ k-1,$$
$$x^2\le(4i+3)\frac{3\cdots 4i-5}{5\cdot 9\cdots 4i-3}\cdot\frac{3\cdots 4i-1}{5\cdot 9\cdots 4i+1}=v_i\qquad\forall i=2,\ \ldots,\ k-1.$$

Vấn đề cuối cùng là cần chứng minh tồn tại x thỏa mãn đồng thời các bất đẳng thức trên.

Xét $\dfrac{u_{i+1}}{u_i}=\dfrac{(4i+3)(4i+7)(4i+2)}{(4i+1)(4i+5)(4i+4)}>1$, suy ra u_i là dãy số tăng.

Tương tự $\dfrac{v_{i+1}}{v_i}=\dfrac{(4i+5)(4i-1)(4i+3)}{(4i+3)(4i+1)(4i+5)}<1$ nên v_i là dãy số giảm.

Vì vậy, để chứng minh sự tồn tại của x, ta chỉ cần chứng minh $u_i<v_i$. Điều này tương đương với

$$\frac{(4i-1)(4i+3)}{4i+2}<4i+3,$$

hiển nhiên đúng. Bài toán được giải quyết.

Chú ý, lời giải cho trường hợp $n=4$ còn gợi ý cho ta đến một hướng giải khác, đó là thay vì tìm x_1, ta cho $x_{2k-2}x_{2k}=4k-2$, từ đó tính được $x_{2k-2}, x_{2k-1}, x_{2k}$ và sau đó là tất cả các x_i với $i<2k-2$. Cuối cùng ta chứng minh các x_i chọn như vậy thỏa mãn $(**)$ bằng cách quy nạp lùi theo $i+j$. Đây chính là cách giải trong đáp án của USAMO (xem phụ lục 3).

Đến đây, ta tạm dừng phần phân tích cách tìm tòi lời giải cho một số bài toán và đưa ra một số lời khuyên của các nhà sư phạm.

Loren Larson trong cuốn "Problem – Solving Through Prolems" liệt kê các phương pháp tiếp cận heuristic sau:

1. Tìm kiếm quy luật.
2. Vẽ hình.
3. Phát biểu bài toán tương đương.
4. Thay đổi đề toán.
5. Chọn ký hiệu thích hợp.
6. Khai thác tính đối xứng.
7. Chia trường hợp.
8. Lý luận quay lui.
9. Lý luận phản chứng.

10. Xét tính chẵn lẻ.

11. Xét trường hợp cực hạn.

12. Tổng quát hóa.

Naoki Sato, cũng là một huấn luyện viên nổi tiếng cho các đội tuyển, trong cuốn sách "Problems Solving & Contests Seminar" bổ sung thêm:

13. Đọc và hiểu rõ đề toán.

14. Xem xét các dữ liệu trong bài toán và xem xem dữ liệu nào có ý nghĩa và ý nghĩa như thế nào?

15. Nhớ lại các nguyên lý căn bản: Quy nạp, nguyên lý Dirichlet, thuật toán chia, ...

16. Luôn nhớ yêu cầu của bài toán là gì.

17. Biết cách chứng minh các định lý mà bạn biết, ví dụ tổng n số nguyên dương đầu tiên, chứng minh định lý Pythaore bằng phương pháp ghép hình, ...

Và về việc viết lời giải ...

18. Tiên đề về tính giải được: Mọi bài toán đều có lời giải (đẹp) Tiên đề về khả năng: Tôi cũng không dốt Hệ quả: Tôi có thể giải mọi bài toán.

Erdos thường nói rằng Chúa trời có một cuốn sách trong đó có những giải ngắn gọn nhất (hay đẹp đẽ nhất) cho mọi bài toán.

19. Hãy kiếm điểm từng phần.

Và cuối cùng

20. Hãy tự sáng tác những đề toán của mình.

Và, nếu bạn muốn trở thành một ngôi sao về toán

Có nhiều cách để nâng cao kỹ năng giải toán của bạn. Điều này phụ thuộc vào bạn. Tôi (Naoki Sato) đề xuất mấy lời khuyên sau:

1. Hãy viết lại tất cả các kỳ thi mà bạn biết, kể cả những cuộc thi, các kỳ Olympic, ... Bạn sẽ biết nhiều hơn về các dạng toán, mặc dù sẽ phải tốn nhiều thời gian. Kinh nghiệm sẽ phát huy tác dụng.

2. Rèn luyện kỹ năng trình bày lời giải tốt. Một lời giải, cho dù là rất xuất sắc sẽ không được điểm tối đa nếu nó được trình bày kém. Hãy nhớ quy tắc 3C: Clear, concise and correct (Rõ ràng, ngắn gọn và chính xác). Một cách rất tốt là tham gia giải toán trên báo THTT và các cuộc thi trên mạng.

3. Đọc sách. Thực ra thì cuốn sách nào cũng tốt. Nhưng vì bạn có ít thời gian nên cần chọn những cuốn sách tốt nhất.

4. Hãy bắt đầu lập tuyển chọn các bài toán, sắp xếp theo chủ đề, ghi ra danh sách các công thức quan trọng. Điều này sẽ giúp bạn cá nhân hóa tài liệu của mình.

5. Thảo luận với những người khác, những người cũng làm toán như bạn: thầy cô, bạn bè, những người ở trên mạng, ... Trao đổi những ý tưởng với người khác là một việc làm rất bổ ích.

Cuối cùng, chúng tôi đề nghị các bạn làm một số bài tập sau.

1. Trình bày lời giải ngày nhất USAMO.
2. Đưa ra chiến thuật cho ngày thứ hai USAMO và tìm cách kiếm điểm tối đa theo khả năng của bạn (bạn có 4 giờ 30 phút).
3. Bạn hãy thử sức với đề toán sau (USAMTS, vòng 4, năm học 2009 – 2010 – Cuộc thi tìm kiếm tài năng toán học của Mỹ – `www.usamts.org`) – Không hạn chế thời gian. Đây là những đề toán rất hay.

Bài 1. Archimedes định tính tất cả các số nguyên tố từ 2 đến 1000 sử dụng sàng Erastothenes như sau:

(a) Viết ra tất cả các số từ 2 đến 1000.

(b) Khoanh tròn số nhỏ nhất trong danh sách và gọi số đó là p.

(c) Xóa đi tất cả các bội số của p trong danh sách, ngoại trừ p.

(d) Gọi p là số nhỏ nhất còn lại không bị khoanh tròn cũng như không bị xóa. Khoanh tròn p.

(e) Lặp lại các bước (c) và (d) cho đến khi không còn số nào không bị khoanh tròn hoặc không bị xóa.

Khi kết thúc quá trình này thì các số được khoanh tròn sẽ là các số nguyên tố, còn các số bị xóa là hợp số.

Đáng tiếc là khi xóa các bội số của 2 (ngoại trừ 2), Archimedes đã xóa nhầm thêm hai số nguyên tố lẻ nữa. Còn lại thì ông vẫn làm đúng theo thuật toán nêu trên. Nếu như số các số được khoanh tròn khi Archimedes kết thúc bằng với số các số nguyên tố từ 2 đến 1000 thì số nguyên tố lớn nhất mà Archimedes có thể xóa nhầm bằng bao nhiêu?

Bài 2. Cho a, b, c, d là bốn số dương sao cho

$$a + b + c + d = 8, \quad ab + ac + ad + bc + bd + cd = 12.$$

Tìm giá trị lớn nhất có thể của d.

Bài 3. Tôi đưa cho bạn một bộ bài đánh số từ 1 đến n. Mỗi một lần thực hiện, bạn lấy quân bài ở trên cùng và đặt vào một chỗ tùy ý trong bộ bài. Bạn cần sắp xếp bộ bài theo thứ tự, quân bài mang số 1 ở trên cùng và quân bài mang số n ở dưới cùng. Nếu tôi đưa bộ bài cho bạn với thứ tự ngẫu nhiên và bạn biết thứ tự đó thì giá trị kỳ vọng của số nhỏ nhất các lần thực hiện để bạn hoàn tất việc sắp xếp bằng bao nhiêu?

Bài 4. Cho S là một tập hợp gồm 10 số thực dương đôi một khác nhau. Chứng minh rằng tồn tại x, y thuộc S sao cho

$$0 < x - y < \frac{(1+x)(1+y)}{9}.$$

Bài 5. Tina và Paul cùng chơi một trò chơi trong hình vuông S. Đầu tiên Tina chọn một điểm T bên trong S. Tiếp theo, Paul chọn một điểm P bên trong S. Sau đó Paul tô màu xanh tất cả các điểm trong S mà gần P hơn T. Tina sẽ thắng nếu phần màu xanh thu được là phần trong của một tam giác. Giả sử rằng Paul rất lười suy nghĩ và sẽ chọn điểm của mình một cách ngẫu nhiên (và Tina biết điều này). Hãy tìm (và giải thích rõ) điểm mà Tina có thể chọn để cực đại hóa xác suất thắng của mình và hãy tính xác suất này.

Phụ lục

1. Sơ đồ tìm và trình bày một lời giải của Polya:
   `www.physics.ohio-state.edu/∼ntg/263/handouts/261polya05.pdf`
2. Lời giải VMO 2010:
   `http://forum.mathscope.org/showthread.php?t=11668&page=2`
3. Lời giải USAMO và USAJMO 2010:
   `http://forum.mathscope.org/showthread.php?t=11752`

Một số tài liệu tham khảo tốt

1. Bộ sách của G. Polya: *Giải bài toán như thế nào*, *Sáng tạo toán học*, *Toán học và những suy luận có lý* (English: *How to Solve It*, *Mathematical Discovery*, *Mathematics and Plausible Reasoning*).
2. Bộ sách của Honsberger: *Mathematical Gems*, *Mathematical Morsels*, *Ingenuity in Mathematics*, *In Polya's Footsteps*, ...
3. Arthur Engel, *Problem-Solving Strategies*, Springer 1998.
4. Loren C. Larson, *Problem – Solving Through Problems*, Springer 1983.
5. A. Kanel-Belov, A.Kovaldzi, *Giải bài toán không mẫu mực như thế nào?*, MCCME 2001.