

.....

MÔN: TOÁN

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

(Đề gồm 05 câu, 01 trang).

Ngày thi .../.../2023

Số báo danh

.....

Câu I. (4,0 điểm)

1. Cho biểu thức $P = \frac{x+3\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{x+3\sqrt{x}}{2x}$ với $x > 0$ và $x \neq 1$.

Rút gọn biểu thức P và tìm tất cả các số tự nhiên x để giá trị biểu thức $\frac{2\sqrt{x}-3P}{2P}$ là số nguyên tố.

2. Các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2} - \frac{2}{a+b+c-abc}$$

Câu II. (4,0 điểm)

1. Giải phương trình: $(x^3 - 3x + 1)\sqrt{x^2 + 21} + x^4 - 3x^2 + x = 21$

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y \\ x^2 - 3 = 3(y^2 + 1) \end{cases}$$

Câu III. (4,0 điểm)

1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $\sqrt{3x+4} = \sqrt[3]{y^3+5y^2+7y+4}$ (1)

2. Tìm các số tự nhiên x, y, z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $x^3 + y^3 = 2z^3$ và $x + y + z$ là số nguyên tố.

Câu IV. (6,0 điểm) Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (O ; r). Các tiếp điểm của (O ; r) với các cạnh của tam giác ABC lần lượt là M, N, P.

1) Chứng minh: $S = p.r$ (p là nửa chu vi tam giác ABC, S là diện tích tam giác ABC).

2) Đường thẳng qua O vuông góc với OC cắt AC và BC lần lượt tại E và F. Chứng minh

$$\frac{AE}{BF} = \left(\frac{OA}{OB} \right)^2$$

3) Kẻ các tiếp tuyến của đường tròn (O ; r) song song với 3 cạnh của tam giác ABC, các tiếp tuyến này tạo với các cạnh của tam giác ABC ba tam giác nhỏ có diện tích lần lượt là S_1, S_2, S_3 . Tìm giá

trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{S_1 + S_2 + S_3}{S}$.

Câu V. (2,0 điểm) Với x, y, z là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. Tìm giá trị

lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{\sqrt{2x^2+y^2+3}} + \frac{1}{\sqrt{2y^2+z^2+3}} + \frac{1}{\sqrt{2z^2+x^2+3}}$

.....**Hết!**.....
HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN
Hướng dẫn chấm này gồm 09 trang

Câu	Nội dung	Điểm
I.1	1. Cho biểu thức $P = \frac{x+3\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{x+3\sqrt{x}}{2x}$ với $x > 0$ và $x \neq 1$. Rút gọn biểu thức P và tìm tất cả các số tự nhiên x để giá trị biểu thức $\frac{2\sqrt{x}-3P}{2P}$ là số nguyên tố.	2,0
	Điều kiện xác định : $x > 0$ và $x \neq 1$.	
	Ta có: $P = \frac{x+3\sqrt{x}-1+x-1-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{x+3\sqrt{x}}{2x} = \frac{x+2\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$	0,25
	$P = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} = \frac{2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$	0,25
	Thay $P = \frac{2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$ vào biểu thức $\frac{2\sqrt{x}-3P}{2P}$ ta được: $\frac{2\sqrt{x}-3P}{2P} = \frac{2\sqrt{x}-3 \cdot \frac{2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}}{2 \cdot \frac{2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}} = \frac{1-\frac{3}{x+\sqrt{x}+1}}{\frac{2}{x+\sqrt{x}+1}} = \frac{x+\sqrt{x}-2}{2}$	0,5
	Do biểu thức $\frac{2\sqrt{x}-3P}{2P}$ là số nguyên tố nên $\frac{x+\sqrt{x}-2}{2}$ cũng là số nguyên tố Ta đặt: $\frac{x+\sqrt{x}-2}{2} = p$ (p là số nguyên tố) $\hat{=} (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2) = 2p$. Đề ý: $\sqrt{x}+2 > \sqrt{x}-1$.	0,25
	Khả năng 1: $\begin{cases} \sqrt{x}-1=1 \\ \sqrt{x}+2=2p \end{cases} \hat{=} \begin{cases} x=4 \\ p=2 \end{cases}$ (nhận).	0,5

	Khả năng 2: $\begin{cases} \sqrt{x} - 1 = 2 \\ \sqrt{x} + 2 = p \end{cases} \cup \begin{cases} x = 9 \\ p = 5 \end{cases}$ (nhận).	
	Vậy $P = \frac{2\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1}$ và khi $x = 4$ và $x = 9$ thì $\frac{2\sqrt{x} - 3P}{2P}$ là số nguyên tố.	0,25
I.2	2. Các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2} - \frac{2}{a+b+c-abc}$	2,0
	$P = \frac{a}{ab+bc+ca+a^2} + \frac{b}{ab+bc+ca+b^2} + \frac{c}{ab+bc+ca+c^2} - \frac{2(ab+bc+ca)}{a+b+c-abc}$ $P = \frac{a}{(a+c)(a+b)} + \frac{b}{(b+c)(a+b)} + \frac{c}{(a+c)(b+c)} - \frac{2(ab+bc+ca)}{a+b+c-abc}$ $P = \frac{a(b+c) + b(a+c) + c(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)} - \frac{2(ab+bc+ca)}{a+b+c-abc}$ $P = \frac{2(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} - \frac{2(ab+bc+ca)}{a+b+c-abc}$ $P = 2(ab+bc+ca) \left\{ \frac{1}{(a+b)(b+c)(c+a)} - \frac{1}{a+b+c-abc} \right\}$ Ta có: $(a+b)(b+c)(c+a) = ab^2 + a^2b + bc^2 + b^2c + ca^2 + ac^2 + abc + abc$ $= ab^2 + a^2b + abc + ac^2 + ca^2 + abc + bc^2 + b^2c + abc - abc$ $= ab(a+b+c) + ac(a+c+b) + bc(a+b+c) - abc$ $= (a+b+c)(ab+ac+bc) - abc$ $= a+b+c - abc$ Þ $P = 0$	0,5 0,5 0,5
II.1	1. Giải phương trình: $(x^3 - 3x + 1)\sqrt{x^2 + 21} + x^4 - 3x^2 + x = 21$	2,0

	1. ĐKXĐ : $x \in R$ $(x^3 - 3x + 1)\sqrt{x^2 + 21} + x^4 - 3x^2 + x = 21$ $\Leftrightarrow (x^3 - 2x + 1)\sqrt{x^2 + 21} + x(x^3 - 2x + 1) - x\sqrt{x^2 + 21} - (x^2 + 21) = 0$ $\Leftrightarrow (x^3 - 2x + 1)(\sqrt{x^2 + 21} + x) - \sqrt{x^2 + 21}(\sqrt{x^2 + 21} + x) = 0$ $\Leftrightarrow (x^3 - 2x + 1 - \sqrt{x^2 + 21})(\sqrt{x^2 + 21} + x) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 21} + x = 0 \\ x^3 - 2x + 1 - \sqrt{x^2 + 21} = 0 \end{cases}$ *) Với $\sqrt{x^2 + 21} + x = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 21} = -x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 21 = x^2 \\ x < 0 \end{cases}$ (vô nghiệm) *) Với $x^3 - 2x + 1 - \sqrt{x^2 + 21} = 0$ $\Rightarrow \sqrt{x^2 + 21} = x^3 - 2x + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 21} - 5 = x^3 - 2x - 4$ $\Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 21} + 5} = (x - 2)(x^2 + 2x + 2) \Leftrightarrow (x - 2) \left(\frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 21} + 5} - (x^2 + 2x + 2) \right) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 21} + 5} = x^2 + 2x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 21} + 5} = x^2 + 2x + 2 \quad (3) \end{cases}$ Ta xét (3) $VT = \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 21} + 5} \leq \left \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 21} + 5} \right < \left \frac{x + 2}{5} \right < x^2 + 2x + 2 = VP$ $\Rightarrow$ PT (3) vô nghiệm Vậy PT có nghiệm $x = 2$	0,5 0,5 0,5 0,5
II.2	2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y \\ x^2 - 3 = 3(y^2 + 1) \end{cases}$	2,0

	$\begin{cases} x^3 + y^3 = 8x + 2y \\ x^2 + 3y^2 = 6 \end{cases}$ Ta biến đổi hệ: Đề ý rằng nếu nhân chéo 2 phương trình của hệ ta có: $6(x^3 + y^3) = (8x + 2y)(x^2 + 3y^2)$ đây là phương trình đẳng cấp bậc 3: Từ đó ta có lời giải như sau: Vì $x = 0$ không là nghiệm của hệ nên ta đặt $y = tx$. Khi đó hệ thành: $\begin{cases} x^3 - 8x = t^3 x^3 + 2tx \\ x^2 - 3 = 3(t^2 x^2 + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(1 - t^3) = 2t + 8 \\ x^2(1 - 3t^2) = 6 \end{cases} \Rightarrow \frac{1 - t^3}{1 - 3t^2} = \frac{t + 4}{3}$ $\Leftrightarrow 3(1 - t^3) = (t + 4)(1 - 3t^2) \Leftrightarrow 12t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ t = -\frac{1}{4} \end{cases}$ $t = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x^2(1 - 3t^2) = 6 \\ y = \frac{x}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 1 \end{cases}$ * $t = -\frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{4\sqrt{78}}{13} \\ y = \mp \frac{\sqrt{78}}{13} \end{cases}$ * Suy ra hệ phương trình có các cặp nghiệm: $(x; y) = (3, 1); (-3, -1); \left(\frac{4\sqrt{78}}{13}, \frac{\sqrt{78}}{13} \right); \left(-\frac{4\sqrt{78}}{13}, -\frac{\sqrt{78}}{13} \right)$	0,25 0,5 0,25 0,5 0,25 0,25
III.1	1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $\sqrt{3x+4} = \sqrt[3]{y^3 + 5y^2 + 7y + 4} \quad (1)$	2.0

Trước hết ta chứng minh nhận xét sau:

Với $a \geq 0, a \in \mathbb{Z}, a\sqrt{a} \in \mathbb{Z}$ thì $\sqrt{a} \in \mathbb{Z}$. Thật vậy:

Xét $a = 0$ thì $a = \sqrt{a} = 0 \in \mathbb{Z}$

Xét a nguyên dương, đặt :

$$a\sqrt{a} = b(b \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \sqrt{a} = \frac{b}{a} \Rightarrow a = \frac{b^2}{a^2} \notin \mathbb{Z}$$

Nếu $\sqrt{a} \notin \mathbb{Z}$ thì b không chia hết cho a , b^2 không chia hết cho a^2 , do đó a

$= \frac{b^2}{a^2} \notin \mathbb{Z}$ Điều này mâu thuẫn với $a \in \mathbb{Z}$. Vậy $\sqrt{a} \in \mathbb{Z}$.

Trở lại bài toán :

ĐK: $x \geq -\frac{4}{3}$. Lập phương hai vế của (1) ta có :

$$(3x+4)\sqrt{3x+4} = y^3 + 5y^2 + 7y + 4 \quad (2)$$

Do $x, y \in \mathbb{Z}$, kết hợp (2) suy ra

$$3x+4 \in \mathbb{Z}, \quad (3x+4)\sqrt{3x+4} \in \mathbb{Z}$$

Sử dụng nhận xét suy ra $\sqrt{3x+4} \in \mathbb{Z}$. Đặt $\sqrt{3x+4} = k$ ($k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$).

thay vào (2) ta có $k^3 = y^3 + 5y^2 + 7y + 4$ (3)

Nhận thấy : $y^3 + 5y^2 + 7y + 4 = (y+1)^3 + 2(y+1)^2 + 1 > (y+1)^3$

(do $2(y+1)^2 + 1 > 0$ với mọi y);

$$y^3 + 5y^2 + 7y + 4 = (y+2)^3 - (y^2 + 5y + 4)$$

$$= (y+2)^3 - (y+1)(y+4) < (y+2)^3$$

Khi $y < -4$ hoặc $y > -1$ (do $(y+1)(y+4) > 0$ khi $y < -4$ hoặc $y > -1$)

+ Với $y < -4$ hoặc $y > -1$, kết hợp với (3) suy ra $(y+1)^3 < k^3 < (y+2)^3$, điều này không thể xảy ra.

+ Với $y = -4$ thay vào (3) ta có : $k^3 = -8 \Leftrightarrow k = -2$ (không thỏa mãn điều kiện $k \geq 0$)

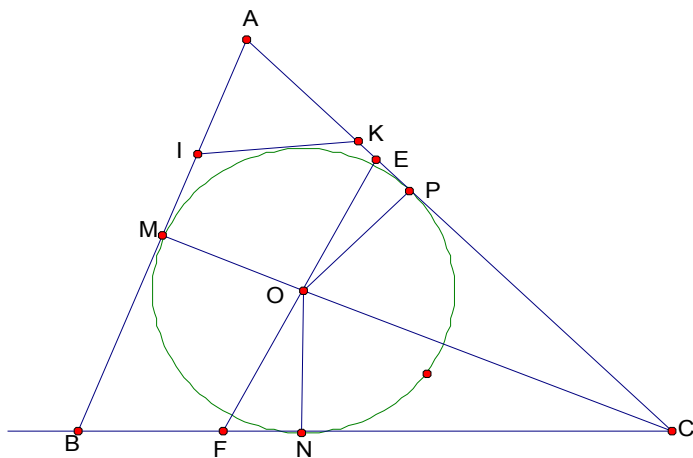
+ Với $y = -3$ thay vào (3) ta có $k^3 = 1 \Leftrightarrow k = 1 \Rightarrow x = -1$

+ Với $y = -1$ thay vào (3) ta có $k^3 = 1 \Leftrightarrow k = 1 \Rightarrow x = -1$. Suy ra $x = -1$ (thỏa mãn).

+ Với $y = -2 \Rightarrow k^3 = 2 \Rightarrow \sqrt[3]{2}$ (loại)

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm nguyên $(x; y)$ là $(-1; -1)$, $(-1; -3)$

III.2	2. Tìm các số tự nhiên x, y, z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $x^3 + y^3 = 2z^3$ và $x + y + z$ là số nguyên tố.	2,0
	Sử dụng hằng đẳng thức $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ ta được $\begin{aligned}(x+y+z)^3 &= (x+y)^3 + z^3 + 3z(x+y)(x+y+z) \\ &= x^3 + y^3 + 3xy(x+y) + z^3 + 3z(x+y)(x+y+z) \\ &= 3z^3 + 3(x+y)[x(y+z) + z(y+z)] \text{ (do } x^3 + y^3 = 2z^3 \text{)} \\ &= 3z^3 + 3(x+y)(y+z)(z+x)\end{aligned}$	0,25
	Với $x, y, z \in \mathbb{N}$ ta có $(x+y+z)^3 = 3z^3 + 3(x+y)(y+z)(z+x) : 3$ Do đó $(x+y+z) : 3$ mà $x+y+z$ là số nguyên tố nên $x+y+z = 3$.	0,25
	Do vai trò của x và y trong bài toán là như nhau nên không giảm tính tổng quát của bài toán, ta giả sử $x \leq y$, kết hợp với $x^3 + y^3 = 2z^3$ ta được $x \leq z \leq y$.	0,25
	Từ đó suy ra $3 = x+y+z \geq 3x \Rightarrow x \leq 1$. Vì $x \in \mathbb{N}$ nên $x \in \{0; 1\}$.	0,25
	$\begin{cases} y+z=3 \\ z \leq y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ y=3 \\ z=1 \\ y=2 \end{cases}$ * Với $x = 0$, ta có y, z là các số tự nhiên thỏa mãn	0,25
	Ta thấy $(x; y; z) \in \{(0; 3; 0), (0; 2; 1)\}$ không thỏa mãn $x^3 + y^3 = 2z^3$.	0,25
	$\begin{cases} y+z=2 \\ 1 \leq z \leq y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1 \\ y=1 \end{cases}$ * Với $x = 1$, ta có y, z là các số tự nhiên thỏa mãn	0,25
	Ta thấy $x = y = z = 1$ thỏa mãn điều kiện bài toán.	
	Vậy các số tự nhiên cần tìm là $(x; y; z) = (1; 1; 1)$.	0,25
IV	Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (O ; r). Các tiếp điểm của (O ; r) với các cạnh của tam giác ABC lần lượt là M, N, P. 1) Chứng minh: $S = p.r$ (p là nửa chu vi Δ ABC, S là diện tích Δ ABC). 2) Đường thẳng qua O vuông góc với OC cắt AC và BC lần lượt tại E và F. $\frac{AE}{BF} = \left(\frac{OA}{OB} \right)^2$ Chứng minh 3) Kẻ các tiếp tuyến của đường tròn (O ; r) song song với 3 cạnh của tam giác ABC, các tiếp tuyến này tạo với các cạnh của tam giác ABC ba tam giác nhỏ có diện tích lần lượt là S^1, S^2, S^3 . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{S_1 + S_2 + S_3}{S}$.	4,0



IV.1	1) Chứng minh: $S = p.r$ (p là nửa chu vi ΔABC , S là diện tích ΔABC).	2,0
	$S = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{AOC}$ $= \frac{OM \cdot AB}{2} + \frac{ON \cdot BC}{2} + \frac{OP \cdot AC}{2}$ $= OM \cdot \left(\frac{AB + BC + AC}{2} \right)$ $= r.p \text{ (đpcm). (Vì } OM=ON=OP=r)$	0,5 0,5 0,5 0,5
IV.2	2) Đường thẳng qua O vuông góc với OC cắt AC và BC lần lượt tại E và F. Chứng minh $\frac{AE}{BF} = \left(\frac{OA}{OB} \right)^2$	2,0
	Ta có $\angle EC = 90^\circ - \frac{C}{2} = \frac{A+B}{2}$ Xét ΔAOE có góc ngoài $\angle EC = \frac{A}{2} + \angle AOE$ $\Rightarrow \frac{A}{2} + \frac{B}{2} = \frac{A}{2} + \angle AOE \Rightarrow \frac{B}{2} = \angle AOE$ $\Rightarrow \Delta AOE \sim \Delta ABO \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AE}{OA} = \frac{AO}{AB} \Rightarrow AE \cdot AB = OA^2 \quad (1)$ Tương tự: $\Rightarrow \Delta OFB \sim \Delta AOB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{FB}{OB} = \frac{OB}{AB} \Rightarrow BF \cdot AB = OB^2 \quad (2)$ Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{AE \cdot AB}{BF \cdot AB} = \frac{OA^2}{OB^2} \Rightarrow \frac{AE}{BF} = \left(\frac{OA}{OB} \right)^2 \text{ (đpcm)}$	0,25 0,5 0,5 0,5
IV.3	3) Kẻ các tiếp tuyến của đường tròn $(O; r)$ song song với 3 cạnh của Δ	2,0

	ABC, các tiếp tuyến này tạo với các cạnh của tam giác ABC ba tam giác nhỏ có diện tích lần lượt là S^1, S^2, S^3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{S_1 + S_2 + S_3}{S}$.	
	Tiếp tuyến của $(O; r)$ cắt AB, AC lần lượt tại I và K. $BC = a; AC = b; AB = c$, h_a là chiều cao $\triangle ABC$, h_1, h_2, h_3 lần lượt là chiều cao các $\triangle$ nhỏ $\triangle AIK \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{S_1}{S} = \left(\frac{h_1}{h_a}\right)^2$ $h_1 = h_a - 2r \Rightarrow \frac{S_1}{S} = \left(\frac{h_a - 2r}{h_a}\right)^2 = \left(1 - \frac{2r}{h_a}\right)^2$ Vì $\frac{a \cdot h_a}{2} = rp$ (c/m câu a) Mà $\frac{ah_a}{2} = rp$ (c/m câu a) $\Rightarrow \frac{S_1}{S} = \left(1 - \frac{a}{p}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{S_1}{S}} = 1 - \frac{a}{p}$ nên $2r = \frac{ah_a}{p}$ C/m tương tự ta có $\sqrt{\frac{S_2}{S}} = 1 - \frac{b}{p}; \sqrt{\frac{S_3}{S}} = 1 - \frac{c}{p}$ $\Rightarrow \sqrt{\frac{S_1}{S}} + \sqrt{\frac{S_2}{S}} + \sqrt{\frac{S_3}{S}} = 3 - \frac{a+b+c}{p} = 3 - 2 = 1$ $\Rightarrow \left(1 \cdot \sqrt{\frac{S_1}{S}} + 1 \cdot \sqrt{\frac{S_2}{S}} + 1 \cdot \sqrt{\frac{S_3}{S}}\right) \leq 3 \cdot \left(\frac{S_1}{S} + \frac{S_2}{S} + \frac{S_3}{S}\right)$ Ta có $1 = \left(1 \cdot \sqrt{\frac{S_1}{S}} + 1 \cdot \sqrt{\frac{S_2}{S}} + 1 \cdot \sqrt{\frac{S_3}{S}}\right) \leq 3 \cdot \left(\frac{S_1}{S} + \frac{S_2}{S} + \frac{S_3}{S}\right)$ (Bất đẳng thức Bunhiacôpski) $\Rightarrow \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S} \geq \frac{1}{3} \Rightarrow \min \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{S_1}{S}} = \sqrt{\frac{S_2}{S}} = \sqrt{\frac{S_3}{S}}$ $\Rightarrow 1 - \frac{a}{p} = 1 - \frac{b}{p} = 1 - \frac{c}{p} \Rightarrow a = b = c \Rightarrow \triangle ABC \text{ đều}$	0,5 0,5 0,5 0,5
V.	Với x, y, z là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{\sqrt{2x^2+y^2+3}} + \frac{1}{\sqrt{2y^2+z^2+3}} + \frac{1}{\sqrt{2z^2+x^2+3}}$	
	Ta có $2x^2 + y^2 + 3 = x^2 + y^2 + x^2 + 1 + 2 \geq 2xy + 2x + 2 \Rightarrow 2x^2 + y^2 + 3 \geq 2(xy + x + 1)$ Tương tự ta có $2y^2 + z^2 + 3 \geq 2(zy + y + 1)$ $2z^2 + x^2 + 3 \geq 2(xz + z + 1)$	0,5

	Từ đó suy ra $\frac{p^2}{3} \leq \frac{1}{2x^2+y^2+3} + \frac{1}{2y^2+z^2+3} + \frac{1}{2z^2+x^2+3} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{xy+x+1} + \frac{1}{zy+y+1} + \frac{1}{zx+z+1} \right)$ $3 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}} \Rightarrow xyz \geq 1$ Vì $xyz \geq 1$ và $x > 0$ nên $yz \geq \frac{1}{x}$ $\frac{1}{zy+y+1} \geq \frac{1}{x+y+1} \Leftrightarrow \frac{1}{yz+y+1} \leq \frac{1}{xy+x+1} \quad (5)$ Suy ra $\frac{1}{xz+z+1} \leq \frac{xyz}{xz+z+xyz} \Leftrightarrow (xyz-1)(xz+z) \geq 0 \quad (\text{luôn đúng}).$ $\frac{1}{xz+z+1} \leq \frac{xy}{xy+x+1} \quad (6)$ Suy ra Từ (5) và (6) ta có $\frac{1}{xy+x+1} + \frac{1}{zy+y+1} + \frac{1}{zx+z+1} \geq \frac{1}{xy+x+1} + \frac{x}{xy+x+1} + \frac{xy}{xy+x+1} = 1 \quad (**)$ $\text{Từ (*) và (**)} \Rightarrow P^2 \geq \frac{3}{2} \Rightarrow P \leq \frac{\sqrt{6}}{2}$ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$. Vậy GTLN của $P = \frac{\sqrt{6}}{2}$, đạt được khi $x = y = z = 1$.	0,5 0,5 0,25 0,25
--	--	---

Ghi chú:

-Học sinh làm cách khác mà đúng thì vẫn cho điểm tối đa.

-Bài hình nếu học sinh không vẽ hình hoặc vẽ hình sai cơ bản thì không chấm điểm.