

CHỦ ĐỀ 02: CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

LÝ THUYẾT

❖ Định nghĩa

- Giả sử hàm số f xác định trên tập K và $x_0 \in K$. Ta nói:
- x_0 là **điểm cực tiểu** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa x_0 sao cho $(a;b) \subset K$ và $f(x) > f(x_0), \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$. Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số f .
- x_0 là **điểm cực đại** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa x_0 sao cho $(a;b) \subset K$ và $f(x) < f(x_0), \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$. Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số f .
- Điểm cực đại và điểm cực tiểu gọi chung là **điểm cực trị**.
- Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu gọi chung là **cực trị**.
- Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị của hàm số** và điểm cực trị phải là một điểm trong tập hợp K .
- Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là **giá trị cực trị (hay cực trị)** của hàm số.
- Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số thì điểm $(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực trị của đồ thị** hàm số f .

❖ Quy tắc tìm cực trị

➤ Quy tắc 1:

- **Bước 1:** Tìm tập xác định. Tìm $f'(x)$.
- **Bước 2:** Tìm các điểm x_i ($i = 1; 2; \dots$) mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm.
- **Bước 3:** Lập bảng biến thiên hoặc bảng xét dấu $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi đi qua x_i thì hàm số đạt cực trị tại x_i .

➤ Định lý

- Giả sử $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trong khoảng $(x_0 - h; x_0 + h)$ với $h > 0$. Khi đó:
- Nếu $f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại x_0 .
- Nếu $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại x_0 .

Từ định lý trên, ta có một quy tắc khác để tìm cực trị của hàm số

➤ Quy tắc 2:

- **Bước 1:** Tìm tập xác định. Tìm $f'(x)$.
- **Bước 2:** Tìm các nghiệm x_i ($i = 1; 2; \dots$) của phương trình $f'(x) = 0$.
- **Bước 3:** Tính $f''(x)$ và tính $f''(x_i)$.

Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_i .

Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_i .

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1. Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1$ đạt cực tiểu tại điểm

A. $x = -1$.

B. $x = 1$.

C. $x = -3$.

D. $x = 3$.

Chọn B

Ta có hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = x^2 + 2x - 3; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}.$$

$$y'' = 2x + 2; y''(-3) = -4 < 0; y''(1) = 4 > 0.$$

Suy ra hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.

VÍ DỤ 2. Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3(7m-3)x$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số không có cực trị. Số phần tử của S là

A. 2.

B. 4.

C. 0.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3(7m-3)x$ (1) $\Rightarrow y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 3(7m-3)$.

Ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + 7m-3 = 0$ (2)

Hàm số đã cho không có cực trị

$\Leftrightarrow$ Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta'_{(2)} \leq 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 1 \cdot (7m-3) \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - 5m + 4 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 4.$$

Do m là số nguyên nên $m \in \{1; 2; 3; 4\}$. Vậy tập S có 4 phần tử.

VÍ DỤ 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 1)(x - 4)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(3 - x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 0.

B. 1.

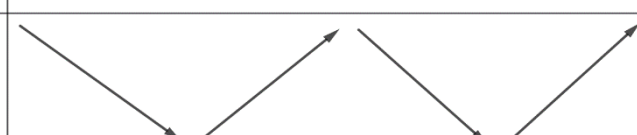
C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết, ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$	-1	1	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$					

Ta có $g(x) = f(3-x) \Rightarrow g'(x) = -f'(3-x)$.

Từ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta có

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(3-x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x \leq -1 \\ 1 \leq 3-x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ -1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Như thế ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$	-1	2	4	$+\infty$		
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$							

Từ bảng biến thiên, ta nhận thấy hàm số $g(x)$ có một điểm cực đại.

VÍ DỤ 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	2	-1	3	2		

Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ là

A. 7.

B. 5.

C. 6.

D. 8.

Lời giải

Chọn B

Gọi đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là (C) .

Đặt $g(x) = |f(x)|$ và gọi (C') là đồ thị của hàm số $y = g(x)$. Đồ thị (C') được suy ra từ đồ thị (C) như sau:

Giữ nguyên phần đồ thị của (C) phía trên Ox ta được phần I.

Với phần đồ thị của (C) phía dưới Ox ta lấy đối xứng qua Ox , ta được phần II.

Hợp của phần I và phần II ta được (C') .

Từ cách suy ra đồ thị của (C') từ (C) , kết hợp với bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = g(x) = |f(x)|$ như sau:

x	$-\infty$	a	-1	b	0	c	1	$+\infty$
$y = f(x) $	$+\infty$	0	2	0	1	0	3	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị.

VÍ DỤ 5. Cho hàm số $y = \frac{x^5}{5} - (2m-1)x^4 - \frac{m}{3}x^3 + 2019$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$?

A. Vô số.

B. 1.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = x^4 - 4(2m-1)x^3 - mx^2 = x^2[x^2 - 4(2m-1)x - m]$.

Dễ thấy $x = 0$ là một nghiệm của đạo hàm y' . Do đó hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ khi và chỉ khi y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua nghiệm $x = 0$. Ta thấy dấu của y' là dấu của hàm số $g(x) = x^2 - 4(2m-1)x - m$. Hàm số $g(x)$ đổi dấu khi đi qua giá trị $x = 0$ khi $x = 0$ là nghiệm của $g(x)$. Khi đó $g(0) = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Thử lại, với $m = 0$ thì $g(x) = x^2 + 4x$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua giá trị $x = 0$.

Vậy có 1 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

VÍ DỤ 6. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ cắt đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R = 1$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất?

A. $m = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$.

B. $m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$.

C. $m = \frac{2 \pm \sqrt{5}}{2}$.

D. $m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

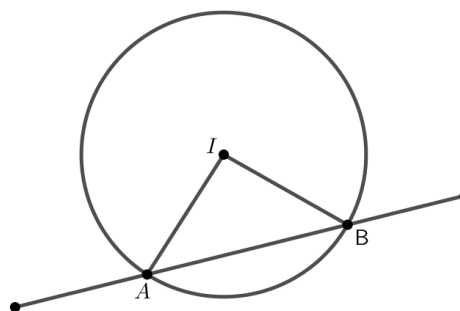
Chọn B

Ta có $y = x^3 - 3mx + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 3m$. Hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ có 2 điểm cực trị

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 3x^2 - 3m = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$ (1)

Ta có: $y = \frac{1}{3}x.y' - 2mx + 2$.

Suy ra phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm cực đại và cực tiểu là $y = -2mx + 2 \Leftrightarrow 2mx + y - 2 = 0$



Đường thẳng Δ cắt đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R = 1$ tại hai điểm phân biệt A, B

$$\Leftrightarrow d(I; \Delta) < R \Leftrightarrow \frac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}} < 1 \Leftrightarrow |2m-1| < \sqrt{4m^2+1} \Leftrightarrow -4m < 0 \text{ luôn đúng do } m > 0$$

$$\text{Ta có } S_{IAB} = \frac{1}{2} \cdot IA \cdot IB \cdot \sin AIB = \frac{1}{2} \cdot \sin AIB \leq \frac{1}{2}. \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \sin AIB = 1 \Leftrightarrow AIB = 90^\circ.$$

Khi đó tam giác IAB vuông cân tại I có $IA = 1$ nên

$$d(I; \Delta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 4m^2 - 8m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2} \text{ thỏa mãn đk (1)}$$

Vậy diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất khi $m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$.

VÍ DỤ 7. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = x^4 + 2(m-2)x^2 + 3m - 2$ có ba điểm cực trị.

A. $m \in (2; +\infty)$.

B. $m \in (-2; 2)$.

C. $m \in (-\infty; 2)$.

D. $m \in (0; 2)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } y = x^4 + 2(m-2)x^2 + 3m - 2; y' = 4x^3 + 4(m-2)x = 4x(x^2 + m - 2)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 2 - m \end{cases} \quad (1)$$

Để hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \text{phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác } 0 \Leftrightarrow 2 - m > 0 \Leftrightarrow m < 2.$$

VÍ DỤ 8. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x^2 - 4x)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(2x^2 - 12x + m)$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 18.

B. 17.

C. 16.

D. 19.

Lời giải.

Chọn B

$$\text{Ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x^2 - 4x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 4 \end{cases}, \text{ trong đó } x = -1 \text{ là nghiệm kép.}$$

$$g(x) = f(2x^2 - 12x + m) \Rightarrow g'(x) = (4x - 12)f'(2x^2 - 12x + m)$$

$$\text{Xét } g'(x) = 0 \Leftrightarrow (4x - 12)f'(2x^2 - 12x + m) = 0 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 2x^2 - 12x + m = -1 \\ 2x^2 - 12x + m = 0 \\ 2x^2 - 12x + m = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 2x^2 - 12x + m = -1 \quad (I) \\ 2x^2 - 12x = -m \quad (1) \\ 2x^2 - 12x = 4 - m \quad (2) \end{cases}$$

(Điểm cực trị của hàm số $g(x)$ là nghiệm bội lẻ của phương trình $(*)$ nên ta loại phương trình

$$2x^2 - 12x + m = -1). \text{ Xét hàm số } y = 2x^2 - 12x \text{ có đồ thị (C) có } y' = 4x - 12$$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
y'		-	0	+	
y	$+\infty$	↘		↗	
			-18		

Để $g(x)$ có đúng 5 điểm cực trị thì mỗi phương trình (1);(2) đều có hai nghiệm phân biệt $\neq 3$
Do đó, mỗi đường thẳng $y = 4 - m$ và $y = -m$ phải cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ khác 3. Nhận xét: đường thẳng $y = 4 - m$ luôn nằm trên đường thẳng $y = -m$.
Ta có: $-18 < -m \Leftrightarrow m < 18$. Vậy có 17 giá trị m nguyên dương.

VÍ DỤ 9. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - (2m-1)x^2 + (8-m)x + 2$ với $m \in \mathbb{R}$. Tập hợp tất cả các giá trị của m để hàm số $y = f(|x|)$ có 5 cực trị là khoảng $(a;b)$. Tích $a.b$ bằng

A. 12.

B. 16.

C. 10.

D. 14.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = x^2 - 2(2m-1)x + 8 - m$.

Vì $f(|x|)$ là hàm chẵn (do $f(|-x|) = f(|x|)$), nên đồ thị hàm $f(|x|)$ đối xứng qua trục Oy . Do đó, khi hàm $f(x)$ có hai cực trị dương thì hàm $f(|x|)$ sẽ có thêm hai cực trị đối xứng qua trục Oy và một cực trị còn lại chính là giao điểm của đồ thị hàm $f(|x|)$ và trục Oy .

Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt.

$$\text{Điều kiện tương đương là } \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m-1)^2 - (8-m) > 0 \\ 2m-1 > 0 \\ 8-m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 3m - 7 > 0 \\ m > \frac{1}{2} \\ m < 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \vee m > \frac{7}{4} \\ m > \frac{1}{2} \\ m < 8 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(\frac{7}{4}; 8 \right). \text{ Vậy } a = \frac{7}{4}, b = 8 \text{ và } a.b = 14.$$