

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1. (3,0 điểm)

- 1) Cho biểu thức $A = \frac{x}{\sqrt{x}+2} + \frac{3}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}-21}{x-\sqrt{x}-6}$ với $x \geq 0, x \neq 9$. Rút gọn và tìm x để $A \leq 2$.
- 2) Tìm các số thực $x \geq y \geq 4$ thỏa mãn $\frac{x+y}{2} = 2\sqrt{y-4} + \sqrt{xy-y^2}$.

Câu 2. (5,0 điểm)

- 1) Giải phương trình $\frac{x^2}{2} + x = 4 - 3\sqrt{2x+3}$.
- 2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x-1 = \sqrt{2xy-4x-y^2+2y} \\ \sqrt{y-4} - 2\sqrt{5-x} = x^2-3y-2 \end{cases}$.

Câu 3. (3,0 điểm)

- 1) Tìm các số tự nhiên x, y thỏa mãn $x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y$
- 2) Cho p là số nguyên tố lẻ và x, y là các số tự nhiên lẻ sao cho $x \geq y$, $x+y$ chia hết cho p , $x-y$ chia hết cho $p-1$. Chứng minh rằng $x^y + y^x$ chia hết cho $2p$.

Câu 4. (7,0 điểm)

1) Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O , tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại điểm M . Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng AO tại I cắt đường thẳng AB, AC lần lượt tại D và E , OM cắt BC tại H . Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BD và CE . Chứng minh rằng:

a) Bốn điểm B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn có tâm là M ;

b) AH vuông góc với PQ .

2) Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC$, đường cao AH . Đường tròn tâm O đường kính AH cắt cạnh AB ở D , cắt cạnh AC ở E . Đường thẳng đi qua A vuông góc với DE tại I cắt cạnh BC tại F , DE cắt AH tại M . Chứng minh rằng $\frac{S_{\triangle ADM}}{S_{\triangle AFC}} = \sin^2 \widehat{ABC} \cdot \sin^2 \widehat{ACB}$

Câu 5. (2,0 điểm)

1) Cho các số thực dương x, y thay đổi thoả mãn $\sqrt{xy} \geq 4y^2 + 1$.

Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $E = \frac{2313xy}{2023(x^2 + y^2)}$.

2) Cho $n+1$ ($n \geq 1, n \in \mathbb{N}$) số tự nhiên phân biệt và nhỏ hơn $2n$. Chứng minh rằng trong các số đã cho luôn có thể chọn ra 3 số mà một trong ba số này bằng tổng của hai số còn lại.

_____HẾT_____