SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH PHÚ YÊN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH

LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2023-2024
MÔN THI: TOÁN

Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

(Đề thi có một trang)

Câu 1. (3,00 điểm) Cho biểu thức: $A=\sqrt{x+\frac{3}{4}+\sqrt{x+\frac{1}{2}}}+x.$

a) Tìm điều kiện của x để A có nghĩa.

b) Tính x khi A=2.

Câu 2. (4,00 điểm) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 505x+253y=2022 \\ x^3+3(x^2+y^2)+4x=y^3+4y-4 \end{cases}$$

Câu 3. (3,00 điểm) Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $2(x+y)+4=5xy.$

Câu 4. (3,00 điểm) Cho đường tròn (O) đường kính AB=2R, C là trung điểm của OA, M là một điểm thuộc (O) sao cho MA>MB. Đường thẳng MC cắt (O) tại D (D khác M), đường thẳng qua D và vuông góc với AB cắt (O) tại E (E khác D), đường thẳng ME cắt đường thẳng ME cắt đường thẳng AB tại F.

a) Chứng minh AF=AO.

b) Đường thẳng qua M song song với DE cắt AB tại H và cắt (O) tại điểm thứ hai N. Chứng minh rằng 3 điểm F, D, N thẳng hàng.

c) Trong trường hợp EF=MC, tính độ dài đoạn thẳng CH theo R.

Câu 5. (5,00 điểm)

a) Cho a, b, c là ba số dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{2ab}{a+b}+\frac{2bc}{b+c}+\frac{2ca}{c+a}\le a+b+c.$$

b) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $\frac{1}{\left(1+\frac{y}{x}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{z}{y}\right)^2}=\frac{1}{1+\frac{z}{x}}.$ Chứng minh rằng x=y=z.

Câu 6. (2,00 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AD. Gọi E, F, G lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABD, ACD, ABC. Gọi H là giao điểm của hai đường thẳng AG và EF. Chứng minh rằng $\frac{1}{HG}=\frac{1}{HA}+\frac{1}{HE}+\frac{1}{HF}.$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (3,00 điểm) Cho biểu thức: $A = \sqrt{x + \frac{3}{4} + \sqrt{x + \frac{1}{2}}} + x.$

a) Tìm điều kiện của x để A có nghĩa.

b) Tính x khi A=2.

Lời giải

a) Vì $x + \frac{3}{4} + \sqrt{x + \frac{1}{2}} = \left(\sqrt{x + \frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ nên điều kiện của x để A có nghĩa là:

$$x + \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}.$$

b) Tính x biết A=2.

Biến đổi ta có: $\sqrt{\left(\sqrt{x + \frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\right)^2} + x = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x + \frac{1}{2}} + \frac{1}{2} + x = 2$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x + \frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x + \frac{1}{2}} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Câu 2. (4,00 điểm) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 505x + 253y = 2022 & (1) \\ x^3 + 3(x^2 + y^2) + 4x = y^3 + 4y - 4 & (2) \end{cases}$$

Lời giải

Phương trình (2) tương đương:

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + x + 1 = y^3 - 3y^2 + 3y - 1 + y - 1$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3 + x + 1 = (y-1)^3 + y - 1 \quad (3)$$

Đặt u=x+1; v=y-1 thì phương trình (3) là:

$$u^3 + u = v^3 + v \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 1) = 0 \ (4).$$

Ta thấy: $u^2 + uv + v^2 + 1 = \left(u + \frac{v}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + 1 > 0$ nên từ (4) suy ra u=v.

Từ u=v ta có: $x + 1 = y - 1 \Leftrightarrow y = x + 2$. Thế vào (1) ta được:

$505x + 253(x+2) = 2022 \Leftrightarrow 758x = 1516 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 4.$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất: (x:y)=(2;4).

Câu 3. (3,00 điểm) Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $2(x+y)+4=5xy$.

Lời giải

Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $2(x+y)+4=5xy$ (1).

Biến đổi (1): $5xy-2x-2y=4 \Leftrightarrow y(5x-2)-\frac{2}{5}(5x-2)=4+\frac{4}{5}$

$$\Leftrightarrow (5x-2)(5y-2)=24 \quad (2)$$

Giả sử $x \le y$ thì $5x-2 \le 5y-2$.

Từ (2) ta có các hệ phương trình sau:

$$\text{a)}\begin{cases}5x-2=1\\5y-2=24\end{cases};\ \text{b)}\begin{cases}5x-2=-24\\5y-2=-1\end{cases}$$

$$\text{c)}\begin{cases}5x-2=2\\5y-2=12\end{cases};\ \text{d)}\begin{cases}5x-2=-12\\5y-2=-2\end{cases}$$

$$\text{e)}\begin{cases}5x-2=3\\5y-2=8\end{cases};\ \text{f)}\begin{cases}5x-2=-8\\5y-2=-3\end{cases}$$

$$\text{g)}\begin{cases}5x-2=4\\5y-2=6\end{cases};\ \text{h)}\begin{cases}5x-2=-6\\5y-2=-4\end{cases}$$

Chỉ có hệ d) có nghiệm nguyên $(x;y)=(-2;0)$ và hệ e) có nghiệm nguyên $(x;y)=(1;2)$.

Vậy hệ có 4 nghiệm $(x;y)$: $(1;2), (2;1), (-2;0), (0;-2)$.

Câu 4. (3,00 điểm) Cho đường tròn (O) đường kính AB=2R, C là trung điểm của OA, M là một điểm thuộc (O) sao cho MA>MB. Đường thẳng MC cắt (O) tại D (D khác M), đường thẳng qua D và vuông góc với AB cắt (O) tại E (E khác D), đường thẳng ME cắt đường thẳng ME cắt đường thẳng AB tại F.

a) Chứng minh AF=AO.

b) Đường thẳng qua M song song với DE cắt AB tại H và cắt (O) tại điểm thứ hai N. Chứng minh rằng 3 điểm F, D, N thẳng hàng.

c) Trong trường hợp EF=MC, tính độ dài đoạn thẳng CH theo R.

Lời giải

a) Chứng minh AF=AO.

Dễ thấy ΔMOA cân tại O $\Rightarrow \widehat{MAO}=\widehat{AMO}=\widehat{AMC}+\widehat{CMO}$ (1)

Theo tính chất góc ngoài tam giác thì $\widehat{MAO}=\widehat{FMA}+\widehat{MFA}$ (2)

Từ (1) và (2) kết hợp với $\widehat{AMC}=\widehat{FMA}\Rightarrow \widehat{CMO}=\widehat{MFA}$

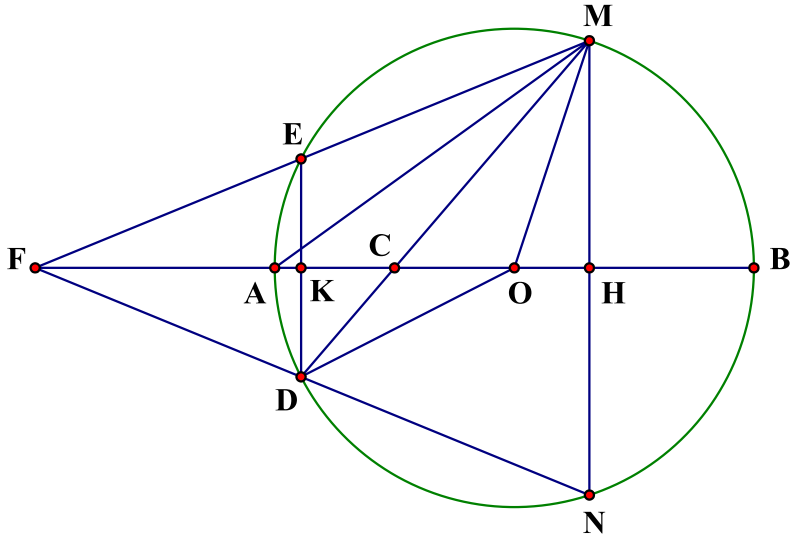
Suy ra $\Delta OMC \sim \Delta OFM \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{MF}{MC}=\frac{MO}{OC}=2$.

Vì điểm A nằm chính giữa cung DE nên MA là đường phân giác của ΔMFC

$$\Rightarrow \frac{AF}{AC}=\frac{MF}{MC}=2\ (3)\Rightarrow AF=2AC\Rightarrow AF=AO.$$

b) Chứng minh 3 điểm F, D, K thẳng hàng

Vì MN//DE và $AB\perp DE$ suy ra $AB\perp MN$ nên



$$\overset{\frown}{MB}=\overset{\frown}{BN}\Rightarrow \overset{\frown}{MA}=\overset{\frown}{AN}\Rightarrow \widehat{MBF}=\widehat{NBF}$$

$$\Rightarrow \Delta MBF=\Delta NBF\ (c.g.c)\Rightarrow \widehat{MFB}=\widehat{NFB}\ (4)$$

Gọi K là giao điểm của ED và AB. ΔEFD có FK vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến nên cân tại F suy ra $\widehat{EFK}=\widehat{DFK}\ (5)$. Từ (4) và (5) suy ra $\widehat{DFB}=\widehat{NFB}$; hay F, D, N thẳng hàng.

c) Tính số đo CH theo R khi EF=MC.

Khi EF=MC, kết hợp với (3) suy ra EF=EM. Vì ED//MN (gt) nên ED là đường trung bình của tam giác MFN, suy ra D là trung điểm của FN.

Khi đó C là trọng tâm $\Delta MFN\Rightarrow CH=\frac{1}{2}CF=\frac{1}{2}.\frac{3R}{2}=\frac{3}{4}R.$

Câu 5. (5,00 điểm)

a) Cho a, b, c là ba số dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{2ab}{a+b}+\frac{2bc}{b+c}+\frac{2ca}{c+a}\le a+b+c.$$

b) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $\frac{1}{\left(1+\frac{y}{x}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{z}{y}\right)^2}=\frac{1}{1+\frac{z}{x}}.$

Chứng minh rằng x=y=z.

Lời giải

a) Cho a, b, c là 3 số dương. CMR: $\frac{2ab}{a+b}+\frac{2bc}{b+c}+\frac{2ca}{c+a}\le a+b+c$.

Xét hiệu: $P=(a+b+c)-\left(\frac{2ab}{a+b}+\frac{2bc}{b+c}+\frac{2ca}{c+a}\right)$.

$$P=\frac{a+b}{2}-\frac{2ab}{a+b}+\frac{b+c}{2}-\frac{2bc}{b+c}+\frac{c+a}{2}-\frac{2ca}{c+a}$$

$$=\frac{(a+b)^2-4ab}{2(a+b)}+\frac{(b+c)^2-4bc}{2(b+c)}+\frac{(c+a)^2-4ca}{2(c+a)}$$

Ta thấy: $=\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}+\frac{(b-c)^2}{2(b+c)}+\frac{(c-a)^2}{2(c+a)}$

Vì a, b, c là 3 số dương nên $a+b>0$, $b+c>0$, $c+a>0$ nên $P\ge 0$ (Dấu "=" xảy ra khi a=b=c).

Theo định nghĩa bất đẳng thức ta có điều phải chứng minh.

b) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $\frac{1}{\left(1+\frac{y}{x}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{z}{y}\right)^2}=\frac{1}{1+\frac{z}{x}}$.

Chứng minh x=y=z.

Đặt $a=\frac{y}{x}, b=\frac{z}{y}$ thì a>0, b>0. (1) viết lại là: $\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}=\frac{1}{1+ab}$.

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{1+a}-\frac{1}{1+b}\right)^2=\frac{1}{1+ab}-\frac{2}{(1+a)(1+b)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(a-b)^2}{(1+a)^2(1+b)^2}=\frac{a+b-ab-1}{(1+ab)(1+a)(1+b)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{(a-b)^2}{(1+a)(1+b)}=\frac{-(1-a)(1-b)}{1+ab}$$

$$\Leftrightarrow(1+ab)(a-b)^2+(1-a^2)(1-b^2)=0$$

$$\Leftrightarrow ab(a-b)^2+(ab-1)^2=0$$

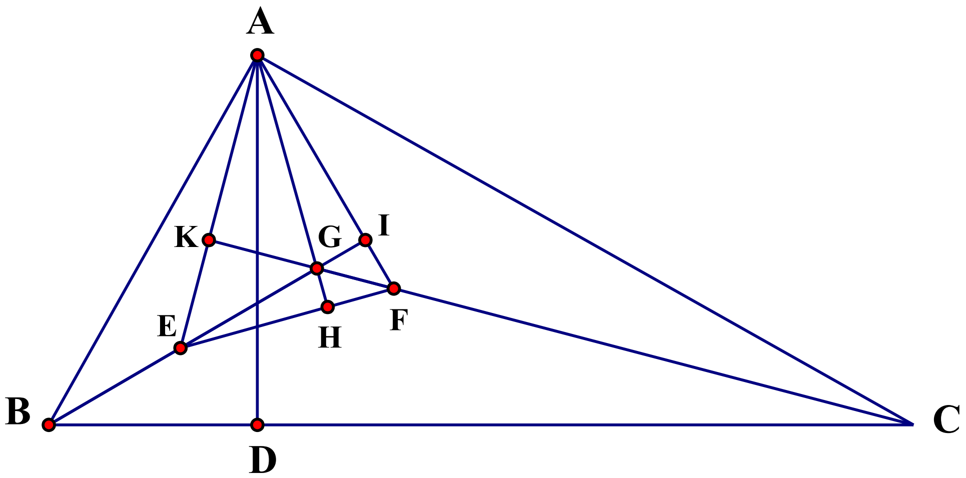
$$\Leftrightarrow(a-b)^2=(ab-1)^2=0\ (\text{do } ab>0)$$

$$\Leftrightarrow a=b=1.$$

Vì vậy $\frac{y}{x}=\frac{z}{y}=1\Leftrightarrow x=y=z$ (đpcm).

Câu 6. (2,00 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AD. Gọi E, F, G lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABD, ACD, ABC. Gọi H là giao điểm của hai đường thẳng AG và EF. Chứng minh rằng $\frac{1}{HG}=\frac{1}{HA}+\frac{1}{HE}+\frac{1}{HF}.$

Lời giải



Gọi I, K lần lượt là giao điểm của BE với AF và CF với AE.

Ta có $\widehat{BAD}=\widehat{ACD}\Rightarrow \widehat{BAE}=\widehat{ACK}.$

Mà $\widehat{BAE}+\widehat{EAC}=90^0 \Rightarrow \widehat{ACK}+\widehat{KAC}=90^0$

Do đó $CK\perp AE$ hay $FK\perp AE$ (1).

Chứng minh tương tự ta cũng có $EI\perp AF$ (2).

Từ (1) và (2), kết hợp với EI và FK cùng đi qua điểm G suy ra G là trực tâm của tam giác AEF, do đó AH là đường cao của tam giác AEF.

Ta thấy

$$\Delta HGF\sim\Delta HEA\ (g.g)\Rightarrow \frac{HG}{HE}=\frac{HF}{HA}\Rightarrow HG.HA=HE.HF$$

$$\Rightarrow HG(HG+GA)=HE.HF\ (3)$$

Mặt khác $\widehat{BAD}+\widehat{DAC}=90^0\Rightarrow \widehat{FAD}+\widehat{DAE}=45^0\Rightarrow \widehat{FAK}=45^0$

Suy ra tam giác AKF vuông cân

$\Rightarrow KA=KF\Rightarrow \Delta KAG=\Delta KFE\ (g.c.g)\Rightarrow AG=EF\ (4).$

Từ (3) và (4) ta có:

$HG(HG+EF)=HE.HF\Leftrightarrow HG(HG+HE+HF)=HE.HF.$

Chia hai vế đẳng thức trên cho biểu thức HE.HF.HG với chú ý rằng HE.HF=HG.HA ta được

$$\frac{1}{HG}=\frac{1}{HA}+\frac{1}{HE}+\frac{1}{HF}.$$