**HÌNH HỌC 10 – CHƯƠNG 2**

**§2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ**

**Thời lượng dự kiến: 3 tiết**

Facebook GV1 soạn bài: Ngocdiep Nguyen

Facebook phản biện: Nguyen Huu Than

**TIẾT 3**

**CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI**.

**Dạng 1. Tính các tích vô hướng**.

**Dạng 2. Chứng minh các đẳng thức liên quan tích vô hướng**.

**Dạng 3. Tìm tập hợp điểm thoả mãn điều kiện cho trước**.

**A. Phần kiến thức chính**

**Dạng 1. Tính các tích vô hướng**.

**1. Phương pháp:**

**Cách 1:** Dựa vào định nghĩa 



**Cách 2:** Sử dụng tính chất và các hằng đẳng thức của tích vô hướng của hai vectơ.

**2. Ví dụ**

**Ví dụ 1.** Cho hình thoi  có độ dài cạnh bằng  và .

Gọi  là trung điểm của. Tính

a) . b) .

**Hướng dẫn giải**

a) Ta có 

b) Ta có  đều 

Xét tam giác  vuông tại có



Vậy 

Cách 2: PP tọa độ hóa



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.





**Ví dụ 2:** Cho hình vuông  cạnh a. M là trung điểm của AB, G là trọng tâm tam giác . Tính giá trị các biểu thức sau:

.



**Bài giải**

Theo quy tắc hình bình hành ta có 

Do đó 



 .

Mặt khác,  và theo định lý Pitago ta có: .

Suy ra .

**Ví dụ 3:** Cho tam giác  có . M là trung điểm của BC, D là chân đường phân giác trong góc A.

a) Tính , rồi suy ra .

b) Tính  và .

**Bài giải**



a) Ta có 

.

Mặt khác .

Suy ra  hay .

b) \* Vì M là trung điểm của BC nên 

Suy ra .

Theo câu a) ta có  nên

.

Theo tính chất đường phân giác thì .Suy ra  (\*)

Mặt khác  và  thay vào (\*) ta được







.

Hay .

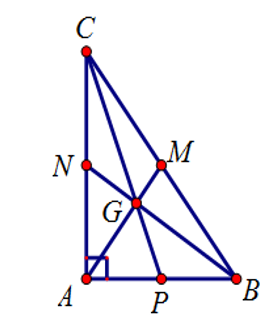
**Ví dụ 4:** Cho tam giác  vuông tại A có và G là trọng tâm.

a) Tính các tích vô hướng ; .

b) Tính giá trị của biểu thức .

c) Tính giá trị của biểu thức .

**Bài giải**



a) \* Theo định nghĩa tích vô hướng ta có

.

Mặt khác  nên 

\* Ta có .

Theo định lý Pitago ta có .

Suy ra .

b) Cách 1: Vì tam giác  vuông tại A nên ,

và từ câu a ta có .

Suy ra .

Cách 2: Từ  và hằng đẳng thức

.

Ta có .

c) Tương tự cách 2 của câu b) vì  nên

.

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB.

Dễ thấy tam giác  đều nên .

.

. Suy ra



**3. BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

**PHẦN TỰ LUẬN**

**Bài 1.** Cho tam giác đều  có đường cao .

a)Tính .

b) Tính .

**Lời giải**

*H*

*E*

*C*

*B*

*A*



a) Ta có .

b) Vẽ . Khi đó .

**Bài 2.** Cho hai vectơ  thỏa mãn , . Tính góc tạo bởi hai vectơ .

**Lời giải**

Ta có .

**Bài 3.** Trong mặt phẳng tọa độ, cho vectơ . Tính góc tạo bởi hai vectơ  và.

**Lời giải**

Ta có .

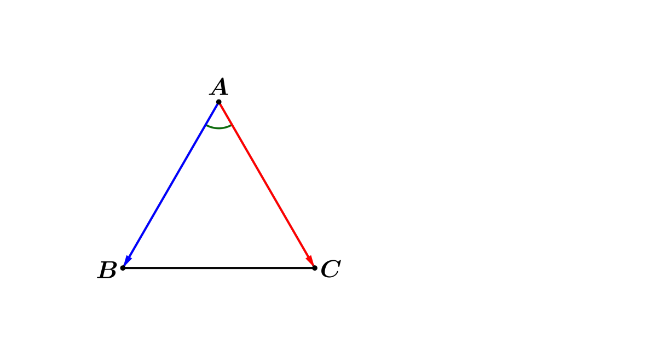
Vậy .

**Bài 4.** Cho tam giác đều , đường cao . Hãy vẽ và tính các góc của các cặp vectơ sau:

a) ; b) ; c) ; d) .

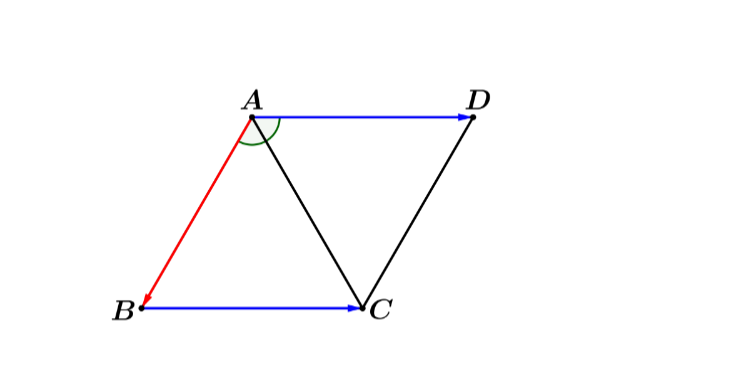
**Lời giải**

a) .

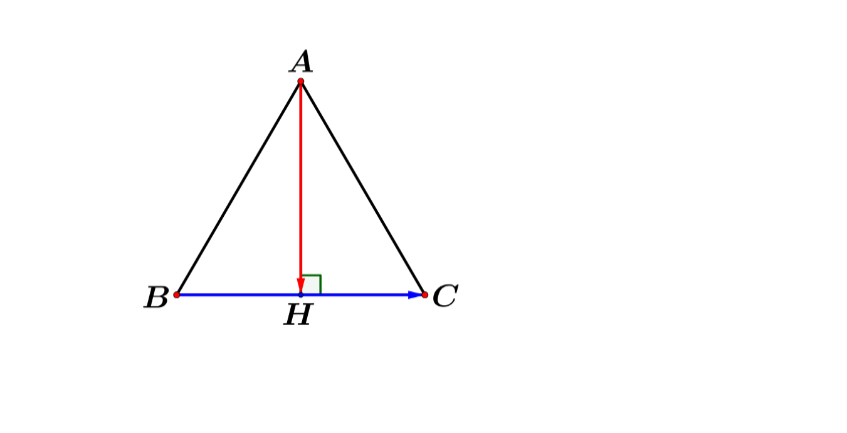
****

b) Dựng hình bình hành , ta có: .

Suy ra: .

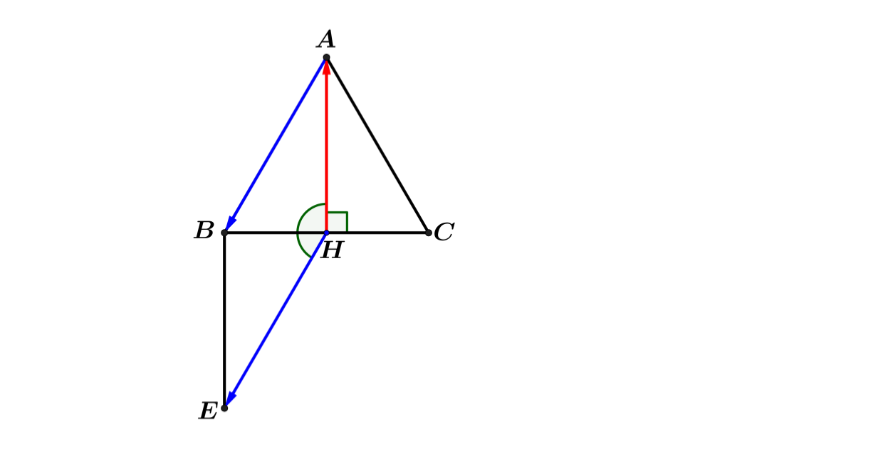
****

c) Tam giác  đều nên . Suy ra .



d) Dựng hình bình hành , ta có: .

Suy ra: .



**Bài 5.** Cho tam giác  vuông tại  có cạnh  và . Tính côsin của góc giữa hai vectơ  và .

**Lời giải**



Ta có: . Mà  nên .

Vậy  hay .

**Bài 6.** Cho tam giác  có  cm;  cm,  cm. Tính .

**Lời giải**

****

Ta có  



.

Khi đó: .

**Bài 7.** Cho tứ giác . Gọi  lần lượt là trung điểm của . Tính góc giữa hai đường thẳng  và ; biết.

**Lời giải**

Ta có:



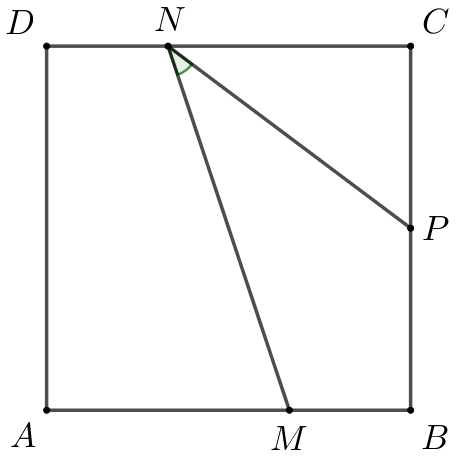
Suy ra .

Do đó .

Vậy góc giữa hai đường thẳng  và  là .

**Bài 8.** Cho hình vuông  cạnh bằng 3. Trên cạnh  lấy điểm  sao cho , trên cạnh  lấy điểm  sao cho  và  là trung điểm . Tính .

**Lời giải**

****

**Cách 1:**

Ta có 

Suy ra 

Mặt khác .

**Cách 2:**

Gắn hệ trục tọa độ  sao cho  trùng với gốc  tức , các điểm , , .

Khi đó: , ;  , 

  .

**Bài 9.** Tam giác có ; ; . Lấy điểm  trên tia  và đặt . Tìm  để  vuông góc với trung tuyến  của tam giác .

**Lời giải**



Ta có: 



 vuông góc với   

 .

Vậy  là giá trị cần tìm.

**Bài 10.** Trong mặt phẳng , cho 4 điểm , , , . Chứng minh rằng tứ giác ABCD nội tiếp được trong một đường tròn.

**Lời giải**

Ta có: ; ; ; .



Vì   và  bù nhau   là tứ giác nội tiếp.

**Bài 11.** Trong mặt phẳng tọa độ , cho hai điểm . Tìm  để .

**Lời giải**

Ta có  nên tọa độ  có dạng: .

Suy ra: , .

Do 

.

Vậy  hoặc .

**Bài 12.** Trong mặt phẳng tọa độ, cho hai vec tơ  và  (với  là tham số). Tìm  để góc tạo bởi hai vec tơ  và  bằng .

**Lời giải**

Ta có: yêu cầu bài toán trở thành 





.

Vậy với  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**PHẦN TRẮC NGHIỆM:**

**Câu 1: [Mức độ 2]** Cho hình thang vuông có đáy lớn , đáy nhỏ , đường cao ,  là trung điểm của . Khi đó  bằng :

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn B**



Ta có nên chọn **B.**

**Câu 2. [Mức độ 2]** Cho hình vuông . Chọn đáp án đúng?

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn D**

Vì  là vuông nên  vuông góc với , do đó .

**Câu 3. [Mức độ 3]** Cho tam giác  vuông tại , ,  là trung điểm của . Tính tích vô hướng .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn D**

Vì tam giác  vuông tại  nên .

Ta có:



.

**Câu 4.** **[Mức độ 3]** Cho tam giác  có , , . Dựng điểm  sao cho, . Đặt . Tính 

**A.** **. B.** **. C.** **. D.** **.**

**Lời giải**

**Chọn A**

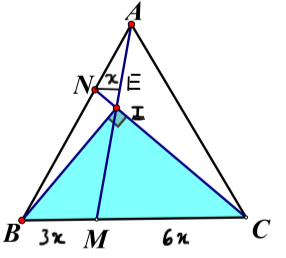
Từ 

Và 

Ta có hệ:. Suy ra .

**Câu 5.** **[Mức độ 4]** Cho tam giác đều  cạnh bằng . Gọi  là các điểm thỏa mãn , . Gọi  là giao điểm của  và . Tính diện tích của tam giác  theo ?

**A.** **. B.** **. C.** **. D.****.**

**Lời giải**

**Chọn A**

Lấy E thuộc AM sao cho .

Đặt 

Vậy .

**DẠNG 2: Chứng minh các đẳng thức liên quan tích vô hướng**.

**1. Phương pháp giải**.

Nếu trong đẳng thức chứa bình phương độ dài của đoạn thẳng thì ta chuyển về vectơ nhờ đẳng thức .

Sử dụng các tính chất của tích vô hướng, các quy tắc phép toán vectơ.

Sử dụng hằng đẳng thức vectơ về tích vô hướng.

**2. Ví dụ**.

**Ví dụ 1.** Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB và M là điểm tùy ý.

Chứng minh rằng: .

**Lời giải**

Đẳng thức cần chứng minh được viết lại là .

Để làm xuất hiện  ở VP, sử dụng quy tắc ba điểm để xen điểm I vào ta được



 (đpcm).

**Ví dụ 2.** Cho bốn điểm A, B, C, D bất kì.

Chứng minh rằng:  (\*).

Từ đó suy ra một cách chứng minh định lí: "Ba đường cao trong tam giác đồng qui".

**Lời giải**

Ta có:





Gọi H là giao của hai đường cao xuất phát từ đỉnh A,B.

Khi đó ta có  (1).

Từ đẳng thức (\*) ta cho điểm D trùng với điểm H ta được

 (2).

Từ (1) (2) ta có  suy ra BH vuông góc với AC.

Hay ba đường cao trong tam giác đồng quy (đpcm).

**Ví dụ 3.** Cho nửa đường tròn đường kính AB. Có AC và BD là hai dây thuộc nửa đường tròn cắt nhau tại E. Chứng minh rằng: .

**Lời giải**



Ta có 



Vì AB là đường kính nên 

Suy ra .

Do đó  (đpcm).

**3. BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

**PHẦN TỰ LUẬN**

**Bài 1.** Cho hình chữ nhật  có tâm  và  là một điểm bất kì. Chứng minh rằng:

a) .

b) .

**Lời giải**

a) .

.

Suy ra .

b) .

**Bài 2.** Cho tam giác  có trực tâm ,  là trung điểm của . Chứng minh rằng .

**Lời giải**

****



.

**Bài 3.** Cho tam giác . Gọi  lần lượt là trung điểm của . Chứng minh rằng: 

**Lời giải**

Vì  là trung điểm  nên:

Tương tự ta có:  ,

 .

Cộng từng vế (1), (2), (3) được:

 hay  (đpcm).

**Bài 4.** Cho lục giác  có  vuông góc với  và hai tam giác  và  có cùng trọng tâm. Chứng minh rằng .

**Lời giải**

Gọi  là trọng tâm của hai tam giác  và . Ta có:

.



Vậy .

**Bài 5.** Cho tam giác đều  cạnh  nội tiếp đường tròn  bán kính ,  là điểm bất kỳ nằm trên đường tròn . Chứng minh rằng .

**Lời giải**

Tam giác đều  cạnh  nội tiếp đường tròn  bán kính  nên  là trọng tâm của tam giác  và .

Ta có: 



(luôn đúng)

Vậy .