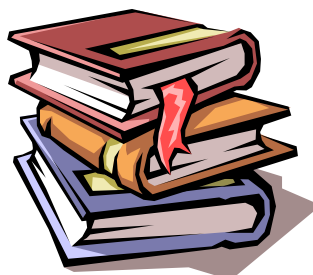


Tailieumontoan.com



Sưu tầm



CÁC CHUYÊN ĐỀ BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN LỚP 9



Tài liệu sưu tầm, ngày 24 tháng 8 năm 2020

TUYỂN TẬP CÁC CHUYÊN ĐỀ BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI LỚP 9

LỜI NÓI ĐẦU

Nhằm đáp ứng nhu cầu về của giáo viên toán THCS và học sinh về các chuyên đề toán THCS, website tailieumontoan.com giới thiệu đến thầy cô và các em các chuyên đề số học bồi dưỡng học sinh giỏi lớp 9. Chúng tôi đã kham khảo qua nhiều tài liệu để làm các chuyên đề về này nhằm đáp ứng nhu cầu về tài liệu hay và cập nhật được các dạng toán mới bồi dưỡng học sinh giỏi lớp 9.

Các vị phụ huynh và các thầy cô dạy toán có thể dùng tuyển tập chuyên đề này để giúp con em mình học tập. Hy vọng các chuyên đề số học lớp 9 này có thể giúp ích nhiều cho học sinh lớp 9 phát huy nội lực giải toán nói riêng và học toán nói chung.

Mặc dù đã có sự đầu tư lớn về thời gian để sưu tầm và tổng hợp song không thể tránh khỏi những hạn chế, sai sót. Mong được sự góp ý của các thầy, cô giáo và các em học!

Chúc các thầy, cô giáo và các em học sinh thu được kết quả cao nhất từ chuyên đề này!

Mục Lục

Trang

Lời nói đầu

Chủ đề 1. Rút gọn biểu thức và bài toán liên quan

Chủ đề 2. Tính giá trị biểu thức, chứng minh đẳng thức

Chủ đề 3. Các dạng toán số học

Chủ đề 4. Các dạng toán về phương trình

Chủ đề 5. Các dạng toán về hệ phương trình

Chủ đề 6. Các bài toán về bất đẳng thức và cực trị

Chủ đề 7. Đa thức

Chủ đề 8. Hàm số

Chủ đề 9. Hình Học

Chủ đề 10. Tổ hợp

Chủ đề 11. Giải bài toán bằng cách lập phương trình, hệ phương trình

CÁC DẠNG BÀI TẬP THI HSG TOÁN 9 QUA CÁC ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI

Dạng 1: Rút gọn biểu thức và bài toán liên quan

A. Bài toán

Bài 1: Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{a}{a-2\sqrt{a}} + \frac{a}{\sqrt{a}-2} \right) : \frac{\sqrt{a}+1}{a-4\sqrt{a}+4}$ với $a > 0; a \neq 4$

Bài 2: Cho biểu thức $M = \frac{x\sqrt{y}-\sqrt{y}-y\sqrt{x}+\sqrt{x}}{1+\sqrt{xy}}$

- 1) Tìm điều kiện xác định và rút gọn M.
- 2) Tính giá trị của M, biết rằng $x = (1-\sqrt{3})^2$ và $y = 3-\sqrt{8}$

Bài 3: Cho biểu thức: $C = \frac{2}{a-16} - \frac{2}{\sqrt{a}-4} - \frac{2}{\sqrt{a}+4}$

- 1) Tìm điều kiện của a để biểu thức C có nghĩa và rút gọn C.
- 2) Tìm giá trị của biểu thức C khi $a = 9-4\sqrt{5}$

Bài 4: Cho biểu thức: $M = \left(\frac{a}{a-2\sqrt{a}} + \frac{a}{\sqrt{a}-2} \right) : \frac{\sqrt{a}+1}{a-4\sqrt{a}+4}$ ($a > 0; a \neq 4$)

- 1) Rút gọn biểu thức M.
- 2) Tìm tất cả các giá trị của a để $M \leq 0$.

Bài 5: Cho biểu thức $A = \frac{a^2+\sqrt{a}}{a-\sqrt{a}+1} - \frac{2a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 1$ với $a > 0$.

- 1) Rút gọn A.
- 2) Tìm giá trị của a để $A = 2$.
- 3) Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

Bài 6: Rút gọn biểu thức: $A = \frac{1}{x+\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{x-1} + \frac{1}{x-\sqrt{x}}$

Bài 7: Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+2\sqrt{x}+4}{x\sqrt{x}-8} + \frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1} \right) : \left(3 + \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} \right)$

- 1) Rút gọn A.
- 2) Tìm giá trị của x để $A > 1$.

Bài 8: Rút gọn biểu thức: $A = \frac{10\sqrt{x}}{x+3\sqrt{x}-4} - \frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+4} + \frac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}}$ ($x \geq 0; x \neq 1$)

Bài 9: Cho biểu thức: $A = \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} \right) : \left(\frac{x-2}{x-\sqrt{x}-2} - 1 \right)$

- 1) Rút gọn biểu thức A.
- 2) Tìm x để $P = 2A - \frac{1}{x}$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 10: Cho biểu thức: $P = \frac{3x + \sqrt{16x} - 7}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 1}$ Với $x > 0$

- 1) Rút gọn biểu thức P
- 2) Tính giá trị của biểu thức khi $x = 2\sqrt{2} + 3$

Bài 11:

- 1) Tính giá trị của biểu thức $A = \sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} - \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}$.
- 2) Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{a-2} + 2}{3} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{a-2}}{3 + \sqrt{a-2}} + \frac{a+7}{11-a} \right) : \left(\frac{3\sqrt{a-2} + 1}{a - 3\sqrt{a-2} - 2} - \frac{1}{\sqrt{a-2}} \right)$.

Bài 12: Cho $A = \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}} \cdot \left[\sqrt{(1+x)^3} + \sqrt{(1-x)^3} \right]}{2 - \sqrt{1 - x^2}}$

- 1) Rút gọn A
- 2) Tìm x biết $A \geq \frac{1}{2}$

Bài 13: Tính giá trị biểu thức: $M = (x - y)^3 + 3(x - y)(xy + 1)$, biết:

$$x = \sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}}, y = \sqrt[3]{17 + 12\sqrt{2}} - \sqrt[3]{17 - 12\sqrt{2}}$$

Bài 14: Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{x - \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \frac{1}{x - 2\sqrt{x} + 1}$

- 1) Rút gọn A.
- 2) Tìm x để $A = \frac{3}{2}$.

Bài 15:

- 1) Rút gọn biểu thức $P = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x} - 1}$ với $x > 0, x \neq 1$.
- 2) Cho $x + \sqrt{3} = 2$. Tính giá trị của biểu thức $A = 7(x^2 - 4x)^{100} + (x^2 - 4x)^{50} + 2016$.

Bài 16:

- 1) Rút gọn biểu thức: $P = \frac{\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x + \sqrt{2x-1}} - \sqrt{x - \sqrt{2x-1}}}$, với $x \geq 2$.
- 2) Cho x là số thực dương thỏa mãn điều kiện $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$. Tính giá trị các biểu thức

$$A = x^5 + \frac{1}{x^5}; B = x^7 + \frac{1}{x^7}.$$

Bài 17: Rút gọn biểu thức $P = \frac{x - 3 + 2\sqrt{x + 4\sqrt{x} + 4}}{x + 3\sqrt{x} + 2}$. Tìm x sao cho $P = \frac{2017}{2018}$.

Bài 18: Tính $A = \frac{1 + \sqrt{11}}{2 + \sqrt{11}} + \sqrt{\frac{2}{18 - 5\sqrt{11}}}$

Bài 19: Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+1+\sqrt{x}} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$ với $x > 0$; $x \neq 1$

1) Rút gọn A

2) Chứng minh $A < \frac{2}{3}$.

Bài 20: Cho $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2^{2018}}$. So sánh A với $\frac{2017}{2018}$.

Bài 21: Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} + \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{1-\sqrt{xy}} + 1 \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{\sqrt{xy}-1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} \right)$ với $x, y \geq 0$ và $xy \neq 1$.

1) Rút gọn P.

2) Tính giá trị của biểu thức P khi $x = \sqrt[3]{4-2\sqrt{6}} + \sqrt[3]{4+2\sqrt{6}}$ và $y = x^2 + 6$.

Bài 22:

1) Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{3}}{x^2 + x\sqrt{3} + 3} + \frac{3}{x^3 - \sqrt{27}} \right) : \left(\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{x} + 1 \right)$, với $x \neq \sqrt{3}$; $x \neq 0$.

2) Tính tổng $B = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{2018^2} + \frac{1}{2019^2}}$.

Bài 23: Rút gọn biểu thức: $P = \left(\frac{2(a+b)}{\sqrt{a^3} - 2\sqrt{2b^3}} - \frac{\sqrt{a}}{a + \sqrt{2ab} + 2b} \right) : \left(\frac{\sqrt{a^3} + 2\sqrt{2b^3}}{2b + \sqrt{2ab}} - \sqrt{a} \right)$ với $a \geq 0$; $b > 0$; $a \neq 2b$.

Bài 24: Cho biểu thức: $A = \frac{2\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$. Chứng minh A là một số nguyên.

Bài 25: Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}}{\sqrt{2} - \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{7 - 2\sqrt{10}}}$.

Bài 26: Cho biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3}{x\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0$.

1) Rút gọn A.

2) Tìm giá trị lớn nhất của A.

Bài 27: Không dùng máy tính cầm tay, hãy rút gọn biểu thức

$$B = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$$

Bài 28: Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{x-\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} - \frac{x-5}{x-\sqrt{x}-2} \right)$ với $x > 0$; $x \neq 4$

Bài 29:

1) Trục căn thức ở mẫu của biểu thức sau $\frac{2}{\sqrt[3]{4 + \sqrt[3]{2}} + 2}$.

2) Tìm điều kiện để biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} + \frac{x-2}{x-3\sqrt{x}+2}$ có nghĩa và rút gọn A.

Bài 30: Rút gọn biểu thức: $P = \frac{2x + \sqrt{16x} + 6}{x + 2\sqrt{x} - 3} + \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} + \frac{3}{\sqrt{x} + 3} - 2$.

Bài 31: Cho biểu thức $B = \sqrt{\frac{(x^2 - 3)^2 + 12x^2}{x^2}} + \sqrt{(x + 2)^2 - 8x}$. Rút gọn biểu thức B và tìm các giá trị nguyên của x để B có giá trị nguyên

Bài 32: Cho biểu thức $P = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} + \frac{x}{\sqrt{x} - 1} + \frac{5 - 2x}{x - 1}$

- Tìm điều kiện của x để P xác định và rút gọn P.
- Tìm các giá trị của x để P có giá trị bằng 7.

Bài 33: Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{xy} + 1} + \frac{\sqrt{xy} + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{xy}} + 1 \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{xy} + \sqrt{x}}{\sqrt{xy} - 1} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{xy} + 1} \right)$.

- Rút gọn biểu thức P.
- Cho $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = 8$. Tìm giá trị lớn nhất của P.

Bài 34: Cho biểu thức $A = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2} + \frac{\sqrt{x} + 2}{3 - \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x} + 2}{x - 5\sqrt{x} + 6} \right)$

- Rút gọn biểu thức A.
- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 7 - 4\sqrt{3}$.
- Tìm m để có giá trị của x thỏa mãn $A(\sqrt{x} + 1) = m(x + 1) - 2$

Bài 35: Cho biểu thức: $P = \frac{x}{x - \sqrt{x}} + \frac{2}{x + 2\sqrt{x}} + \frac{x + 2}{(\sqrt{x} - 1)(x + 2\sqrt{x})}$

- Rút gọn P.
- Tính P khi $x = 3 + 2\sqrt{2}$.
- Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

Bài 36: Cho biểu thức:

$$A = \frac{x\sqrt{x} - x - 4\sqrt{x} + 4}{2 - 3\sqrt{x} + x\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x} + x - 4\sqrt{x} - 4}{2 + 3\sqrt{x} - x\sqrt{x}} \text{ với } x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4.$$

- Rút gọn biểu thức A.
- Tính giá trị của biểu thức A khi $x = \frac{(2 + \sqrt{3})\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}}{\sqrt{2} - 1}$.

Bài 37: Rút gọn biểu thức $A = \frac{3 + \sqrt{5}}{2\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{3 - \sqrt{5}}{2\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5}}$

Bài 38: Cho các số dương: a; b và $x = \frac{2ab}{b^2 + 1}$. Xét biểu thức $P = \frac{\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x}}{\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x}} + \frac{1}{3b}$

- Chứng minh P xác định. Rút gọn P.
- Khi a và b thay đổi, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Bài 39: Cho biểu thức: $A = \frac{x\sqrt{x} - 4x - \sqrt{x} + 4}{2x\sqrt{x} - 14x + 28\sqrt{x} - 16}$

- a) Tìm x để A có nghĩa, từ đó rút gọn biểu thức A .
 b) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

Bài 40: Cho biểu thức $\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{\sqrt{x^2y}}{x+y} - \frac{2\sqrt{y}}{x-y}, (x > 0; y > 0, x \neq y)$

- a) Rút gọn biểu thức A .
 b) Tính giá trị của A biết rằng x, y là nghiệm của phương trình $t^2 - 4t + 1 = 0$.

Bài 41: Cho biểu thức $M = \frac{2\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{2a} - \sqrt{3b}) + \sqrt{3b}(2\sqrt{a} - \sqrt{3b}) - 2a\sqrt{a}}{a\sqrt{2} + \sqrt{3ab}}$

- a) Tìm điều kiện của a và b để M xác định và rút gọn M .

- b) Tính giá trị của M khi $a = 1 + 3\sqrt{2}$, $b = 10 + \frac{11\sqrt{8}}{3}$

Bài 42: Cho biểu thức: $P = \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{1 - \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} \right) : \left(1 + \frac{x + y + 2xy}{1 - xy} \right)$.

- a) Rút gọn biểu thức P .

- b) Tính giá trị của P với $x = \frac{2}{2 + \sqrt{3}}$.

Bài 43: a) Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}} \cdot (\sqrt{(1+x)^3} + \sqrt{(1-x)^3})}{2 - \sqrt{1 - x^2}}$

với $-1 \leq x \leq 1$.

- b) Cho a và b là các số thỏa mãn $a > b > 0$ và $a^3 - a^2b + ab^2 - 6b^3 = 0$.

Tính giá trị của biểu thức $B = \frac{a^4 - 4b^4}{b^4 - 4a^4}$.

Bài 44: Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{xy} + 1} + \frac{\sqrt{xy} + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{xy}} + 1 \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{xy} + \sqrt{x}}{\sqrt{xy} - 1} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{xy} + 1} \right)$.

1. Rút gọn biểu thức A .

2. Cho $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của A .

Bài 45: Cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} - \frac{\sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} + 1} + 4\sqrt{a} \right) \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right).$$

- a) Rút gọn P .

- b) Tính giá trị của P tại $a = (2 + \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1)\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

Bài 46: Cho biểu thức: $P = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$. Với $x \geq 0, x \neq 1$.

- a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm x để $P = \frac{2}{7}$.

c) So sánh: P^2 và $2P$.

Bài 47: Rút gọn biểu thức: $P = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$.

Bài 48: Rút gọn biểu thức: $A = \left(\frac{2\sqrt{x}-1}{1-\sqrt{x}} + \frac{2x-\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} \right) : \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^3}+1}$

Bài 49: Rút gọn biểu thức $B = \sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}}$

Bài 50: Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$

Bài 51: Cho $A = \frac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{x^2+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}$

a) Nêu điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A

b) Đặt $B = A + x - 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức B

Bài 52: Cho biểu thức $P = \left(\frac{x-4}{2x+3\sqrt{x}-2} - \frac{2x-5\sqrt{x}-1}{4x-1} \right) \left(x\sqrt{x}+2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$ với $x > 0$ và $x \neq \frac{1}{4}$.

Rút gọn biểu thức P và tìm x để $P \leq \frac{3}{2}$.

Bài 53: Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}}$ với $x \geq 4$.

Bài 54: Cho $P = \frac{x\sqrt{x}-2x-\sqrt{x}+2}{x\sqrt{x}-3\sqrt{x}-2} + \frac{x\sqrt{x}+2x-\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}-3\sqrt{x}+2}$

1. Rút gọn P . Với giá trị nào của x thì $P > 1$

2. Tìm x nguyên biết P đạt giá trị nguyên lớn nhất

Bài 55: Cho biểu thức $A = \left(\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} + \frac{x\sqrt{x}-8}{4-x} \right) : \left[\frac{(\sqrt{x}-2)^2 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \right]$

Với x không âm, khác 4.

a, Rút gọn A

b, Chứng minh rằng $A < 1$ với mọi x không âm, khác 4

c, Tìm x để A là số nguyên

Bài 56: Cho biểu thức: $P = \frac{x\sqrt{x}+26\sqrt{x}-19}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}$

a) Rút gọn P .

b) Tìm x để P đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 57: Cho biểu thức: $A = \left(\frac{3x + \sqrt{16x} - 7}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} + 7}{\sqrt{x} - 1} \right) : \left(2 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \right)$

- a) Rút gọn biểu thức A.
b) Tìm x để $A = -6$.

Bài 58: Cho biểu thức $M = \left(\frac{x + 2\sqrt{x} + 4}{x\sqrt{x} - 8} + \frac{x + 2\sqrt{x} + 1}{x - 1} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x} - 5}{\sqrt{x} - 2} + \frac{2\sqrt{x} + 10}{x + 6\sqrt{x} + 5} \right)$

Rút gọn M và tìm x để $M > 1$

Bài 59: Cho biểu thức: $A = \frac{x\sqrt{x} - x - 4\sqrt{x} + 4}{2 - 3\sqrt{x} + x\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x} + x - 4\sqrt{x} - 4}{2 + 3\sqrt{x} - x\sqrt{x}}$ với

$x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$.

- a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = \frac{(2 + \sqrt{3})\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}}{\sqrt{2} - 1}$.

Bài 60: Cho biểu thức:

$$P = \frac{a\sqrt{a} - 1}{a - \sqrt{a}} - \frac{a\sqrt{a} + 1}{a + \sqrt{a}} + \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) \left(\frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1} - \frac{2 + \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1} \right).$$

- a) Rút gọn biểu thức P
b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của a (thỏa điều kiện thích hợp) ta đều có $P > 6$.

Bài 61: a) Cho $M = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2} + \frac{\sqrt{x} + 2}{3 - \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x} + 2}{x - 5\sqrt{x} + 6} \right)$

1. Rút gọn M
2. Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức M nhận giá trị là số nguyên

Bài 62: Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{2}(3 + \sqrt{5})}{2\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{\sqrt{2}(3 - \sqrt{5})}{2\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5}}$.

Bài 63: Cho biểu thức: $A = \frac{2\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$. Chứng minh A là một số nguyên.

Bài 64: Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}}{\sqrt{2} - \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{7 - 2\sqrt{10}}}$.

Bài 65: Tính $A = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} - \frac{2}{3 - \sqrt{3}} - \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Bài 66: Cho $S = \left(1 - \frac{2}{2.3} \right) \left(1 - \frac{2}{3.4} \right) \dots \left(1 - \frac{2}{2020.2021} \right)$. Tính S (kết quả để dưới dạng phân số tối giản).

Bài 67: Cho hàm số $f(x) = (x^3 + 12x - 31)^{2010}$

Tính $f(a)$ tại $a = \sqrt[3]{16 - 8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16 + 8\sqrt{5}}$

Bài 68: Tính giá trị biểu thức $A = (4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}}$

Bài 69: Cho biểu thức: $P = \frac{2m + \sqrt{16m} + 6}{m + 2\sqrt{m} - 3} + \frac{\sqrt{m} - 2}{\sqrt{m} - 1} + \frac{3}{\sqrt{m} + 3} - 2$

a) Rút gọn P.

b) Tìm giá trị tự nhiên của m để P là số tự nhiên.

Bài 70: Cho biểu thức $P = \frac{x - 2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}} + \frac{1 + 2x - 2\sqrt{x}}{x^2 - \sqrt{x}}$, với $x > 0, x \neq 1$. Rút gọn P và tìm tất cả các giá trị của x sao cho giá trị của P là một số nguyên.

Bài 71: Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{1 - \sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2x + \sqrt{x} - 1}{1 - x} + \frac{2x\sqrt{x} + x - \sqrt{x}}{1 + x\sqrt{x}} \right)$ với $x > 0, x \neq 1, x \neq \frac{1}{4}$

Tính giá trị của P tại $x = \frac{4}{\sqrt{10}} (\sqrt{3 + \sqrt{5}} + \sqrt{3 - \sqrt{5}})$

Bài 72: Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{2}(3 + \sqrt{5})}{2\sqrt{2} + \sqrt{3 + \sqrt{5}}} + \frac{\sqrt{2}(3 - \sqrt{5})}{2\sqrt{2} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}}$.

Bài 73: Rút gọn biểu thức: $P = \frac{\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}}}{\sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} - \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}}}$, với $x \geq 2$.

Bài 74: Rút gọn biểu thức: $A = \left(1 - \frac{2\sqrt{a}}{a + 1} \right) : \left(\frac{1}{1 + \sqrt{a}} - \frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a} + \sqrt{a} + a + 1} \right)$, với $a \geq 0$

Bài 75: Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{5} + 3}{\sqrt{2} + \sqrt{3 + \sqrt{5}}} + \frac{3 - \sqrt{5}}{\sqrt{2} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}}$

Bài 76: Cho hai biểu thức: $A = \frac{2\sqrt{x} + 3}{2\sqrt{x} - 2}$ và $B = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{x} - 2}{1 - \sqrt{x}} + \frac{2x + \sqrt{x} - 6}{x + \sqrt{x} - 2}$ với

$0 \leq x \neq 1$

a) Tính giá trị của A với $x = 6 + 2\sqrt{5}$

b) Rút gọn B

c) Đặt $P = B:A$. Tìm các giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên

Bài 77: Cho biểu thức $M = \frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}}{a - b} - \frac{a}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{b}{\sqrt{b} - \sqrt{a}}$ với $a, b > 0$ và $a \neq b$

Rút gọn M và tính giá trị biểu thức M biết $(1 - a)(1 - b) + 2\sqrt{ab} = 1$

Bài 78: Cho biểu thức: $P = \left(\frac{x + 2}{x\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} + \frac{1}{1 - \sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x} - 1}{2}$.

Với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm x để $P = \frac{2}{7}$.

c) So sánh: P^2 và $2P$.

Bài 79: Cho biểu thức $M = \frac{a + 1}{\sqrt{a}} + \frac{a\sqrt{a} - 1}{a - \sqrt{a}} + \frac{a^2 - a\sqrt{a} + \sqrt{a} - 1}{\sqrt{a} - a\sqrt{a}}$ với $a > 0, a \neq 1$.

Với những giá trị nào của a thì biểu thức $N = \frac{6}{M}$ nhận giá trị nguyên?

Bài 80: Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{a} + 2018}{a + 2\sqrt{a} + 1} - \frac{\sqrt{a} - 2018}{a - 1} \right) \frac{\sqrt{a} + 1}{2\sqrt{a}}$.

Bài 81: Cho biểu thức $P = \frac{2x+3}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x^2+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x}$ với $x > 0, x \neq 1$. Rút gọn và tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P .

Bài 82: Rút gọn biểu thức:

$$X = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{2017^2} + \frac{1}{2018^2}}.$$

Bài 83: Rút gọn biểu thức: $A = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} \right)$

Bài 84: Cho các biểu thức: $P = \left(\frac{3\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}+3}{x-\sqrt{x}+1}$ (với $x \geq 0$)

Rút gọn biểu thức P . Tìm các giá trị của x để $P \geq \frac{1}{5}$.

Bài 85: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x-\sqrt{4(x-1)}} + \sqrt{x+\sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2-4(x-1)}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x-1} \right)$, trong đó $x > 1, x \neq 2$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm các giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức A là số nguyên.

Bài 86: Rút gọn biểu thức: $B = (13 - 4\sqrt{3})(7 + 4\sqrt{3}) - 8\sqrt{20 + 2\sqrt{43 + 24\sqrt{3}}}$.

Bài 87: Rút gọn biểu thức $P = \frac{3x + \sqrt{9x} - 3}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} - \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1}$. Tìm x để $P = 3$.

Bài 88: Cho biểu thức $M = \left(\frac{x + 2\sqrt{x} + 4}{x\sqrt{x} - 8} + \frac{x + 2\sqrt{x} + 1}{x - 1} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x} - 5}{\sqrt{x} - 2} + \frac{2\sqrt{x} + 10}{x + 6\sqrt{x} + 5} \right)$

Rút gọn M và tìm x để $M > 1$

Bài 89: Cho biểu thức: $A = \left(\frac{\sqrt{x} + 2}{x - 5\sqrt{x} + 6} - \frac{\sqrt{x} + 3}{2 - \sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 3} \right) : \left(2 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \right)$

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm các giá trị của x để $\frac{1}{A} \leq -\frac{5}{2}$

Bài 90: Cho biểu thức: $P = \frac{x}{x - \sqrt{x}} + \frac{2}{x + 2\sqrt{x}} + \frac{x + 2}{(\sqrt{x} - 1)(x + 2\sqrt{x})}$

a) Rút gọn P .

b) Tính P khi $x = 3 + 2\sqrt{2}$.

c) Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

Bài 91: Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x-1}}{3+\sqrt{x-1}} + \frac{x+8}{10-x} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x-1}+1}{x-3\sqrt{x-1}-1} - \frac{1}{\sqrt{x-1}} \right)$

a) Rút gọn P

b) Tính giá trị của P khi $x = \sqrt[4]{\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}} - \sqrt[4]{\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}$

Bài 92: Rút gọn biểu thức: $A = \sqrt{\frac{2\sqrt{10} + \sqrt{30} - 2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2\sqrt{10} - 2\sqrt{2}}} : \frac{2}{\sqrt{3}-1}$

Bài 93: Cho biểu thức: $M = \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} + \frac{a^2-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}}$ với $a > 0, a \neq 1$.

a) Chứng minh rằng $M > 4$.

b) Với những giá trị nào của a thì biểu thức $N = \frac{6}{M}$ nhận giá trị nguyên?

Bài 94: Rút gọn biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$

B. Lời giải

Bài 1: Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{a}{a-2\sqrt{a}} + \frac{a}{\sqrt{a}-2} \right) : \frac{\sqrt{a}+1}{a-4\sqrt{a}+4}$ với $a > 0; a \neq 4$

Lời giải

$$B = \left(\frac{a}{a-2\sqrt{a}} + \frac{a}{\sqrt{a}-2} \right) : \frac{\sqrt{a}+1}{a-4\sqrt{a}+4} = \left(\frac{a}{a-2\sqrt{a}} + \frac{a}{\sqrt{a}-2} \right) \cdot \frac{(\sqrt{a}-2)^2}{\sqrt{a}+1}$$

$$B = \frac{\sqrt{a}+a}{\sqrt{a}-2} \cdot \frac{(\sqrt{a}-2)^2}{\sqrt{a}+1} = \frac{\sqrt{a}(1+\sqrt{a})}{\sqrt{a}-2} \cdot \frac{(\sqrt{a}-2)^2}{\sqrt{a}+1} = \sqrt{a}(\sqrt{a}-2)$$

Bài 2: Cho biểu thức $M = \frac{x\sqrt{y}-\sqrt{y}-y\sqrt{x}+\sqrt{x}}{1+\sqrt{xy}}$

1) Tìm điều kiện xác định và rút gọn M .

2) Tính giá trị của M , biết rằng $x = (1-\sqrt{3})^2$ và $y = 3-\sqrt{8}$

Lời giải

1) ĐKXD: $x \geq 0; y \geq 0$

$$M = \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x}-\sqrt{y}) + (\sqrt{x}-\sqrt{y})}{1+\sqrt{xy}} = \frac{(1+\sqrt{xy})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{1+\sqrt{xy}} = \sqrt{x}-\sqrt{y}$$

2) Với $x = (1-\sqrt{3})^2$ và $y = 3-\sqrt{8} = 3-2\sqrt{2} = (\sqrt{2}-1)^2$

$$M = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} - \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{3}-1-\sqrt{2}+1 = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

Bài 3: Cho biểu thức: $C = \frac{2}{a-16} - \frac{2}{\sqrt{a}-4} - \frac{2}{\sqrt{a}+4}$

- 1) Tìm điều kiện của a để biểu thức C có nghĩa và rút gọn C.
- 2) Tìm giá trị của biểu thức C khi $a = 9 - 4\sqrt{5}$

Lời giải

- 1) ĐKXĐ: $a \geq 0$; $a \neq 16$

$$C = \frac{2}{a-16} - \frac{2}{\sqrt{a}-4} - \frac{2}{\sqrt{a}+4} = \frac{a}{(\sqrt{a}-4)(\sqrt{a}+4)} - \frac{2}{\sqrt{a}-4} - \frac{2}{\sqrt{a}+4}$$

$$C = \frac{a-2(\sqrt{a}+4)-2(\sqrt{a}-4)}{(\sqrt{a}-4)(\sqrt{a}+4)} = \frac{a-2\sqrt{a}-8-2\sqrt{a}+8}{(\sqrt{a}-4)(\sqrt{a}+4)} = \frac{a-4\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-4)(\sqrt{a}+4)}$$

$$C = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-4)}{(\sqrt{a}-4)(\sqrt{a}+4)} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+4}$$

- 2) Với $a = 9 + 4\sqrt{5} = 4 + 4\sqrt{5} + 5 = (2 + \sqrt{5})^2$

$$C = \frac{\sqrt{(2+\sqrt{5})^2}}{\sqrt{(2+\sqrt{5})^2} + 4} = \frac{2+\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}+4} = \frac{2+\sqrt{5}}{6+\sqrt{5}} = \frac{7+4\sqrt{5}}{31}$$

Bài 4: Cho biểu thức: $M = \left(\frac{a}{a-2\sqrt{a}} + \frac{a}{\sqrt{a}-2} \right) : \frac{\sqrt{a}+1}{a-4\sqrt{a}+4}$ ($a > 0$; $a \neq 4$)

- 1) Rút gọn biểu thức M.
- 2) Tìm tất cả các giá trị của a để $M \leq 0$.

Lời giải

$$1) M = \left(\frac{a}{a-2\sqrt{a}} + \frac{a}{\sqrt{a}-2} \right) : \frac{\sqrt{a}+1}{a-4\sqrt{a}+4} = \left(\frac{a}{a-2\sqrt{a}} + \frac{a}{\sqrt{a}-2} \right) \cdot \frac{(\sqrt{a}-2)^2}{\sqrt{a}+1}$$

$$M = \frac{\sqrt{a}+a}{\sqrt{a}-2} \cdot \frac{(\sqrt{a}-2)^2}{\sqrt{a}+1} = \frac{\sqrt{a}(1+\sqrt{a})}{\sqrt{a}-2} \cdot \frac{(\sqrt{a}-2)^2}{\sqrt{a}+1} = \sqrt{a}(\sqrt{a}-2)$$

- 2) $M \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{a}(\sqrt{a}-2) \Leftrightarrow \sqrt{a}-2 \leq 0$ (vì $a > 0$)

$$\Leftrightarrow \sqrt{a} \leq 2 \Leftrightarrow a \leq 4$$

Vì $a > 0$; $a \neq 4$ nên $M < 0 \Leftrightarrow 0 < a < 4$

Bài 5: Cho biểu thức $A = \frac{a^2 + \sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1} - \frac{2a + \sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 1$ với $a > 0$.

- 1) Rút gọn A.
- 2) Tìm giá trị của a để $A = 2$.

3) Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

Lời giải

$$1) A = \frac{a^2 + \sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1} - \frac{2a + \sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 1 = \frac{\sqrt{a}(a\sqrt{a} + 1)}{a - \sqrt{a} + 1} - \frac{\sqrt{a}(2\sqrt{a} + 1)}{\sqrt{a}} + 1$$

$$A = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} + 1)(a - \sqrt{a} + 1)}{a - \sqrt{a} + 1} - (2\sqrt{a} + 1) + 1 = a + \sqrt{a} - 2\sqrt{a} - 1 + 1 = a - \sqrt{a}$$

$$2) A = 2 \Leftrightarrow a - \sqrt{a} = 2 \Leftrightarrow a - \sqrt{a} - 2 = 0$$

Đặt $y = \sqrt{a}$ ($y > 0$), ta có phương trình: $y^2 - y - 2 = 0$

Giải phương trình ta được: $y = -1$ (loại); $y = 2$ (nhận)

$$y = 2 \Leftrightarrow \sqrt{a} = 2 \Leftrightarrow a = 4 \text{ (nhận)}$$

Vậy $a = 4$ thì $A = 2$

$$3) A = a - \sqrt{a} = a - \sqrt{a} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \left(\sqrt{a} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq \frac{-1}{4} \text{ với mọi } a > 0$$

$$\text{Dấu “=” khi } \sqrt{a} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4} \text{ (nhận)}$$

$$\text{Vậy } \min A = -\frac{1}{4} \text{ khi } a = \frac{1}{4}$$

Bài 6: Rút gọn biểu thức: $A = \frac{1}{x + \sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{x - 1} + \frac{1}{x - \sqrt{x}}$

Lời giải

ĐKXĐ: $x > 0$; $x \neq 1$

$$A = \frac{1}{x + \sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{x - 1} + \frac{1}{x - \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} - \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} + \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}$$

$$A = \frac{\sqrt{x} - 1 - 2x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{-2x + 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{-2\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{-2}{\sqrt{x} + 1}$$

Bài 7: Cho biểu thức $A = \left(\frac{x + 2\sqrt{x} + 4}{x\sqrt{x} - 8} + \frac{x + 2\sqrt{x} + 1}{x - 1} \right) : \left(3 + \frac{1}{\sqrt{x} - 2} + \frac{2}{\sqrt{x} + 1} \right)$

1) Rút gọn A.

2) Tìm giá trị của x để $A > 1$.

Lời giải

1) ĐKXĐ: $x \geq 0$; $x \neq 1$; $x \neq 3$; $x \neq 4$

$$A = \left[\frac{x + 2\sqrt{x} + 4}{(\sqrt{x} - 2)(x + 2\sqrt{x} + 4)} + \frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)} \right] : \frac{3(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 1) + \sqrt{x} + 1 + 2(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 1)}$$

$$A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{3(x-\sqrt{x}-2)+3\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}-1+(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} : \frac{3x-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}$$

$$A = \frac{x-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{3(x-3)} = \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)}$$

$$2) A > 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)} > 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1-3(\sqrt{x}-1)}{3(\sqrt{x}-1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{4-2\sqrt{x}}{3(\sqrt{x}-1)} > 0$$

$$\Leftrightarrow 1 < \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow 1 < x < 4$$

Vậy $1 < x < 4$ và $x \neq 3$ thì $A > 1$

Bài 8: Rút gọn biểu thức: $A = \frac{10\sqrt{x}}{x+3\sqrt{x}-4} - \frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+4} + \frac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}}$ ($x \geq 0; x \neq 1$)

Lời giải

$$A = \frac{10\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-1)} - \frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+4} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{10\sqrt{x} - (2\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+4)}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-1)}$$

$$A = \frac{10\sqrt{x} - 2x + 5\sqrt{x} - 3 - x - 5\sqrt{x} - 4}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-1)} = \frac{-3x + 10\sqrt{x} - 7}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-1)} = \frac{(\sqrt{x}-1)(7-3\sqrt{x})}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-1)} = \frac{7-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4}$$

Bài 9: Cho biểu thức: $A = \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} \right) : \left(\frac{x-2}{x-\sqrt{x}-2} - 1 \right)$

1) Rút gọn biểu thức A.

2) Tìm x để $P = 2.A - \frac{1}{x}$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

1) ĐKXD: $x > 0; x \neq 4; x \neq 9$

$$A = \left[\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \right] : \left[\frac{x-2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} - 1 \right]$$

$$A = \frac{x-9-(x-4)+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} : \frac{x-2-x+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \cdot \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}}$$

$$A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

$$2) P = 2.A - \frac{1}{x} = 2 \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = 2 + \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$$

$$P = 3 - \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} \right) = 3 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 \leq 3 \text{ với mọi } x > 0$$

$$\text{Dấu "=" khi } 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (nhận)}$$

Vậy $\text{Max}P = 3$ khi $x = 1$

Bài 10: Cho biểu thức: $P = \frac{3x + \sqrt{16x} - 7}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 1}$ Với $x > 0$

- 1) Rút gọn biểu thức P
- 2) Tính giá trị của biểu thức khi $x = 2\sqrt{2} + 3$

Lời giải

$$1) P = \frac{3x + 4\sqrt{x} - 7}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 1} = \frac{3x + 4\sqrt{x} - 7 - (x - 1) - (x - 9)}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} = \frac{x + 4\sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)}$$

$$P = \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$$

- 2) Với $x = 2\sqrt{2} + 3 = 2 + 2\sqrt{2} + 1 = (\sqrt{2} + 1)^2$, ta có:

$$P = \frac{\sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} + 1}{\sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} - 1} = \frac{\sqrt{2} + 1 + 1}{\sqrt{2} + 1 - 1} = \frac{\sqrt{2} + 2}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$$

Bài 11:

- 1) Tính giá trị của biểu thức $A = \sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} - \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}$.
- 2) Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{a-2} + 2}{3} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{a-2}}{3 + \sqrt{a-2}} + \frac{a+7}{11-a} \right) : \left(\frac{3\sqrt{a-2} + 1}{a - 3\sqrt{a-2} - 2} - \frac{1}{\sqrt{a-2}} \right)$.

Lời giải

- 1) Ta có $A = \sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} - \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}$

$$A = \sqrt[3]{8 + 3 \cdot 2^2 \sqrt{3} + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^3} - \sqrt[3]{8 - 3 \cdot 2^2 \sqrt{3} + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^3}$$

$$A = \sqrt[3]{(2 + \sqrt{3})^3} - \sqrt[3]{(2 - \sqrt{3})^3} = (2 + \sqrt{3}) - (2 - \sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$$

- 2) Điều kiện: $2 < a \neq 11$

$$\text{Đặt } x = \sqrt{a-2} \quad (0 < x \neq 3) \Rightarrow a = x^2 + 2.$$

$$P = \frac{(x+2)}{3} \cdot \left(\frac{x}{3+x} + \frac{x^2+9}{9-x^2} \right) : \left(\frac{3x+1}{x^2-3x} - \frac{1}{x} \right) = \frac{(x+2)}{3} \cdot \frac{3(x+3)}{9-x^2} \cdot \frac{2x+4}{x(x-3)}$$

$$P = \frac{(x+2)}{3-x} \cdot \frac{x(x-3)}{2x+4} = -\frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{a-2}}{2}$$

Bài 12: Cho $A = \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} \cdot [\sqrt{(1+x)^3} + \sqrt{(1-x)^3}]}{2 - \sqrt{1-x^2}}$

- 1) Rút gọn A
- 2) Tìm x biết $A \geq \frac{1}{2}$.

Lời giải

- 1) ĐKXD: $-1 \leq x \leq 1$

$$A = \frac{\sqrt{\frac{(\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x})^2}{2}} \cdot [(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})(2 - \sqrt{1-x^2})]}{2 - \sqrt{1-x^2}}$$

$$A = \frac{|\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}| \cdot (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{\sqrt{2}} = \begin{cases} \sqrt{2}x & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ -\sqrt{2}x & \text{khi } -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

2) $A \geq \frac{1}{2}$

Khi $0 \leq x \leq 1$ thì $\sqrt{2}x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}$

Khi $-1 \leq x \leq 0$ thì $-\sqrt{2}x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Vậy $A \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ hoặc $\frac{1}{2\sqrt{2}} \leq x \leq 1$

Bài 13: Tính giá trị biểu thức: $M = (x-y)^3 + 3(x-y)(xy+1)$, biết:

$$x = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} - \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}, y = \sqrt[3]{17+12\sqrt{2}} - \sqrt[3]{17-12\sqrt{2}}$$

Lời giải

Ta có: $x^3 = \left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} - \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\right)^3$

$$= 3+2\sqrt{2} - 3+2\sqrt{2} - 3\sqrt{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})} \cdot \left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} - \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\right)$$

$$= 4\sqrt{2} - 3x$$

$$\Rightarrow x^3 + 3x = 4\sqrt{2}$$

Tương tự: $y^3 + 3y = 24\sqrt{2}$

$$\Rightarrow x^3 - y^3 + 3(x-y) = -20\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow M = (x-y)^3 + 3(x-y)(xy+1) = -20\sqrt{2}$$

Bài 14: Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{x-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}-1}\right) : \frac{1}{x-2\sqrt{x}+1}$

1) Rút gọn A.

2) Tìm x để $A = \frac{3}{2}$.

Lời giải

1) ĐKXĐ: $x > 0; x \neq 1$

$$A = \left(\frac{1}{x-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}-1}\right) : \frac{1}{x-2\sqrt{x}+1} = \left[\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} + \frac{1}{\sqrt{x}-1}\right] \cdot (\sqrt{x}-1)^2$$

$$A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \cdot (\sqrt{x}-1)^2 = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$$

2) $A = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x}} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x - 3\sqrt{x} - 2 = 0$

Đặt $t = \sqrt{x}$ ($t \geq 0$), ta có phương trình: $2t^2 - 3t - 2 = 0$

Giải phương trình ta được: $t_1 = -\frac{1}{2}$ (loại); $t_2 = 2$ (nhận)

$$t = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (nhận)}$$

$$\text{Vậy } x = 4 \text{ thì } A = \frac{3}{2}$$

Bài 15:

1) Rút gọn biểu thức $P = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0$, $x \neq 1$.

2) Cho $x + \sqrt{3} = 2$. Tính giá trị của biểu thức $A = 7(x^2 - 4x)^{100} + (x^2 - 4x)^{50} + 2016$.

Lời giải

$$1) P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} + \frac{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)}$$

$$P = \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) - (2\sqrt{x}+1) + 2(\sqrt{x}+1) = x - \sqrt{x} + 1$$

$$2) x + \sqrt{3} = 2 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x = -1$$

$$\Rightarrow A = 7(-1)^{100} + (-1)^{50} + 2016 = 2024$$

Bài 16:

1) Rút gọn biểu thức: $P = \frac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} - \sqrt{x-\sqrt{2x-1}}}$, với $x \geq 2$.

2) Cho x là số thực dương thỏa mãn điều kiện $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$. Tính giá trị các biểu thức

$$A = x^5 + \frac{1}{x^5}; B = x^7 + \frac{1}{x^7}.$$

Lời giải

$$1) P = \frac{\sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{2x-1+2\sqrt{2x-1}} + 1 - \sqrt{2x-1-2\sqrt{2x-1}} + 1}$$

$$P = \frac{\sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} \right)}{\sqrt{(\sqrt{2x-1}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2x-1}-1)^2}}$$

$$P = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{x-1} + 1 + \sqrt{x-1} - 1)}{\sqrt{2x-1} + 1 - \sqrt{2x-1} + 1} = \frac{\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{x-1}}{2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x-1}$$

$$2) x^2 + \frac{1}{x^2} = 7 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \right) - 2 = 7 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 = 9 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 3 \text{ (do } x > 0)$$

$$\text{Ta có: } x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x} \right) \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2} \right) = 3 \cdot 6 = 18$$

$$\begin{aligned}
 x^4 + \frac{1}{x^4} &= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 = 47 \\
 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) &= x^5 + \frac{1}{x^3} + x^3 + \frac{1}{x^5} = x^5 + \frac{1}{x^5} + 18 \\
 \Leftrightarrow x^5 + \frac{1}{x^5} + 18 &= 141 \Leftrightarrow x^5 + \frac{1}{x^5} = 123 \\
 \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) &= x^7 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^7} = x^7 + \frac{1}{x^7} + 3 \\
 \Rightarrow x^7 + \frac{1}{x^7} + 3 &= 846 \Leftrightarrow x^7 + \frac{1}{x^7} = 843
 \end{aligned}$$

Bài 17: Rút gọn biểu thức $P = \frac{x-3+2\sqrt{x+4\sqrt{x}+4}}{x+3\sqrt{x}+2}$. Tìm x sao cho $P = \frac{2017}{2018}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{x-3+2\sqrt{x+4\sqrt{x}+4}}{x+3\sqrt{x}+2} = \frac{x-3+2\sqrt{(\sqrt{x}+2)^2}}{x+3\sqrt{x}+2} = \frac{x-3+2(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)} \\
 P &= \frac{x+2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} \\
 P = \frac{2017}{2018} &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} = \frac{2017}{2018} \Leftrightarrow 2018(\sqrt{x}+1) = 2017(\sqrt{x}+2) \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2016 \Leftrightarrow x = 2016^2
 \end{aligned}$$

Bài 18: Tính $A = \frac{1+\sqrt{11}}{2+\sqrt{11}} + \sqrt{\frac{2}{18-5\sqrt{11}}}$

Lời giải

$$A = \frac{1+\sqrt{11}}{2+\sqrt{11}} + \sqrt{\frac{2}{18-5\sqrt{11}}} = \frac{(1+\sqrt{11})(2-\sqrt{11})}{4-11} + \sqrt{\frac{2(18+5\sqrt{11})}{49}} = \frac{9-\sqrt{11}+5+\sqrt{11}}{7} = 2$$

Bài 19: Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+1+\sqrt{x}} + \frac{1}{1-\sqrt{x}}\right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$ với $x > 0$; $x \neq 1$

1) Rút gọn A

2) Chứng minh $A < \frac{2}{3}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
 1) \quad A &= \left[\frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right] \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \\
 A &= \frac{x+2+\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)-(x+\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \frac{x-2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \\
 A &= \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \frac{2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}
 \end{aligned}$$

$$2) \text{ Ta có: } A - \frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2}{3} = \frac{6\sqrt{x} - 2(x + \sqrt{x} + 1)}{3(x + \sqrt{x} + 1)} = \frac{-2x + 4\sqrt{x} - 2}{3(x + \sqrt{x} + 1)} = \frac{-2(\sqrt{x} - 1)^2}{3(x + \sqrt{x} + 1)}$$

$$A - \frac{2}{3} = \frac{-2(\sqrt{x} - 1)^2}{3(x + \sqrt{x} + 1)}$$

$$\text{Vì } -2(\sqrt{x} - 1)^2 \leq 0 \text{ và } 3(x + \sqrt{x} + 1) = 3\left[\left(\sqrt{x} + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] > 0 \text{ với } x > 0; x \neq 1$$

$$\Rightarrow A - \frac{2}{3} = \frac{-2(\sqrt{x} - 1)^2}{3(x + \sqrt{x} + 1)} < 0 \Rightarrow A < \frac{2}{3}$$

Bài 20: Cho $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2^{2018}}$. So sánh A với $\frac{2017}{2018}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2^{2018}} < \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2017.2018}$$

$$\begin{aligned} \text{Mà } \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2017.2018} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2017} - \frac{1}{2018} \\ &= 1 - \frac{1}{2018} = \frac{2017}{2018} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } A < \frac{2017}{2018}$$

Bài 21: Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{xy} + 1} + \frac{\sqrt{xy} + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{xy}} + 1 \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{xy} + \sqrt{x}}{\sqrt{xy} - 1} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{xy} + 1} \right)$ với $x, y \geq 0$ và $xy \neq 1$.

1) Rút gọn P .

2) Tính giá trị của biểu thức P khi $x = \sqrt[3]{4 - 2\sqrt{6}} + \sqrt[3]{4 + 2\sqrt{6}}$ và $y = x^2 + 6$.

Lời giải

$$1) P = \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{xy} + 1} + \frac{\sqrt{xy} + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{xy}} + 1 \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{xy} + \sqrt{x}}{\sqrt{xy} - 1} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{xy} + 1} \right)$$

$$P = \frac{(\sqrt{x} + 1)(1 - \sqrt{xy}) + (\sqrt{xy} + \sqrt{x})(\sqrt{xy} + 1) + 1 - xy}{1 - xy} : \left(1 - \frac{\sqrt{xy} + \sqrt{x}}{\sqrt{xy} - 1} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{xy} + 1} \right)$$

$$P = \frac{\sqrt{x} - x\sqrt{y} + 1 - \sqrt{xy} + xy + \sqrt{xy} + x\sqrt{y} + \sqrt{x} + 1 - xy}{1 - xy} : \left(1 - \frac{\sqrt{xy} + \sqrt{x}}{\sqrt{xy} - 1} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{xy} + 1} \right)$$

$$P = \frac{2\sqrt{x} + 2}{1 - xy} : \frac{xy - 1 - (\sqrt{xy} + \sqrt{x})(\sqrt{xy} + 1) - (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{xy} - 1)}{xy - 1}$$

$$P = \frac{2(\sqrt{x} + 1)}{1 - xy} : \frac{xy - 1 - xy - \sqrt{xy} - x\sqrt{y} - \sqrt{x} - x\sqrt{y} + \sqrt{x} - \sqrt{xy} + 1}{xy - 1}$$

$$P = \frac{2(\sqrt{x}+1)}{-(xy-1)} \cdot \frac{xy-1}{-2\sqrt{xy}-2x\sqrt{y}} = \frac{2(\sqrt{x}+1)}{-(xy-1)} \cdot \frac{xy-1}{-2\sqrt{xy}(1+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{xy}}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad x &= \sqrt[3]{4-2\sqrt{6}} + \sqrt[3]{4+2\sqrt{6}} \\ \Leftrightarrow x^3 &= \left(\sqrt[3]{4-2\sqrt{6}} + \sqrt[3]{4+2\sqrt{6}} \right)^3 \\ \Leftrightarrow x^3 &= 4-2\sqrt{6} + 4+2\sqrt{6} + 3\sqrt[3]{(4-2\sqrt{6})(4+2\sqrt{6})} \left(\sqrt[3]{4-2\sqrt{6}} + \sqrt[3]{4+2\sqrt{6}} \right) \\ \Leftrightarrow x^3 &= 8 + 3\sqrt[3]{-8} \left(\sqrt[3]{4-2\sqrt{6}} + \sqrt[3]{4+2\sqrt{6}} \right) \\ \Leftrightarrow x^3 &= 8 - 6x \\ \Leftrightarrow x^3 + 6x &= 8 \\ \Leftrightarrow x(x^2 + 6) &= 8 \\ \Leftrightarrow xy &= 8 \\ \Rightarrow P &= \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Bài 22:

$$1) \text{ Rút gọn biểu thức } A = \left(\frac{\sqrt{3}}{x^2 + x\sqrt{3} + 3} + \frac{3}{x^3 - \sqrt{27}} \right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{x} + 1 \right), \text{ với } x \neq \sqrt{3}; x \neq 0.$$

$$2) \text{ Tính tổng } B = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{2018^2} + \frac{1}{2019^2}}.$$

Lời giải

$$1) \quad A = \left[\frac{\sqrt{3}}{x^2 + x\sqrt{3} + 3} + \frac{3}{(x - \sqrt{3})(x^2 + x\sqrt{3} + 3)} \right] \cdot \frac{x^2 + 3 + 3\sqrt{x}}{x\sqrt{3}}$$

$$A = \frac{\sqrt{3}(x - \sqrt{3}) + 3}{(x - \sqrt{3})(x^2 + x\sqrt{3} + 3)} \cdot \frac{x^2 + 3\sqrt{x} + 3}{x\sqrt{3}} = \frac{1}{x - \sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ Ta có: } \sqrt{1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2}} &= \sqrt{1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{2a+2-2a}{a(a+1)} - \frac{2}{a(a+1)}} \\ &= \sqrt{1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{2}{a} - \frac{2}{a+1} - \frac{2}{a(a+1)}} \\ &= \sqrt{\left(1 + \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} \right)^2} \\ &= 1 + \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} \quad (a > 0) \end{aligned}$$

Áp dụng vào bài toán ta có:

$$B = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{2018^2} + \frac{1}{2019^2}}$$

$$B = 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + 1 + \frac{1}{2018} - \frac{1}{2019}$$

$$B = 2018 - \frac{1}{2019} = \frac{2018 \cdot 2019 - 1}{2019}$$

Bài 23: Rút gọn biểu thức: $P = \left(\frac{2(a+b)}{\sqrt{a^3} - 2\sqrt{2b^3}} - \frac{\sqrt{a}}{a + \sqrt{2ab} + 2b} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{a^3} + 2\sqrt{2b^3}}{2b + \sqrt{2ab}} - \sqrt{a} \right)$ với $a \geq 0$;
 $b > 0$; $a \neq 2b$.

Lời giải

Ta có: $\sqrt{a^3} - 2\sqrt{2b^3} = (\sqrt{a})^3 - (\sqrt{2b})^3 = (\sqrt{a} - \sqrt{2b})(a + \sqrt{2ab} + 2b)$

$$\Rightarrow \frac{2(a+b)}{\sqrt{a^3} - 2\sqrt{2b^3}} - \frac{\sqrt{a}}{a + \sqrt{2ab} + 2b} = \frac{2(a+b) - \sqrt{a}(\sqrt{a} - 2\sqrt{b})}{(\sqrt{a} - \sqrt{2b})(a + \sqrt{2ab} + 2b)}$$

$$= \frac{a + \sqrt{2ab} + 2b}{(\sqrt{a} - \sqrt{2b})(a + \sqrt{2ab} + 2b)} = \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{2b}}$$

$$\frac{\sqrt{a^3} + 2\sqrt{2b^3}}{2b + \sqrt{2ab}} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{2b})(a - \sqrt{2ab} + 2b)}{\sqrt{2b}(\sqrt{2b} + \sqrt{a})} - \sqrt{a}$$

$$= \frac{a - \sqrt{2ab} + 2b}{\sqrt{2b}} - \sqrt{a} = \frac{a - 2\sqrt{2ab} + 2b}{\sqrt{2b}} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{2b})^2}{\sqrt{2b}}$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{2b}} \cdot \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{2b})^2}{\sqrt{2b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{2b}}{\sqrt{2b}}$$

Bài 24: Cho biểu thức: $A = \frac{2\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$. Chứng minh A là một số nguyên.

Lời giải

$$A = \frac{2\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3 + \sqrt{5 - (2\sqrt{3} + 1)}}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3 + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$$

$$A = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = 1$$

Bài 25: Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}}{\sqrt{2} - \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{7 - 2\sqrt{10}}}$.

Lời giải

$$A = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}}{\sqrt{2} - \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{7 - 2\sqrt{10}}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2} - \sqrt{(3 - \sqrt{2})^2}}{\sqrt{2} - \sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2}}$$

$$A = \frac{\sqrt{3} - |\sqrt{2} + \sqrt{3}| - |3 - \sqrt{2}|}{\sqrt{2} - |\sqrt{5} + 1| + |\sqrt{5} - \sqrt{2}|} = \frac{\sqrt{3} - (\sqrt{2} + \sqrt{3}) - (3 - \sqrt{2})}{\sqrt{2} - (\sqrt{5} + 1) + (\sqrt{5} - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2} - \sqrt{3} - 3 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{5} - 1 + \sqrt{5} - \sqrt{2}} = 3$$

Bài 26: Cho biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3}{x\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0$.

- 1) Rút gọn A .
- 2) Tìm giá trị lớn nhất của A .

Lời giải

$$1) A = \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} + \frac{2}{x-\sqrt{x}+1}$$

$$A = \frac{x - \sqrt{x} + 1 - 3 + 2(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)} = \frac{x + \sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)}$$

$$A = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)} = \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1}$$

$$2) \text{ Vì } \sqrt{x} \geq 0 \text{ và } x - \sqrt{x} + 1 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4} > 0 \text{ với } x \geq 0$$

$$\text{Mặt khác: } (\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} + 1 \geq \sqrt{x} \text{ với } x \geq 0$$

$$\Rightarrow A = \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} \leq 1$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = 1$

Vậy $\text{Max} A = 1 \Leftrightarrow x = 0$

Bài 27: Không dùng máy tính cầm tay, hãy rút gọn biểu thức

$$B = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$$

Lời giải

$$B^2 = 4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + 4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + 2\sqrt{(4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}})(4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}})}$$

$$B^2 = 8 + 2\sqrt{16 - (10 + 2\sqrt{5})} = 8 + 2\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 8 + 2\sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} = 8 + 2(\sqrt{5} - 1) = 6 + 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow B = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} + 1 \text{ (do } B \geq 0)$$

Bài 28: Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{x-\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} - \frac{x-5}{x-\sqrt{x}-2}\right)$ với $x > 0$; $x \neq 4$

Lời giải

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{x-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} - \frac{x-5}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}\right)$$

$$P = \frac{x - (x - \sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)} : \frac{(x - 4) - (x - 5)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2)} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)} \cdot (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2) = \frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{\sqrt{x}}$$

Bài 29:

- 1) Trục căn thức ở mẫu của biểu thức sau $\frac{2}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 2}$.
- 2) Tìm điều kiện để biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 2} - \frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{x - 2}{x - 3\sqrt{x} + 2}$ có nghĩa và rút gọn A .

Lời giải

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{2}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 2} &= \frac{\sqrt[3]{2^3}}{\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{2^3}}{\sqrt[3]{2}(\sqrt[3]{2} + 1 + \sqrt[3]{2^2})} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} + 1 + \sqrt[3]{2^2}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{2^2}(\sqrt[3]{2} - 1)}{(\sqrt[3]{2} - 1)(\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} + 1)} = \frac{2 - \sqrt[3]{4}}{2 - 1} = 2 - \sqrt[3]{4} \end{aligned}$$

- 2) ĐKXĐ: $x \geq 0$; $x \neq 1$; $x \neq 4$

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 2} - \frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{x - 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 1)} = \frac{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} - 1) - (2\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2) + x - 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 1)} \\ A &= \frac{x - 4\sqrt{x} + 3 - (2x - 5\sqrt{x} + 2) + x - 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 1)} = \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 1)} = \frac{1}{\sqrt{x} - 2} \end{aligned}$$

Bài 30: Rút gọn biểu thức: $P = \frac{2x + \sqrt{16x} + 6}{x + 2\sqrt{x} - 3} + \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} + \frac{3}{\sqrt{x} + 3} - 2$.

Lời giải

ĐKXĐ: $x \geq 0$; $x \neq 1$.

$$\begin{aligned} P &= \frac{2x + \sqrt{16x} + 6}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} + \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} + \frac{3}{\sqrt{x} + 3} - 2 \\ P &= \frac{2x + \sqrt{16x} + 6 + (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 3) + 3(\sqrt{x} - 1) - 2(x + 2\sqrt{x} - 3)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} \\ P &= \frac{2x + 4\sqrt{x} + 6 + x + \sqrt{x} - 6 + 3\sqrt{x} - 3 - 2x - 4\sqrt{x} + 6}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} = \frac{x + 4\sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} \\ P &= \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \end{aligned}$$

Bài 31: Cho biểu thức $B = \sqrt{\frac{(x^2 - 3)^2 + 12x^2}{x^2}} + \sqrt{(x + 2)^2 - 8x}$. Rút gọn biểu thức B và tìm các giá trị nguyên của x để B có giá trị nguyên.

Lời giải

$$B = \sqrt{\frac{(x^2-3)^2 + 12x^2}{x^2}} + \sqrt{(x+2)^2 - 8x} = \sqrt{\frac{(x^2+3)^2}{x^2}} + \sqrt{(x-2)^2} = \frac{x^2+3}{|x|} + |x-2|$$

+) Nếu $x < 0$: $B = \frac{-x^2-3}{x} - x + 2 = \frac{-2x^2+2x-3}{x} = -2x + 2 - \frac{3}{x}$

B có giá trị nguyên khi $\frac{x}{3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in U(3)$ và $x < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$

+) Nếu $0 < x \leq 2$: $B = \frac{x^2+3}{x} - x + 2 = \frac{2x+3}{x} = 2 + \frac{3}{x}$

B có giá trị nguyên khi $\frac{3}{x} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in U'(3)$ và $x > 2 \Leftrightarrow x = 3$

Kết luận

$$B = \begin{cases} \frac{-2x^2+2x-3}{x} & \text{khi } x < 0 \\ \frac{2x+3}{x} & \text{khi } 0 < x \leq 2 \\ \frac{2x^2-2x+3}{x} & \text{khi } x > 2 \end{cases}$$

B có giá trị nguyên khi $x \in \{\pm 1; \pm 3\}$

Bài 32: Cho biểu thức $P = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{x}{\sqrt{x}-1} + \frac{5-2x}{x-1}$

- Tìm điều kiện của x để P xác định và rút gọn P
- Tìm các giá trị của x để P có giá trị bằng 7

Lời giải

a) ĐK: $x \geq 0$; $x \neq 1$

$$P = \frac{x^2 - x\sqrt{x} + x\sqrt{x} + x + 5 - 2x}{x-1} = \frac{x^2 - x + 5}{x-1}$$

b) $P = x + \frac{5}{x-1}$

$$P = 7 \Leftrightarrow x + \frac{5}{x-1} = 7 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2; x = 6 \text{ (nhận)}$$

Bài 33: Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} + \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{1-\sqrt{xy}} + 1 \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{\sqrt{xy}-1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} \right)$.

- Rút gọn biểu thức P .
- Cho $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = 8$. Tìm giá trị lớn nhất của P .

Lời giải

a) * ĐK: $\sqrt{xy} \neq 1$

$$\begin{aligned}
P &= \frac{(\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{xy}) + (\sqrt{xy}+\sqrt{x})(\sqrt{xy}+1) + (\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy})}{(\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy})} \\
&= \frac{(\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy}) + (\sqrt{xy}+\sqrt{x})(\sqrt{xy}+1) - (\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{xy})}{(\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy})} \\
&= \frac{(\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{xy}) + (\sqrt{xy}+\sqrt{x})(\sqrt{xy}+1) + (\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy})}{(\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy}) + (\sqrt{xy}+\sqrt{x})(\sqrt{xy}+1) - (\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{xy})} \\
&= \frac{1+\sqrt{x}}{x\sqrt{y}+\sqrt{xy}} = \frac{1}{\sqrt{xy}}
\end{aligned}$$

b) Theo Côsi, ta có: $8 = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{xy}}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{xy}} \leq 16$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{y}} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{16}$.

Vậy: $\text{Max} P = 9$, đạt được khi $x = y = \frac{1}{16}$.

Bài 34: Cho biểu thức $A = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right)$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 7 - 4\sqrt{3}$.

c) Tìm m để có giá trị của x thỏa mãn $A(\sqrt{x}+1) = m(x+1) - 2$

Lời giải

a) * ĐKXĐ: $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$

$$\begin{aligned}
\text{Ta có } A &= \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \left[\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}\right] \\
&= \frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} : \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3) - (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2) + \sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}+1} : \frac{x-9-(x-4)+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}+1} : \frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}+1} : \frac{1}{\sqrt{x}-2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{1}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$$

b) * ĐKXĐ: $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$

Ta có $x = 7 - 4\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^2$ (thỏa mãn ĐKXĐ)

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = |2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3} \quad (\text{vì } 2 - \sqrt{3} > 0)$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } A &= \frac{2 - \sqrt{3} - 2}{2 - \sqrt{3} + 1} = \frac{-\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \\ &= \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)} = \frac{-1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{-(1 + \sqrt{3})}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = -\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy khi } x = 7 - 4\sqrt{3} \text{ thì } A = -\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

c) Khi $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$ ta có $A(\sqrt{x} + 1) = m(x + 1) - 2$

$$\Rightarrow \sqrt{x} - 2 = m(x + 1) - 2 \Leftrightarrow mx - \sqrt{x} + m = 0$$

Đặt $\sqrt{x} = t$, đk $t \geq 0; t \neq 2; t \neq 3$ ta có pt $mt^2 - t + m = 0$ (*)

Ta phải tìm m để phương trình (*) có nghiệm thỏa mãn $t \geq 0; t \neq 2; t \neq 3$

TH1: Nếu $m = 0$ thì pt (*) có nghiệm là $t = 0$ (thỏa mãn $t \geq 0; t \neq 2; t \neq 3$)

TH2: Nếu $m \neq 0$ thì pt (*) là phương trình bậc 2 ẩn x

Ta thấy $P = \frac{m}{m} = 1 > 0 \quad \forall m \neq 0$ để pt (*) có 2 nghiệm thỏa mãn $t \geq 0$ thì

$$\begin{cases} (-1)^2 - 4.m.m \geq 0 \\ -\frac{1}{m} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4m^2 \geq 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{2} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq \frac{1}{2}$$

Vì $P = 1 \quad \forall m \neq 0$ do đó nếu một nghiệm là 2 thì nghiệm còn lại là $\frac{1}{2} (\neq 3)$

nếu một nghiệm là 3 thì nghiệm còn lại là $\frac{1}{3} (\neq 2)$

$$\text{Vậy } 0 \leq m \leq \frac{1}{2}$$

Bài 35: Cho biểu thức: $P = \frac{x}{x - \sqrt{x}} + \frac{2}{x + 2\sqrt{x}} + \frac{x + 2}{(\sqrt{x} - 1)(x + 2\sqrt{x})}$

a) Rút gọn P .

b) Tính P khi $x = 3 + 2\sqrt{2}$.

c) Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

Lời giải

a)

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} + \frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} + \frac{x+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \\
 &= \frac{x(\sqrt{x}+2) + 2(\sqrt{x}-1) + x+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x\sqrt{x} + 2x + 2\sqrt{x} - 2 + x + 2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \\
 &= \frac{x\sqrt{x} + 2x + 2\sqrt{x} + x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)}
 \end{aligned}$$

b) $x = 3 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{2 + 2\sqrt{2} + 1} = \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} = \sqrt{2} + 1$

$$P = \frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{2}+1+1}{\sqrt{2}+1-1} = \frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$$

c) ĐK: $x > 0; x \neq 1$:

$$P = \frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}-1+2}{\sqrt{x}-1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

Học sinh lập luận để tìm ra $x = 4$ hoặc $x = 9$.

Bài 36: Cho biểu thức:

$$A = \frac{x\sqrt{x} - x - 4\sqrt{x} + 4}{2 - 3\sqrt{x} + x\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x} + x - 4\sqrt{x} - 4}{2 + 3\sqrt{x} - x\sqrt{x}} \text{ với } x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4.$$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = \frac{(2 + \sqrt{3})\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}}{\sqrt{2} - 1}$.

Lời giải

a) Đặt $t = \sqrt{x}$, $t \geq 0, t \neq 1, t \neq 2$. Khi đó:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{t^3 - t^2 - 4t + 4}{2 - 3t + t^3} - \frac{t^3 + t^2 - 4t - 4}{2 + 3t - t^3} \\
 \Rightarrow A &= \frac{(t-1)(t-2)(t+2)}{(t-1)(t-1)(t+2)} - \frac{(t+1)(t-2)(t+2)}{(t+1)(t+1)(2-t)} \\
 \Rightarrow A &= \frac{t-2}{t-1} + \frac{t+2}{t+1} = \frac{2t^2 - 4}{t^2 - 1} = 2 - \frac{2}{t^2 - 1} \\
 \Rightarrow A &= 2 - \frac{2}{x - 1}
 \end{aligned}$$

b) $x = \frac{(2 + \sqrt{3})\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{(2 + \sqrt{3})\sqrt{(2 - \sqrt{3})^2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}{\sqrt{2} - 1}$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$$

Do đó: $A = 2 - \frac{2}{\sqrt{2} + 1 - 1} = 2 - \frac{2}{\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}$

Bài 37: Rút gọn biểu thức $A = \frac{3 + \sqrt{5}}{2\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{3 - \sqrt{5}}{2\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5}}$

Lời giải

$$A = \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$$

Nhân tử và mẫu mỗi phân thức cho $\sqrt{2}$ ta có:

$$A = \frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{5})}{4+\sqrt{6+2\sqrt{5}}} + \frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{4-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$$

$$A = \sqrt{2} \left[\frac{3+\sqrt{5}}{4+\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}} + \frac{3-\sqrt{5}}{4-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}} \right]$$

$$A = \sqrt{2} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} + \frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} \right)$$

$$A = \sqrt{2} \left[\frac{(3+\sqrt{5})(5-\sqrt{5}) + (3-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})} \right]$$

$$A = \sqrt{2} \frac{15-3\sqrt{5}+5\sqrt{5}-5+15+3\sqrt{5}-5\sqrt{5}-5}{25-5}$$

$$A = \sqrt{2} \cdot \frac{20}{20}$$

$$A = \sqrt{2}$$

Bài 38: Cho các số dương: a; b và $x = \frac{2ab}{b^2+1}$. Xét biểu thức $P = \frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}} + \frac{1}{3b}$

- Chứng minh P xác định. Rút gọn P.
- Khi a và b thay đổi, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Lời giải

$$a) \text{ Ta có: } a; b; x > 0 \Rightarrow a+x > 0 \quad (1)$$

$$\text{Xét } a-x = \frac{a(b-1)^2}{b^2+1} \geq 0 \quad (2)$$

$$\text{Ta có } a+x > a-x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a+x} - \sqrt{a-x} \neq 0 \quad (3)$$

Từ (1); (2); (3) $\Rightarrow$ P xác định

* Rút gọn:

$$\text{Ta có: } a+x = a + \frac{2ab}{b^2+1} = \frac{a(b+1)^2}{b^2+1} \Rightarrow \sqrt{a+x} = (b+1)\sqrt{\frac{a}{b^2+1}}$$

$$a-x = a - \frac{2ab}{b^2+1} = \frac{a(b-1)^2}{b^2+1} \Rightarrow \sqrt{a-x} = |b-1|\sqrt{\frac{a}{b^2+1}}$$

$$\Rightarrow P = \frac{(b+1)\sqrt{\frac{a}{b^2+1}} + |b-1|\sqrt{\frac{a}{b^2+1}}}{(b+1)\sqrt{\frac{a}{b^2+1}} - |b-1|\sqrt{\frac{a}{b^2+1}}} + \frac{1}{3b} = \frac{b+1+|b-1|}{b+1-|b-1|} + \frac{1}{3b}$$

$$\bullet \text{ Nếu } 0 < b < 1 \Rightarrow P = \frac{2}{2b} + \frac{1}{3b} = \frac{4}{3b}$$

- Nếu $b \geq 1 \Rightarrow P = b + \frac{1}{3b} = \frac{3b^2 + 1}{3b}$

b) Xét 2 trường hợp:

- Nếu $0 < b < 1$, a dương tùy ý thì $P = \frac{4}{3b} \Rightarrow P \geq \frac{4}{3}$

- Nếu $b \geq 1$, a dương tùy ý thì $P = b + \frac{1}{3b} = \left(\frac{b}{3} + \frac{1}{3b}\right) + \frac{2b}{3}$

Ta có: $\frac{b}{3} + \frac{1}{3b} \geq \frac{2}{3}$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $b = 1$

Mặt khác: $\frac{2b}{3} \geq \frac{2}{3}$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $b = 1$

Vậy $P \geq \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $b = 1$

KL: Giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{4}{3}$

Bài 39: Cho biểu thức: $A = \frac{x\sqrt{x} - 4x - \sqrt{x} + 4}{2x\sqrt{x} - 14x + 28\sqrt{x} - 16}$

a) Tìm x để A có nghĩa, từ đó rút gọn biểu thức A .

b) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

Lời giải

a) Để A có nghĩa, trước hết $x \geq 0$. Đặt $t = \sqrt{x}$ ($x \geq 0$)

$$A = \frac{t^3 - 4t^2 - t + 4}{2t^3 - 14t^2 + 28t - 16} = \frac{(t^2 - 1)(t - 4)}{2t^3 - 2t^2 - (12t^2 - 28t + 16)} = \frac{(t - 1)(t + 1)(t - 4)}{2(t - 1)(t - 2)(t - 4)}$$

Để biểu thức A có nghĩa thì: $t \geq 0$, $t \neq 1$, $t \neq 2$, $t \neq 4 \Leftrightarrow x \geq 0$, $x \neq 1$, $x \neq 4$, $x \neq 16$ (*)

Khi đó, rút gọn ta được:

$$A = \frac{t + 1}{2(t - 2)} = \frac{\sqrt{x} + 1}{2(\sqrt{x} - 2)}$$

b) $A = \frac{t + 1}{2(t - 2)} = \frac{(t - 2) + 3}{2(t - 2)} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2(t - 2)}$

Để A là số nguyên thì x nguyên và $t - 2$ phải bằng ± 1 hoặc ± 3 .

- Nếu $t - 2 = -1 \Leftrightarrow t = 1$ (loại vì trái điều kiện (*)).

- Nếu $t - 2 = -3 \Leftrightarrow t = -1 < 0$ (loại)

- Nếu $t - 2 = 1 \Leftrightarrow t = 3 \Leftrightarrow x = 9$ và $A = 2$

- Nếu $t - 2 = 3 \Leftrightarrow t = 5 \Leftrightarrow x = 25$ và $A = 1$

Vậy: Để A nhận các giá trị nguyên thì $x = 9$ và $x = 25$.

Bài 40: Cho biểu thức $\left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x\sqrt{y} - y\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{\sqrt{x^2 y}}{x + y} - \frac{2\sqrt{y}}{x - y}$, ($x > 0$; $y > 0$, $x \neq y$)

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tính giá trị của A biết rằng x, y là nghiệm của phương trình $t^2 - 4t + 1 = 0$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
 \text{a) } A &= \left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{\sqrt{x^2y}}{x+y} - \frac{2\sqrt{y}}{x-y}, (x > 0; y > 0, x \neq y) \\
 &= \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x\sqrt{y}-y\sqrt{x}) + (\sqrt{x}+\sqrt{y})(x\sqrt{y}+y\sqrt{x})}{(x\sqrt{y}+y\sqrt{x})(x\sqrt{y}-y\sqrt{x})} \cdot \frac{x\sqrt{y}}{x+y} - \frac{2\sqrt{y}}{x-y} \\
 &= \frac{2x\sqrt{xy} + 2y\sqrt{xy}}{(x\sqrt{y}+y\sqrt{x})(x\sqrt{y}-y\sqrt{x})} \cdot \frac{x\sqrt{y}}{x+y} - \frac{2\sqrt{y}}{x-y} \\
 &= \frac{2(x+y)\sqrt{xy} \cdot x\sqrt{y}}{xy(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+y)} - \frac{2\sqrt{y}}{x-y} \\
 &= \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} - \frac{2\sqrt{y}}{x-y} \\
 &= \frac{2\sqrt{x}-2\sqrt{y}}{x-y} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}
 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}.$$

b) Do x và y là nghiệm của phương trình $t^2 - 4t + 1 = 0$ (1) nên theo định lí Vi-ét ta có:

$$x + y = 4; xy = 1 \Rightarrow x, y > 0; x \neq y \Rightarrow x, y \text{ thỏa mãn ĐKXD của } A.$$

Mặt khác, ta có:

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = x + y + 2\sqrt{xy} = 4 + 2 \cdot 1 = 6 \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{6} \text{ (do } \sqrt{x} + \sqrt{y} > 0)$$

$$\Rightarrow A = \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Bài 41: Cho biểu thức $M = \frac{2\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{2a} - \sqrt{3b}) + \sqrt{3b}(2\sqrt{a} - \sqrt{3b}) - 2a\sqrt{a}}{a\sqrt{2} + \sqrt{3ab}}$

a) Tìm điều kiện của a và b để M xác định và rút gọn M .

b) Tính giá trị của M khi $a = 1 + 3\sqrt{2}$, $b = 10 + \frac{11\sqrt{8}}{3}$

Lời giải

a) ĐK xác định của M : $\begin{cases} a, b \geq 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{2a + 2a\sqrt{2} - 2\sqrt{3ab} + 2\sqrt{3ab} - 3b - 2a\sqrt{2}}{a\sqrt{2} + \sqrt{3ab}} \\
 &= \frac{2a - 3b}{a\sqrt{2} + \sqrt{3ab}} = \frac{(\sqrt{2a} + \sqrt{3b})(\sqrt{2a} - \sqrt{3b})}{\sqrt{a}(\sqrt{2a} + \sqrt{3b})} = \frac{\sqrt{2a} - \sqrt{3b}}{\sqrt{a}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) Ta có } M &= \sqrt{2} - \sqrt{\frac{3b}{a}} \text{ với } a = 1 + 3\sqrt{2}, b = 10 + \frac{11\sqrt{8}}{3} \\
 \Rightarrow \frac{3b}{a} &= \frac{30 + 22\sqrt{2}}{1 + 3\sqrt{2}} = \frac{(30 + 22\sqrt{2})(3\sqrt{2} - 1)}{(1 + 3\sqrt{2})(3\sqrt{2} - 1)} = \frac{102 + 68\sqrt{2}}{17}
 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \sqrt{\frac{3b}{a}} = \sqrt{6+4\sqrt{2}} = \sqrt{(2+\sqrt{2})^2} = 2+\sqrt{2}$$

$$\text{Từ đó } M = \sqrt{2} - (2+\sqrt{2}) = -2$$

Bài 42: Cho biểu thức: $P = \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{1 - \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} \right) : \left(1 + \frac{x + y + 2xy}{1 - xy} \right)$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của P với $x = \frac{2}{2 + \sqrt{3}}$.

Lời giải

a) ĐKXD: $x \geq 0; y \geq 0; xy \neq 1$.

Mẫu thức chung là $1 - xy$

$$\begin{aligned} P &= \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 + \sqrt{xy}) + (\sqrt{x} - \sqrt{y})(1 - \sqrt{xy})}{1 - xy} : \frac{1 - xy + x + y + 2xy}{1 - xy} \\ &= \frac{\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y} + y\sqrt{x} + \sqrt{x} - x\sqrt{y} - \sqrt{y} + y\sqrt{x}}{1 - xy} \cdot \frac{1 - xy}{1 + x + y + xy} \\ &= \frac{2(\sqrt{x} + y\sqrt{x})}{(1+x)(1+y)} = \frac{2\sqrt{x}(1+y)}{(1+x)(1+y)} = \frac{2\sqrt{x}}{1+x} \end{aligned}$$

$$\text{b) } x = \frac{2}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2(2 - \sqrt{3})}{4 - 3} = 3 - 2\sqrt{3} + 1 = (\sqrt{3} - 1)^2$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = |\sqrt{3} - 1| = \sqrt{3} - 1$$

$$P = \frac{2(\sqrt{3} - 1)}{1 + (\sqrt{3} - 1)^2} = \frac{2\sqrt{3} - 2}{1 + 3 - 2\sqrt{3} + 1} =$$

$$P = \frac{2(\sqrt{3} - 1)}{5 - 2\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3} + 2}{13}$$

Bài 43: a) Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}} \cdot (\sqrt{(1+x)^3} + \sqrt{(1-x)^3})}{2 - \sqrt{1 - x^2}}$

với $-1 \leq x \leq 1$.

b) Cho a và b là các số thỏa mãn $a > b > 0$ và $a^3 - a^2b + ab^2 - 6b^3 = 0$.

Tính giá trị của biểu thức $B = \frac{a^4 - 4b^4}{b^4 - 4a^4}$.

Lời giải

a)

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} \cdot (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) (2-\sqrt{1-x^2})}{2-\sqrt{1-x^2}} \\
 &= \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} \cdot (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) \\
 &= \sqrt{(1-\sqrt{1-x^2})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^2} = \sqrt{(1-\sqrt{1-x^2})(2+2\sqrt{1-x^2})} \\
 &= \sqrt{2x^2} = |x|\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

b)

$$a^3 - a^2b + ab^2 - 6b^3 = 0 \Leftrightarrow (a-2b)(a^2 + ab + 3b^2) = 0 \quad (*)$$

Vì $a > b > 0 \Rightarrow a^2 + ab + 3b^2 > 0$ nên từ (*) ta có $a = 2b$

Vậy biểu thức $B = \frac{a^4 - 4b^4}{b^4 - 4a^4} = \frac{16b^4 - 4b^4}{b^4 - 64b^4}$

$$B = \frac{12b^4}{-63b^4} = -\frac{4}{21}$$

Bài 44: Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} + \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{1-\sqrt{xy}} + 1 \right) : \left(1 - \frac{\sqrt{xy}+\sqrt{x}}{\sqrt{xy}-1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{xy}+1} \right)$.

1. Rút gọn biểu thức A.

2. Cho $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của A.

Lời giải

a)

Điều kiện: $\sqrt{xy} \neq 1$.

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{(\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{xy}) + (\sqrt{xy}+\sqrt{x})(\sqrt{xy}+1) + (\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy})}{(\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy})} \\
 &= \frac{(\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy}) + (\sqrt{xy}+\sqrt{x})(\sqrt{xy}+1) - (\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{xy})}{(\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy})} = \\
 &= \frac{(\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{xy}) + (\sqrt{xy}+\sqrt{x})(\sqrt{xy}+1) + (\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy})}{(\sqrt{xy}+1)(1-\sqrt{xy}) + (\sqrt{xy}+\sqrt{x})(\sqrt{xy}+1) - (\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{xy})} = \\
 &= \frac{1+\sqrt{x}}{x\sqrt{y}+\sqrt{xy}} = \frac{1}{\sqrt{xy}}.
 \end{aligned}$$

b) Theo Côsi, ta có: $6 = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{xy}}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{xy}} \leq 9$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{y}} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{9}$.

Vậy: $\max A = 9$, đạt được khi : $x = y = \frac{1}{9}$.

Bài 45: Cho biểu thức:

$$P = \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} + 4\sqrt{a} \right) \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right).$$

a) Rút gọn P .

b) Tính giá trị của P tại $a = (2 + \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1)\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

Lời giải

a)

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} a \geq 0 \\ \sqrt{a} \neq 1 \\ \sqrt{a} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$$

$$P = \frac{(\sqrt{a}+1)^2 - (\sqrt{a}-1)^2 + 4\sqrt{a}(a-1)}{a-1} \cdot \frac{a-1}{\sqrt{a}}$$

Vậy $P = 4a$

$$\begin{aligned} \text{b) } a &= \sqrt{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1)} \\ &= \sqrt{(2 + \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1)} = \sqrt{(2 + \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1)^2} = \sqrt{(2 + \sqrt{3})(4 - 2\sqrt{3})} \\ &= \sqrt{2(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Vậy $a = \sqrt{2}$ do đó $P = 4a = 4\sqrt{2}$

Bài 46: Cho biểu thức: $P = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$. Với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm x để $P = \frac{2}{7}$.

c) So sánh: P^2 và $2P$.

Lời giải

a) Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 1$.

$$\begin{aligned}
P &= \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2} \\
&= \left(\frac{x+2}{(\sqrt{x})^3-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2} \\
&= \frac{x+2+\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)-(x+\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} : \frac{\sqrt{x}-1}{2} \\
&= \frac{x-2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}-1} \\
&= \frac{2}{x+\sqrt{x}+1}
\end{aligned}$$

b) Với $x \geq 0, x \neq 1$. Ta có:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{2}{7} \\
\Leftrightarrow \frac{2}{x+\sqrt{x}+1} &= \frac{2}{7} \\
\Leftrightarrow x+\sqrt{x}+1 &= 7 \\
\Leftrightarrow x+\sqrt{x}-6 &= 0 \\
\Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3) &= 0
\end{aligned}$$

Vì $\sqrt{x}+3 > 0$ nên $\sqrt{x}-2=0 \Leftrightarrow x=4$ (t/m)

Vậy $P = \frac{2}{7}$ khi $x=4$

c) Vì $x \geq 0 \Rightarrow x+\sqrt{x}+1 \geq 1$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 0 < \frac{2}{x+\sqrt{x}+1} \leq 2 \\
&\Leftrightarrow 0 < P \leq 2 \\
&\Leftrightarrow P(P-2) \leq 0 \\
&\Leftrightarrow P^2 - 2P \leq 0 \\
&\Leftrightarrow P^2 \leq 2P
\end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi $P=2 \Leftrightarrow x=0$

Vậy $P^2 \leq 2P$

Bài 47: Rút gọn biểu thức: $P = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$.

Lời giải

$$P = \frac{2\sqrt{x}-9+(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)-(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$P = \frac{x-\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$$

Bài 48: Rút gọn biểu thức: $A = \left(\frac{2\sqrt{x}-1}{1-\sqrt{x}} + \frac{2x-\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} \right) : \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^3}+1}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \left(\frac{2\sqrt{x}-1}{1-\sqrt{x}} + \frac{2x-\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} \right) : \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^3}+1} \\ &= \frac{(2\sqrt{x}-1)(x-\sqrt{x}+1)+\sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)(1-\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(x-\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{\sqrt{x^3}+1}{2\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{(2\sqrt{x}-1)(x-\sqrt{x}+1+\sqrt{x}-x)(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{(1-\sqrt{x})(x-\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Bài 49: Rút gọn biểu thức $B = \sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}} = \sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{8+2\sqrt{8}+1}}} \\ &= \sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{(\sqrt{8}+1)^2}}} = \sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{8}+1}} \\ &= \sqrt{13+30\sqrt{2+2\sqrt{2}+1}} = \sqrt{13+30\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}} = \sqrt{18+2\sqrt{18 \cdot 5}+25} \\ &= \sqrt{(\sqrt{18}+5)^2} = 3\sqrt{2}+5 \end{aligned}$$

Bài 50: Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}} \\ A &= \frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+3)}{2+\sqrt{6+2\sqrt{5}}} + \frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{2-\sqrt{6-2\sqrt{5}}} \\ A &= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+3)}{2+\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}} + \frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{2-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+3)}{\sqrt{5}+3} + \frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{3-\sqrt{5}} \\ A &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Bài 51: Cho $A = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1}$

a) Nêu điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A

b) Đặt $B = A + x - 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức B

Lời giải

a) ĐKXD: $x \geq 0$

$$\begin{aligned} A &= \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x^3} - 1)}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x^3} + 1)}{x - \sqrt{x} + 1} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)}{x - \sqrt{x} + 1} \\ &= \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) - \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) = x - \sqrt{x} - x - \sqrt{x} = -2\sqrt{x} \end{aligned}$$

b) $B = A + x - 1 = -2\sqrt{x} + x - 1 = x - 2\sqrt{x} - 1 = (\sqrt{x} - 1)^2 - 2 \geq -2$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (TM ĐKXD)

Vậy GTNN của biểu thức B = -2 khi $x = 1$

Bài 52: Cho biểu thức $P = \left(\frac{x-4}{2x+3\sqrt{x}-2} - \frac{2x-5\sqrt{x}-1}{4x-1} \right) \left(x\sqrt{x} + 2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$ với $x > 0$ và $x \neq \frac{1}{4}$.

Rút gọn biểu thức P và tìm x để $P \leq \frac{3}{2}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} P &= \left[\frac{x-4}{(2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} - \frac{2x-5\sqrt{x}-1}{(2\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1)} \right] \left(\frac{2x^2+4\sqrt{x}+x\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}} \right) \\ &= \left[\frac{\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}-1} - \frac{2x-5\sqrt{x}-1}{(2\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1)} \right] \left[\frac{(2\sqrt{x}+1)(x\sqrt{x}+2)}{2\sqrt{x}} \right] \\ &= \left[\frac{2\sqrt{x}-1}{(2\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1)} \right] \left[\frac{(2\sqrt{x}+1)(x\sqrt{x}+2)}{2\sqrt{x}} \right] \\ &= \frac{x\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

+ Với $x > 0$, ta có: $x\sqrt{x} + 2 = x\sqrt{x} + 1 + 1 \geq 3\sqrt[3]{x\sqrt{x} \cdot 1 \cdot 1} \Rightarrow x\sqrt{x} + 2 \geq 3\sqrt{x}$

Suy ra $P = \frac{x\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}} \geq \frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ hay $P \geq \frac{3}{2}$ (dấu bằng xảy ra khi $x = 1$).

Do đó, để $P \leq \frac{3}{2}$ thì $x = 1$.

Hoặc trình bày cách khác:

+ Với $x > 0$, ta có: $P \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 2 \leq 0$ (*)

Đặt $t = \sqrt{x}$, $t > 0$.

Khi đó (*) trở thành: $t^3 - 3t + 2 \leq 0$

$$\Leftrightarrow (t-1)^2(t+2) \leq 0$$

Vì $t+2 > 0, (t-1)^2 \geq 0$ nên $(t-1)^2(t+2) \leq 0 \Leftrightarrow t-1=0 \Leftrightarrow t=1$

Bài 53: Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}}$ với $x \geq 4$.

Lời giải

Với $x \geq 4$, ta có :

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{(x-4) + 4\sqrt{x-4} + 4} + \sqrt{(x-4) - 4\sqrt{x-4} + 4} \\ &= \sqrt{(\sqrt{x-4} + 2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-4} - 2)^2} \\ &= \sqrt{x-4} + 2 + |\sqrt{x-4} - 2| \end{aligned}$$

Xét các trường hợp :

* Với $x \geq 8$ ta có :

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{x-4} + 2 + \sqrt{x-4} - 2 \\ &= 2\sqrt{x-4} \end{aligned}$$

* Với $4 \leq x < 8$ ta có :

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{x-4} + 2 - \sqrt{x-4} + 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Bài 54: Cho $P = \frac{x\sqrt{x} - 2x - \sqrt{x} + 2}{x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 2} + \frac{x\sqrt{x} + 2x - \sqrt{x} - 2}{x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 2}$

1. Rút gọn P. Với giá trị nào của x thì $P > 1$

2. Tìm x nguyên biết P đạt giá trị nguyên lớn nhất

Lời giải

1) Điều kiện $x > 0; x \neq 1; 4$

$$\begin{aligned} P &= \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)^2} + \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)^2} \\ &= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{2(x+1)}{x-1} \end{aligned}$$

$$P > 1 \Leftrightarrow \frac{2(x+1)}{x-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{2(x+1)}{x-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{2x+2-x+1}{x-1} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+3}{x-1} > 0 \text{ Theo đ/k } x > 0 \Rightarrow x+3 > 0$$

$$\Rightarrow x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

Kết hợp điều kiện $x > 0; x \neq 1; 4$

Suy ra $x > 1; x \neq 4$ thì $P > 1$

$$2) P = \frac{2(x+1)}{x-1} = 2 + \frac{4}{x-1} \text{ Với } x > 0; x \neq 1; 4$$

P nguyên $\Leftrightarrow x-1$ là ước của 4

Liên hệ tài liệu word môn toán zalo: 039.373.2038

P đạt giá trị nguyên lớn nhất $\Leftrightarrow x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$

Vậy P đạt giá trị lớn nhất bằng 6 khi $x = 2$

Bài 55: Cho biểu thức $A = \left(\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} + \frac{x\sqrt{x}-8}{4-x} \right) : \left[\frac{(\sqrt{x}-2)^2 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \right]$

Với x không âm, khác 4.

a, Rút gọn A

b, Chứng minh rằng $A < 1$ với mọi x không âm, khác 4

c, Tìm x để A là số nguyên

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a)} & \left(\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} + \frac{x\sqrt{x}-8}{4-x} \right) : \left[\frac{(\sqrt{x}-2)^2 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \right] \\ &= \left[\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-2} - \frac{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \right] \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{x+4} \\ &= \left[\sqrt{x}+2 - \frac{x+2\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2} \right] \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{x+4} \\ &= \frac{(\sqrt{x}+2)^2 - x - 2\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x}+2} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{x+4} \\ &= \frac{2\sqrt{x}}{x+4} \end{aligned}$$

b) Ta giả sử: $\frac{2\sqrt{x}}{x+4} < 1$

$$\text{Suy ra } \frac{2\sqrt{x}-x-4}{x+4} < 0 \Leftrightarrow \frac{-(x-2\sqrt{x}+1)-3}{x+4} < 0 \Leftrightarrow \frac{-(\sqrt{x}-1)^2-3}{x+4} < 0$$

Vì $-(\sqrt{x}-1)^2-3 < 0$ luôn đúng, suy ra điều phải chứng minh

Bài 56: Cho biểu thức: $P = \frac{x\sqrt{x} + 26\sqrt{x} - 19}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}$

b) Rút gọn P.

b) Tìm x để P đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

a) ĐK: $0 \leq x \neq 1$. Ta có:

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{x\sqrt{x} + 26\sqrt{x} - 19}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} \\
 &= \frac{x\sqrt{x} + 26\sqrt{x} - 19 - 2\sqrt{x}(\sqrt{x}+3) + (\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} \\
 &= \frac{x\sqrt{x} + 26\sqrt{x} - 19 - 2x - 6\sqrt{x} + x - 4\sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} \\
 &= \frac{x\sqrt{x} - x + 16\sqrt{x} - 16}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} = \frac{(\sqrt{x}-1)(x+16)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} = \frac{x+16}{\sqrt{x}+3}
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{x+16}{\sqrt{x}+3} = \sqrt{x} - 3 + \frac{25}{\sqrt{x}+3} = \sqrt{x} + 3 + \frac{25}{\sqrt{x}+3} - 6 \\
 &\geq 2\sqrt{(\sqrt{x}+3) \cdot \frac{25}{\sqrt{x}+3}} - 6 = 10 - 6 = 4
 \end{aligned}$$

Vậy GTNN của $P = 4$ khi $\sqrt{x} + 3 = \frac{25}{\sqrt{x}+3} \Leftrightarrow x = 4$

Bài 57: Cho biểu thức: $A = \left(\frac{3x + \sqrt{16x} - 7}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} + 7}{\sqrt{x} - 1} \right) : \left(2 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \right)$

a) Rút gọn biểu thức A .b) Tìm x để $A = -6$.**Lời giải****a) (1,0 điểm) Rút gọn biểu thức A .**Điều kiện: $x \geq 0; x \neq 1; x \neq 4$

$$\begin{aligned}
 \text{Biến đổi: } \frac{3x + \sqrt{16x} - 7}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} + 7}{\sqrt{x} - 1} &= \frac{(\sqrt{x}-1)(3\sqrt{x}+7)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}-1} \\
 &= \frac{2\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}-1} \\
 &= \frac{2(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}-1} = 2 - \frac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}-9}{\sqrt{x}-1}
 \end{aligned}$$

$$\text{và } 2 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}$$

$$\text{Từ đó: } A = \frac{\sqrt{x}-9}{\sqrt{x}-1} : \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}-9}{\sqrt{x}-2}$$

b) (0,5 điểm) Tìm x để $A = -6$.

$$\text{Biến đổi: } A = -6 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-9}{\sqrt{x}-2} = -6 \Leftrightarrow \sqrt{x}-9 = -6(\sqrt{x}-2)$$

$$7\sqrt{x} = 21 \Leftrightarrow x = 9 \text{ (thỏa mãn điều kiện). Vậy để } A = -6 \text{ thì } x = 9$$

Bài 58: Cho biểu thức $M = \left(\frac{x+2\sqrt{x}+4}{x\sqrt{x}-8} + \frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}+10}{x+6\sqrt{x}+5} \right)$

Rút gọn M và tìm x để $M > 1$

Lời giải

$$\begin{aligned} *M &= \left(\frac{x+2\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)} + \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2} + \frac{2(\sqrt{x}+5)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+5)} \right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} \right) \\ &= \frac{\sqrt{x}-1+(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} : \frac{(3\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+1)+2(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{\sqrt{x}-1+x-2\sqrt{x}+\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-11)} : \frac{3x+3\sqrt{x}-5\sqrt{x}-5+2\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{x-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-11)} : \frac{3x-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{3(x-3)} = \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)} \end{aligned}$$

Vậy $M = \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)}$ với $x \geq 0; x \neq 1, 3, 4$

$$*M < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)} > 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{4-2\sqrt{x}}{3(\sqrt{x}-1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} > 0$$

$$\text{Ta có } \Leftrightarrow \begin{cases} 2-\sqrt{x} > 0 \\ \sqrt{x}-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow 1 < x < 4. \text{ Vậy } M > 1 \text{ khi } 1 < x < 4 \text{ và } x \neq 3$$

Bài 59: $A = \frac{x\sqrt{x}-x-4\sqrt{x}+4}{2-3\sqrt{x}+x\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+x-4\sqrt{x}-4}{2+3\sqrt{x}-x\sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = \frac{(2+\sqrt{3})\sqrt{7-4\sqrt{3}}}{\sqrt{2}-1}$.

Lời giải

Đặt $t = \sqrt{x}, t \geq 0, t \neq 1, t \neq 2$ khi đó:

$$\Rightarrow A = \frac{t^3-t^2-4t+4}{2-3t+t^3} - \frac{t^3+t^2-4t-4}{2+3t-t^3}$$

$$\Rightarrow A = \frac{(t-1)(t-2)(t+2)}{(t-1)(t-1)(t+2)} - \frac{(t+1)(t-2)(t+2)}{(t+1)(t+1)(2-t)}$$

$$\Rightarrow A = \frac{t-2}{t-1} + \frac{t+2}{t+1} = \frac{2t^2-4}{t^2-1} = 2 - \frac{2}{t^2-1}$$

$$\Rightarrow A = 2 - \frac{2}{x-1}$$

$$x = \frac{(2+\sqrt{3})\sqrt{7-4\sqrt{3}}}{\sqrt{2}-1} = \frac{(2+\sqrt{3})\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{\sqrt{2}-1}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$$

$$\text{Do đó: } A = 2 - \frac{2}{\sqrt{2}+1-1} = 2 - \frac{2}{\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}$$

Bài 60: Cho biểu thức:

$$p = \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} - \frac{a\sqrt{a}+1}{a+\sqrt{a}} + (\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}})(\frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} - \frac{2+\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}).$$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của a (thỏa điều kiện thích hợp) ta đều có $P > 6$.

Lời giải

a) Rút gọn biểu thức P

$$\begin{aligned} p &= \frac{\sqrt{a^3}-1^3}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} - \frac{\sqrt{a^3}+1^3}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)} + \left(\frac{\sqrt{a^2}-1}{\sqrt{a}} \right) \left[\frac{3\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} - \frac{(2+\sqrt{a})(\sqrt{a}-1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} \right] \\ p &= \frac{(\sqrt{a}-1)(a+\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} - \frac{(\sqrt{a}+1)(a-\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)} + \frac{a-1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{3a+3\sqrt{a}-2\sqrt{a}+2-a+\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} \\ p &= \frac{a+\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} - \frac{a-\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} + \frac{a-1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{2a+2\sqrt{a}+2}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} = \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}} + \frac{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}} \cdot \frac{2(a+\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} \\ p &= 2 + \frac{2(a+\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}} = \frac{2\sqrt{a}+2a+2\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}} = 2\sqrt{a} + \frac{2}{\sqrt{a}} + 4 \end{aligned}$$

b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của a (thỏa điều kiện thích hợp) ta đều có $P > 6$.

$$\text{Ta có } 2\sqrt{a} + \frac{2}{\sqrt{a}} \geq 2\sqrt{2\sqrt{a} \cdot \frac{2}{\sqrt{a}}} = 4 \text{ vậy } p \geq 8 \text{ hay } p > 6 \text{ (đpcm).}$$

$$\text{Bài 61: a) Cho } M = (1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}) : (\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6})$$

1. Rút gọn M

2. Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức M nhận giá trị là số nguyên

Lời giải

$$\text{ĐKXĐ: } x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9 \quad (*)$$

1) Rút gọn M : Với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$

$$\begin{aligned}
 M &= \left(\frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right) : \left[\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x}+1} : \left[\frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3) - (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2) + (\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x}+1} : \frac{x-9-(x-4)+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\
 &= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}
 \end{aligned}$$

Vậy $M = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$ (với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$) (*)

2) $M = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1-3}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} - \frac{3}{\sqrt{x}+1} = 1 - \frac{3}{\sqrt{x}+1}$

Biểu thức M có giá trị nguyên khi và chỉ khi: $3 : \sqrt{x}+1 \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 \in U(3)$

$U(3) \in \{\pm 1; \pm 3\}$ Vì $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+1 \geq 1$

Nên $\sqrt{x}+1 \in \{1; 3\}$ Xảy ra các trường hợp sau:

. $\sqrt{x}+1=1 \Leftrightarrow \sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=0$ (TMĐK (*))

. $\sqrt{x}+1=3 \Leftrightarrow \sqrt{x}=2 \Leftrightarrow x=4$ (không TMĐK (*) loại)

Vậy $x=0$ thì M nhận giá trị nguyên

Bài 62: Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{5})}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}$.

Lời giải

Ta có: $A = \frac{2(3+\sqrt{5})}{4+\sqrt{6}+2\sqrt{5}} + \frac{2(3-\sqrt{5})}{4-\sqrt{6}-2\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4+\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}} + \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}}$

$$A = \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{\sqrt{5}+5} + \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{5-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2$$

Bài 63: Cho biểu thức: $A = \frac{2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$. Chứng minh A là một số nguyên.

Lời giải

$$A = \frac{2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3+\sqrt{5-(2\sqrt{3}+1)}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3+\sqrt{4-2\sqrt{3}}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

$$A = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = 1$$

Bài 64: Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{11-6\sqrt{2}}}{\sqrt{2} - \sqrt{6+2\sqrt{5}} + \sqrt{7-2\sqrt{10}}}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{11-6\sqrt{2}}}{\sqrt{2} - \sqrt{6+2\sqrt{5}} + \sqrt{7-2\sqrt{10}}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2} - \sqrt{(3 - \sqrt{2})^2}}{\sqrt{2} - \sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2}} \\ A &= \frac{\sqrt{3} - |\sqrt{2} + \sqrt{3}| - |3 - \sqrt{2}|}{\sqrt{2} - |\sqrt{5} + 1| + |\sqrt{5} - \sqrt{2}|} = \frac{\sqrt{3} - (\sqrt{2} + \sqrt{3}) - (3 - \sqrt{2})}{\sqrt{2} - (\sqrt{5} + 1) + (\sqrt{5} - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2} - \sqrt{3} - 3 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{5} - 1 + \sqrt{5} - \sqrt{2}} = 3 \end{aligned}$$

Bài 65: Tính $A = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} - \frac{2}{3 - \sqrt{3}} - \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

$$A = \frac{2 + \sqrt{3}}{4 - 3} - \frac{2(3 + \sqrt{3})}{9 - 3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = 2 + \sqrt{3} - \frac{3 + \sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{6 + 3\sqrt{3} - 3 - \sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{3} = 1$$

Bài 66: Cho $S = \left(1 - \frac{2}{2.3}\right)\left(1 - \frac{2}{3.4}\right) \dots \left(1 - \frac{2}{2020.2021}\right)$. Tính S (kết quả để dưới dạng phân số tối giản).

Lời giải

$$\text{Với mọi số nguyên dương } n \text{ ta có: } 1 - \frac{2}{n(n+1)} = \frac{n^2 + n - 2}{n(n+1)} = \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}$$

$$\begin{aligned} S &= \left(1 - \frac{2}{2.3}\right)\left(1 - \frac{2}{3.4}\right) \dots \left(1 - \frac{2}{2020.2021}\right) \\ &= \frac{1.4}{2.3} \cdot \frac{2.5}{3.4} \cdot \frac{3.6}{4.5} \dots \frac{2019.2022}{2020.2021} \\ &= \frac{(1.2.3 \dots 2019) \cdot (4.5.6 \dots 2022)}{(2.3.4 \dots 2020) \cdot (3.4.5 \dots 2021)} \\ &= \frac{2022}{2020.3} \\ &= \frac{337}{1010} \end{aligned}$$

Bài 67: Cho hàm số $f(x) = (x^3 + 12x - 31)^{2010}$

$$\text{Tính } f(a) \text{ tại } a = \sqrt[3]{16 - 8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16 + 8\sqrt{5}}$$

Giải:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt[3]{16 - 8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16 + 8\sqrt{5}} \\ \Rightarrow a^3 &= 32 + 3\sqrt[3]{(16 - 8\sqrt{5})(16 + 8\sqrt{5})} \cdot (\sqrt[3]{16 - 8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16 + 8\sqrt{5}}) \\ \Rightarrow a^3 &= 32 + 3 \cdot (-4) \cdot a \\ \Rightarrow a^3 &= 32 - 12a \\ \Rightarrow a^3 + 12a - 32 &= 0 \\ \Rightarrow a^3 + 12a - 31 &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(a) = 1^{2010} = 1$$

Bài 68: Tính giá trị biểu thức $A = (4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}}$

Giải:

$$\text{Ta có } A = (4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}} = \sqrt{4 + \sqrt{15}}(\sqrt{4 + \sqrt{15}}\sqrt{4 - \sqrt{15}})(\sqrt{10} - \sqrt{6})$$

$$A = \sqrt{4 + \sqrt{15}} \cdot 1 \cdot \sqrt{2}(\sqrt{5} - \sqrt{3}) = \sqrt{8 + 2\sqrt{15}}(\sqrt{5} - \sqrt{3})$$

$$A = (\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3}) = 5 - 3 = 2$$

Bài 69: Cho biểu thức: $P = \frac{2m + \sqrt{16m} + 6}{m + 2\sqrt{m} - 3} + \frac{\sqrt{m} - 2}{\sqrt{m} - 1} + \frac{3}{\sqrt{m} + 3} - 2$

a) Rút gọn P.

b) Tìm giá trị tự nhiên của m để P là số tự nhiên.

Giải:

a) Rút gọn được $P = \frac{\sqrt{m} + 1}{\sqrt{m} - 1}$ (với $m \geq 0, m \neq 1$)

$$\text{b) } P = \frac{\sqrt{m} + 1}{\sqrt{m} - 1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{m} - 1}$$

$$\text{Ta có: } P \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{m} - 1} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \sqrt{m} - 1 \text{ là ước dương của } 2 \Rightarrow m \in \{4; 9\} \text{ (TMDK)}$$

Vậy $m = 4; m = 9$ là giá trị cần tìm.

Bài 70: Cho biểu thức $P = \frac{x - 2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}} + \frac{1 + 2x - 2\sqrt{x}}{x^2 - \sqrt{x}}$, với $x > 0, x \neq 1$. Rút gọn

P và tìm tất cả các giá trị của x sao cho giá trị của P là một số nguyên.

Giải:

Với điều kiện $x > 0, x \neq 1$, ta

$$\begin{aligned} \text{có: } P &= \frac{x - 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} + \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}(x + \sqrt{x} + 1)} + \frac{2x - 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} \\ &= \frac{\sqrt{x}(x - 2\sqrt{x}) + (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1) + 2x - 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{x}(x + \sqrt{x} - 2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} \\ &= \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} = \frac{\sqrt{x} + 2}{x + \sqrt{x} + 1} \end{aligned}$$

$$\text{Ta có với điều kiện } x > 0, x \neq 1 \Rightarrow x + \sqrt{x} + 1 > \sqrt{x} + 1 > 1$$

$$\Rightarrow 0 < P = \frac{\sqrt{x} + 2}{x + \sqrt{x} + 1} < \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} < 2$$

$$\text{Do } P \text{ nguyên nên suy ra } P = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + 2}{x + \sqrt{x} + 1} = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (loại).}$$

Vậy không có giá trị của x để P nhận giá trị nguyên.

Liên hệ tài liệu word môn toán zalo: 039.373.2038

Bài 71: (2,0 điểm) Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} \right)$ với $x > 0, x \neq 1, x \neq \frac{1}{4}$. Tính giá trị của P tại $x = \frac{4}{\sqrt{10}}(\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}})$

Giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2x+\sqrt{x}-1}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} \right) \\ P &= \left(\frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} \right) : \left(\frac{(\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)}{(1+\sqrt{x})(x-\sqrt{x}+1)} \right) \\ &= \left[\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} \right] : \left[(2\sqrt{x}-1) \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} \right) \right] \\ &= \left[\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} \right] : \left[\frac{2\sqrt{x}-1}{(1-\sqrt{x})(x-\sqrt{x}+1)} \right] = \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Lại có :

$$\begin{aligned} x &= \frac{4}{\sqrt{10}}(\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}}) \\ &= \frac{|\sqrt{5}+1| + |\sqrt{5}-1|}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{\sqrt{10}} = 4 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } P = \frac{4-\sqrt{4}+1}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$$

Bài 72. Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{5})}{2\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{2\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$.

Giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{5})}{2\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{2\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}} \\ A &= \frac{2(3+\sqrt{5})}{4+\sqrt{6+2\sqrt{5}}} + \frac{2(3-\sqrt{5})}{4-\sqrt{6-2\sqrt{5}}} = \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4+\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}} + \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}} \\ &= \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{\sqrt{5}+5} + \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{5-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2. \end{aligned}$$

Bài 73: Rút gọn biểu thức: $P = \frac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} - \sqrt{x-\sqrt{2x-1}}}$, với $x \geq 2$.

Giải:

Liên hệ tài liệu word môn toán zalo: 039.373.2038

$$P = \frac{\sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1} + \sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1}}{\sqrt{2x-1+2\sqrt{2x-1}+1} - \sqrt{2x-1-2\sqrt{2x-1}+1}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} \right)}{\sqrt{(\sqrt{2x-1}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2x-1}-1)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{x-1}+1 + \sqrt{x-1}-1)}{\sqrt{2x-1}+1 - \sqrt{2x-1}-1} = \frac{\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{x-1}}{2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x-1}.$$

Bài 74: Rút gọn biểu thức : $A = \left(1 - \frac{2\sqrt{a}}{a+1} \right) : \left(\frac{1}{1+\sqrt{a}} - \frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a} + \sqrt{a} + a+1} \right)$, với $a \geq 0$

Giải:

Với điều kiện $a \neq 0$. Ta có:

$$A = \left(1 - \frac{2\sqrt{a}}{a+1} \right) : \left(\frac{1}{1+\sqrt{a}} - \frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a} + \sqrt{a} + a+1} \right)$$

$$= \frac{a-2\sqrt{a}+1}{a+1} : \left(\frac{1}{1+\sqrt{a}} - \frac{2\sqrt{a}}{(a+1)(1+\sqrt{a})} \right)$$

$$= \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{a+1} : \frac{a+1-2\sqrt{a}}{(a+1)(1+\sqrt{a})}$$

$$= \frac{(\sqrt{a}-1)^2 (a+1)(1+\sqrt{a})}{(a+1)(\sqrt{a}-1)^2} = 1 + \sqrt{a}$$

Bài 75: Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$

Giải:

$$\text{Rút gọn biểu thức: } A = \frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$$

$$A = \frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+3)}{2+\sqrt{6+2\sqrt{5}}} + \frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{2-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$$

$$A = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+3)}{2+\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}} + \frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{2-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+3)}{\sqrt{5}+3} + \frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{3-\sqrt{5}}$$

$$A = 2\sqrt{2}$$

Bài 76: Cho hai biểu thức: $A = \frac{2\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} + \frac{2x+\sqrt{x}-6}{x+\sqrt{x}-2}$

với $0 \leq x \neq 1$

a) Tính giá trị của A với $x = 6 + 2\sqrt{5}$

b) Rút gọn B

c) Đặt $P = B:A$. Tìm các giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên

Giải:

a. Tính giá trị của A với $x = 6 + 2\sqrt{5}$

$$x = 6 + 2\sqrt{5} = 5 + 2\sqrt{5} + 1 = (\sqrt{5})^2 + 2 \cdot \sqrt{5} \cdot 1 + 1^2 = (\sqrt{5} + 1)^2$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2} = |\sqrt{5} + 1| = \sqrt{5} + 1$$

Thay $\sqrt{x} = \sqrt{5} + 1$ vào $A = \frac{2\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}-2}$

$$A = \frac{2(\sqrt{5}+1)+3}{2(\sqrt{5}+1)-2} = \frac{2\sqrt{5}+5}{2\sqrt{5}} = \frac{(2\sqrt{5}+5) \cdot \sqrt{5}}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2.5+5.\sqrt{5}}{2.5} = \frac{2+\sqrt{5}}{2}$$

Vậy $x = 6 + 2\sqrt{5}$ thì $A = \frac{2+\sqrt{5}}{2}$

b. Rút gọn B

a.

$$B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} + \frac{2x+\sqrt{x}-6}{x+\sqrt{x}-2} \quad (0 \leq x \neq 1)$$

$$B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} + \frac{2x+\sqrt{x}-6}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$$

$$B = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2) + 2x+\sqrt{x}-6}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$$

$$B = \frac{x-1-x+4+2x+\sqrt{x}-6}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{2x+\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$$

$$B = \frac{(\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2} \quad (0 \leq x \neq 1)$$

b. Đặt $P = B:A$. Tìm các giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên

$$P = B:A = \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2} : \frac{2\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}-2} = \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2} \cdot \frac{2\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+3} = \frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} = 2 + \frac{-6}{\sqrt{x}+2}$$

$$P \text{ nguyên} \Leftrightarrow \frac{-6}{\sqrt{x}+2} \text{ nguyên} \Leftrightarrow -6 : (\sqrt{x}+2) \Leftrightarrow \sqrt{x}+2 \in U(-6)$$

$$\text{Mà } U(-6) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$$

$$\text{Mặt khác: } \sqrt{x}+2 > 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}+2 \in \{2; 3; 6\}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} \in \{0; 1; 4\}$$

$$\Rightarrow x \in \{0; 1; 16\}$$

$$\text{Kết hợp ĐKXD: } 0 \leq x \neq 1$$

Kết luận: Vậy $x = \{0; 16\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Bài 77: Cho biểu thức $M = \frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a-b} - \frac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{b}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}$ với $a, b > 0$ và $a \neq b$

Rút gọn M và tính giá trị biểu thức M biết $(1-a)(1-b) + 2\sqrt{ab} = 1$

Giải:

Liên hệ tài liệu word môn toán zalo: 039.373.2038

- Rút gọn $M = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ với $a, b > 0$ và $a \neq b$

-Ta có

$$(1-a)(1-b) + 2\sqrt{ab} = 1 \Leftrightarrow ab - a - b + 1 + 2\sqrt{ab} = 1$$

$$\Leftrightarrow ab = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}\right| = 1$$

+ Nếu $a > b > 0$

$$\Rightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} > 0; \sqrt{ab} > 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} > 0$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}\right| = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \Rightarrow \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = 1 \Rightarrow M = 1$$

+ nếu $0 < a < b$

$$\Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} < 0; \sqrt{ab} > 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} < 0$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}\right| = \frac{-\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \Rightarrow \frac{-\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = 1 \Rightarrow M = -1$$

Bài 78: Cho biểu thức: $P = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$.

Với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm x để $P = \frac{2}{7}$.

c) So sánh: P^2 và $2P$.

Giải:

a. Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 1$.

$$P = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$$

$$= \left(\frac{x+2}{(\sqrt{x})^3-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$$

$$= \frac{x+2+\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)-(x+\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$$

$$= \frac{x-2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \frac{2}{x+\sqrt{x}+1}$$

b. Với $x \geq 0, x \neq 1$. Ta có:

Liên hệ tài liệu word môn toán zalo: 039.373.2038

$$P = \frac{2}{7}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x + \sqrt{x} + 1} = \frac{2}{7}$$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{x} + 1 = 7$$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{x} - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 3) = 0$$

Vì $\sqrt{x} + 3 > 0$ nên $\sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ (t/m)

Vậy $P = \frac{2}{7}$ khi $x = 4$

c. Vì $x \geq 0 \Rightarrow x + \sqrt{x} + 1 \geq 1$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{2}{x + \sqrt{x} + 1} \leq 2$$

$$\Leftrightarrow 0 < P \leq 2$$

$$\Leftrightarrow P(P - 2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow P^2 - 2P \leq 0$$

$$\Leftrightarrow P^2 \leq 2P$$

Dấu “=” xảy ra khi $P = 2 \Leftrightarrow x = 0$

Vậy $P^2 \leq 2P$

Bài 79: Cho biểu thức $M = \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} + \frac{a^2-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}}$ với $a > 0, a \neq 1$.

Với những giá trị nào của a thì biểu thức $N = \frac{6}{M}$ nhận giá trị nguyên?

Giải:

Với điều kiện $a > 0; a \neq 1$ thì:

$$M = \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{(\sqrt{a}-1)(a+\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} - \frac{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)(a-\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}$$

$$M = \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{a+\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} - \frac{a-\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{a}+1)^2}{\sqrt{a}}$$

$$\text{Khi đó } N = \frac{6}{M} = \frac{6\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+1)^2} > 0$$

Ta thấy với $0 < a \neq 1 \Rightarrow a - \sqrt{a} + 1 > 0$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a}+1)^2 > 3\sqrt{a} \Leftrightarrow \frac{6\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+1)^2} < 2$$

Do $0 < N < 2$

Để N có giá trị nguyên thì $N = 1$.

Liên hệ tài liệu word môn toán zalo: 039.373.2038

$$\Leftrightarrow \frac{6\sqrt{a}}{a+2\sqrt{a}+1} = 1 \Leftrightarrow a-4\sqrt{a}+1=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a}-2)^2=3 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a}=\sqrt{3}+2 \\ \sqrt{a}=-\sqrt{3}+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=7+4\sqrt{3} \text{ (thỏa mãn)} \\ a=7-4\sqrt{3} \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{Vậy } a=7\pm 4\sqrt{3}.$$

Bài 80: Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{a}+2018}{a+2\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}-2018}{a-1} \right) \frac{\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}}.$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } P &= \left[\frac{\sqrt{a}+2018}{(\sqrt{a}+1)^2} - \frac{\sqrt{a}-2018}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} \right] \frac{\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}} \\ &= \frac{(\sqrt{a}+2018)(\sqrt{a}-1) - (\sqrt{a}-2018)(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}+1)^2(\sqrt{a}-1)} \cdot \frac{\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}} \\ &= \frac{2 \cdot 2017\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+1)^2(\sqrt{a}-1)} \cdot \frac{\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}} = \frac{2017}{a-1} \end{aligned}$$

Bài 81: Cho biểu thức $P = \frac{2x+3}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x^2+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x}$ với $x > 0, x \neq 1$. Rút gọn và tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P .

Lời giải

$$\begin{aligned} P &= \frac{2x+3}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x^2+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x} = \frac{2x+3}{\sqrt{x}} + \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} - \frac{\sqrt{x}(x\sqrt{x}+1)}{x(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{2x+3}{\sqrt{x}} + \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - \frac{(x\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = \frac{2x+3}{\sqrt{x}} + \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - \frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{2x+3}{\sqrt{x}} + \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - \frac{(x\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = \frac{2x+3}{\sqrt{x}} + \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - \frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{2x+3}{\sqrt{x}} + \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \frac{2x+2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} + 2 \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có $2\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{6} \Rightarrow P \geq 2 + 2\sqrt{6}$

Dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{3}{2}$ (tmdk)

Bài 82: Rút gọn biểu thức:

$$X = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{2017^2} + \frac{1}{2018^2}}.$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \diamond \text{ Tổng quát: } & \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} = \sqrt{\frac{n^2(n+1)^2 + (n+1)^2 + n^2}{[n(n+1)]^2}} \\ & = \sqrt{\frac{[n(n+1)]^2 + 2n(n+1) + 1}{[n(n+1)]^2}} = \sqrt{\frac{[n(n+1)+1]^2}{[n(n+1)]^2}} \\ & = \frac{n(n+1)+1}{n(n+1)} = \frac{n(n+1)}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)} = 1 + \frac{1}{n(n+1)} \end{aligned}$$

 $\diamond$ Vậy:

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{2017^2} + \frac{1}{2018^2}} \\ &= 1 + \frac{1}{1.2} + 1 + \frac{1}{2.3} + 1 + \frac{1}{3.4} + \dots + 1 + \frac{1}{2017.2018} \end{aligned}$$

2017 số 1

$$\begin{aligned} &= 2017 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2016} - \frac{1}{2017} + \frac{1}{2017} - \frac{1}{2018} \\ &= 2018 - \frac{1}{2018} = \frac{4072323}{2018}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } X = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{2017^2} + \frac{1}{2018^2}} = \frac{4072323}{2018}.$$

$$\text{Bài 83: Rút gọn biểu thức: } A = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right)$$

Lời giảiĐKXĐ: $x \geq 0$; $x \neq 4$; $x \neq 9$

$$A = \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}\right)$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{x}+1} : \frac{x-9-x+4+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$$

Bài 84: Cho các biểu thức: $P = \left(\frac{3\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}+3}{x-\sqrt{x}+1}$ (với $x \geq 0$)

Rút gọn biểu thức P. Tìm các giá trị của x để $P \geq \frac{1}{5}$.

Lời giải

$$P = \frac{1}{x-\sqrt{x}+1} : \frac{\sqrt{x}+3}{x-\sqrt{x}+1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}+3}.$$

$$P \geq \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+3} \geq \frac{1}{5} \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 4.$$

Vậy $0 \leq x \leq 4$ thỏa mãn bài toán

Bài 85: Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x-\sqrt{4(x-1)}} + \sqrt{x+\sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2-4(x-1)}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x-1}\right)$, trong đó $x > 1, x \neq 2$.

c) Rút gọn biểu thức A.

d) Tìm các giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức A là số nguyên.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{\sqrt{x-\sqrt{4(x-1)}} + \sqrt{x+\sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2-4(x-1)}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x-1}\right) \\ A &= \frac{\sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1} + \sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1}}{\sqrt{x^2-4x+4}} \cdot \left(\frac{x-2}{x-1}\right) \\ A &= \frac{\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}}{\sqrt{(x-2)^2}} \cdot \left(\frac{x-2}{x-1}\right) \\ A &= \frac{\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}}{\sqrt{(x-2)^2}} \cdot \left(\frac{x-2}{x-1}\right) \\ A &= \frac{|\sqrt{x-1}-1| + |\sqrt{x-1}+1|}{|x-2|} \cdot \left(\frac{x-2}{x-1}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Nếu } 1 < x < 2 \text{ thì } A = \frac{1-\sqrt{x-1}+\sqrt{x-1}+1}{-(x-2)} \cdot \left(\frac{x-2}{x-1}\right) = \frac{2}{-(x-2)} \cdot \left(\frac{x-2}{x-1}\right) = \frac{-2}{x-1}$$

$$\text{Nếu } x > 2 \text{ thì } A = \frac{\sqrt{x-1}-1+\sqrt{x-1}+1}{x-2} \cdot \left(\frac{x-2}{x-1}\right) = \frac{2\sqrt{x-1}}{x-2} \cdot \left(\frac{x-2}{x-1}\right) = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$$

b)

$$\text{TH1: Nếu } 1 < x < 2 \text{ thì } A = \frac{-2}{x-1}$$

Vì x nguyên nên không có x thỏa mãn $1 < x < 2$

$$\text{TH2: Nếu } x > 2 \text{ thì } A = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$$

Vì x nguyên, $x > 2$ nên $x - 1$ nguyên và $x - 1 > 1$

A nhận giá trị nguyên nên $\sqrt{x-1}$ là ước lớn hơn 1 của 2 $\Rightarrow \sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow x = 5$ (nhận)

Vậy với $x = 5$ thì A nhận giá trị nguyên.

Bài 86: Rút gọn biểu thức: $B = (13 - 4\sqrt{3})(7 + 4\sqrt{3}) - 8\sqrt{20 + 2\sqrt{43 + 24\sqrt{3}}}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= (13 - 4\sqrt{3})(7 + 4\sqrt{3}) - 8\sqrt{20 + 2\sqrt{43 + 24\sqrt{3}}} \\ &= 91 + 52\sqrt{3} - 28\sqrt{3} - 48 - 8\sqrt{\left(\sqrt{13 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}\right)^2} \\ &= 43 + 24\sqrt{3} - 8\left(\sqrt{13 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}\right) \\ &= 43 + 24\sqrt{3} - 8\left(\sqrt{(2\sqrt{3} - 1)^2} + \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2}\right) \\ &= 43 + 24\sqrt{3} - 8(2\sqrt{3} - 1 + 2 + \sqrt{3}) \\ &= 35 \end{aligned}$$

Bài 87: Rút gọn biểu thức $P = \frac{3x + \sqrt{9x} - 3}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} - \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1}$. Tìm x để $P = 3$.

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0, x \neq 1$. Ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{3x + 3\sqrt{x} - 3 - (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1) - (\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} \\ &= \frac{x + 3\sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}. \end{aligned}$$

$$P = 3 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Bài 88: Cho biểu thức $M = \left(\frac{x + 2\sqrt{x} + 4}{x\sqrt{x} - 8} + \frac{x + 2\sqrt{x} + 1}{x - 1} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x} - 5}{\sqrt{x} - 2} + \frac{2\sqrt{x} + 10}{x + 6\sqrt{x} + 5} \right)$

Rút gọn M và tìm x để $M > 1$

Lời giải

$$\begin{aligned} *M &= \left(\frac{x + 2\sqrt{x} + 4}{(\sqrt{x} - 2)(x + 2\sqrt{x} + 4)} + \frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x} - 5}{\sqrt{x} - 2} + \frac{2(\sqrt{x} + 5)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 5)} \right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{x} - 2} + \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x} - 5}{\sqrt{x} - 2} + \frac{2}{\sqrt{x} + 1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{x}-1+(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} : \frac{(3\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+1)+2(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)} \\
&= \frac{\sqrt{x}-1+x-2\sqrt{x}+\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} : \frac{3x+3\sqrt{x}-5\sqrt{x}-5+2\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)} \\
&= \frac{x-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} : \frac{3x-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{3(x-3)} = \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)}
\end{aligned}$$

Vậy $M = \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)}$ với $x \geq 0; x \neq 1, 3, 4$

$$*M < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)} > 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{4-2\sqrt{x}}{3(\sqrt{x}-1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} > 0$$

Ta có $\Leftrightarrow \begin{cases} 2-\sqrt{x} > 0 \\ \sqrt{x}-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow 1 < x < 4$. Vậy $M > 1$ khi $1 < x < 4$ và $x \neq 3$

Bài 89: Cho biểu thức : $A = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} \right) : \left(2 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right)$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm các giá trị của x để $\frac{1}{A} \leq -\frac{5}{2}$

Lời giải

a) Rút gọn biểu thức A.

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} \right) : \left(2 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right) \quad (\text{ĐK: } x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9)$$

$$A = \dots = \frac{\sqrt{x}+1}{x-4}$$

b) Tìm các giá trị của x để $\frac{1}{A} \leq -\frac{5}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} \leq -\frac{5}{2} &\Leftrightarrow \frac{x-4}{\sqrt{x}+1} \leq -\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x-8 \leq -5\sqrt{x}-5 \\ &\Leftrightarrow 2x+5\sqrt{x}-3 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq \sqrt{x} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x} \leq \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Kết hợp với ĐK} \Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{4}$$

Bài 90: Cho biểu thức: $P = \frac{x}{x-\sqrt{x}} + \frac{2}{x+2\sqrt{x}} + \frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+2\sqrt{x})}$

- Rút gọn P .
- Tính P khi $x = 3 + 2\sqrt{2}$.
- Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

Lời giải

$$\begin{aligned} a) P &= \frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} + \frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} + \frac{x+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{x(\sqrt{x}+2) + 2(\sqrt{x}-1) + x+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x\sqrt{x} + 2x + 2\sqrt{x} - 2 + x + 2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{x\sqrt{x} + 2x + 2\sqrt{x} + x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)} \end{aligned}$$

$$b) x = 3 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{2 + 2\sqrt{2} + 1} = \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} = \sqrt{2} + 1$$

$$P = \frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{2}+1+1}{\sqrt{2}+1-1} = \frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$$

c) ĐK: $x > 0; x \neq 1$:

$$P = \frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}-1+2}{\sqrt{x}-1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

Học sinh lập luận để tìm ra $x = 4$ hoặc $x = 9$

Bài 91: Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}-1}{3+\sqrt{x}-1} + \frac{x+8}{10-x} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x}-1+1}{x-3\sqrt{x}-1-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right)$

a) Rút gọn P

$$b) \text{ Tính giá trị của } P \text{ khi } x = \sqrt[4]{\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}} - \sqrt[4]{\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}$$

Lời giải

$$a) \quad P = \left(\frac{\sqrt{x-1}}{3+\sqrt{x-1}} + \frac{x+8}{10-x} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x-1}+1}{x-3\sqrt{x-1}-1} - \frac{1}{\sqrt{x-1}} \right) \quad (\text{ĐK: } x > 1; x \neq 10; x \neq 5)$$

$$\text{Đặt } \sqrt{x-1} = a \quad (a \geq 0)$$

$$\Rightarrow P = \frac{3a+9}{(a+3)(3-a)} : \left[\frac{1}{a} \cdot \frac{2a+4}{a-3} \right] = \frac{3(a+3)}{(a+3)(3-a)} \cdot \frac{a(a-3)}{2(a+2)} = -\frac{3a}{2(a+2)}$$

$$P = -\frac{3\sqrt{x-1}}{2(\sqrt{x-1}+2)} = -\frac{3\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}-2)}{2(x-5)}$$

$$b) \quad x = \sqrt[4]{\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}} - \sqrt[4]{\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}} = \sqrt[4]{(3+2\sqrt{2})^2} - \sqrt[4]{(3-2\sqrt{2})^2} = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$$

$$= 1 + \sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1) = 2 \quad (\text{T/M})$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{x-1} = \sqrt{2-1} = 1 \quad (\text{T/m})$$

$$\Rightarrow P = -\frac{3a}{2(a+2)} = -\frac{3 \cdot 1}{2(1+2)} = -\frac{1}{2}$$

Bài 92: Rút gọn biểu thức: $A = \sqrt{\frac{2\sqrt{10} + \sqrt{30} - 2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2\sqrt{10} - 2\sqrt{2}}} : \frac{2}{\sqrt{3}-1}$

Lời giải

$$\sqrt{\frac{2\sqrt{10} + \sqrt{30} - 2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2\sqrt{10} - 2\sqrt{2}}} : \frac{2}{\sqrt{3}-1} =$$

$$\sqrt{\frac{2\sqrt{2}(\sqrt{5}-1) + \sqrt{6}(\sqrt{5}-1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{4}} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{1}{2}$$

Bài 93: Cho biểu thức: $M = \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} + \frac{a^2-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}}$ với $a > 0, a \neq 1$.

a) Chứng minh rằng $M > 4$.

b) Với những giá trị nào của a thì biểu thức $N = \frac{6}{M}$ nhận giá trị nguyên?

Lời giải

a) Do $a > 0, a \neq 1$ nên: $\frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{a}-1)(a+\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} = \frac{a+\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}$ và

$$\frac{a^2-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}} = \frac{(a+1)(a-1)-\sqrt{a}(a-1)}{\sqrt{a}(1-a)} = \frac{(a-1)(a-\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(1-a)} = \frac{-a+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}}$$

$$\Rightarrow M = \frac{a+1}{\sqrt{a}} + 2 \quad \text{Do } a > 0; a \neq 1 \text{ nên: } (\sqrt{a}-1)^2 > 0 \Leftrightarrow a+1 > 2\sqrt{a} \Rightarrow M > \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 2 = 4$$

b) Ta có $0 < N = \frac{6}{M} < \frac{3}{2}$ do đó N chỉ có thể nhận được một giá trị nguyên là 1

$$\text{Mà } N = 1 \Leftrightarrow \frac{6\sqrt{a}}{a+1+2\sqrt{a}} = 1 \Leftrightarrow a - 4\sqrt{a} + 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a} - 2)^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a} = 2 + \sqrt{3} \text{ hay } \sqrt{a} = 2 - \sqrt{3} \text{ (phù hợp) Vậy, } N \text{ nguyên } \Leftrightarrow$$

$$a = (2 \pm \sqrt{3})^2$$

Bài 94: Rút gọn biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$

Lời giải

ĐKXD: $x \neq 4; x \neq 9$

$$\begin{aligned} A &= \frac{2\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = \frac{2\sqrt{x}-9-x+9+2x-3\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{x-\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} \end{aligned}$$

CÁC DẠNG BÀI TẬP THI HSG TOÁN 9 QUA CÁC ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI

Dạng 2: Tính giá trị của biểu thức. Chứng minh đẳng thức đại số. Tỷ lệ thức, tính chất của dãy tỉ số bằng nhau

A. Bài toán

Bài 1: Không dùng máy tính cầm tay, tính giá trị biểu thức: $A = \frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{\sqrt{8}-\sqrt{10}}{2-\sqrt{5}}$

Bài 2: Tính giá trị của biểu thức $T = (2\sqrt{3}+1)(3\sqrt{2}-1)\sqrt{13-4\sqrt{3}}\sqrt{19+6\sqrt{2}}$

Bài 3: Tính giá trị biểu thức: $B = \sqrt[3]{85+62\sqrt{7}} + \sqrt[3]{85-62\sqrt{7}}$

Bài 4:

1) Cho $a-b = \sqrt{29+12\sqrt{5}} - 2\sqrt{5}$. Tính giá trị của biểu thức:

$$A = a^2(a+1) - b^2(b-1) - 11ab + 2015$$

2) Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $xy + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} = 1$. Chứng minh rằng:

$$x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} = 0.$$

Bài 5: Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{5})}{2\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{2\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$

Bài 6: Cho số thực x thỏa mãn $x + \frac{1}{x} = 3$ Tính giá trị biểu thức $P = x^3 + \frac{1}{x^3}$.

Bài 7: Cho các số a, b, c, x, y, z đều khác 0 và thỏa mãn các điều kiện

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \text{ và } \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0. \text{ Chứng minh rằng } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Bài 8: Tồn tại hay không 3 số a, b, c thỏa mãn $\frac{a}{b^2-ca} = \frac{b}{c^2-ab} = \frac{c}{a^2-bc} = \frac{1}{2019}$

Bài 9: Tam giác ABC có chu vi bằng 1, các cạnh a, b, c thỏa mãn đẳng thức:

$$\frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} = \frac{3}{2}$$

Chứng minh tam giác ABC đều.

Bài 10: Chứng minh rằng: Nếu $\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2 y^4}} = a$ thì $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$

Bài 11: Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa : $ab + bc + ca = 1$. Tính giá trị biểu thức

$$P = a\sqrt{\frac{(1+b^2)(1+c^2)}{(1+a^2)}} + b\sqrt{\frac{(1+a^2)(1+c^2)}{(1+b^2)}} + c\sqrt{\frac{(1+b^2)(1+a^2)}{(1+c^2)}}$$

Bài 12: Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 60^\circ$ và độ dài ba cạnh $BC = a, CA = b, AB = c$ là ba số nguyên khác nhau

a) Chứng minh : $a^2 = b^2 + c^2 - bc$

b) Giả sử $b < c$. Chứng minh: $b \geq 3$

Bài 13: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 2018$ và $\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} = \frac{2017}{2018}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$

Bài 14:

a. Cho $x = \sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}}$. Tính $A = (x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 1)^{2017}$.

b. Cho a, b, c là các số hữu tỉ đôi một khác nhau.

Chứng minh rằng: $A = \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}$ là bình phương của một số hữu tỉ.

Bài 15: Cho a, b, c, d, e, f là các số thực khác 0, thỏa mãn $\frac{a}{d} + \frac{b}{e} + \frac{c}{f} = 1$ và $\frac{d}{a} + \frac{e}{b} + \frac{f}{c} = 0$.

Tính giá trị của biểu thức $B = \frac{a^2}{d^2} + \frac{b^2}{e^2} + \frac{c^2}{f^2}$.

Bài 16: Cho $a = x + \frac{1}{x}$, $b = y + \frac{1}{y}$, $c = xy + \frac{1}{xy}$. Tính giá trị biểu thức: $A = a^2 + b^2 + c^2 - abc$

Bài 17: Cho $(x + \sqrt{x^2 + 2015})(y + \sqrt{y^2 + 2015}) = 2015$. Hãy tính giá trị của biểu thức $A = x + y + 2016$.

Bài 18: Chứng minh rằng: Nếu $ax^3 = by^3 = cz^3$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ thì

$$\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}.$$

Bài 19: Cho $x = \sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}}{\sqrt{3}+1}}$. Tính giá trị của biểu thức

$$A = (x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1)^{2015}.$$

Bài 20: Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = 1$. Tính

$$H = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{1+c} + \frac{\sqrt{b} - \sqrt{c}}{1+a} + \frac{\sqrt{c} - \sqrt{a}}{1+b}$$

Bài 21: Tính giá trị biểu thức $P = \frac{\sqrt{5+\sqrt{3}} + \sqrt{5-\sqrt{3}}}{\sqrt{5+\sqrt{22}}} + \sqrt{11-6\sqrt{2}}$

Bài 22: Cho các số thực x, y, z thỏa mãn đồng thời các điều kiện $x + y + z = 2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 18$

và $xyz = -1$. Tính giá trị của $S = \frac{1}{xy+z-1} + \frac{1}{yz+x-1} + \frac{1}{zx+y-1}$.

Bài 23: Cho biểu thức: $A = (x^2 - x - 1)^2 + 2013$. Tính giá trị của A khi

$$x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}+1}$$

Bài 24: Cho $(x + \sqrt{x^2 + 2013}).(y + \sqrt{y^2 + 2013}) = 2013$. Chứng minh $x^{2013} + y^{2013} = 0$

Bài 25: Chứng minh rằng $A = \frac{2\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$ là số nguyên

Bài 26: Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn điều kiện :

$$a^{2006} + b^{2006} = a^{2007} + b^{2007} = a^{2008} + b^{2008}$$

Hãy tính tổng: $S = a^{2009} + b^{2009}$

Bài 27: Tính giá trị của biểu thức P

$$P = 3x^{2013} + 5x^{2011} + 2006 \text{ với } x = \sqrt{6 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{18 - 8\sqrt{2}}}}} - \sqrt{3}$$

Bài 28: Tính giá trị biểu thức $A = \frac{(x^2 - 9)(y^2 - y - 2)}{(x^3 - 6x^2 + 9x)(y + 1)}$ biết $x^2 + 16y^2 - 7xy = xy - |x - 4|$

Bài 29: Cho x, y là các số thực sao cho $\frac{2}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2x+y}$. Tính giá trị của biểu thức $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}$

Bài 30: Cho a, b, c là các số thực sao cho $a + b = c - 2$ và $ab = 2c^2 - 3c + 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2$

Bài 31: Tính giá trị biểu thức $A = x^3 + y^3 - 3(x + y)$, biết rằng

$$x = \sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}}; y = \sqrt[3]{17 + 12\sqrt{2}} + \sqrt[3]{17 - 12\sqrt{2}}$$

Bài 32: Tính $A = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} - \frac{2}{3 - \sqrt{3}} - \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Bài 33: Cho $S = \left(1 - \frac{2}{2.3}\right)\left(1 - \frac{2}{3.4}\right) \cdots \left(1 - \frac{2}{2020.2021}\right)$. Tính S (kết quả để dưới dạng phân số tối giản).

Bài 34: Cho x, y là các số thực sao cho $\frac{2}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2x+y}$. Tính giá trị của biểu thức $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}$

Bài 35: Cho $a + b + c = 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Tìm giá trị của biểu thức $M = a^4 + b^4 + c^4$.

Bài 36: Cho $a = \sqrt[3]{7 + \sqrt{50}}$, $b = \sqrt[3]{7 - \sqrt{50}}$. Không dùng máy tính, chứng minh rằng các biểu thức $M = a + b$ và $N = a^7 + b^7$ có giá trị đều là số chẵn.

Bài 37: Cho các số a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 2019abc$ và $2019(a + b + c) = 1$. Tính $A = a^{2019} + b^{2019} + c^{2019}$.

Bài 38: Cho $a = \sqrt[3]{7 + \sqrt{50}}$, $b = \sqrt[3]{7 - \sqrt{50}}$. Không dùng máy tính, hãy chứng minh các biểu thức $M = a + b$ và $N = a^7 + b^7$ có giá trị đều là số chẵn.

Bài 39: Tính giá trị biểu thức $A = x^3 + y^3 - 3(x + y)$, biết $x = \sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}}$;

$$y = \sqrt[3]{17 + 12\sqrt{2}} + \sqrt[3]{17 - 12\sqrt{2}}$$

Bài 40: Cho x, y là các số thực sao cho $\frac{2}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2x+y}$. Tính giá trị của biểu thức $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}$

Bài 41: Cho a, b, c là các số thực sao cho $a + b = c - 2$ và $ab = 2c^2 - 3c + 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2$

Bài 42: Cho $a + b + c = 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm giá trị của biểu thức $M = a^4 + b^4 + c^4$.

Bài 43: Cho $a = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$; $b = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$. Tính $a^7 + b^7$

Bài 44: Cho x, y, z là các số thực thỏa:
$$\begin{cases} x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 2017 & (1) \\ z^2 + \frac{y^2}{3} = 1009 & (2) \\ x^2 + xz + z^2 = 1008 & (3) \end{cases} \quad (x \neq 0, z \neq 0, x \neq -z)$$

Chứng minh rằng $\frac{2z}{x} = \frac{y+z}{x+z}$

Bài 45: Cho đa thức $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d là các hằng số). Biết rằng $P(1) = 10, P(2) = 20, P(3) = 30$. Tính giá trị của biểu thức $\frac{P(12) + P(-8)}{10} + 25$

Bài 46: Tính giá trị biểu thức $A = \frac{4\sqrt{3-2\sqrt{2}} + 10}{(1+\sqrt{2})(3+\sqrt{2})+1}$

Bài 47: Cho biểu thức: $P = \sqrt{1-x+(1-x)\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x-(1-x)\sqrt{1-x^2}}$ với $x \in [-1; 1]$

Tính giá trị của biểu thức P với $x = \frac{-1}{2012}$.

Bài 48: Cho x là số thực âm thỏa mãn $x^2 + \frac{1}{x^2} = 23$, tính giá trị của biểu thức

$$A = x^3 + \frac{1}{x^3}.$$

Bài 49: Tính giá trị biểu thức $P = \frac{a^3 - 3a + 2}{a^3 - 4a^2 + 5a - 2}$, biết $a = \sqrt[3]{55 + \sqrt{3024}} + \sqrt[3]{55 - \sqrt{3024}}$

Bài 50: Cho số thực x, y, z đôi 1 khác nhau thỏa mãn $x^3 = 3x - 1; y^3 = 3y - 1, z^3 = 3z - 1$
Chứng minh rằng $x^2 + y^2 + z^2 = 6$

Bài 51: Cho biểu thức:

$$P = \sqrt{1-x+(1-x)\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x-(1-x)\sqrt{1-x^2}} \quad \text{với } x \in [-1; 1]$$

Tính giá trị của biểu thức P với $x = \frac{-1}{2012}$.

Bài 52: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 0, a^2 + b^2 \neq c^2, b^2 + c^2 \neq a^2,$

$c^2 + a^2 \neq b^2$. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{a^2}{a^2 - b^2 - c^2} + \frac{b^2}{b^2 - c^2 - a^2} + \frac{c^2}{c^2 - a^2 - b^2}$.

Bài 53: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 0, a^2 + b^2 \neq c^2, b^2 + c^2 \neq a^2,$

$c^2 + a^2 \neq b^2$. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{a^2}{a^2 - b^2 - c^2} + \frac{b^2}{b^2 - c^2 - a^2} + \frac{c^2}{c^2 - a^2 - b^2}$.

Bài 54: a. Cho 3 số a, b, c khác 0, thỏa mãn $a + b + c = 0$. Chứng minh hằng đẳng thức:

$$\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right|$$

b. Tính giá trị của biểu thức: $B = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{2018^2} + \frac{1}{2019^2}}$

Bài 55: Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{4(x+1)x^{2018} - 2x^{2017} + 2x + 1}{2x^2 + 3x}$

tại $x = \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{3}-2} - \frac{3}{2\sqrt{3}+2}}$.

Bài 56: Cho x là số thực dương thỏa mãn điều kiện $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$. Tính giá trị các biểu thức

$$A = x^5 + \frac{1}{x^5}; B = x^7 + \frac{1}{x^7}.$$

Bài 57: Cho $f(x) = (x^3 + 12x - 31)^{2015}$.

Tính $f(a)$ với $a = \sqrt[3]{16 - 8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16 + 8\sqrt{5}}$.

Bài 58: Cho a, b, x, y là các số thực thỏa mãn: $x^2 + y^2 = 1$ và $\frac{x^4}{a} + \frac{y^4}{b} = \frac{1}{a+b}$.

Chứng minh rằng: $\frac{x^{2016}}{a^{1008}} + \frac{y^{2016}}{b^{1008}} = \frac{2}{(a+b)^{1008}}$

Bài 59: Cho x, y, z dương sao cho $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} = 6$

Tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{1}{3x+3y+2z} + \frac{1}{3y+3z+2x} + \frac{1}{3z+3x+2y}$.

Bài 60: Cho biểu thức: $A = \left(1 - \frac{2\sqrt{a}}{a+1}\right) : \left(\frac{1}{1+\sqrt{a}} - \frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a} + \sqrt{a} + a+1}\right)$, với $a \geq 0$

Tính giá trị của biểu thức A khi $a = 2010 - 2\sqrt{2009}$.

Bài 61: Cho ba số x, y, z thỏa mãn

$$\begin{cases} x + y + z = 2010 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2010} \end{cases}$$

Tính giá trị của biểu thức $P = (x^{2007} + y^{2007})(y^{2009} + z^{2009})(z^{2011} + x^{2011})$

Bài 62: Cho a, b, c thỏa mãn $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 7$; $a + b + c = 23$; $\sqrt{abc} = 3$

Tính giá trị biểu thức $H = \frac{1}{\sqrt{ab} + \sqrt{c} - 6} + \frac{1}{\sqrt{bc} + \sqrt{a} - 6} + \frac{1}{\sqrt{ca} + \sqrt{b} - 6}$

Bài 63: Tính giá trị của biểu thức $N = \frac{\sqrt{4+\sqrt{3}} + \sqrt{4-\sqrt{3}}}{\sqrt{4+\sqrt{13}}} + \sqrt{27-10\sqrt{2}}$

Bài 64: Cho $x = \frac{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}}$. Tính giá trị của $P = (12x^2 + 4x - 55)^{2017}$.

Bài 65: Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y = (\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z})^2$, $\sqrt{x} + \sqrt{y} \neq \sqrt{z}$

và $y \neq z$. Chứng minh đẳng thức $\frac{x + (\sqrt{x} - \sqrt{z})^2}{y + (\sqrt{y} - \sqrt{z})^2} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{z}}{\sqrt{y} - \sqrt{z}}$.

Bài 66: Cho hai số thực a, b thỏa mãn $a^2 + 4ab - 7b^2 = 0$ ($a \neq b$ và $a \neq -b$). Tính giá trị của biểu

thức $Q = \frac{2a-b}{a-b} + \frac{3a-2b}{a+b}$

Bài 67: Cho số x ($x \in \mathbb{R}; x > 0$) thỏa mãn điều kiện: $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$. Tính giá trị các biểu thức:

$$B = x^5 + \frac{1}{x^5}.$$

Bài 68: Tính giá trị biểu thức $B = (x^2 + 4x - 2)^{2019}$ tại $x = \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}})}{\sqrt{21+4\sqrt{5}}+3}$.

Bài 69: Tính tổng $S = \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2019^2} + \sqrt{2019^2 - 2}}$.

Bài 70:

1/ Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1} = 1$$

2/ Cho các số a, b, c khác 0 thỏa mãn $2a + b + b + c + 2c + a = 0$. Hãy tính giá trị của biểu thức

$$A = \frac{bc}{8a^2} + \frac{ca}{b^2} + \frac{ab}{c^2}$$

Bài 71: Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 2$. Tính giá trị

của biểu thức $Q = x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1}$.

Bài 72: . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{2025\sqrt{2024}+2024\sqrt{2025}} = \frac{44}{45}.$$

Bài 73: Cho x là số thực âm thỏa mãn $x^2 + \frac{1}{x^2} = 23$. Tính giá trị của biểu thức: $A = x^3 + \frac{1}{x^3}$

Bài 74: Tính giá trị biểu thức: $P = (4x^5 + 4x^4 - 5x^3 + 5x - 2)^{2018} + 2019$ tại $x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}$.

Bài 75: Cho $x = \sqrt{3 + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}} + \sqrt{3 - \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}}$. Tính giá trị của biểu thức $P = x(2 - x)$

Bài 76: Cho ba số a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 2019$. Chứng minh

$$\frac{a^2 - bc}{a^2 + 2019} + \frac{b^2 - ca}{b^2 + 2019} + \frac{c^2 - ab}{c^2 + 2019} = 0.$$

Bài 77: Gọi a, b, c là ba nghiệm của phương trình $2x^3 - 9x^2 + 6x - 1 = 0$

Không giải phương trình, hãy tính tổng:

$$S = \frac{a^5 - b^5}{a - b} + \frac{b^5 - c^5}{b - c} + \frac{c^5 - a^5}{c - a}$$

Bài 78: Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = 1$. Tính $H = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{1 + c} + \frac{\sqrt{b} - \sqrt{c}}{1 + a} + \frac{\sqrt{c} - \sqrt{a}}{1 + b}$

Bài 79: 1) Phân tích đa thức sau thành nhân tử $a^2(b - 2c) + b^2(c - a) + 2c^2(a - b) + abc$.

2) Cho x, y thỏa mãn $x = \sqrt[3]{y - \sqrt{y^2 + 1}} + \sqrt[3]{y + \sqrt{y^2 + 1}}$.

Tính giá trị của biểu thức $A = x^4 + x^3y + 3x^2 + xy - 2y^2 + 1$.

Bài 80: Cho các số thực dương a, b, c, x, y, z khác 0 thỏa mãn $\frac{x^2 - yz}{a} = \frac{y^2 - zx}{b} = \frac{z^2 - xy}{c}$

Chứng minh rằng $\frac{a^2 - bc}{x} = \frac{b^2 - ca}{y} = \frac{c^2 - ab}{z}$

Bài 81: Cho x, y, z thỏa mãn: $xy + yz + xz = 1$.

Hãy tính giá trị biểu thức: $A = x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{(1+x^2)}} + y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{(1+y^2)}} + z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{(1+z^2)}}$

Bài 82: Cho $a^2(b + c) = b^2(c + a) = 2018$ với a, b, c đôi một khác nhau và khác không. Tính giá trị của biểu thức $c^2(a + b)$.

Bài 83:

a) Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2018}$. Chứng minh rằng $\sqrt{a+b} = \sqrt{a-2018} + \sqrt{b-2018}$.

b) Cho a là nghiệm dương của phương trình $6x^2 + \sqrt{3}x - \sqrt{3} = 0$.

Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{a+2}{\sqrt{a^4 + a + 2 - a^2}}$.

B. Lời giải

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Bài 1: Không dùng máy tính cầm tay, tính giá trị biểu thức: $A = \frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{\sqrt{8}-\sqrt{10}}{2-\sqrt{5}}$

Lời giải

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{\sqrt{8}-\sqrt{10}}{2-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} - \frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{5})}{2-\sqrt{5}} = \sqrt{2}-1-\sqrt{2} = -1$$

Bài 2: Tính giá trị của biểu thức $T = (2\sqrt{3}+1)(3\sqrt{2}-1)\sqrt{13-4\sqrt{3}}\sqrt{19+6\sqrt{2}}$

Lời giải

$$T = (2\sqrt{3}+1)\sqrt{12-4\sqrt{3}+1}(3\sqrt{2}-1)\sqrt{18+6\sqrt{2}+1}$$

$$T = (2\sqrt{3}+1)\sqrt{(2\sqrt{3}-1)^2}(3\sqrt{2}-1)\sqrt{(3\sqrt{2}+1)^2} = (2\sqrt{3}+1)(2\sqrt{3}-1)(3\sqrt{2}-1)(3\sqrt{2}+1)$$

$$T = (2\sqrt{3}+1)(2\sqrt{3}-1)(3\sqrt{2}-1)(3\sqrt{2}+1) = (12-1)(18-1) = 187$$

Bài 3: Tính giá trị biểu thức: $B = \sqrt[3]{85+62\sqrt{7}} + \sqrt[3]{85-62\sqrt{7}}$

Lời giải

$$\text{Đặt } a = \sqrt[3]{85+62\sqrt{7}}; b = \sqrt[3]{85-62\sqrt{7}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^3 + b^3 = 85 + 62\sqrt{7} + 85 - 62\sqrt{7} = 170 \\ ab = \sqrt[3]{85+62\sqrt{7}}\sqrt[3]{85-62\sqrt{7}} = \sqrt[3]{85^2 - (62\sqrt{7})^2} = \sqrt[3]{-19683} = -27 \end{cases}$$

$$B = a + b$$

$$\Leftrightarrow B^3 = (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = 170 - 3.27B$$

$$\Leftrightarrow B^3 + 81B - 170 = 0$$

$$\Leftrightarrow B^3 - 2B^2 + 2B^2 - 4B + 85B - 170 = 0$$

$$\Leftrightarrow B^2(B-2) + 2B(B-2) + 85(B-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (B-2)(B^2 + 2B + 85) = 0$$

$$\Leftrightarrow B-2 = 0 \text{ (vì } B^2 + 2B + 85 = B^2 + 2B + 1 + 84 = (B+1)^2 + 84 > 0 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow B = 2$$

Bài 4:

1) Cho $a-b = \sqrt{29+12\sqrt{5}} - 2\sqrt{5}$. Tính giá trị của biểu thức:

$$A = a^2(a+1) - b^2(b-1) - 11ab + 2015$$

2) Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $xy + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} = 1$. Chứng minh rằng:

$$x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} = 0.$$

Lời giải

$$1) a-b = \sqrt{29+12\sqrt{5}} - 2\sqrt{5} = \sqrt{(3+2\sqrt{5})^2} - 2\sqrt{5} = 3$$

$$A = a^3 - b^3 + a^2 + b^2 - 11ab + 2015 = (a-b)(a^2 + b^2 + ab) + a^2 + b^2 - 11ab + 2015$$

$$A = 3(a^2 + b^2 + ab) + a^2 + b^2 - 11ab + 2015 = 4(a^2 - 2ab + b^2) + 2015$$

$$A = 4(a-b)^2 + 2015 = 2051$$

$$\begin{aligned} 2) \quad xy + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} &= 1 \Leftrightarrow \sqrt{(1+x)^2(1+y)^2} = 1-xy \\ &\Leftrightarrow (1+x^2)(1+y^2) = (1-xy)^2 \\ &\Leftrightarrow 1+x^2+y^2+x^2y^2 = 1-2xy+x^2y^2 \\ &\Leftrightarrow x^2+y^2+2xy = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+y)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -y \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} = -y\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+y^2} = 0$$

Bài 5: Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{5})}{2\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{2\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$

Lời giải

$$A = \frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{5})}{2\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \frac{\sqrt{2}(3-\sqrt{5})}{2\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}} = \frac{2(3+\sqrt{5})}{4+\sqrt{6+2\sqrt{5}}} + \frac{2(3-\sqrt{5})}{4-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$$

$$A = 2 \left[\frac{3+\sqrt{5}}{4+\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}} + \frac{3-\sqrt{5}}{4-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}} \right] = 2 \left(\frac{3+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} + \frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} \right)$$

$$A = 2 \left[\frac{(3+\sqrt{5})(5-\sqrt{5}) + (3-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})} \right] = 2 \left(\frac{15-3\sqrt{5}+5\sqrt{5}-5+15+3\sqrt{5}-5\sqrt{5}-5}{25-5} \right)$$

$$A = 2 \cdot \frac{20}{20} = 2$$

Bài 6: Cho số thực x thỏa mãn $x + \frac{1}{x} = 3$ Tính giá trị biểu thức $P = x^3 + \frac{1}{x^3}$.

Lời giải

$$x + \frac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = 3^3 \Leftrightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 27$$

$$\Rightarrow P = x^3 + \frac{1}{x^3} = 27 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 27 - 3 \cdot 3 = 18$$

Bài 7: Cho các số a, b, c, x, y, z đều khác 0 và thỏa mãn các điều kiện

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \text{ và } \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0. \text{ Chứng minh rằng } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Lời giải

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2\left(\frac{xy}{ab} + \frac{xz}{ac} + \frac{yz}{bc}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2 \cdot \frac{xyz + xzb + yza}{abc} = 1$$

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0 \Leftrightarrow \frac{ayz + bxz + cxy}{xyz} = 0 \Leftrightarrow ayz + bxz + cxy = 0$$

$$\text{Vậy } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Bài 8: Tồn tại hay không 3 số a, b, c thỏa mãn $\frac{a}{b^2 - ca} = \frac{b}{c^2 - ab} = \frac{c}{a^2 - bc} = \frac{1}{2019}$

Lời giải

Giả sử tồn tại bộ số thực $(a; b; c)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài

$$\Rightarrow a^2 \neq bc; b^2 \neq ca; c^2 \neq ab$$

Nếu $a = b = c$ thì $a^2 - bc = a^2 - a^2 = 0 \Rightarrow a^2 = bc$ (mâu thuẫn $a^2 \neq bc$)

Do đó trong 3 số a, b, c phải có ít nhất 2 số khác nhau. Khi đó:

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 > 0$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{b^2 - ca} = \frac{b}{c^2 - ab} = \frac{c}{a^2 - bc} = \frac{a+b+c}{\frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]} = \frac{1}{2019}$$

$$\Rightarrow a+b+c > 0$$

Nếu tồn tại 2 số bằng nhau, giả sử $a = b$, ta có:

$$\frac{a}{b^2 - ca} = \frac{b}{c^2 - ab}$$

$$\Rightarrow b^2 - ca - c^2 + ab = 0$$

$$\Rightarrow (a+b+c)(b-c) = 0$$

$$\Rightarrow b = c$$

$$\Rightarrow a = b = c \text{ (mâu thuẫn } a^2 \neq bc)$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{b^2 - ca} = \frac{b}{c^2 - ab} = \frac{c}{a^2 - bc} = \frac{a-b}{b^2 - ca - c^2 + ab} = \frac{b-c}{c^2 - ab - a^2 + bc} = \frac{c-a}{a^2 - ab - b^2 + ca} = \frac{1}{2019}$$

$$\Rightarrow \frac{a-b}{(b-c)(a+b+c)} = \frac{b-c}{(c-a)(a+b+c)} = \frac{c-a}{(a-b)(a+b+c)} = \frac{1}{2019}$$

$$\text{Đặt } x^2 = yz; y^2 = zx; z^2 = xy$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$$

$$\Rightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = y = z$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=2c \\ c+b=2a \\ a+c=2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=2c \\ c+b=2a \\ a-b=2b-2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=2c \\ c+b=2a \\ 3(a-b)=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=c \text{ (mâu thuẫn)}$$

Vậy không tồn tại bộ 3 số thỏa mãn theo yêu cầu.

Bài 9: Tam giác ABC có chu vi bằng 1, các cạnh a, b, c thỏa mãn đẳng thức:

$$\frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} = \frac{3}{2}$$

Chứng minh tam giác ABC đều.

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Lời giải

Từ giả thiết ta suy ra $a > 0$; $b > 0$; $c > 0$ và $\frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{a}{b+c} + \frac{a}{b+c} = \frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow 2(a+b+c) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+b} \right) = 9 \Leftrightarrow (x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 9$$

$$(\text{với } x = a+b > 0; y = b+c > 0; z = c+a > 0) \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} - 2 \right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} - 2 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{xy} + \frac{(y-z)^2}{yz} + \frac{(z-x)^2}{zx} = 0 \Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow a = b = c. \text{ Vậy tam giác ABC đều.}$$

Bài 10: Chứng minh rằng: Nếu $\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2 y^4}} = a$ thì $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} \sqrt[3]{x} = \sqrt{b} > 0 \\ \sqrt[3]{y} = \sqrt{c} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = b^3 \\ y^2 = c^3 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \sqrt{b^3 + b^2 c} + \sqrt{c^3 + bc^2} = a$$

$$\text{Bình phương hai vế được: } b^3 + b^2 c + c^3 + bc^2 + 2\sqrt{b^2 c^2 (b+c)^2} = a^2$$

$$\text{Biến đổi ta được: } (b+c)^3 = a^2$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{a^2} = b+c \text{ hay } \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} \quad (\text{đpcm})$$

Bài 11: Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa : $ab + bc + ca = 1$. Tính giá trị biểu thức

$$P = a \sqrt{\frac{(1+b^2)(1+c^2)}{(1+a^2)}} + b \sqrt{\frac{(1+a^2)(1+c^2)}{(1+b^2)}} + c \sqrt{\frac{(1+b^2)(1+a^2)}{(1+c^2)}}$$

Lời giải

$$\text{ta có: } ab + bc + ca = 1. \text{ Khi đó } 1+b^2 = ab + bc + ca + b^2 = (a+b).(b+c)$$

$$\text{Tương tự: } 1+c^2 = (a+c)(c+b); 1+a^2 = (a+b)(a+c)$$

Với a, b, c là ba số thực dương, ta có:

$$a \sqrt{\frac{(a+b)(b+c)(a+c)(b+c)}{(a+c)(a+b)}} = a|b+c| = a(b+c)$$

Tính được các biểu thức tương tự ta được:

$$\begin{aligned} P &= a(b+c) + b(a+c) + c(a+b) \\ &= ab + ac + ba + bc + ca + cb = 2(ab + bc + ca) = 2 \end{aligned}$$

Bài 12: Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 60^\circ$ và độ dài ba cạnh $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ là ba số nguyên khác nhau

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

a) Chứng minh : $a^2 = b^2 + c^2 - bc$

b) Giả sử $b < c$. Chứng minh: $b \geq 3$

Lời giải

a) Áp dụng định lí hàm cosin ta có

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 - 2bc \cos 60^\circ \\ = b^2 + c^2 - bc$$

b) Ta có, ba cạnh của tam giác là ba số nguyên khác nhau, $b < c$ suy ra

$$b < a < c$$

Nếu $b=1$ thì từ câu a ta có:

$$c^2 - a^2 = b^2 - bc = 1 - c \Rightarrow c < 1 \Rightarrow c < b (!)$$

Nếu $b=2$ thì từ câu a ta có:

$$c^2 - a^2 = b^2 - bc = 4 - 2c \Rightarrow c < 2 \Rightarrow c < b (!)$$

Do đó $b \geq 3$ (đpcm) .

Bài 13: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 2018$ và $\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} = \frac{2017}{2018}$. Tính giá

trị của biểu thức $P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$

Lời giải

$$P = (a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) - 3 = 2018 \cdot \frac{2017}{2018} - 3 = 2014.$$

Bài 14:

a. Cho $x = \sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}}$. Tính $A = (x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 1)^{2017}$.

b. Cho a, b, c là các số hữu tỉ đôi một khác nhau.

Chứng minh rằng: $A = \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}$ là bình phương của một số hữu

Lời giải

a. Ta có: $x\sqrt{2} = \sqrt{8+2\sqrt{7}} - \sqrt{8-2\sqrt{7}} = (\sqrt{7}+1) - (\sqrt{7}-1) = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$.

Vậy $A=1$.

b. Ta có:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} \right)^2 &= \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} + \frac{2}{(a-b)(b-c)} + \frac{2}{(b-c)(c-a)} + \frac{2}{(c-a)(a-b)} \\ &= \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} + \frac{2(c-a+a-b+b-c)}{(a-b)(b-c)} \\ &= \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}. \end{aligned}$$

Bài 15: Cho a, b, c, d, e, f là các số thực khác 0, thỏa mãn $\frac{a}{d} + \frac{b}{e} + \frac{c}{f} = 1$ và $\frac{d}{a} + \frac{e}{b} + \frac{f}{c} = 0$.

Tính giá trị của biểu thức $B = \frac{a^2}{d^2} + \frac{b^2}{e^2} + \frac{c^2}{f^2}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Với } a, b, c, d, e, f \text{ là các số thực khác 0, ta có: } \frac{a}{d} + \frac{b}{e} + \frac{c}{f} = 1 &\Leftrightarrow \left(\frac{a}{d} + \frac{b}{e} + \frac{c}{f} \right)^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{a^2}{d^2} + \frac{b^2}{e^2} + \frac{c^2}{f^2} + \frac{2ab}{de} + \frac{2bc}{ef} + \frac{2ac}{df} = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{a^2}{d^2} + \frac{b^2}{e^2} + \frac{c^2}{f^2} + \frac{2abc}{def} \left(\frac{f}{c} + \frac{d}{a} + \frac{e}{b} \right) = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Mà } \frac{d}{a} + \frac{e}{b} + \frac{f}{c} = 0$$

$$\text{Vậy } B = \frac{a^2}{d^2} + \frac{b^2}{e^2} + \frac{c^2}{f^2} = 1$$

Bài 16: Cho $a = x + \frac{1}{x}$, $b = y + \frac{1}{y}$, $c = xy + \frac{1}{xy}$. Tính giá trị biểu thức: $A = a^2 + b^2 + c^2 - abc$.

Lời giải

$$a^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2, b^2 = y^2 + \frac{1}{y^2} + 2, c^2 = x^2y^2 + \frac{1}{x^2y^2} + 2$$

$$ab = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) = xy + \frac{1}{xy} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = c + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow abc = \left(c + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \cdot c$$

$$= c^2 + c\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$$

$$= c^2 + \left(xy + \frac{1}{xy}\right)\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$$

$$= c^2 + x^2 + y^2 + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2}$$

$$= a^2 - 2 + b^2 - 2 + c^2$$

$$\Rightarrow A = a^2 + b^2 + c^2 - abc = 4$$

Bài 17: Cho $\left(x + \sqrt{x^2 + 2015}\right)\left(y + \sqrt{y^2 + 2015}\right) = 2015$. Hãy tính giá trị của biểu thức $A = x + y + 2016$.

Lời giải

Nhân cả 2 vế của đẳng thức đã cho với $(x - \sqrt{x^2 + 2015})$ ta được:

$$-2015(y + \sqrt{y^2 + 2015}) = 2015(x - \sqrt{x^2 + 2015}) \quad (1)$$

Nhân cả 2 vế của đẳng thức đã cho với $(y - \sqrt{y^2 + 2015})$ ta được:

$$-2015(x + \sqrt{x^2 + 2015}) = 2015(y - \sqrt{y^2 + 2015}) \quad (2)$$

Cộng (1) với (2) theo vế rồi rút gọn ta được: $x + y = 0$.

Vậy $A = 2016$.

Bài 18: Chứng minh rằng: Nếu $ax^3 = by^3 = cz^3$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ thì

$$\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}.$$

Lời giải

Đặt: $ax^3 = by^3 = cz^3 = t$. Ta có:

$$\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{\frac{t}{x} + \frac{t}{y} + \frac{t}{z}} = \sqrt[3]{t} \quad \text{vì} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \quad (1)$$

Mặt khác: $\sqrt[3]{t} = x\sqrt[3]{a} = y\sqrt[3]{b} = z\sqrt[3]{c}$

$$\text{Suy ra: } \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{t} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = \sqrt[3]{t} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Bài 19: Cho $x = \sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{\frac{\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}}{\sqrt{3}+1}}$. Tính giá trị của biểu thức

$$A = (x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1)^{2015}.$$

Lời giải

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{\frac{\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}}{\sqrt{3}+1}} = \sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{\frac{\sqrt[3]{3\sqrt{3}-9+3\sqrt{3}-1}}{\sqrt{3}+1}} = \sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{\frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}-1)^3}}{\sqrt{3}+1}} \\ &= \sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}} = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}} = \frac{\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Thay $x = \sqrt{2}$ vào A ta có

$$A = (x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1)^{2015} = (4 + 2\sqrt{2} - 2 - 2\sqrt{2} - 1)^{2015} = 1^{2015} = 1$$

Bài 20: Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = 1$. Tính

$$H = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{1+c} + \frac{\sqrt{b} - \sqrt{c}}{1+a} + \frac{\sqrt{c} - \sqrt{a}}{1+b}$$

Lời giải

- Vì $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = 1$ nên $1+c = \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} + c = \dots = (\sqrt{a} + \sqrt{c})(\sqrt{b} + \sqrt{c})$
- Tương tự ta có $1+a = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{c})$; $1+b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{b} + \sqrt{c})$
- Vậy $H = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a} + \sqrt{c})(\sqrt{b} + \sqrt{c})} + \frac{\sqrt{b} - \sqrt{c}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{c})} + \frac{\sqrt{c} - \sqrt{a}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{b} + \sqrt{c})}$

$$= \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{c}) - (\sqrt{b} + \sqrt{c})}{(\sqrt{a} + \sqrt{c})(\sqrt{b} + \sqrt{c})} + \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b}) - (\sqrt{a} + \sqrt{c})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{c})} + \frac{(\sqrt{b} + \sqrt{c}) - (\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} - \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{c}} - \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} = 0$$

Bài 21: Tính giá trị biểu thức $P = \frac{\sqrt{5+\sqrt{3}} + \sqrt{5-\sqrt{3}}}{\sqrt{5+\sqrt{22}}} + \sqrt{11-6\sqrt{2}}$.

Lời giải

Đặt $M = \frac{\sqrt{5+\sqrt{3}} + \sqrt{5-\sqrt{3}}}{\sqrt{5+\sqrt{22}}}$. Ta có $M^2 = \frac{10+2\sqrt{22}}{5+\sqrt{22}} = 2$

$\Rightarrow M = \sqrt{2}$ (Do $M > 0$)

$\sqrt{11-6\sqrt{2}} = \sqrt{(3-\sqrt{2})^2} = 3-\sqrt{2}$

Suy ra $P = 3$

Bài 22: Cho các số thực x, y, z thỏa mãn đồng thời các điều kiện $x+y+z=2$, $x^2+y^2+z^2=18$ và $xyz=-1$. Tính giá trị của $S = \frac{1}{xy+z-1} + \frac{1}{yz+x-1} + \frac{1}{zx+y-1}$.

Lời giải

Ta có $xy+z-1 = xy-x-y+1 = (x-1)(y-1)$

Tương tự $yz+x-1 = (y-1)(z-1)$ và $zx+y-1 = (z-1)(x-1)$

Suy ra $S = \frac{1}{(x-1)(y-1)} + \frac{1}{(y-1)(z-1)} + \frac{1}{(z-1)(x-1)} = \frac{x+y+z-3}{(x-1)(y-1)(z-1)}$

$$= \frac{-1}{xyz - (xy+yz+zx) + (x+y+z) - 1} = \frac{1}{xy+yz+zx}$$

Ta có $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2 + 2(xy+yz+zx) \Rightarrow xy+yz+zx = -7$

Suy ra $S = -\frac{1}{7}$

Bài 23: Cho biểu thức: $A = (x^2 - x - 1)^2 + 2013$. Tính giá trị của A khi

$$x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}+1}$$

Lời giải

$$x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}+1} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{\sqrt{3}+1}+1) - \sqrt{3}(\sqrt{\sqrt{3}+1}-1)}{\sqrt{3}+1-1}$$

$$= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{\sqrt{3}+1}+1 - \sqrt{\sqrt{3}+1}+1)}{\sqrt{3}+1-1} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2$$

Thay $x = 2$ vào biểu thức A ta có:

$$A = (2^2 - 2 - 1)^2 + 2013 = 1 + 2013 = 2014$$

Vậy khi $x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}+1}$ thì giá trị của biểu thức A là 2014

Bài 24: Cho $(x + \sqrt{x^2 + 2013})(y + \sqrt{y^2 + 2013}) = 2013$. Chứng minh $x^{2013} + y^{2013} = 0$

Lời giải

$$(x + \sqrt{x^2 + 2013})(y + \sqrt{y^2 + 2013}) = 2013$$

$$(x - \sqrt{x^2 + 2013})(x + \sqrt{x^2 + 2013})(y + \sqrt{y^2 + 2013}) = 2013(x - \sqrt{x^2 + 2013})$$

$$-2013(y + \sqrt{y^2 + 2013}) = 2013(x - \sqrt{x^2 + 2013})$$

$$-y - \sqrt{y^2 + 2013} = x - \sqrt{x^2 + 2013}$$

$$\text{Tương tự: } -x - \sqrt{x^2 + 2013} = y - \sqrt{y^2 + 2013}$$

$$\Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow x = -y \Rightarrow x^{2013} + y^{2013} = 0$$

Bài 25: Chứng minh rằng $A = \frac{2\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$ là số nguyên

Lời giải

$$A = \frac{2\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$$

$$A = \frac{2\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{(2\sqrt{3} + 1)^2}}}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{3 + \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$$

$$= 1 \in \mathbb{Z}$$

Bài 26: Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn điều kiện :

$$a^{2006} + b^{2006} = a^{2007} + b^{2007} = a^{2008} + b^{2008}$$

Hãy tính tổng: $S = a^{2009} + b^{2009}$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Lời giải

Ta có: $a^{2008} + b^{2008} = (a^{2007} + b^{2007})(a + b) - ab(a^{2006} + b^{2006})$

$$\Leftrightarrow 1 = a + b - ab$$

$$\Leftrightarrow (1 - a)(1 - b) = 0$$

$$\Rightarrow a = 1, b = 1$$

Vậy $S = 1 + 1 = 2$

Bài 27: Tính giá trị của biểu thức P

$$P = 3x^{2013} + 5x^{2011} + 2006 \text{ với } x = \sqrt{6 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{18 - 8\sqrt{2}}}} - \sqrt{3}}$$

Lời giải

$$x = \sqrt{6 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{18 - 8\sqrt{2}}}} - \sqrt{3}}$$

$$\text{Có } \sqrt{18 - 8\sqrt{2}} = \sqrt{(4 - \sqrt{2})^2} = |4 - \sqrt{2}| = 4 - \sqrt{2}$$

$$\sqrt{\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 4 - \sqrt{2}} = \sqrt{2\sqrt{3} + 4} = \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} = |\sqrt{3} + 1|$$

$$x = \sqrt{6 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{3} - 1} - \sqrt{3}} = \sqrt{6 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} - \sqrt{3}} = \sqrt{6 + 2\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} - \sqrt{3}}$$

$$x = \sqrt{6 + 2\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} - \sqrt{3}} = \sqrt{6 + 2\sqrt{3} - 1 - \sqrt{3}} = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{3}$$

$$x = \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} - \sqrt{3} = |\sqrt{3} + 1| - \sqrt{3} = \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} = 1$$

Với $x = 1$. Ta có $P = 3 \cdot 1^{2013} + 5 \cdot 1^{2011} + 2006 = 3 + 5 + 2006 = 2014$

Vậy với $x = 1$ thì $P = 2014$

Bài 28: Tính giá trị biểu thức $A = \frac{(x^2 - 9)(y^2 - y - 2)}{(x^3 - 6x^2 + 9x)(y + 1)}$ biết $x^2 + 16y^2 - 7xy = xy - |x - 4|$

Lời giải

ĐKXĐ: $y \neq -1; x \neq 0; x \neq 3$

Ta có $A = \frac{(x - 3)(x + 3)(y + 1)(y - 2)}{x(x - 3)^2(y + 1)} = \frac{(x + 3)(y - 2)}{x(x - 3)}$

Từ giả thiết $x^2 + 16y^2 - 7xy = xy - |x - 4| \Leftrightarrow (x - 4y)^2 = -|x - 4| \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 = 0 \\ x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$

Do đó $A = -\frac{7}{4}$

Bài 29: Cho x, y là các số thực sao cho $\frac{2}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2x + y}$. Tính giá trị của biểu thức $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}$

Lời giải:

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Từ giả thiết : Ta có $\frac{2}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2x+y} \Leftrightarrow \frac{2y-x}{xy} = \frac{1}{2x+y}$

$$\Leftrightarrow (2y-x)(2x+y) = xy$$

$$\Leftrightarrow xy + y^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{y}{x} - \frac{x}{y} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = 3$$

Bài 30: Cho a, b, c là các số thực sao cho $a+b=c-2$ và $ab=2c^2-3c+1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=a^2+b^2$

Lời giải

Ta có : $P=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$$=(c-2)^2-2(2c^2-3c+1)$$

$$=-3c^2+2c+2=-3\left(c-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{7}{3}\leq\frac{7}{3}$$

Vậy Giá trị lớn nhất của P là $\frac{7}{3}$ xảy ra khi $c=\frac{1}{3}$ và $(a,b)=\left(\frac{-5+\sqrt{17}}{6}; \frac{-5-\sqrt{17}}{6}\right)$ và hoán vị của a, b

Bài 31: Tính giá trị biểu thức $A=x^3+y^3-3(x+y)$, biết rằng

$$x=\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}; y=\sqrt[3]{17+12\sqrt{2}}+\sqrt[3]{17-12\sqrt{2}}$$

Lời giải

Đặt $x=\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}=a+b$ khi đó

$$x^3=(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)=3+2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}+3\sqrt{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}.x$$

$$\Rightarrow x^3=6+3x \Leftrightarrow x^3-3x=6 \quad (1)$$

Đặt $y=\sqrt[3]{17+12\sqrt{2}}+\sqrt[3]{17-12\sqrt{2}}=c+d$ khi đó

$$y^3=(c+d)^3=c^3+d^3+3cd(c+d)=17+12\sqrt{2}+17-12\sqrt{2}+3\sqrt{(17+12\sqrt{2})(17-12\sqrt{2})}.y$$

$$\Rightarrow y^3=34+3y \Leftrightarrow y^3-3y=34 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $A=x^3+y^3-3(x+y)=x^3+y^3-3x-3y=6+34=40$

Bài 32: Tính $A=\frac{1}{2-\sqrt{3}}-\frac{2}{3-\sqrt{3}}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Ta có:

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$$

$$\frac{2}{3-\sqrt{3}}=\frac{2(3+\sqrt{3})}{9-3}=1+\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow A=2+\sqrt{3}-\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-\frac{2\sqrt{3}}{3}=2+\sqrt{3}-1-\frac{3\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow A=1$$

Bài 33: Cho $S = \left(1 - \frac{2}{2.3}\right)\left(1 - \frac{2}{3.4}\right) \cdots \left(1 - \frac{2}{2020.2021}\right)$. Tính S (kết quả để dưới dạng phân số tối giản).

Lời giải

Với mọi số nguyên dương n ta có: $1 - \frac{2}{n(n+1)} = \frac{n^2 + n - 2}{n(n+1)} = \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}$

Suy ra

$$\begin{aligned} S &= \left(1 - \frac{2}{2.3}\right)\left(1 - \frac{2}{3.4}\right) \cdots \left(1 - \frac{2}{2020.2021}\right) \\ &= \frac{1.4}{2.3} \cdot \frac{2.5}{3.4} \cdot \frac{3.6}{4.5} \cdots \frac{2019.2022}{2020.2021} \\ &= \frac{(1.2.3 \dots 2019) \cdot (4.5.6 \dots 2022)}{(2.3.4 \dots 2020) \cdot (3.4.5 \dots 2021)} \\ &= \frac{2022}{2020.3} \\ &= \frac{337}{1010} \end{aligned}$$

Bài 34: Cho x, y là các số thực sao cho $\frac{2}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2x+y}$. Tính giá trị của biểu thức $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}$

Lời giải

Từ giả thiết : Ta có $\frac{2}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2x+y} \Leftrightarrow \frac{2y-x}{xy} = \frac{1}{2x+y}$

$$\Leftrightarrow (2y-x)(2x+y) = xy$$

$$\Leftrightarrow xy + y^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{y}{x} - \frac{x}{y} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = 3$$

Bài 35: Cho $a+b+c=0$ và $a^2+b^2+c^2=1$.

Tìm giá trị của biểu thức $M = a^4 + b^4 + c^4$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } a+b+c=0 \Leftrightarrow (a+b+c)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ac) = 0$$

$$\Leftrightarrow ab+bc+ac = \frac{-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a+b+c) = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy, } a^4 + b^4 + c^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Bài 36: Cho $a = \sqrt[3]{7 + \sqrt{50}}$, $b = \sqrt[3]{7 - \sqrt{50}}$. Không dùng máy tính, chứng minh rằng các biểu thức $M = a + b$ và $N = a^7 + b^7$ có giá trị đều là số chẵn.

Lời giải

- Chứng minh M là số chẵn

$$a = \sqrt[3]{7 + \sqrt{50}} = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(1 + \sqrt{2})^3} = 1 + \sqrt{2}$$

$$b = \sqrt[3]{7 - \sqrt{50}} = \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(1 - \sqrt{2})^3} = 1 - \sqrt{2}$$

$$M = a + b = (1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) = 2$$

- Chứng minh N là số chẵn

$$a + b = 2; a.b = (1 + \sqrt{2}).(1 - \sqrt{2}) = -1; a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 6$$

$$N = a^7 + b^7 = (a^7 + a^4b^3) + (b^7 + a^3b^4) - (a^4b^3 + a^3b^4)$$

$$= a^4(a^3 + b^3) + b^4(a^3 + b^3) - a^3b^3(a + b)$$

$$= (a^3 + b^3).(a^4 + b^4) + 2$$

$$= (a + b)(a^2 + b^2 - ab) \left[(a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 \right] + 2 = 2(7.34 + 1) : 2$$

Chú ý :

- Học sinh có thể tính M bằng cách đưa về phương trình bậc 3: $M^3 + 3M - 14 = 0$, giải ra được nghiệm $M = 2$. Mỗi ý dưới đây cho 0,5 điểm.

$$M^3 = \left(\sqrt[3]{7 + \sqrt{50}} + \sqrt[3]{7 - \sqrt{50}} \right)^3 = 14 + 3.\sqrt[3]{7 + \sqrt{50}}.\sqrt[3]{7 - \sqrt{50}} \left(\sqrt[3]{7 + \sqrt{50}} + \sqrt[3]{7 - \sqrt{50}} \right)$$

$$M^3 = 14 - 3M \Leftrightarrow (M - 2)(M^2 + 2M + 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow M = 2 \text{ vì } M^2 + 2M + 7 = (M + 1)^2 + 6 > 0$$

- Học sinh có thể chứng minh N là số chẵn bằng cách đặt :

$$S_n = (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n \text{ rồi xây dựng công thức } S_{n+1} = 2S_n + S_{n-1} \text{ để chỉ ra } S_7 \text{ là số chẵn hoặc}$$

có thể khai triển $(1 + \sqrt{2})^7 + (1 - \sqrt{2})^7$ để tính N thì đều cho 0,5đ.

Bài 37: Cho các số a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 2019abc$ và $2019(a + b + c) = 1$. Tính $A = a^{2019} + b^{2019} + c^{2019}$.

Lời giải

Vì $2019(a + b + c) = 1$ nên $a + b + c \neq 0$.

$$2019(a + b + c) = 1 \Rightarrow \frac{1}{a + b + c} = 2019.$$

$$ab + bc + ca = 2019abc \Rightarrow ab + bc + ca = \frac{abc}{a + b + c}$$

$$(ab + bc + ca)(a + b + c) = abc \Leftrightarrow a^2b + abc + ca^2 + ab^2 + b^2c + cab + abc + bc^2 + c^2a = abc$$

$$\Leftrightarrow a^2b + abc + ca^2 + ab^2 + b^2c + abc + bc^2 + c^2a = 0$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\Leftrightarrow ab(a+c) + ac(a+c) + b^2(a+c) + bc(a+c) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+c)(ab+ac+b^2+bc) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+c)[a(b+c)+b(b+c)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(a+c) = 0 \Leftrightarrow a+b=0 \text{ hoặc } b+c=0 \text{ hoặc } c+a=0$$

$$\Leftrightarrow a=-b \text{ hoặc } b=-c \text{ hoặc } c=-a.$$

$$\text{*Nếu } a=-b \Rightarrow \frac{1}{a} = -\frac{1}{b} \Rightarrow -\frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2019 \Rightarrow \frac{1}{c} = 2019 \Rightarrow c = \frac{1}{2019}.$$

$$A = a^{2019} + b^{2019} + c^{2019} = (-b)^{2019} + b^{2019} + c^{2019} = -b^{2019} + b^{2019} + \left(\frac{1}{2019}\right)^{2019} = \left(\frac{1}{2019}\right)^{2019}.$$

$$\text{*Nếu } b=-c \Rightarrow \frac{1}{a} = 2019 \Rightarrow a = \frac{1}{2019}$$

$$A = a^{2019} + b^{2019} + c^{2019} = a^{2019} + (-c)^{2019} + c^{2019} = \left(\frac{1}{2019}\right)^{2019} + (-c^{2019}) + c^{2019} = \left(\frac{1}{2019}\right)^{2019}.$$

$$\text{*Nếu } c=-a \Rightarrow \frac{1}{b} = 2019 \Rightarrow b = \frac{1}{2019}.$$

$$A = a^{2019} + b^{2019} + c^{2019} = a^{2019} + b^{2019} + (-a)^{2019} = a^{2019} + \left(\frac{1}{2019}\right)^{2019} - a^{2019} = \left(\frac{1}{2019}\right)^{2019}.$$

$$\text{Vậy } A = \left(\frac{1}{2019}\right)^{2019}.$$

Bài 38: Cho $a = \sqrt[3]{7+\sqrt{50}}$, $b = \sqrt[3]{7-\sqrt{50}}$. Không dùng máy tính, hãy chứng minh các biểu thức

$M = a + b$ và $N = a^7 + b^7$ có giá trị đều là số chẵn.

Lời giải

- Chứng minh M là số chẵn

$$a = \sqrt[3]{7+\sqrt{50}} = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(1+\sqrt{2})^3} = 1+\sqrt{2}$$

$$b = \sqrt[3]{7-\sqrt{50}} = \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(1-\sqrt{2})^3} = 1-\sqrt{2}$$

$$M = a + b = (1+\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2}) = 2$$

- Chứng minh N là số chẵn

$$a + b = 2; a.b = (1+\sqrt{2}).(1-\sqrt{2}) = -1; a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 6$$

$$N = a^7 + b^7 = (a^7 + a^4b^3) + (b^7 + a^3b^4) - (a^4b^3 + a^3b^4)$$

$$= a^4(a^3 + b^3) + b^4(a^3 + b^3) - a^3b^3(a+b)$$

$$= (a^3 + b^3).(a^4 + b^4) + 2$$

$$= (a+b)(a^2 + b^2 - ab) \left[(a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 \right] + 2 = 2(7.34 + 1) : 2$$

Vậy M, N là các số chẵn.

Bài 39: Tính giá trị biểu thức $A = x^3 + y^3 - 3(x+y)$, biết $x = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$;

$$y = \sqrt[3]{17+12\sqrt{2}} + \sqrt[3]{17-12\sqrt{2}}$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Lời giải

Đặt $x = \sqrt[3]{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}} = a + b$ khi đó

$$x^3 = (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = 3 + 2\sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{(3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})}.x$$

$$\Rightarrow x^3 = 6 + 3x \Leftrightarrow x^3 - 3x = 6 \quad (1)$$

Đặt $y = \sqrt[3]{17 + 12\sqrt{2}} + \sqrt[3]{17 - 12\sqrt{2}} = c + d$ khi đó

$$y^3 = (c + d)^3 = c^3 + d^3 + 3cd(c + d)$$

$$= 17 + 12\sqrt{2} + 17 - 12\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{(17 + 12\sqrt{2})(17 - 12\sqrt{2})}.y$$

$$\Rightarrow y^3 = 34 + 3y \Leftrightarrow y^3 - 3y = 34 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $A = x^3 + y^3 - 3(x + y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y = 6 + 34 = 40$

Bài 40: Cho x, y là các số thực sao cho $\frac{2}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2x + y}$. Tính giá trị của biểu thức $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}$

Lời giải

Từ giả thiết: Ta có $\frac{2}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2x + y} \Leftrightarrow \frac{2y - x}{xy} = \frac{1}{2x + y}$

$$\Leftrightarrow (2y - x)(2x + y) = xy$$

$$\Leftrightarrow xy + y^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{y}{x} - \frac{x}{y} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = 3$$

Bài 41: Cho a, b, c là các số thực sao cho $a + b = c - 2$ và $ab = 2c^2 - 3c + 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2$

Lời giải

Ta có:

$$P = a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = (c - 2)^2 - 2(2c^2 - 3c + 1) = -3c^2 + 2c + 2 = -3\left(c - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{7}{3} \leq \frac{7}{3}$$

Vậy Giá trị lớn nhất của P là $\frac{7}{3}$ xảy ra khi $c = \frac{1}{3}$ và $(a, b) = \left(\frac{-5 + \sqrt{17}}{6}; \frac{-5 - \sqrt{17}}{6}\right)$ và hoán

vi của a, b

Bài 42: Cho $a + b + c = 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm giá trị của biểu thức $M = a^4 + b^4 + c^4$.

Lời giải

Ta có: $a + b + c = 0 \Leftrightarrow (a + b + c)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) = 0$$

$$\Leftrightarrow ab + bc + ac = \frac{-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c) = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy, } a^4 + b^4 + c^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Bài 43: Cho $a = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$; $b = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$. Tính $a^7 + b^7$

Lời giải

$$\text{Ta có: } a + b = \sqrt{2}; ab = \frac{1}{4}; a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Lại có } a^7 + b^7 = (a^3 + b^3)(a^4 + b^4) - a^3b^3(a + b)$$

$$= [(a + b)^3 - 3ab(a + b)] [(a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2] - a^3b^3(a + b)$$

$$= \left[\sqrt{2}^3 - 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{2} \right] \left[\left(\frac{3}{2} \right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{16} \right] - \frac{1}{16} \cdot \sqrt{2} = \frac{5}{4} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{17}{8} - \frac{1}{64} \cdot \sqrt{2} = \frac{169\sqrt{2}}{64}$$

Bài 44: Cho x, y, z là các số thực thỏa:

$$\begin{cases} x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 2017 & (1) \\ z^2 + \frac{y^2}{3} = 1009 & (2) \quad (x \neq 0, z \neq 0, x \neq -z) \\ x^2 + xz + z^2 = 1008 & (3) \end{cases}$$

Chứng minh rằng $\frac{2z}{x} = \frac{y+z}{x+z}$

Lời giải

$$\begin{cases} x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 2017 & (1) \\ z^2 + \frac{y^2}{3} = 1009 & (2) \quad (x \neq 0, z \neq 0, x \neq -z) \\ x^2 + xz + z^2 = 1008 & (3) \end{cases}$$

Trừ (1) và (2) về theo về, ta có: $x^2 + xy - z^2 = 1008$ (4)

Trừ (3) và (4) về theo về ta có: $xz - xy + 2z^2 = 0 \Leftrightarrow xz + 2z^2 = xy$

$$\Leftrightarrow 2xz + 2z^2 = xy + xz \Leftrightarrow 2z(x + z) = x(y + z)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2z}{x} = \frac{y+z}{x+z}$$

Điều phải chứng minh.

Bài 45: Cho đa thức $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d là các hằng số). Biết rằng $P(1) = 10$, $P(2) = 20$, $P(3) = 30$. Tính giá trị của biểu thức $\frac{P(12) + P(-8)}{10} + 25$

Lời giải

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Đặt $Q(x) = P(x) - 10x$

Có $Q(1) = Q(2) = Q(3) = 0$

$Q(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-r)$

$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-r) + 10x$

Khi đó: $A = \frac{P(12) + P(-8)}{10} + 25 = 2009$

Bài 46: Tính giá trị biểu thức $A = \frac{4\sqrt{3-2\sqrt{2}}+10}{(1+\sqrt{2})(3+\sqrt{2})+1}$

Lời giải

$$A = \frac{4\sqrt{3-2\sqrt{2}}+10}{(1+\sqrt{2})(3+\sqrt{2})+1}$$

$$4\sqrt{3-2\sqrt{2}}+10 = 4\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}+10 = 4(\sqrt{2}-1)+10 = 6+4\sqrt{2}$$

$$(1+\sqrt{2})(3+\sqrt{2})+1 = 3+\sqrt{2}+3\sqrt{2}+2+1 = 6+4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow A = 1$$

Bài 47: Cho biểu thức: $P = \sqrt{1-x+(1-x)\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x-(1-x)\sqrt{1-x^2}}$ với $x \in [-1;1]$

Tính giá trị của biểu thức P với $x = \frac{-1}{2012}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } +) \quad 2(1-x) + 2(1-x)\sqrt{1-x^2} &= (x^2 - 2x + 1) + 2(1-x)\sqrt{1-x^2} + (1-x^2) \\ &= [1-x+\sqrt{1-x^2}]^2 \end{aligned}$$

$$+) \quad 2(1-x) - 2(1-x)\sqrt{1-x^2} = [1-x-\sqrt{1-x^2}]^2$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra: } P\sqrt{2} &= |1-x+\sqrt{1-x^2}| + |1-x-\sqrt{1-x^2}| \\ &= 1-x+\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x}|\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}| \end{aligned}$$

$$\text{Vì } x = \frac{-1}{2012} \Rightarrow 1-x > 1+x \quad \Rightarrow P\sqrt{2} = 2(1-x)$$

$$\Rightarrow P = \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{2012} \right) = \frac{2013}{2012} \cdot \sqrt{2}$$

Chú ý: Nếu HS tính P^2

$$\text{- Tính: } P^2 = 2(1-x) + 2\sqrt{(1-x)^2 x^2}$$

$$\text{- Rút gọn: } P^2 = 2(1-x) + 2(1-x)|x|$$

$$\text{- Thay } x = \frac{-1}{2012} \text{ được } P^2 = 2 \cdot \frac{2013}{2012} + 2 \cdot \frac{2013}{2012^2} = 2 \cdot \left(\frac{2013}{2012} \right)^2$$

$$\text{- Do P không âm suy ra } P = \frac{2013}{2012} \cdot \sqrt{2}$$

Bài 48: Cho x là số thực âm thỏa mãn $x^2 + \frac{1}{x^2} = 23$, tính giá trị của biểu thức

$$A = x^3 + \frac{1}{x^3}.$$

Lời giải

Ta có $A = (x + \frac{1}{x})^3 - 3(x + \frac{1}{x})$

Từ giả thiết ta có: $x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 25 \Leftrightarrow (x + \frac{1}{x})^2 = 5^2 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = -5$ vì $x < 0$

Do đó $A = (-5)^3 - 3 \cdot (-5) = -110$

Bài 49: Tính giá trị biểu thức $P = \frac{a^3 - 3a + 2}{a^3 - 4a^2 + 5a - 2}$, biết $a = \sqrt[3]{55 + \sqrt{3024}} + \sqrt[3]{55 - \sqrt{3024}}$

Lời giải

tính $a^3 = 110 - 3a \Leftrightarrow (a - 5)(a^2 + 5a + 22) = 0 \Leftrightarrow a = 5$ thay $a=5$ vào $P = \frac{7}{3}$

Bài 50: Cho số thực x, y, z đôi 1 khác nhau thỏa mãn $x^3 = 3x - 1; y^3 = 3y - 1, z^3 = 3z - 1$

Chứng minh rằng $x^2 + y^2 + z^2 = 6$

Lời giải

Cộng cả ba đẳng thức ta có hệ

$$\begin{cases} x^3 = 3x - 1 \\ y^3 = 3y - 1 \\ z^3 = 3z - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y^3 = 3(x - y) \\ y^3 - z^3 = 3(y - z) \\ z^3 - x^3 = 3(z - x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3(1) \\ y^2 + zy + z^2 = 3(2) \\ x^2 + xz + z^2 = 3(3) \end{cases}$$

trừ (1) cho (2) ta được $(x - z)(x + y + z) = 0 \Leftrightarrow x + y + z = 0$

cộng (1); (2); (3) ta có $2(x^2 + y^2 + z^2) + xy + yz + xz = 9(*)$

mà từ $x+y+z=0$ suy ra $xy + yz + xz = -\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}$ thay vào (*) ta có đpcm

Bài 51: Cho biểu thức:

$$P = \sqrt{1-x+(1-x)\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x-(1-x)\sqrt{1-x^2}} \text{ với } x \in [-1;1]$$

Tính giá trị của biểu thức P với $x = \frac{-1}{2012}$.

Lời giải

Ta có: +) $2(1-x) + 2(1-x)\sqrt{1-x^2} = (x^2 - 2x + 1) + 2(1-x)\sqrt{1-x^2} + (1-x^2)$
 $= [1-x + \sqrt{1-x^2}]^2$

+) $2(1-x) - 2(1-x)\sqrt{1-x^2} = [1-x - \sqrt{1-x^2}]^2$

Suy ra: $P\sqrt{2} = |1-x + \sqrt{1-x^2}| + |1-x - \sqrt{1-x^2}|$

$$= 1-x + \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x} \sqrt{1-x} - \sqrt{1-x} \sqrt{1-x}$$

$$\begin{aligned} \text{Vì } x = \frac{-1}{2012} \Rightarrow 1-x > 1+x &\Rightarrow P\sqrt{2} = 2(1-x) \\ &\Rightarrow P = \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{2012} \right) = \frac{2013}{2012} \cdot \sqrt{2} \end{aligned}$$

Lời giải khác:

$$\begin{aligned} \text{Tính: } P^2 &= 2(1-x) + 2\sqrt{(1-x)^2 x^2} \\ &\text{- Rút gọn: } P^2 = 2(1-x) + 2(1-x)|x| \\ &\text{- Thay } x = \frac{-1}{2012} \text{ được } P^2 = 2 \cdot \frac{2013}{2012} + 2 \cdot \frac{2013}{2012^2} = 2 \cdot \left(\frac{2013}{2012} \right)^2 \\ &\text{- Do } P \text{ không âm suy ra } P = \frac{2013}{2012} \sqrt{2} \end{aligned}$$

Bài 52: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 0, a^2 + b^2 \neq c^2, b^2 + c^2 \neq a^2,$

$$c^2 + a^2 \neq b^2. \text{ Tính giá trị biểu thức } P = \frac{a^2}{a^2 - b^2 - c^2} + \frac{b^2}{b^2 - c^2 - a^2} + \frac{c^2}{c^2 - a^2 - b^2}.$$

Lời giải

$$\begin{aligned} P &= \frac{a^2}{(b+c)^2 - b^2 - c^2} + \frac{b^2}{(c+a)^2 - c^2 - a^2} + \frac{c^2}{(a+b)^2 - a^2 - b^2} \\ &= \frac{a^2}{2bc} + \frac{b^2}{2ca} + \frac{c^2}{2ab} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc} \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

$$\text{Do vậy, } P = \frac{3}{2}$$

Bài 53: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 0, a^2 + b^2 \neq c^2, b^2 + c^2 \neq a^2,$

$$c^2 + a^2 \neq b^2. \text{ Tính giá trị biểu thức } P = \frac{a^2}{a^2 - b^2 - c^2} + \frac{b^2}{b^2 - c^2 - a^2} + \frac{c^2}{c^2 - a^2 - b^2}.$$

Lời giải

$$\begin{aligned} P &= \frac{a^2}{(b+c)^2 - b^2 - c^2} + \frac{b^2}{(c+a)^2 - c^2 - a^2} + \frac{c^2}{(a+b)^2 - a^2 - b^2} \\ &= \frac{a^2}{2bc} + \frac{b^2}{2ca} + \frac{c^2}{2ab} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc} \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

Do vậy, $P = \frac{3}{2}$

Bài 54: a. Cho 3 số a, b, c khác 0, thỏa mãn $a + b + c = 0$. Chứng minh hằng đẳng thức:

$$\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right|$$

b. Tính giá trị của biểu thức: $B = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{2018^2} + \frac{1}{2019^2}}$

Giải:

$$\begin{aligned} \text{a. Ta có: } \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2 \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) \\ &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2 \left(\frac{c}{abc} + \frac{a}{abc} + \frac{b}{abc} \right) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2(a+b+c)}{abc} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right|$$

$$\text{Theo câu a) Ta có } \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right| = \left| \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b} \right| \quad (*)$$

b. Áp dụng (*) ta có:

$$\sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} = \sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{(-2)^2}} = \left| \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{(-2)} \right| = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \quad (\text{Vì } \frac{1}{1} + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} > 0)$$

$$\text{Tương tự } \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}; \quad \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12}; \dots$$

$$\sqrt{1 + \frac{1}{2018^2} + \frac{1}{2019^2}} = \frac{1}{2018} + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2019 \cdot 2018}$$

$$\text{Suy ra } B = 2019 - \frac{1}{2019} = \frac{4076360}{2019}$$

Bài 55: Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{4(x+1)x^{2018} - 2x^{2017} + 2x + 1}{2x^2 + 3x}$

$$\text{tại } x = \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{3}-2} - \frac{3}{2\sqrt{3}+2}}.$$

Giải:

$$\text{Tính giá trị của biểu thức } P = \frac{4(x+1)x^{2018} - 2x^{2017} + 2x + 1}{2x^2 + 3x} \text{ tại } x = \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{3}-2} - \frac{3}{2\sqrt{3}+2}}.$$

$$\text{Vì } x = \sqrt{\frac{1}{2\sqrt{3}-2} - \frac{3}{2\sqrt{3}+2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

nên $x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ là nghiệm của đa thức $2x^2 + 2x - 1$.

$$\text{Do đó } P = \frac{2x^{2017}(2x^2 + 2x - 1) + 2x + 1}{(2x^2 + 2x - 1) + x + 1} = \frac{2x + 1}{x + 1} = 3 - \sqrt{3}.$$

Bài 56: Cho x là số thực dương thỏa mãn điều kiện $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$. Tính giá trị các biểu thức

$$A = x^5 + \frac{1}{x^5}; B = x^7 + \frac{1}{x^7}.$$

Giải:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 7 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right) - 2 = 7 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 9 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 3 \text{ (do } x > 0 \text{)}$$

$$\text{Ta có } x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}\right) = 3 \cdot 6 = 18$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 = 47$$

$$+) \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) = x^5 + \frac{1}{x^3} + x^3 + \frac{1}{x^5} = x^5 + \frac{1}{x^5} + 18$$

$$\Rightarrow x^5 + \frac{1}{x^5} + 18 = 141 \Leftrightarrow x^5 + \frac{1}{x^5} = 123$$

$$+) \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) = x^7 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^7} = x^7 + \frac{1}{x^7} + 3$$

$$\Rightarrow x^7 + \frac{1}{x^7} + 3 = 846 \Leftrightarrow x^7 + \frac{1}{x^7} = 843$$

Bài 57: Cho $f(x) = (x^3 + 12x - 31)^{2015}$.

Tính $f(a)$ với $a = \sqrt[3]{16 - 8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16 + 8\sqrt{5}}$.

Giải:

$$a = \sqrt[3]{16 - 8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16 + 8\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow a^3 = 32 + 3\sqrt[3]{(16 - 8\sqrt{5})(16 + 8\sqrt{5})} \cdot (\sqrt[3]{16 - 8\sqrt{5}} + \sqrt[3]{16 + 8\sqrt{5}})$$

$$\Leftrightarrow a^3 = 32 + 3 \cdot (-4) \cdot a \Leftrightarrow a^3 = 32 - 12a \Leftrightarrow a^3 + 12a - 32 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^3 + 12a - 31 = 1 \Rightarrow f(a) = 1^{2015} = 1$$

Bài 58: Cho a, b, x, y là các số thực thỏa mãn: $x^2 + y^2 = 1$ và $\frac{x^4}{a} + \frac{y^4}{b} = \frac{1}{a+b}$.

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{x^{2016}}{a^{1008}} + \frac{y^{2016}}{b^{1008}} = \frac{2}{(a+b)^{1008}}$$

Giải:

$$\text{Ta có: } (x^2 + y^2)^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^4}{a} + \frac{y^4}{b} = \frac{(x^2 + y^2)^2}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow b(a+b)x^4 + a(a+b)y^4 = ab(x^4 + 2x^2y^2 + y^4)$$

$$\Leftrightarrow b^2x^4 + a^2y^4 - 2abx^2y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (bx^2 - ay^2)^2 = 0$$

$$\text{Từ đó: } \frac{x^2}{a} = \frac{y^2}{b} = \frac{x^2 + y^2}{a+b} = \frac{1}{a+b} \Rightarrow \frac{x^{2016}}{a^{1008}} = \frac{y^{2016}}{b^{1008}} = \frac{1}{(a+b)^{1008}} \Rightarrow \frac{x^{2016}}{a^{1008}} + \frac{y^{2016}}{b^{1008}} = \frac{2}{(a+b)^{1008}}$$

Bài 59: Cho x, y, z dương sao cho $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} = 6$

Tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{1}{3x+3y+2z} + \frac{1}{3y+3z+2x} + \frac{1}{3z+3x+2y}$.

Giải:

HD Áp dụng BĐT $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ với a, b là các số dương. Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3x+3y+2z} &= \frac{1}{(2x+y+z)+(x+2y+z)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(x+y)+(x+z)} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{(x+y)+(y+z)} \right) \\ &\leq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} \right) \right] = \frac{1}{16} \left(\frac{2}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+z} \right) \end{aligned}$$

Tương tự

$$\begin{aligned} \frac{1}{3x+2y+3z} &\leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{2}{x+z} \right) \\ \frac{1}{2x+3y+3z} &\leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{1}{x+z} \right) \end{aligned}$$

Cộng từng vế của bất đẳng thức ta được:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3x+3y+2z} + \frac{1}{3x+3y+2z} + \frac{1}{3x+3y+2z} &\leq \frac{1}{16} \left(\frac{2}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+z} \right) + \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x+y} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{y+z} + \frac{2}{x+z} \right) + \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{1}{x+z} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \right) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Bài 60: Cho biểu thức: $A = \left(1 - \frac{2\sqrt{a}}{a+1} \right) : \left(\frac{1}{1+\sqrt{a}} - \frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a} + \sqrt{a} + a+1} \right)$, với $a \geq 0$

Tính giá trị của biểu thức A khi $a = 2010 - 2\sqrt{2009}$.

Giải:

Với điều kiện $a \geq 0$. Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(1 - \frac{2\sqrt{a}}{a+1} \right) : \left(\frac{1}{1+\sqrt{a}} - \frac{2\sqrt{a}}{a\sqrt{a} + \sqrt{a} + a+1} \right) = \frac{a-2\sqrt{a}+1}{a+1} : \left(\frac{1}{1+\sqrt{a}} - \frac{2\sqrt{a}}{(a+1)(1+\sqrt{a})} \right) \\ &= \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{a+1} : \frac{a+1-2\sqrt{a}}{(a+1)(1+\sqrt{a})} = \frac{(\sqrt{a}-1)^2 (a+1)(1+\sqrt{a})}{(a+1)(\sqrt{a}-1)^2} = 1 + \sqrt{a} \end{aligned}$$

Khi $a = 2010 - 2\sqrt{2009} = (\sqrt{2009} - 1)^2$

Thì $A = 1 + \sqrt{(\sqrt{2009} - 1)^2} = \sqrt{2009}$

Bài 61: Cho ba số x, y, z thỏa mãn

$$\begin{cases} x+y+z=2010 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2010} \end{cases}$$

Tính giá trị của biểu thức $P = (x^{2007} + y^{2007})(y^{2009} + z^{2009})(z^{2011} + x^{2011})$

Giải:

Từ giả thuyết suy ra x, y, z khác 0 và

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x+y+z} \\
& \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x+y+z} \right) = 0 \\
& \Leftrightarrow \frac{x+y}{xy} + \frac{x+y}{z(x+y+z)} = 0 \\
& \Leftrightarrow (x+y) \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{xz+yz+z^2} \right) = 0 \\
& \Leftrightarrow (x+y)(xz+yz+z^2+xy) = 0 \\
& \Leftrightarrow (x+y)[z(z+x)+y(z+x)] = 0 \\
& \Leftrightarrow (x+y)(y+z)(z+x) = 0 \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ z+y=0 \\ x+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ y=-z \\ z=-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{2007} = -y^{2007} \\ y^{2009} = -z^{2009} \\ z^{2011} = -x^{2011} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{2007} + y^{2007} = 0 \\ y^{2009} + z^{2009} = 0 \\ z^{2011} + x^{2011} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow P = 0
\end{aligned}$$

Bài 62: Cho a, b, c thỏa mãn $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 7$; $a + b + c = 23$; $\sqrt{abc} = 3$

Tính giá trị biểu thức $H = \frac{1}{\sqrt{ab} + \sqrt{c} - 6} + \frac{1}{\sqrt{bc} + \sqrt{a} - 6} + \frac{1}{\sqrt{ca} + \sqrt{b} - 6}$

Giải:

Ta có $(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 = a + b + c + 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca})$

mà $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 7$; $a + b + c = 23$ nên $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = 13$

Ta có $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 7 \Rightarrow \sqrt{c} - 6 = -\sqrt{a} - \sqrt{b} + 1$

nên $\sqrt{ab} + \sqrt{c} - 6 = \sqrt{ab} - \sqrt{a} - \sqrt{b} + 1 = (\sqrt{a} - 1)(\sqrt{b} - 1)$

Tương tự $\sqrt{bc} + \sqrt{a} - 6 = (\sqrt{b} - 1)(\sqrt{c} - 1)$; $\sqrt{ac} + \sqrt{b} - 6 = (\sqrt{a} - 1)(\sqrt{c} - 1)$

$$\begin{aligned}
\text{Vậy } H &= \frac{1}{\sqrt{ab} + \sqrt{c} - 6} + \frac{1}{\sqrt{bc} + \sqrt{a} - 6} + \frac{1}{\sqrt{ca} + \sqrt{b} - 6} \\
&= \frac{1}{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{b} - 1)} + \frac{1}{(\sqrt{b} - 1)(\sqrt{c} - 1)} + \frac{1}{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{c} - 1)} \\
&= \frac{\sqrt{c} - 1 + \sqrt{a} - 1 + \sqrt{b} - 1}{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{b} - 1)(\sqrt{c} - 1)} \\
&= \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) - 3}{\sqrt{abc} + (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) - (\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) - 1} = \frac{7 - 3}{3 + 7 - 13 - 1} = -1
\end{aligned}$$

Bài 63: Tính giá trị của biểu thức $N = \frac{\sqrt{4+\sqrt{3}} + \sqrt{4-\sqrt{3}}}{\sqrt{4+\sqrt{13}}} + \sqrt{27-10\sqrt{2}}$

Giải:

$$N = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{4+\sqrt{3}} + \sqrt{4-\sqrt{3}})}{\sqrt{8+2\sqrt{13}}} + \sqrt{25-10\sqrt{2}} + 2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{4+\sqrt{3}}+\sqrt{4-\sqrt{3}})}{\sqrt{(4+\sqrt{3})+2\sqrt{4+\sqrt{3}}\sqrt{4-\sqrt{3}}+(4+\sqrt{3})}} + \sqrt{(5-\sqrt{2})^2} \\
&= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{4+\sqrt{3}}+\sqrt{4-\sqrt{3}})}{\sqrt{(\sqrt{4+\sqrt{3}}+\sqrt{4-\sqrt{3}})^2}} + \sqrt{(5-\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{4+\sqrt{3}}+\sqrt{4-\sqrt{3}})}{\sqrt{4+\sqrt{3}}+\sqrt{4-\sqrt{3}}} + |5-\sqrt{2}| = \sqrt{2}+5-\sqrt{2}=5
\end{aligned}$$

Bài 64: Cho $x = \frac{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}}$. Tính giá trị của $P = (12x^2 + 4x - 55)^{2017}$.

Giải:

Ta có :

$$\begin{aligned}
&\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1) = \sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^3}(\sqrt{3}-1) \\
&\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5} = \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}-\sqrt{5} \\
&x = \frac{\sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^3}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}-\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{5}+1-\sqrt{5}} = \frac{3-1}{1} = 2
\end{aligned}$$

Thay giá trị của x vào P ta được:

$$P = (12.2^2 + 4.2 - 55)^{2017} = 1^{2017} = 1$$

Bài 65: Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y = (\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z})^2$, $\sqrt{x} + \sqrt{y} \neq \sqrt{z}$

và $y \neq z$. Chứng minh đẳng thức $\frac{x + (\sqrt{x} - \sqrt{z})^2}{y + (\sqrt{y} - \sqrt{z})^2} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{z}}{\sqrt{y} - \sqrt{z}}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } \frac{x + (\sqrt{x} - \sqrt{z})^2}{y + (\sqrt{y} - \sqrt{z})^2} &= \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z})^2 - y + (\sqrt{x} - \sqrt{z})^2}{(\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z})^2 - x + (\sqrt{y} - \sqrt{z})^2} \\
&= \frac{(\sqrt{x} + 2\sqrt{y} - \sqrt{z})(\sqrt{x} - \sqrt{z}) + (\sqrt{x} - \sqrt{z})^2}{(2\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z})(\sqrt{y} - \sqrt{z}) + (\sqrt{y} - \sqrt{z})^2} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{z})(2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} - 2\sqrt{z})}{(\sqrt{y} - \sqrt{z})(2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} - 2\sqrt{z})} \\
&= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{z}}{\sqrt{y} - \sqrt{z}}.
\end{aligned}$$

Bài 66: Cho hai số thực a, b thỏa mãn $a^2 + 4ab - 7b^2 = 0$ ($a \neq b$ và $a \neq -b$). Tính giá trị của biểu

thức $Q = \frac{2a-b}{a-b} + \frac{3a-2b}{a+b}$.

Lời giải

$$Q = \frac{2a-b}{a-b} + \frac{3a-2b}{a+b} = \frac{2a^2 + ab - b^2 + 3a^2 - 5ab + 2b^2}{a^2 - b^2} = \frac{5a^2 - 4ab + b^2}{a^2 - b^2}$$

Vì $a^2 + 4ab - 7b^2 = 0$ nên ta có

$$Q = \frac{6(a^2 - b^2) - (a^2 + 4ab - 7b^2)}{a^2 - b^2} = \frac{6(a^2 - b^2)}{a^2 - b^2} = 6.$$

Bài 67: Cho số x ($x \in \mathbb{R}; x > 0$) thỏa mãn điều kiện: $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$. Tính giá trị các biểu thức:

$$B = x^5 + \frac{1}{x^5}.$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } x^2 + \frac{1}{x^2} = 7 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 9 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 3 \text{ (do } x > 0 \text{)}.$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = 27 \Leftrightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 27$$

$$\Leftrightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$$

$$\Rightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = 18 \cdot 7 = 126$$

$$\Leftrightarrow x^5 + \frac{1}{x^5} + x + \frac{1}{x} = 126$$

$$\Rightarrow x^5 + \frac{1}{x^5} = 123.$$

Bài 68: Tính giá trị biểu thức $B = (x^2 + 4x - 2)^{2019}$ tại $x = \frac{(\sqrt{3}-1)\left(\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{21+4\sqrt{5}}+3}$

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} x &= \frac{(\sqrt{3}-1)\left(\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{21+4\sqrt{5}}+3} = \frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt[3]{(\sqrt{3}+1)^3}}{\sqrt{(1+2\sqrt{5})^2+3}} \\ &= \frac{2}{2(2+\sqrt{5})} = \frac{1}{\sqrt{5}+2} = -2 + \sqrt{5} \end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{aligned} B &= (x^2 + 4x - 2)^{2019} = \left[(-2 + \sqrt{5})^2 + 4(-2 + \sqrt{5}) - 2\right]^{2019} \\ &= (4 - 4\sqrt{5} + 5 - 8 + 4\sqrt{5} - 2)^{2019} = (-1)^{2019} = -1 \end{aligned}$$

Bài 69: Tính tổng $S = \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2019^2} + \sqrt{2019^2 - 2}}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } S &= \frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2019^2-2}+\sqrt{2019^2}} \\
\Rightarrow S &= \frac{1-\sqrt{3}}{1-3} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{3-5} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{5-7} + \dots + \frac{\sqrt{2019^2-2}-\sqrt{2019^2}}{2019^2-2-2019^2} \\
\Rightarrow S &= \frac{1-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{5}-\sqrt{7}+\dots+\sqrt{2019^2-2}-\sqrt{2019^2}}{-2} \\
\Rightarrow S &= \frac{1-\sqrt{2019^2}}{-2} = \frac{1-2019}{-2} = 1009
\end{aligned}$$

Vậy $S = 1009$

Bài 70:

1/ Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1} = 1$$

2/ Cho các số a, b, c khác 0 thỏa mãn $2a+b+c+2c+a=0$. Hãy tính giá trị của biểu thức

$$A = \frac{bc}{8a^2} + \frac{ca}{b^2} + \frac{ab}{c^2}$$

Lời giải:

1/ Ta có VT

$$\begin{aligned}
&= \frac{a}{ab+a+1} + \frac{ab}{abc+ab+a} + \frac{abc}{ab \cdot ac+abc+ab} = \frac{a}{ab+a+1} + \frac{a \cdot b}{1+ab+a} + \frac{1}{a+1+ab} \\
&= \frac{ab+a+1}{ab+a+1} = 1 = VP(dpcm)
\end{aligned}$$

$$2/ \text{Đặt } x=2a, y=b, z=c \text{ ta được } xy+yz+zx=0 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$$

$$\text{Khi đó } 2A = \frac{bc}{4a^2} + \frac{2ac}{b^2} + \frac{2ab}{c^2} = \frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} + \frac{xy}{z^2} = xyz \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} \right)$$

Mặt khác từ hằng đẳng thức

$$\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} - \frac{3}{xyz} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{xy} - \frac{1}{yz} - \frac{1}{zx} \right) = 0 \text{ ta có}$$

$$\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz} \Rightarrow 2A = xyz \cdot \frac{3}{xyz} = 3. \text{ Vậy } A = \frac{3}{2}.$$

Bài 71: Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $(x + \sqrt{x^2+1})(y + \sqrt{y^2+1}) = 2$. Tính giá trị

của biểu thức $Q = x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } 2 = xy + \sqrt{(x^2+1)(y^2+1)} + x\sqrt{y^2+1} + y\sqrt{x^2+1} = xy + \sqrt{(x^2+1)(y^2+1)} + Q$$

$$\Rightarrow (2-Q)^2 = \left[xy + \sqrt{(x^2+1)(y^2+1)} \right]^2$$

$$\Rightarrow 4 - 4Q + Q^2 = 2x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 + 2xy\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}.$$

$$\text{Ta lại có } Q^2 = x^2(y^2+1) + y^2(x^2+1) + 2xy\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}$$

$$\Rightarrow Q^2 = 2x^2y^2 + x^2 + y^2 + 2xy\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}.$$

$$\text{Do đó } 4 - 4Q = 1 \Rightarrow Q = \frac{3}{4}.$$

Bài 72: Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{2025\sqrt{2024}+2024\sqrt{2025}} = \frac{44}{45}$$

Lời giải:

$$\text{Xét: } \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Áp dụng đẳng thức ở trên ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{2025\sqrt{2024}+2024\sqrt{2025}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2024}} - \frac{1}{\sqrt{2025}} \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2025}} = 1 - \frac{1}{45} = \frac{44}{45} \text{ (dpcm)} \end{aligned}$$

Bài 73: Cho x là số thực âm thỏa mãn $x^2 + \frac{1}{x^2} = 23$. Tính giá trị của biểu thức: $A = x^3 + \frac{1}{x^3}$.

Lời giải:

Từ giả thiết

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 23$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 23$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 25 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = -5 \quad (\text{do } x < 0)$$

Ta có:

$$\begin{aligned} A = x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3 \cdot x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3 \left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= (-5)^3 - 3(-5) \\ &= -110 \end{aligned}$$

Vậy $A = -110$.

Bài 74: Tính giá trị biểu thức: $P = (4x^5 + 4x^4 - 5x^3 + 5x - 2)^{2018} + 2019$ tại

$$x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}.$$

Lời giải:

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Ta có: $x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{1}} = \frac{1}{2} |\sqrt{2}-1| = \frac{1}{2} (\sqrt{2}-1)$

Đặt $A = 4x^5 + 4x^4 - 5x^3 + 5x - 2$

Ta thấy:

$$\begin{aligned} A &= 4x^3(x^2 + x + 1) - x^3 + 5x - 2 \\ &= x^3(4x^2 + 4x - 1) - x(4x^2 + 4x - 1) + (4x^2 + 4x - 1) - 1 \\ &= (4x^2 + 4x - 1)(x^3 - x + 1) - 1 \end{aligned}$$

Mà $4x^2 + 4x - 1 = 4 \cdot \left[\frac{1}{2} (\sqrt{2}-1) \right]^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} (\sqrt{2}-1) - 1 = 0$.

Thay $4x^2 + 4x - 1 = 0$ vào A , ta được $A = -1$.

Vậy $P = (-1)^{2018} + 2019 = 2020$

Bài 75: Cho $x = \sqrt{3 + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}} + \sqrt{3 - \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}}$. Tính giá trị của biểu thức $P = x(2 - x)$.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Có } x^2 &= \left(\sqrt{3 + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}} + \sqrt{3 - \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}} \right)^2 = 6 + 2\sqrt{3^2 - (5 + 2\sqrt{3})} \\ &= 6 + 2\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = 6 + 2(\sqrt{3} - 1) = 4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2. \end{aligned}$$

Do $x > 0$ nên $x = \sqrt{3} + 1$.

Suy ra $(x - 1)^2 = 3$ hay $x^2 - 2x = 2$, do đó $P = -2$.

Bài 76: Cho ba số a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 2019$. Chứng minh

$$\frac{a^2 - bc}{a^2 + 2019} + \frac{b^2 - ca}{b^2 + 2019} + \frac{c^2 - ab}{c^2 + 2019} = 0.$$

Lời giải:

Từ $ab + bc + ca = 2019$ suy ra $a^2 + 2019 = a^2 + ab + bc + ca = (a + b)(a + c)$.

Tương tự có $b^2 + 2019 = (b + c)(b + a)$, $c^2 + 2019 = (c + a)(c + b)$.

Vế trái của đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\begin{aligned} &\frac{a^2 - bc}{(a + b)(a + c)} + \frac{b^2 - ca}{(b + c)(b + a)} + \frac{c^2 - ab}{(c + a)(c + b)} \\ &= \frac{(a^2 - bc)(b + c) + (b^2 - ca)(c + a) + (c^2 - ab)(a + b)}{(a + b)(b + c)(c + a)} \end{aligned}$$

Khai triển và làm gọn biểu thức trên tử ta được kết quả là 0 nên có đpcm.

Bài 77: Gọi a, b, c là ba nghiệm của phương trình $2x^3 - 9x^2 + 6x - 1 = 0$

Không giải phương trình, hãy tính tổng:

$$S = \frac{a^5 - b^5}{a - b} + \frac{b^5 - c^5}{b - c} + \frac{c^5 - a^5}{c - a}$$

Lời giải

Vì a, b, c là ba nghiệm của phương trình

$$2x^3 - 9x^2 + 6x - 1 = 0$$

Khi phân tích đa thức $2x^3 - 9x^2 + 6x - 1$ ra thừa số ta được:

$$2x^3 - 9x^2 + 6x - 1 = 2(x-a)(x-b)(x-c)$$

$$\Leftrightarrow (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c = \frac{9}{2} \\ ab+bc+ca = 3 \\ abc = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = \left(\frac{9}{2}\right)^2 - 2 \cdot 3 = \frac{57}{4}$$

Tính $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$:

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = (ab+bc+ca)^2 - 2(ab \cdot bc + bc \cdot ca + ca \cdot ab)$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = (ab+bc+ca)^2 - 2abc(a+b+c)$$

$$\Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = 3^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$$

Tính $a^3 + b^3 + c^3$:

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = \frac{9}{2} \left(\frac{57}{4} - 3 \right) + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{417}{8}$$

Vậy:

$$\begin{cases} a+b+c = \frac{9}{2} \\ ab+bc+ca = 3 \\ abc = \frac{1}{2} \\ a^2+b^2+c^2 = \frac{57}{4} \\ a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 = \frac{9}{2} \\ a^3+b^3+c^3 = \frac{417}{8} \end{cases}$$

Khi đó ta có:

$$S = \frac{a^5 - b^5}{a - b} + \frac{b^5 - c^5}{b - c} + \frac{c^5 - a^5}{c - a}$$

$$\Leftrightarrow S = (a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) + (b^4 + b^3c + b^2c^2 + bc^3 + c^4) + (c^4 + c^3a + c^2a^2 + ca^3 + a^4)$$

$$\Leftrightarrow S = 2a^4 + 2b^4 + 2c^4 + a^3b + b^3a + b^3c + c^3b + a^3c + c^3a + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$$

$$\Leftrightarrow S = (a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2) + (a^4 + a^3b + a^3c) + (b^4 + b^3a + b^3c) + (c^4 + c^3a + c^3b) - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow S = (a^2 + b^2 + c^2)^2 + a^3(a+b+c) + b^3(a+b+c) + c^3(a+b+c) \\
&\quad - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \\
&\Leftrightarrow S = (a^2 + b^2 + c^2)^2 + (a^3 + b^3 + c^3)(a+b+c) - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \\
&\Leftrightarrow S = \left(\frac{57}{4}\right)^2 + \frac{9}{2} \cdot \frac{417}{8} - \frac{9}{2} = \frac{3465}{8}
\end{aligned}$$

Bài 78: Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = 1$. Tính $H = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{1+c} + \frac{\sqrt{b} - \sqrt{c}}{1+a} + \frac{\sqrt{c} - \sqrt{a}}{1+b}$

Lời giải

- Vì $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = 1$ nên $1+c = \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} + c = \dots = (\sqrt{a} + \sqrt{c})(\sqrt{b} + \sqrt{c})$
- Tương tự ta có $1+a = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{c})$; $1+b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{b} + \sqrt{c})$
- Vậy $H = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a} + \sqrt{c})(\sqrt{b} + \sqrt{c})} + \frac{\sqrt{b} - \sqrt{c}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{c})} + \frac{\sqrt{c} - \sqrt{a}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{b} + \sqrt{c})}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{c}) - (\sqrt{b} + \sqrt{c})}{(\sqrt{a} + \sqrt{c})(\sqrt{b} + \sqrt{c})} + \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b}) - (\sqrt{a} + \sqrt{c})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{c})} + \frac{(\sqrt{b} + \sqrt{c}) - (\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \\
&= \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} - \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{c}} - \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} = 0
\end{aligned}$$

Bài 79: 1) Phân tích đa thức sau thành nhân tử $a^2(b-2c) + b^2(c-a) + 2c^2(a-b) + abc$.

2) Cho x, y thỏa mãn $x = \sqrt[3]{y - \sqrt{y^2 + 1}} + \sqrt[3]{y + \sqrt{y^2 + 1}}$.

Tính giá trị của biểu thức $A = x^4 + x^3y + 3x^2 + xy - 2y^2 + 1$.

Lời giải

1) $a^2(b-2c) + b^2(c-a) + 2c^2(a-b) + abc = 2c^2(a-b) + ab(a-b) - c(a^2 - b^2) - ac(a-b)$

$$= (a-b)[2c^2 - 2ac + ab - bc] = (a-b)[2c(c-a) + b(a-c)] = (a-b)(a-c)(b-2c)$$

2) Có $x = \sqrt[3]{y - \sqrt{y^2 + 1}} + \sqrt[3]{y + \sqrt{y^2 + 1}}$

$$\Rightarrow x^3 = 2y + 3\sqrt[3]{y - \sqrt{y^2 + 1}} \cdot \sqrt[3]{y + \sqrt{y^2 + 1}} \left(\sqrt[3]{y - \sqrt{y^2 + 1}} + \sqrt[3]{y + \sqrt{y^2 + 1}} \right)$$

$$\Rightarrow x^3 + 3x - 2y = 0$$

$$\begin{aligned}
A &= x^4 + x^3y + 3x^2 - 2xy + 3xy - 2y^2 + 1 = (x^4 + 3x^2 - 2xy) + (x^3y + 3xy - 2y^2) + 1 \\
&= x(x^3 + 3x - 2y) + y(x^3 + 3x - 2y) + 1 = 1
\end{aligned}$$

Bài 80: Cho các số thực dương a, b, c, x, y, z khác 0 thỏa mãn $\frac{x^2 - yz}{a} = \frac{y^2 - zx}{b} = \frac{z^2 - xy}{c}$

Chứng minh rằng $\frac{a^2 - bc}{x} = \frac{b^2 - ca}{y} = \frac{c^2 - ab}{z}$

Lời giải

$$\frac{x^2 - yz}{a} = \frac{y^2 - zx}{b} = \frac{z^2 - xy}{c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{x^2 - yz} = \frac{b}{y^2 - zx} = \frac{c}{z^2 - xy} \Leftrightarrow \frac{a^2}{x^4 - 2x^2yz + y^2z^2} = \frac{bc}{y^2z^2 - xy^3 - xz^3 + x^2yz} = \frac{a^2 - bc}{x(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)} \quad (1)$$

$$\text{Tuongtu: } \frac{b^2}{y^4 - 2y^2xz + x^2z^2} = \frac{ac}{x^2z^2 - x^3y - yz^3 + xy^2z} = \frac{b^2 - ac}{y(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)} \quad (2)$$

$$\text{Tuongtu: } \frac{c^2}{z^4 - 2xyz^2 + x^2y^2} = \frac{ab}{x^2y^2 - x^3z - y^3z + xyz^2} = \frac{c^2 - ab}{z(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)} \quad (3)$$

Từ (1) (2) (3) ta có ĐPCM

Bài 81: Cho x, y, z thỏa mãn: $xy + yz + xz = 1$.

Hãy tính giá trị biểu thức: $A = x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{(1+x^2)}} + y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{(1+y^2)}} + z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{(1+z^2)}}$

Lời giải

Ta có $xy + yz + xz = 1 \Leftrightarrow 1 + x^2 = xy + yz + xz + x^2 = y(x+z) + x(x+z) = (x+z)(x+y)$

Tương tự: $1 + y^2 = \dots; 1 + z^2 = \dots$

Bài 82: Cho $a^2(b+c) = b^2(c+a) = 2018$ với a, b, c đôi một khác nhau và khác không. Tính giá trị của biểu thức $c^2(a+b)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } a^2(b+c) = b^2(c+a) \Leftrightarrow \frac{a}{bc+ab} = \frac{b}{ab+ca} = \frac{a-b}{c(b-a)} = -\frac{1}{c}.$$

$$\text{Suy ra } ab+bc+ca=0 \Leftrightarrow bc=-a(b+c) \Leftrightarrow -abc=a^2(b+c)=2018. (1)$$

$$ab+bc+ca=0 \Leftrightarrow ab=-c(a+b) \Leftrightarrow -abc=c^2(a+b). (2)$$

Từ (1) và (2) ta được $c^2(a+b)=2018$.

Bài 83:

a) Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2018}$. Chứng minh rằng $\sqrt{a+b} = \sqrt{a-2018} + \sqrt{b-2018}$.

b) Cho a là nghiệm dương của phương trình $6x^2 + \sqrt{3}x - \sqrt{3} = 0$.

Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{a+2}{\sqrt{a^4+a+2-a^2}}$.

Lời giải

a) Từ giả thiết

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} + \frac{1}{b} &= \frac{1}{2018} \Rightarrow 2018 = \frac{ab}{a+b} \Rightarrow \sqrt{a-2018} + \sqrt{b-2018} = \sqrt{a - \frac{ab}{a+b}} + \sqrt{b - \frac{ab}{a+b}} \\ &= \frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{a+b}} = \frac{a+b}{\sqrt{a+b}} = \sqrt{a+b} \quad (\forall a, b > 0).\end{aligned}$$

b) Ta có a là nghiệm dương của phương trình $6x^2 + \sqrt{3}x - \sqrt{3} = 0$ nên $6a^2 + \sqrt{3}a - \sqrt{3} = 0$

$$\Rightarrow a = \frac{\sqrt{3} - 6a^2}{\sqrt{3}} = 1 - 2\sqrt{3}a^2 > 0 \Rightarrow a^2 < \frac{1}{2\sqrt{3}} < \sqrt{3} \Leftrightarrow a^2 - \sqrt{3} < 0.$$

$$\begin{aligned}\text{Do đó } A &= \frac{a+2}{\sqrt{a^4+a+2}-a^2} = \frac{(a+2) \cdot (\sqrt{a^4+a+2}+a^2)}{a^4+a+2-a^4} = \sqrt{a^4+1-2\sqrt{3}a^2+2+a^2} \\ &= \sqrt{(a^2-\sqrt{3})^2+a^2} = |a^2-\sqrt{3}|+a^2 = \sqrt{3}-a^2+a^2 = \sqrt{3}.\end{aligned}$$

CÁC DẠNG BÀI TẬP THI HSG TOÁN 9 QUA CÁC ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI

III. Dạng 3: Số học

1. Số nguyên tố, hợp số, số chính phương, lập phương

A. Bài toán

Bài 1: Tìm các số nguyên k để $k^4 - 8k^3 + 23k^2 - 26k + 10$ là số chính phương.

Bài 2: Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn:

$$\frac{a - b\sqrt{2}}{b - c\sqrt{2}} \text{ là số hữu tỉ và } a^2 + b^2 + c^2 \text{ là số nguyên tố}$$

Bài 3: Cho tập hợp A gồm 16 số nguyên dương đầu tiên. Hãy tìm số nguyên dương k nhỏ nhất có tính chất: Trong mỗi tập con gồm k phần tử của A đều tồn tại hai số phân biệt a, b sao cho $a^2 + b^2$ là số nguyên tố.

Bài 4: Xác định số điện thoại của THCS X thành phố Thủ Dầu Một, biết số đó dạng $\overline{82xxyy}$ với $\overline{xxyy}$ là số chính phương.

Bài 5: Tìm tất cả các cặp số $(a; b)$ nguyên dương thỏa mãn hai điều kiện:

- 1) a, b đều khác 1 và ước số chung lớn nhất của a, b là 1.
- 2) Số $N = ab(ab+1)(2ab+1)$ có đúng 16 ước số nguyên dương.

Bài 6:

Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên dương m, n, p với p nguyên tố thỏa mãn

$$m^{2019} + n^{2019} = p^{2018}$$

Bài 7: Tìm các số nguyên dương n sao cho $n^4 + n^3 + 1$ là số chính phương.

Bài 8: Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn điều kiện

$$20abc < 30(ab + bc + ca) < 21abc$$

Bài 9: Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $n^2 - 14n - 256$ là một số chính phương.

Bài 10: Tìm số tự nhiên n để $n^4 + 4$ là số nguyên tố.

Bài 11: Cho n là số tự nhiên lớn hơn 1. Chứng minh rằng $n^4 + 4^n$ là hợp số.

Bài 12: Tìm x nguyên dương để $4x^3 + 14x^2 + 9x - 6$ là số chính phương

Bài 13: cho dãy số $n, n+1, n+2, \dots, 2n$ với n nguyên dương. Chứng minh trong dãy có ít nhất một lũy thừa bậc 2 của 1 số tự nhiên.

Bài 14: Tìm $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho: $n^4 + n^3 + 1$ là số chính phương.

Bài 15: Tìm các số tự nhiên n sao cho $A = n^2 + 2n + 8$ là số chính phương

Bài 16: Bài 1: Tìm tất cả các bộ số nguyên dương $(x; y; z)$ sao cho $\frac{x+y\sqrt{2019}}{y+z\sqrt{2019}}$ là số hữu tỉ và $x^2 + y^2 + z^2$ là số nguyên tố.

Bài 17: Cho A là số chính phương gồm 4 chữ số thỏa mãn nếu ta cộng thêm vào mỗi chữ số của A thêm 1 đơn vị thì ta được số chính phương B cũng có 4 chữ số. Tìm hai số $A; B$

Bài 18: Tìm số nguyên tố p thỏa mãn $p^3 - 4p + 9$ là số chính phương.

Bài 19: Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $9^n + 11$ là tích của k ($k \in \mathbb{N}, k \geq 2$) số tự nhiên liên tiếp.

Bài 20: Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $C = 2019^n + 2020$ là số chính phương

Bài 21: Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng nếu $2n + 1$ và $3n + 1$ là các số chính phương thì n chia hết cho 40.

Bài 22: Tìm các số nguyên tố p, q thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

- i) $p^2q + p$ chia hết cho $p^2 + q$
- ii) $pq^2 + q$ chia hết cho $q^2 - p$

Bài 23: Chứng minh rằng số có dạng $A = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ không phải là số chính phương, trong đó $n \in \mathbb{N}, n > 1$.

Bài 24:

a) Chứng minh rằng nếu n là số nguyên thì $\frac{n^5 + 29n}{30}$ cũng là số nguyên.

b) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(x; y)$ sao cho $2(x^2 + y^2 - 3x + 2y) - 1$ và $5(x^2 + y^2 + 4x + 2y + 3)$ đều là số chính phương.

Bài 25: Cho $A = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ (với $n \in \mathbb{N}, n > 1$). Chứng minh A không phải là số chính phương.

Bài 26: Tìm tất cả các số chính phương gồm 4 chữ số biết rằng khi ta thêm 1 đơn vị vào chữ số hàng nghìn, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng trăm, thêm 5 đơn vị vào chữ số hàng chục, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng đơn vị, ta vẫn được một số chính phương.

Bài 27: Với mỗi số nguyên dương $n \leq 2008$, đặt $S_n = a^n + b^n$, với $a = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$; $b = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

- a) Chứng minh rằng với $n \geq 1$ ta có $S_{n+2} = (a+b)(a^{n+1} + b^{n+1}) - ab(a^n + b^n)$
- b) Chứng minh rằng với mọi n thỏa mãn điều kiện đề bài, S_n là số nguyên.

c) Chứng minh $S_n - 2 = \left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^n - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^n \right]^2$. Tìm tất cả các số n để $S_n - 2$ là số

chính phương.

Bài 28: Tìm số tự nhiên n để $n^4 + 4$ là số nguyên tố.

Bài 29 : Cho $x = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$. Chứng minh rằng: $P = x^3 - 3x^2 - 3x + 3$ là một số chính phương.

Bài 30:

a) Chứng minh rằng mọi số nguyên tố p lớn hơn 3 đều viết được dưới dạng $p = 6m \pm 1$, với m là số tự nhiên.

b) Tìm số nguyên tố p sao cho $8p^2 + 1$ là số nguyên tố.

Bài 31: Chứng minh rằng nếu n là số tự nhiên sao cho $n+1$ và $2n+1$ đều là các số chính phương thì n là bội số của 24.

Bài 32: Tìm số tự nhiên n để $n+18$ và $n-41$ là hai số chính phương.

Bài 33: Cho $A = a^{2015} + b^{2015} + c^{2015} + d^{2015}$, với a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn $ab=cd$. Chứng minh rằng A là hợp số.

Bài 34: Cho số nguyên dương n và các số $A = \underbrace{444\dots4}_{2n}$ (A gồm $2n$ chữ số 4); $B = \underbrace{888\dots8}_n$ (B gồm n chữ số 8). Chứng minh rằng $A + 2B + 4$ là số chính phương.

Bài 35: Cho hai số tự nhiên a, b thỏa mãn $2a^2 + a = 3b^2 + b$. Chứng minh rằng $2a + 2b + 1$ là số chính phương

Bài 36: Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $n^2 + 17$ là một số chính phương.

Bài 37: Tìm các số nguyên tố a, b, c và số nguyên dương k thỏa mãn phương trình $a^2 + b^2 + 16c^2 = 9k^2 + 1$.

Bài 38: Chứng minh rằng với k là số nguyên thì $2016k + 3$ không phải là lập phương của một số nguyên.

Bài 39: Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương $(p; q; n)$, trong đó p, q là các số nguyên tố thỏa mãn: $p(p+3) + q(q+3) = n(n+3)$

Bài 40: Cho tập hợp A gồm 16 số nguyên dương đầu tiên. Hãy tìm số nguyên dương k nhỏ nhất có tính chất: Trong mỗi tập con gồm k phần tử của A đều tồn tại hai số phân biệt a, b sao cho $a^2 + b^2$ là số nguyên tố.

Bài 41: Tìm số các số nguyên n sao cho $B = n^2 - n + 13$ là số chính phương

Bài 42: Cho a, b là số hữu tỉ thỏa mãn $(a^2 + b^2 - 2)(a + b)^2 + (1 - ab)^2 = -4ab$

Chứng minh $\sqrt{1+ab}$ là số hữu tỉ

Bài 43: Tìm số nguyên dương n lớn nhất để $A = 4^{27} + 4^{2016} + 4^n$ là số chính phương

Bài 44: a) Cho ba số hữu tỉ a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$. Chứng minh rằng $A = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ là số hữu tỉ.

b) Cho ba số hữu tỉ x, y, z đôi một phân biệt. Chứng minh rằng:

$$B = \sqrt{\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2}} \text{ là số hữu tỉ.}$$

Bài 45: Tìm số thực x để 3 số $x - \sqrt{3}; x^2 + 2\sqrt{3}; x - \frac{2}{x}$ là số nguyên

Bài 46: Tìm x nguyên dương để $4x^3 + 14x^2 + 9x - 6$ là số chính phương

Bài 47: Cho $a, b, c \in \mathbb{Q}$; a, b, c đôi một khác nhau.

Chứng minh rằng $\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}$ bằng bình phương của một số

Bài 48: Tìm số tự nhiên n để: $A = n^{2012} + n^{2002} + 1$ là số nguyên tố.

Bài 49: Tìm tất cả các số nguyên x sao cho giá trị của biểu thức $x^2 + x + 6$ là một số chính phương

Bài 50: Cho $A = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ (với $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$). Chứng minh A không phải là số chính phương.

Bài 51: Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $n^2 + 17$ là một số chính phương.

Bài 52: Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{70 - \sqrt{4901}} + \sqrt[3]{70 + \sqrt{4901}}$ là một số nguyên.

Bài 53: Cho p là một số nguyên tố thỏa mãn $p = a^3 - b^3$ với a, b là hai số nguyên dương phân biệt. Chứng minh rằng: Nếu lấy $4p$ chia cho 3 và loại bỏ phần dư thì nhận được số là bình phương của một số nguyên lẻ.

B. Lời giải

Bài 1: Tìm các số nguyên k để $k^4 - 8k^3 + 23k^2 - 26k + 10$ là số chính phương.

Lời giải

$$\text{Đặt } M = k^4 - 8k^3 + 23k^2 - 26k + 10$$

$$M = (k^4 - 2k^2 + 1) - 8k(k^2 - 2k + 1) + 9k^2 - 18k + 9$$

$$M = (k^2 - 1)^2 - 8k(k - 1)^2 + 9(k - 1)^2 = (k - 1)^2 \cdot [(k - 3)^2 + 1]$$

M là số chính phương khi và chỉ khi $(k - 1)^2 = 0$ hoặc $(k - 3)^2 + 1$ là số chính phương.

$$\text{TH 1: } (k - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow k = 1.$$

$$\text{TH 2: } (k - 3)^2 + 1 \text{ là số chính phương.}$$

$$\text{Đặt } (k - 3)^2 + 1 = m^2 \quad (m \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow m^2 - (k - 3)^2 = 1 \Leftrightarrow (m - k + 3)(m + k - 3) = 1$$

$$\text{Vì } m, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow m - k + 3 \in \mathbb{Z}, m + k - 3 \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Nên } \begin{cases} m - k + 3 = 1 \\ m + k - 3 = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} m - k + 3 = -1 \\ m + k - 3 = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow k = 3$$

Vậy $k = 1$ hoặc $k = 3$ thì $k^4 - 8k^3 + 23k^2 - 26k + 10$ là số chính phương

Bài 2: Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn:

$$\frac{a - b\sqrt{2}}{b - c\sqrt{2}} \text{ là số hữu tỉ và } a^2 + b^2 + c^2 \text{ là số nguyên tố}$$

Giải:

$$\text{Đặt } \frac{a - b\sqrt{2}}{b - c\sqrt{2}} = \frac{x}{y} \quad (x, y \in \mathbb{Z}, xy \neq 0) \Rightarrow ay - bx = (by - cx)\sqrt{2} \quad (*)$$

$$\text{Vì } a, b, c, x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow ay - bx \in \mathbb{Z} \Rightarrow (by - cx)\sqrt{2} \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Mà } \sqrt{2} \notin \mathbb{I} \text{ nên từ } (*) \Rightarrow \begin{cases} ay - bx = 0 \\ by - cx = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ay = bx \\ cx = by \end{cases}$$

$$\Rightarrow acxy = b^2xy \Rightarrow ac = b^2 \text{ (vì } xy \neq 0)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + c)^2 - 2ac + b^2 = (a + c)^2 - b^2 = (a + c - b)(a + c + b)$$

$$\text{Vì } a^2 + b^2 + c^2 \text{ là số nguyên tố và } a + c - b < a + c + b$$

$$\Rightarrow a + c - b = 1 \Rightarrow a + b + c = a^2 + b^2 + c^2 \quad (1)$$

$$\text{Mà } a, b, c \text{ nguyên dương nên } a \leq a^2, b \leq b^2, c \leq c^2 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow a = b = c = 1, \text{ thử lại: Thỏa mãn, kết luận}$$

Bài 3: Cho tập hợp A gồm 16 số nguyên dương đầu tiên. Hãy tìm số nguyên dương k nhỏ nhất có tính chất: Trong mỗi tập con gồm k phần tử của A đều tồn tại hai số phân biệt a, b sao cho $a^2 + b^2$ là số nguyên tố.

Giải:

2) Ta xét tập T gồm các số chẵn thuộc tập A . Khi đó $|T| = 8$ và với a, b thuộc T ta có $a^2 + b^2$, do đó $k \geq 9$

Xét các cặp số sau:

$$A = 1; 4 \cup 3; 2 \cup 5; 16 \cup 6; 15 \cup 7; 12 \cup 8; 13 \cup 9; 10 \cup 11; 14$$

Ta thấy tổng bình phương của mỗi cặp số trên đều là số nguyên tố

Xét T là một tập con của A và $|T| = 9$, khi đó theo nguyên lý Dirichlet T sẽ chứa ít nhất 1 cặp nói trên.

$$\text{Vậy } k_{\min} = 9$$

Bài 4: Xác định số điện thoại của THCS X thành phố Thủ Dầu Một, biết số đó dạng $\overline{82xxyy}$ với $\overline{xxyy}$ là số chính phương.

Giải

a) Ta có: $\overline{xxyy} = 11x0y$ là số chính phương nên

$$\overline{x0y} : 11 \Leftrightarrow 100x + y : 11 \Leftrightarrow 99x + x + y : 11$$

$$\Leftrightarrow x + y : 11 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 11 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ x + y = 11 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \overline{xxyy} = 11x0y = 11(99x + x + y) = 11(99x + 11) = 11^2(9x + 1)$$

$\Rightarrow 9x+1$ là số chính phương.

$\Rightarrow x=7 \Rightarrow y=4$

Vậy $\overline{xyxy} = 7744$; $\overline{xyxy} = 0000$

Bài 5: Tìm tất cả các cặp số $(a;b)$ nguyên dương thỏa mãn hai điều kiện:

1) a, b đều khác 1 và ước số chung lớn nhất của a, b là 1.

2) Số $N = ab(ab+1)(2ab+1)$ có đúng 16 ước số nguyên dương..

Giải:

2. Ta có: $N = ab(ab+1)(2ab+1)$ chia hết cho các số: 1; a ; $b(ab+1)(2ab+1)$; b ; $a(ab+1)(2ab+1)$; $ab+1$; $ab(2ab+1)$; $2ab+1$; $ab(ab+1)$; N ; ab ; $(ab+1)(2ab+1)$; $b(ab+1)$; $a(2ab+1)$; $a(ab+1)$; $b(2ab+1)$ có 16 ước dương. Nên để N chỉ có đúng 16 ước dương thì a ; b ; $ab+1$; $2ab+1$ là số nguyên tố. Do $a, b > 1 \Rightarrow ab+1 > 2$

Nếu a, b cùng lẻ thì $ab+1$ chia hết cho 2 nên là hợp số (vô lý). Do đó không mất tính tổng quát, giả sử a chẵn b lẻ $\Rightarrow a=2$.

Ta cũng có nếu b không chia hết cho 3 thì $2ab+1=4b+1$ và $ab+1=2b+1$ chia hết cho 3 là hợp số (vô lý) $\Rightarrow b=3$.

Vậy $a=2$; $b=3$.

Bài 6:

Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên dương m, n, p với p nguyên tố thỏa mãn

$$m^{2019} + n^{2019} = p^{2018}$$

Giải:

Giả sử tồn tại bộ số (m, n, p) thỏa mãn yêu cầu đề bài. Dễ thấy $0 < m, n < p$. Phương trình đã cho có thể được viết lại thành

$$(m+n)A = p^{2018}, \quad (1)$$

$$\text{trong đó } A = m^{2018} - m^{2017}n + m^{2017}n^2 - \dots - mn^{2017} + n^{2018}$$

Nếu A không chia hết cho p thì từ (1), ta có $A=1$ và

$$m+n = p^{2018} = m^{2019} + n^{2019}.$$

Từ đó dễ thấy $m=n=1$ và $p^{2018}=2$, mâu thuẫn. Vậy A chia hết cho p .

Do $m+n > 1$ nên từ (1) suy ra $m+n$ chia hết cho p . Khi đó, ta có

$$A \equiv 2019m^{2018} \pmod{p}.$$

Do A chia hết cho p và $0 < m < p$ nên từ kết quả trên, ta suy ra 2019 chia hết cho p , hay $p=2019$. Từ đây, dễ thấy m và n khác tính chẵn lẻ, hay $m \neq n$.

Bây giờ, ta viết lại phương trình đã cho dưới dạng $(m^3)^{673} + (n^3)^{673} = 2019^{2018}$,

hay $(m+n)(m^2-mn+n^2)=2019^{2018}$,

trong đó, $B=(m^3)^{672}-(m^3)^{671}(n^3)+\dots-(m^3)(n^3)^{671}+(n^3)^{672}$. Do $m \neq n$ nên $m^2-mn+n^2=(m-n)^2+mn>1$, từ đó ta có m^2-mn+n^2 chia hết cho 2019. Tuy nhiên, điều này không thể xảy ra do

$$m^2-mn+n^2 \equiv 3n^2 \pmod{2019}$$

$$m^2-mn+n^2 \not\equiv 0 \pmod{2019}.$$

Vậy không tồn tại các số m, n, p thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài 7: Tìm các số nguyên dương n sao cho n^4+n^3+1 là số chính phương.

Giải: Đặt $A=n^4+n^3+1$.

Với $n=1$ thì $A=3$ không thỏa mãn.

Với $n \geq 2$ ta có $4A=4n^4+4n^3+4$.

Xét $4A-(2n^2+n-1)^2=3n^2+2n+3>0 \Rightarrow 4A>(2n^2+n-1)^2$.

Xét $4A-(2n^2+n)^2=4-n^2 \leq 0 \Rightarrow 4A \leq (2n^2+n)^2$.

Vậy $4A=(2n^2+n)^2 \Rightarrow n=2$.

Với $n=2$ thì $A=25$ thỏa mãn bài toán.

Bài 8: Tìm tất cả các bộ ba số nguyên tố a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn điều kiện

$$20abc < 30(ab+bc+ca) < 21abc$$

Giải:

+ Từ giả thiết suy ra: $\frac{2}{3} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{7}{10}$. Không giảm tính tổng quát giả sử $a > b > c > 1$. Suy ra

$$\frac{2}{3} < \frac{3}{c} \Rightarrow 2c < 9$$

Do đó $c \in \{2; 3\}$

+ Với $c=2$ suy ra $\frac{2}{3} < \frac{1}{2} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{7}{10} \Rightarrow \frac{1}{6} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{1}{5}$ (1) $\Rightarrow \frac{1}{6} < \frac{2}{b}$ và $\frac{1}{b} < \frac{1}{5}$

Do đó $b \in \{7; 11\}$

+ Với $b=7$ từ (1) suy ra $\frac{1}{42} < \frac{1}{a} < \frac{2}{35} \Rightarrow a \in \{19; 23; 29; 31; 37; 41\}$

+ Với $b=11$ từ (1) suy ra $\frac{5}{66} < \frac{1}{a} < \frac{6}{55} \Rightarrow a=13$ (do $a > b$)

+ Với $c=3$ từ giả thiết suy ra $\frac{1}{3} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{11}{30}$ (*) $\Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{2}{b} \Rightarrow b < 6 \Rightarrow b=5$ (do $b > c$)

Thay $b=5$ vào (*) được $6 < a < \frac{15}{2} \Rightarrow a=7$.

Vậy có 8 bộ ba $(a; b; c)$ thỏa mãn:

$(19; 7; 2), (23; 7; 2), (29; 7; 2), (31; 7; 2), (37; 7; 2), (41; 7; 2), (13; 11; 2), (7; 5; 3)$ và các hoán vị của nó.

Bài 9: Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $n^2 - 14n - 256$ là một số chính phương.

Lời giải

Đặt $n^2 - 14n - 256 = k^2$ ($k \in \mathbb{N}$)

$$\Rightarrow (n-7)^2 - k^2 = 305$$

$$\Leftrightarrow (n-7-k)(n-7+k) = 305$$

Mà $305 = 305.1 = (-305).(-1) = 5.61 = (-5).(-61)$

và $(n-7-k) \leq (n-7+k)$ nên xét các trường hợp:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} n-7-k=1 \\ n-7+k=305 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} n-7-k=-305 \\ n-7+k=-1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} n-7-k=5 \\ n-7+k=61 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} n-7-k=-61 \\ n-7+k=-5 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} n=160 \\ k=152 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} n=-146 \\ k=152 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} n=40 \\ k=28 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} n=-26 \\ k=28 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Vì n và k là các số tự nhiên nên ta chọn $n = 160$ hoặc $n = 40$.

Bài 10:

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } n^4 + 4 &= n^4 + 4 + 4n^2 - 4n^2 \\ &= (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 \\ &= (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2) \end{aligned}$$

Vì n là số tự nhiên nên $n^2 + 2n + 2 > 1$ nên

$$n^2 - 2n + 2 = 1$$

$$\Leftrightarrow n = 1$$

Bài 11: Cho n là số tự nhiên lớn hơn 1. Chứng minh rằng $n^4 + 4^n$ là hợp số.

Lời giải

n là số tự nhiên lớn hơn 1 nên n có dạng $n = 2k$ hoặc $n = 2k + 1$, với k là số tự nhiên lớn hơn 0.

- Với $n = 2k$, ta có $n^4 + 4^n = (2k)^4 + 4^{2k}$ lớn hơn 2 và chia hết cho 2. Do đó $n^4 + 4^n$ là hợp số.

-Với $n = 2k+1$, ta có

$$\begin{aligned}n^4 + 4^n &= n^4 + 4^{2k} \cdot 4 = n^4 + (2 \cdot 4^k)^2 = (n^2 + 2 \cdot 4^k)^2 - (2 \cdot n \cdot 2^k)^2 \\&= (n^2 + 2 \cdot 4^k - 2 \cdot n \cdot 2^k)(n^2 + 2 \cdot 4^k + 2 \cdot n \cdot 2^k) \\&= ((n - 2^k)^2 + 4^k)((n + 2^k)^2 + 4^k)\end{aligned}$$

Mỗi thừa số đều lớn hơn hoặc bằng 2. Vậy $n^4 + 4^n$ là hợp số

Bài 12: Tìm x nguyên dương để $4x^3 + 14x^2 + 9x - 6$ là số chính phương

Lời giải

Vì $4x^3 + 14x^2 + 9x - 6$ là số chính phương, nên ta có $4x^3 + 14x^2 + 9x - 6 = k^2$ với $k \in \mathbb{N}$

Ta có $4x^3 + 14x^2 + 9x - 6 = \dots = (x+2)(4x^2 + 6x - 3)$ nên ta có $(x+2)(4x^2 + 6x - 3) = k^2$

Đặt $(x+2, 4x^2 + 6x - 3) = d$ với $d \in \mathbb{N}^*$

Ta có $x+2 : d \Rightarrow (x+2)(4x-2) : d \Rightarrow 4x+6x-4 : d$

Ta lại có $4x^2 + 6x - 3 : d \Rightarrow (4x^2 + 6x - 3) - (4x^2 + 6x - 4) = 1 : d \Rightarrow d = 1$

Vậy $(x+2, 4x^2 + 6x - 3) = 1$

mà $(x+2)(4x^2 + 6x - 3) = k^2$ nên ta có

$x+2$ và $4x^2 + 6x - 3$ là số chính phương $\Rightarrow x+2 = a^2$ và $4x^2 + 6x - 3 = b^2$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$

Vì $x > 0$ nên ta có $4x^2 < b^2 < 4x^2 + 12x + 9 \Leftrightarrow (2x)^2 < b^2 < (2x+3)^2$

Vì b lẻ nên $b^2 = (2x+1)^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 6x - 3 = 4x^2 + 4x + 1 \Leftrightarrow x = 2$

Với $x=2$ ta có $4x^3 + 14x^2 + 9x - 6 = 100 = 10^2$ là số chính phương

Bài 13: cho dãy số $n, n+1, n+2, \dots, 2n$ với n nguyên dương. Chứng minh trong dãy có ít nhất một lũy thừa bậc 2 của 1 số tự nhiên.

Lời giải

-Nếu n là lũy thừa bậc 2 của 1 số tự nhiên bài toán chứng minh xong

-Nếu n không là lũy thừa bậc 2 của 1 số tự nhiên, ta luôn tìm được 1 số nguyên dương k sao cho $k^2 < n < (k+1)^2$. Vì n nguyên dương và $n > k^2 \Rightarrow n \geq k^2 + 1$, vậy ta có:

$$2n - (k+1)^2 \geq 2(k^2 + 1) - (k+1)^2 = \dots = k^2 - 2k + 1 = (k-1)^2 \geq 0$$

Vậy mọi k nguyên dương, nên ta có $k^2 < n < (k+1)^2 \leq 2n$

Vậy trong dãy luôn có ít nhất một lũy thừa bậc 2 của 1 số tự nhiên.

Bài 14: Tìm $n \in \mathbb{N}^*$ sao cho: $n^4 + n^3 + 1$ là số chính phương.

Lời giải

Giả sử $n^4 + n^3 + 1$ là số chính phương vì $n^4 + n^3 + 1 > n^4 = (n^2)^2$

$$\rightarrow n^4 + n^3 + 1 = (n^2 + K)^2 = n^4 + 2Kn^2 + K^2 \quad (K \in \mathbb{N}^*)$$

$$\rightarrow n^3 - 2Kn^2 = K^2 - 1 \rightarrow n^2(n - 2K) = K^2 - 1 \geq 0$$

$$\text{Mà } K^2 - 1 : n^2 \rightarrow K^2 = 1 \text{ hoặc } n^2 \leq K^2 - 1$$

$$\text{Nếu } K^2 = 1 \rightarrow K = 1 \rightarrow n^2(n - 2) = 0 \rightarrow n = 2$$

$$\text{Thử lại } 2^4 + 2^3 + 1 = 5^2 \quad (\text{thỏa mãn})$$

$$\text{Khi } K \neq 1 \rightarrow K^2 > K^2 - 1 \geq n^2 \rightarrow K > n$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$\rightarrow n - 2k < 0$ mâu thuẫn với điều kiện $n^2(n - 2K) = K^2 - 1 \geq 0$

Vậy $n = 2$

Bài 15: Tìm các số tự nhiên n sao cho $A = n^2 + 2n + 8$ là số chính phương

Lời giải

Đặt $n^2 + 2n + 8 = a^2 \Leftrightarrow (a - n - 1) \cdot (a + n + 1) = 7$ với a nguyên dương

Vì $a + n + 1 > a - n - 1$ nên $\begin{cases} a + n + 1 = 7 \\ a - n - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ n = 2 \end{cases}$

Bài 16: Tìm tất cả các bộ số nguyên dương $(x; y; z)$ sao cho $\frac{x + y\sqrt{2019}}{y + z\sqrt{2019}}$ là số hữu tỉ và $x^2 + y^2 + z^2$ là số nguyên tố.

Lời giải

Ta có: $\frac{x + y\sqrt{2019}}{y + z\sqrt{2019}} = \frac{m}{n}$ $m, n \in \mathbb{N}^*, (m, n) = 1$

$\Rightarrow mx - my = (mz - my)\sqrt{2019} \Rightarrow \begin{cases} nx - my = 0 \\ mz - my = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{z}{y} = \frac{m}{n} \Rightarrow xz = y^2$

$x^2 + y^2 + z^2 = (x + z)^2 - 2xz + y^2 = (x + z)^2 - y^2 = (x + y + z)(x + z - y)$

Vì $x + y + z$ là số nguyên lớn hơn 1 và $x^2 + y^2 + z^2$ là số nguyên tố nên

$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z \\ x - y + z = 1 \end{cases}$. Từ đó suy ra $x = y = z = 1$. Thử lại, $\frac{x + y\sqrt{2019}}{y + z\sqrt{2019}} = 1$ và

$x^2 + y^2 + z^2 = 3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy $x, y, z = 1; 1; 1$

Bài 17: Cho A là số chính phương gồm 4 chữ số thỏa mãn nếu ta cộng thêm vào mỗi chữ số của A thêm 1 đơn vị thì ta được số chính phương B cũng có 4 chữ số. Tìm hai số $A; B$

Lời giải

Đặt $A = m^2; B = n^2$ với m, n là các số nguyên dương ($m < n$)

Khi đó

$A + 1111 = B$

$\Leftrightarrow m^2 + 1111 = n^2 \Leftrightarrow m^2 + 1111 = n^2$

$\Leftrightarrow (n - m)(n + m) = 1111 = 11 \cdot 101 = 1 \cdot 1111$

do $m, n \in \mathbb{N}^*; m - n; m + n \in \mathbb{N}^*; n + m > n - m \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} n - m = 11 \\ n + m = 101 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 56 \\ m = 45 \end{cases} (N) \\ \begin{cases} n - m = 1 \\ n + m = 1111 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 556 \\ m = 555 \end{cases} (L) \end{cases}$

Khi đó $A = 45^2 = 2025; B = 56^2 = 3036$

Bài 18: Tìm số nguyên tố p thỏa mãn $p^3 - 4p + 9$ là số chính phương.

Lời giải

Đặt $p^3 - 4p + 9 = t^2$ ($t \in \mathbb{N}$)

Biến đổi thành $p(p^2 - 4) = (t-3)(t+3)$ (1) $\Rightarrow p|(t-3) \vee p|(t+3)$

Trường hợp 1: Nếu $p|(t-3)$

Đặt $t-3 = pk$ ($k \in \mathbb{N}$)

Khi đó thay vào (1) ta có: $p(p^2 - 4) = pk(pk + 6) \Leftrightarrow p^2 - pk^2 - 6k - 4 = 0$

Coi đây là phương trình bậc 2 ẩn p , điều kiện cần để tồn tại nghiệm của PT là:

$\Delta = k^4 + 4(6k + 4) = k^4 + 24k + 16$ là số chính phương

Mặt khác với $k > 3$ ta dễ chứng minh được $(k^2)^2 < k^4 + 24k + 16 < (k^2 + 4)^2$

Suy ra các trường hợp:

$$k^4 + 24k + 16 = (k^2 + 1)^2 \Leftrightarrow 2k^2 - 24k - 15 = 0 \text{ (loại)}$$

$$k^4 + 24k + 16 = (k^2 + 2)^2 \Leftrightarrow k^2 - 6k - 3 = 0 \text{ (loại)}$$

$$k^4 + 24k + 16 = (k^2 + 3)^2 \Leftrightarrow 6k^2 - 24k - 7 = 0 \text{ (loại)}$$

Do đó phải có $k \leq 3$. Thử trực tiếp được $k = 3$ thỏa mãn

Từ đó ta có $t = 36; p = 11$

Bài 19: Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $9^n + 11$ là tích của k ($k \in \mathbb{N}, k \geq 2$) số tự nhiên liên tiếp

Lời giải

Trong 3 số tự nhiên liên tiếp luôn có ít nhất một số chia hết cho 3, mà $9^n + 11$ không chia hết cho 3 nên $9^n + 11$ không thể là tích của $k \geq 3$ số tự nhiên liên tiếp. Từ đó, theo yêu cầu đề bài, suy ra $9^n + 11$ là tích của hai số tự nhiên liên tiếp.

Đặt $9^n + 11 = a(a+1)$ với $a \in \mathbb{N}^*$ thì ta có $a(a+1) \geq 20$ (do $9^n \geq 9$), suy ra $a \geq 4$.

$$\text{Từ đây, ta có: } a(a+1) - 11 = (a-2)^2 + 5(a-3) > (a-2)^2. \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác, ta có: } a(a+1) - 11 < a(a+1) < (a+1)^2 \quad (2)$$

Do $a(a+1) - 11 = 9^n = (3^n)^2$ là số chính phương nên kết hợp với các đánh giá (1) và (2), ta suy ra $a(a+1) - 11 \in \{(a-1)^2, a^2\}$. Bằng cách xét trường hợp cụ thể, ta tìm được $a \in \{4, 11\}$. Thử lại ta có $a = 4$ (tương ứng $n = 1$) thỏa mãn yêu cầu. Vậy có duy nhất một giá trị n thỏa mãn yêu cầu đề bài là $n = 1$

Bài 20: Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $C = 2019^n + 2020$ là số chính phương

Lời giải

Với mọi số tự nhiên a thì a^2 khi chia cho 8 chỉ có các số dư là 0; 1; 4.

Số 2019 chia 8 dư 3; 2020 chia 8 dư 4. Suy ra $2019^n \equiv 3^n \pmod{8}$.

- Nếu n chẵn thì $n = 2k, k \in \mathbb{N} \Rightarrow 2019^n \equiv 3^{2k} \equiv 1 \pmod{8}$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\Rightarrow C \equiv 5 \pmod{8}$$

$\Rightarrow C$ không thể là số chính phương.

- Nếu n lẻ thì $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N} \Rightarrow 2019^n \equiv 3^{2k+1} \equiv 3 \cdot 3^{2k} \equiv 3 \pmod{8}$

$$\Rightarrow C \equiv 7 \pmod{8}$$

$\Rightarrow C$ không thể là số chính phương.

KL: Không tồn tại n thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 21: Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng nếu $2n + 1$ và $3n + 1$ là các số chính phương thì n chia hết cho 40.

Lời giải

Giả sử $2n + 1 = m^2, 3n + 1 = k^2 \quad (m, k \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow m^2$ là số lẻ $\Rightarrow m$ là số lẻ.

$\Rightarrow 2n = m^2 - 1 = (m - 1)(m + 1) : 4$, Suy ra : n chẵn, k lẻ

Vì k là số lẻ nên $k - 1, k + 1$ là hai số chẵn liên tiếp và $(3, 8) = 1$ nên

$$\text{Từ } 3n + 1 = k^2 \Rightarrow 3n = k^2 - 1 = (k - 1)(k + 1) : 8 \Rightarrow n : 8 \quad (1)$$

Khi chia một số chính phương cho 5 thì số dư chỉ có thể là 0 ; 1 ; 4. Ta xét các trường hợp:

Nếu n chia cho 5 dư 1 thì $2n + 1$ chia cho 5 dư 3. (vô lí)

Nếu n chia cho 5 dư 2 thì $3n + 1$ chia cho 5 dư 2. (vô lí)

Nếu n chia cho 5 dư 3 thì $2n + 1$ chia cho 5 dư 2. (vô lí)

Nếu n chia cho 5 dư 4 thì $3n + 1$ chia cho 5 dư 3. (vô lí)

Vậy $n : 5 \quad (2)$

Vì $(5, 8) = 1$ nên từ (1) và (2) suy ra n chia hết cho 40.

Bài 22: Tìm các số nguyên tố p, q thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

i) $p^2q + p$ chia hết cho $p^2 + q$

ii) $pq^2 + q$ chia hết cho $q^2 - p$

Lời giải

$$p^2q + p : p^2 + q \Rightarrow q(p^2 + q) - (p^2q + p) = q^2 - p : p^2 + q.$$

$$pq^2 + q : q^2 - p \Rightarrow (pq^2 + q) - p(q^2 - p) = p^2 + q : q^2 - p.$$

$$q^2 - p = -(p^2 + q) \Leftrightarrow q^2 + q + p^2 - p = 0(VN).$$

$$q^2 - p = p^2 + q \Leftrightarrow (q + p)(q - p - 1) = 0 \Leftrightarrow q - p - 1 = 0 \Leftrightarrow q = p + 1.$$

Mà p, q là hai số nguyên tố nên $p = 2, q = 3$ (thỏa mãn bài toán)

Bài 23: Chứng minh rằng số có dạng $A = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ không phải là số chính phương, trong đó $n \in \mathbb{N}, n > 1$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2 \\ &= n^2 [n^2(n - 1)(n + 1) + 2(n + 1)] \\ &= n^2 [(n + 1)(n^3 - n^2 + 2)] \\ &= n^2(n + 1)[(n^3 + 1) - (n^2 - 1)] \end{aligned}$$

$$= n^2(n+1)^2(n^2-2n+2)$$

Với $n \in \mathbb{N}; n > 1$ thì $n^2 - 2n + 2 = (n-1)^2 + 1 > (n-1)^2$

Và $n^2 - 2n + 2 = n^2 - 2(n-1) < n^2$

Vậy $(n-1)^2 < n^2 - 2n + 2 < n^2$ nên $n^2 - 2n + 2$ không là số chính phương.

Do đó A không là số chính phương với $n \in \mathbb{N}; n > 1$.

Bài 24:

a) Chứng minh rằng nếu n là số nguyên thì $\frac{n^5 + 29n}{30}$ cũng là số nguyên.

b) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(x; y)$ sao cho $2(x^2 + y^2 - 3x + 2y) - 1$ và $5(x^2 + y^2 + 4x + 2y + 3)$ đều là số chính phương.

Lời giải

a) (0,75 điểm)

$$+ \text{Ta có } \frac{n^5 + 29n}{30} = \frac{n^5 - n}{30} + n = \frac{n(n^4 - 1)}{30} + n = \frac{(n-1)n(n+1)(n^2+1)}{30} + n.$$

+ Với n nguyên thì $n-1, n, n+1$ là ba số nguyên liên tiếp nên trong ba số này phải có số chia hết cho 2 và có số chia hết cho 3, suy ra $(n-1)n(n+1) : 6$, do đó $n^5 - n : 6$.

+ Nếu $n : 5$ thì $(n^5 - n) : 5$; nếu n chia cho 5 dư một trong các số 1, 2, 3, 4 thì n^4 chia cho 5 dư 1, suy ra $n(n^4 - 1) : 5$.

+ Vì $(5; 6) = 1$ nên suy ra $(n^5 - n) : 30$, theo đó $\frac{n^5 + 29n}{30} = \frac{n^5 - n}{30} + n$ là số nguyên.

b) (0,75 điểm)

+ Giả sử tồn tại cặp số tự nhiên $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu. Khi đó $a, b \in \mathbb{N}^*$ mà

$$\begin{cases} 2(x^2 + y^2 - 3x + 2y) - 1 = a^2 \\ 5(x^2 + y^2 + 4x + 2y + 3) = b^2 \end{cases}, \text{ suy ra } a^2 + b^2 = 7[(x+1)^2 + (y+1)^2]$$

Nói cách khác phương trình (1): $A^2 + B^2 = 7(X^2 + Y^2)$ có nghiệm $(X; Y; A; B)$ với

$X, Y \in \mathbb{N}^*$ và $A, B \in \mathbb{N}$. Ta coi $(X; Y; A; B)$ là bộ nghiệm của (1) thỏa mãn điều kiện $X + Y$ nhỏ nhất.

+ Từ (1) có $(A^2 + B^2) : 7$. Nhận thấy một số chính phương chia cho 7 chỉ có thể cho số dư là 0.1.2.4 nên $(A^2 + B^2) : 7$ khi và chỉ khi $A : 7$ và $B : 7$, dẫn tới biểu diễn $A = 7A_1$,

$B = 7B_1$ với $A_1, B_1 \in \mathbb{N}^*$. Khi đó (1) trở thành $X^2 + Y^2 = 7(A_1^2 + B_1^2)$.

Lập luận tương tự dẫn đến $X = 7X_1, Y = 7Y_1$ với $X_1, Y_1 \in \mathbb{N}^*$.

Bài 25: Cho $A = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ (với $n \in \mathbb{N}, n > 1$). Chứng minh A không phải là số chính phương.

Lời giải

$$n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2 = n^2(n+1)^2(n^2 - 2n + 2)$$

Với $n \in \mathbb{N}, n > 1$ thì $n^2 - 2n + 2 = (n-1)^2 + 1 > (n-1)^2$

$$\text{và } n^2 - 2n + 2 = n^2 - 2(n-1) < n^2$$

Vậy $(n-1)^2 < n^2 - 2n + 2 < n^2 \Rightarrow n^2 - 2n + 2$ không là số chính phương $\Rightarrow$ đpcm.

Bài 26: Tìm tất cả các số chính phương gồm 4 chữ số biết rằng khi ta thêm 1 đơn vị vào chữ số hàng nghìn, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng trăm, thêm 5 đơn vị vào chữ số hàng chục, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng đơn vị, ta vẫn được một số chính phương.

Lời giải

Gọi $\overline{abcd}$ là số phải tìm ($a, b, c, d \in \mathbb{N}; 0 \leq a, b, c, d \leq 9; a \neq 0$)

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overline{abcd} = k^2 \\ (a+1)(b+3)(c+5)(d+3) = m^2 \end{cases} \text{ với } k, m \in \mathbb{N}; 31 < k < m < 100$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{abcd} = k^2 \\ \overline{abcd} + 1353 = m^2 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } m^2 - k^2 = 1353 \Rightarrow (m+k)(m-k) = 123 \cdot 11 = 41 \cdot 33 \quad (k+m < 200)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m+k=123 \\ m-k=11 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} m+k=41 \\ m-k=33 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m=67 \\ k=56 \end{cases} \text{ hoặc } \Leftrightarrow \begin{cases} m=37 \\ k=4 \end{cases} \text{ (loại)}$$

Kết luận đúng $\overline{abcd} = 3136$

Bài 27: Với mỗi số nguyên dương $n \leq 2008$, đặt $S_n = a^n + b^n$, với $a = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$; $b = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

a) Chứng minh rằng với $n \geq 1$ ta có $S_{n+2} = (a+b)(a^{n+1} + b^{n+1}) - ab(a^n + b^n)$

b) Chứng minh rằng với mọi n thỏa mãn điều kiện đề bài, S_n là số nguyên.

c) Chứng minh $S_n - 2 = \left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^n - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^n \right]^2$. Tìm tất cả các số n để $S_n - 2$ là số

chính phương.

Lời giải

$$\text{a) Với } n \geq 1 \text{ thì } S_{n+2} = a^{n+2} + b^{n+2} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: } (a+b)(a^{n+1} + b^{n+1}) - ab(a^n + b^n) = a^{n+2} + b^{n+2} \quad (2)$$

Từ (1); (2) ta có điều phải chứng minh

$$\text{b) Ta có: } S_1 = 3; S_2 = 7$$

Do $a+b=3$; $ab=1$ nên theo 1 ta có: với $n \geq 1$ thì $S_{n+2} = 3S_{n+1} - S_n$

Do $S_1, S_2 \in \mathbb{Z}$ nên $S_3 \in \mathbb{Z}$; do $S_2, S_3 \in \mathbb{Z}$ nên $S_4 \in \mathbb{Z}$

Tiếp tục quá trình trên ta được $S_5; S_6; \dots; S_{2008} \in \mathbb{Z}$

$$\text{c) Ta có } S_n - 2 = \left[\left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right)^2 \right]^n + \left[\left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 \right]^n - 2$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^n \right]^2 + \left[\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^n \right]^2 - 2 \left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^n \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^n \right] \\
&= \left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^n - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^n \right]^2 \quad (\text{đpcm})
\end{aligned}$$

Đặt $a_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$; $b_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow a_1 + b_1 = \sqrt{5}$; $a_1 b_1 = 1$

Xét $U_n = a_1^n + b_1^n$

Với $n \geq 1$ thì $U_{n+2} = (a_1 + b_1)(a_1^{n+1} + b_1^{n+1}) - a_1 b_1 (a_1^n + b_1^n) \Rightarrow U_{n+2} = \sqrt{5} U_{n+1} - U_n$

Ta có $T_1 = 1 \in \mathbf{Z}$; $T_2 = \sqrt{5} \notin \mathbf{Z}$; $T_3 = 4 \in \mathbf{Z}$; $T_4 = 3\sqrt{5} \notin \mathbf{Z}$;...

Tiếp tục quá trình trên ta được T_n nguyên $\Leftrightarrow n$ lẻ

Vậy $S_n - 2$ là số chính phương $\Leftrightarrow n = 2k+1$ với $k \in \mathbf{Z}$ và $0 \leq k \leq 1003$.

Bài 28: Tìm số tự nhiên n để $n^4 + 4$ là số nguyên tố.

Lời giải

$$\begin{aligned}
\text{Ta có } n^4 + 4 &= n^4 + 4 + 4n^2 - 4n^2 \\
&= (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 \\
&= (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)
\end{aligned}$$

Vì n là số tự nhiên nên $n^2 + 2n + 2 > 1$ nên $n^2 - 2n + 2 = 1 \Leftrightarrow n = 1$

Bài 29: Cho $x = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$. Chứng minh rằng: $P = x^3 - 3x^2 - 3x + 3$ là một số chính phương.

Lời giải

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } x = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} &= \frac{\left[1 + \sqrt[3]{2} + (\sqrt[3]{2})^2 \right] \cdot (\sqrt[3]{2} - 1)}{\sqrt[3]{2} - 1} = \frac{(\sqrt[3]{2})^3 - 1}{\sqrt[3]{2} - 1} = \frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1} \\
\Leftrightarrow x(\sqrt[3]{2} - 1) &= 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2} \cdot x - x = 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2} \cdot x = x + 1 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{2} \cdot x)^3 = (x + 1)^3 \\
\Leftrightarrow 2x^3 &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Leftrightarrow P = x^3 - 3x^2 - 3x + 3 = 4 = 2^2.
\end{aligned}$$

Vậy P là số chính phương.

Bài 30: a) Chứng minh rằng mọi số nguyên tố p lớn hơn 3 đều viết được dưới dạng $p = 6m \pm 1$, với m là số tự nhiên.

b) Tìm số nguyên tố p sao cho $8p^2 + 1$ là số nguyên tố.

Lời giải

a) Mọi p nguyên tố lớn hơn 3, p không chia hết cho 2 và 3 nên $\begin{cases} p \neq 6m + 3 \\ p \neq 6m + 2 \\ p \neq 6m \end{cases}$, từ đó $\begin{cases} p = 6m + 5 \\ p = 6m + 1 \end{cases}$

hay $p = 6m \pm 1$.

b) Xét $p > 3$ thay $p = 6m \pm 1$ vào biểu thức $A = 8p^2 + 1$ thấy $3 < A : 3$ (loại)

thay trực tiếp $p = 3$, $A = 73$ (nhận)

$p = 2$, $A = 33$ (loại).

Bài 31: Chứng minh rằng nếu n là số tự nhiên sao cho $n+1$ và $2n+1$ đều là các số chính phương thì n là bội số của 24.

Lời giải

* Chứng minh n chia hết cho 3:

- Nếu $n = 3k+1$ ($k \in \mathbb{N}$) thì $n+1 = 3k+2$, không là số chính phương (loại).

- Nếu $n = 3k+2$ ($k \in \mathbb{N}$) thì $2n+1 = 6k+5 = 3k(2k+1)+2$, không là số chính phương (loại).

Vậy $n = 3k$ ($k \in \mathbb{N}$), do đó $n \vdots 3$ (1)

* Chứng minh n chia hết cho 8:

Vì $2n+1$ là số chính phương lẻ nên chia 8 dư 1, nên $2n$ chia hết cho 8, n chia hết cho 4, $n+1$ là số chính phương lẻ nên chia 8 dư 1, do đó n chia hết cho 8 (2)

Từ (1) và (2) suy ra n chia hết cho 3, 8 mà $(3, 8) = 1$ nên $n \vdots 24$.

Bài 32: Tìm số tự nhiên n để $n+18$ và $n-41$ là hai số chính phương.

Lời giải

Để $n+18$ và $n-41$ là hai số chính phương

$$\Leftrightarrow n+18 = p^2 \text{ và } n-41 = q^2 \text{ (} p, q \in \mathbb{N} \text{)} \Rightarrow p^2 - q^2 = (n+18) - (n-41) = 59 \Leftrightarrow (p-q)(p+q) = 59$$

Nhưng 59 là số nguyên tố, nên:
$$\begin{cases} p-q = 1 \\ p+q = 59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 30 \\ q = 29 \end{cases}$$

Từ $n+18 = p^2 = 30^2 = 900$ suy ra $n = 882$

Thay vào $n-41$, ta được $882-41 = 841 = 29^2 = q^2$.

Vậy với $n = 882$ thì $n+18$ và $n-41$ là hai số chính phương.

Bài 33: Cho $A = a^{2015} + b^{2015} + c^{2015} + d^{2015}$, với a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn $ab = cd$.

Chứng minh rằng A là hợp số.

Lời giải

Đặt $(a, d) = k$, suy ra $a = ka_1$, $d = kd_1$ với $(a_1, d_1) = 1$ và $k, a_1, d_1 \in \mathbb{N}^*$

Khi đó $ab = cd \Leftrightarrow a_1b = cd_1 \Rightarrow cd_1 : a_1$, mà $(a_1, d_1) = 1$ nên $c : a_1 \Rightarrow c = a_1c_1$

$\Rightarrow a_1b = cd_1 = c_1a_1d_1 \Rightarrow b = c_1d_1$

Từ đó ta được:

$$\begin{aligned} A &= a^{2015} + b^{2015} + c^{2015} + d^{2015} \\ &= k^{2015} \cdot a_1^{2015} + c_1^{2015} d_1^{2015} + a_1^{2015} c_1^{2015} + k^{2015} d_1^{2015} \\ &= (a_1^{2015} + d_1^{2015})(k^{2015} + c_1^{2015}) \end{aligned}$$

là hợp số vì $a_1^{2015} + d_1^{2015}$ và $k^{2015} + c_1^{2015}$ là các số nguyên dương ≥ 2 .

Bài 34: Cho số nguyên dương n và các số $A = \underbrace{444\dots4}_{2n}$ (A gồm $2n$ chữ số 4); $B = \underbrace{888\dots8}_n$ (B gồm

n chữ số 8). Chứng minh rằng $A + 2B + 4$ là số chính phương.

Giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= \underbrace{444\dots4}_{2n} = \underbrace{444\dots4}_n \underbrace{000\dots0}_n + \underbrace{444\dots4}_n = \underbrace{444\dots4}_n \cdot (10^n - 1) + \underbrace{888\dots8}_n \\ &= 4 \cdot \underbrace{111\dots1}_n \cdot \underbrace{999\dots9}_n + B = 4 \cdot \underbrace{111\dots1}_n \cdot 9 \cdot \underbrace{111\dots1}_n + B = \left(6 \cdot \underbrace{111\dots1}_n \right)^2 + B \\ &= \left(\frac{3}{4} \cdot \underbrace{888\dots8}_n \right)^2 + B = \left(\frac{3}{4} B \right)^2 + B \end{aligned}$$

Khi đó

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\begin{aligned}
 A + 2B + 4 &= \left(\frac{3}{4}B\right)^2 + B + 2B + 4 = \left(\frac{3}{4}B\right)^2 + 2 \cdot \frac{3}{4}B \cdot 2 + 4 = \left(\frac{3}{4}B + 2\right)^2 \\
 &= \left(\frac{3}{4} \cdot \underbrace{888\dots 8}_n + 2\right)^2 = \left(3 \cdot \underbrace{222\dots 2}_n + 2\right)^2 = \left(\underbrace{666\dots 68}_{n-1}\right)^2
 \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh

Bài 35: Cho hai số tự nhiên a, b thỏa mãn $2a^2 + a = 3b^2 + b$.

Chứng minh rằng $2a + 2b + 1$ là số chính phương

Giải:

$$2a^2 + a = 3b^2 + b \Leftrightarrow (a-b)(2a+2b+1) = b^2 \quad (*)$$

Gọi d là ước chung của $(a-b, 2a+2b+1)$ ($d \in \mathbb{N}^*$). Thì

$$\begin{cases} (a-b):d \\ (2a+2b+1):d \end{cases} \Rightarrow (a-b)(2a+2b+1):d^2$$

$$\Rightarrow b^2:d^2 \Rightarrow b:d$$

$$\text{Mà } (a-b):d \Rightarrow a:d \Rightarrow (2a+2b):d \text{ mà } (2a+2b+1):d \Rightarrow 1:d \Rightarrow d=1$$

Do đó $(a-b, 2a+2b+1) = 1$. Từ (*) ta được $a-b$ và $2a+2b+1$ là số chính phương $\Rightarrow 2a+2b+1$ là số chính phương.

Bài 36: Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $n^2 + 17$ là một số chính phương.

Giải:

$$\text{Đặt } m^2 = n^2 + 17 \quad (m \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow m^2 - n^2 = 17 \Rightarrow (m-n)(m+n) = 17 = 1 \cdot 17 = 17 \cdot 1$$

Do $m+n > m-n$

$$\Rightarrow \begin{cases} m+n=17 \\ m-n=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=9 \\ n=8 \end{cases}$$

Vậy với $n=8$ ta có $n^2 + 17 = 64 + 17 = 81 = 9^2$

Bài 37: Tìm các số nguyên tố a, b, c và số nguyên dương k thỏa mãn phương trình

$$a^2 + b^2 + 16c^2 = 9k^2 + 1.$$

Giải:

Vì VP chia 3 dư 1 nên VT chia 3 dư 1. Mà bình phương của số nguyên tố chia 3 dư 1 hoặc 0 nên hai trong ba số a, b, c phải bằng 3.

$$\text{TH1: } a = b = 3 \text{ ta có } 18 + 16c^2 = 9k^2 + 1 \Rightarrow 17 = 9k^2 - 16c^2 = (3k-4c)(3k+4c)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3k-4c=1 \\ 3k+4c=17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=3 \\ c=2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy ta được $a; b; c; k = 3; 3; 2; 3$.

TH2: Nếu $c=3$; $a=3$ hoặc $b=3$.

$$\text{Với } a=3 \text{ ta có } 3^2 + b^2 + 16 \cdot 3^2 = 9k^2 + 1 \Rightarrow 152 = 9k^2 - b^2 = (3k-b)(3k+b) = 2^3 \cdot 19.$$

Vì $3k-b, 3k+b$ cùng tính chẵn lẻ mà tích là chẵn nên chúng cùng chẵn.

Ta được các trường hợp:

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\begin{cases} 3k - b = 2 \\ 3k + b = 76 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 13 \\ b = 37 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Ta được các bộ $a; b; c; k$ thỏa mãn là $(a, b, c, k) = (3, 37, 3, 13)$.

$$\begin{cases} 3k - b = 4 \\ 3k + b = 38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 7 \\ b = 17 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Ta được các bộ $a; b; c; k$ thỏa mãn là $(a, b, c, k) = (3, 17, 3, 7)$

Tương tự ta có các bộ $(a, b, c, k) = (37, 3, 3, 13), (17, 3, 3, 7)$.

Bài 38: Chứng minh rằng với k là số nguyên thì $2016k + 3$ không phải là lập phương của một số nguyên.

Giải:

Giả sử $2016k + 3 = a^3$ với k và a là số nguyên. Suy ra: $2016k = a^3 - 3$

Ta chứng minh $a^3 - 3$ không chia hết cho 7.

Thật vậy: Ta biểu diễn $a = 7m + r$, với $r \in \{0; 1; -1; 2; -2; 3; -3\}$.

Trong tất cả các trường hợp trên ta đều có $a^3 - 3$ không chia hết cho 7

Mà $2016k$ luôn chia hết cho 7, nên $a^3 - 3 \neq 2016k$. (ĐPCM)

Bài 39: Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương $(p; q; n)$, trong đó p, q là các số nguyên tố thỏa mãn: $p(p+3) + q(q+3) = n(n+3)$

Giải:

Không mất tính tổng quát, giả sử $p \leq q$.

Trường hợp 1: $p = 2$

$$\Rightarrow p(p+3) = 2(2+3) = 2.5 = 10$$

$$\Rightarrow 10 + q(q+3) = n(n+3)$$

$$\Leftrightarrow 10 = n^2 + 3n - q^2 - 3q = (n^2 - q^2) + (3n - 3q)$$

$$\Leftrightarrow 10 = (n-q)(n+q) + 3(n-q)$$

$$\Leftrightarrow 10 = (n-q)(n+q+3)$$

Vì $p(p+3) + q(q+3) = n(n+3)$ mà $p; q; n$ là các số nguyên dương $\Rightarrow n > q \geq 2$.

$$\Rightarrow n+q+3 > 2+2+3 = 7$$

$$\text{Mà } 10 = 1.10 = 2.5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n+q+3=10 \\ n-q=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n+q=7 \\ n-q=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=4 \\ q=3 \end{cases}$$

So với điều kiện thỏa mãn.

Vậy bộ ba số nguyên dương $(p; q; n)$ cần tìm là $(2; 3; 4)$.

Trường hợp 2: $p = 3$

$$\Rightarrow p(p+3) = 3.(3+3) = 3.6 = 18$$

$$\Rightarrow 18 + q(q+3) = n(n+3) \Leftrightarrow 18 = n^2 + 3n - q^2 - 3q = (n^2 - q^2) + (3n - 3q)$$

$$\Leftrightarrow 18 = (n-q)(n+q) + 3(n-q)$$

$$\Leftrightarrow 18 = (n-q)(n+q+3)$$

Vì $p(p+3)+q(q+3)=n(n+3)$ mà $p; q; n$ là các số nguyên dương $\Rightarrow n > q \geq 3$.

$$\Rightarrow n+q+3 > 3+3+3=9$$

$$\text{Mà } 18=1.18=2.9=3.6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n+q+3=18 \\ n-q=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n+q=15 \\ n-q=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=8 \\ q=7 \end{cases}$$

So với điều kiện thỏa mãn.

Vậy bộ ba số nguyên dương $(p; q; n)$ cần tìm là $(3; 7; 8)$.

Trường hợp 3: $p > 3$

Ta sẽ chứng minh với 1 số nguyên a bất kì không chia hết cho 3 thì tích $a(a+3)$ luôn chia 3 dư 1.

Thật vậy:

$$\text{Nếu } a:3 \text{ dư } 1 \Rightarrow a=3k+1 \Rightarrow a+3=3k+4$$

$$\Rightarrow a(a+3)=(3k+1)(3k+4)=9k^2+15k+4:3 \text{ dư } 1.$$

$$\text{Nếu } a:3 \text{ dư } 2 \Rightarrow a=3k+2 \Rightarrow a+3=3k+5$$

$$\Rightarrow a(a+3)=(3k+2)(3k+5)=9k^2+21k+10:3 \text{ dư } 1.$$

Trở lại bài toán chính:

$$\text{Vì } q \geq p > 3 \Rightarrow p \nmid 3; q \nmid 3.$$

$$\Rightarrow p(p+3)+q(q+3):3 \text{ dư } 2.$$

$$\text{Mà } n(n+3):3 \text{ dư } 1 \text{ (nếu } n \nmid 3) \text{ hoặc } n(n+3):3 \text{ nếu } n:3.$$

$$\Rightarrow p(p+3)+q(q+3) \neq n(n+3)$$

Suy ra không có bộ ba số nguyên dương $(p; q; n)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 40: Cho tập hợp A gồm 16 số nguyên dương đầu tiên. Hãy tìm số nguyên dương k nhỏ nhất có tính chất: Trong mỗi tập con gồm k phần tử của A đều tồn tại hai số phân biệt a, b sao cho a^2+b^2 là số nguyên tố.

Giải:

Ta xét tập T gồm các số chẵn thuộc tập A . Khi đó $|T|=8$ và với a, b thuộc T ta có a^2+b^2 , do đó $k \geq 9$

Xét các cặp số sau:

$$A = 1;4 \cup 3;2 \cup 5;16 \cup 6;15 \cup 7;12 \cup 8;13 \cup 9;10 \cup 11;14$$

Ta thấy tổng bình phương của mỗi cặp số trên đều là số nguyên tố

Xét T là một tập con của A và $|T|=9$, khi đó theo nguyên lí Dirichlet T sẽ chứa ít nhất 1 cặp nói trên.

$$\text{Vậy } k_{\min} = 9$$

Bài 41: Tìm số các số nguyên n sao cho $B=n^2-n+13$ là số chính phương

Giải:

Ta thấy B là số chính phương $\Leftrightarrow 4B$ là số chính phương

$$\text{Đặt } 4B=k^2 \text{ (} k \in \mathbb{N} \text{) thì } 4B=4n^2-4n+52=k^2 \Leftrightarrow (2n-1-k).(2n-1+k)=-51$$

Vì $2n-1+k \geq 2n+1+k$ nên ta có các hệ

$$\begin{cases} 2n-1+k=1 \\ 2n-1-k=-51 \end{cases} \quad (1) \quad \begin{cases} 2n-1+k=3 \\ 2n-1-k=-17 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} 2n-1+k=51 \\ 2n-1-k=-1 \end{cases} \quad (3) \quad \begin{cases} 2n-1+k=17 \\ 2n-1-k=-3 \end{cases} \quad (4)$$

Giải hệ (1) (2) (3) (4) ta tìm được $n=-12; n=-3; n=13; n=4$

Vậy các số nguyên cần tìm là $n \in \{-12; -3; 4; 13\}$

Bài 42: Cho a, b là số hữu tỉ thỏa mãn $(a^2 + b^2 - 2)(a + b)^2 + (1 - ab)^2 = -4ab$

Chứng minh $\sqrt{1 + ab}$ là số hữu tỉ

Giải:

$$(GT) \Rightarrow \left[(a + b)^2 - 2(ab + 1) \right] (a + b)^2 + (1 + ab)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a + b)^4 - 2(a + b)^2(1 + ab) + (1 + ab)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[(a + b)^2 - (1 + ab) \right]^2 = 0 \Rightarrow (a + b)^2 - (1 + ab) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a + b)^2 = 1 + ab \Leftrightarrow |a + b| = \sqrt{1 + ab} \in \mathbb{Q}; \text{ vì } a, b \in \mathbb{Q}. \text{ KL}$$

Bài 43: Tìm số nguyên dương n lớn nhất để $A = 4^{27} + 4^{2016} + 4^n$ là số chính phương

Giải:

$$* A = 4^{27} + 4^{2016} + 4^n = (2^{27})^2 (1 + 4^{1989} + 4^{n-27})$$

Vì A và $(2^{27})^2$ là số chính phương nên $1 + 4^{1989} + 4^{n-27}$ là số chính phương

$$\text{Ta có } 1 + 4^{1989} + 4^{n-27} > 4^{n-27} = (2^{n-27})^2$$

*mà $1 + 4^{1989} + 4^{n-27}$ là số chính phương nên ta có

$$1 + 4^{1989} + 4^{n-27} \geq (2^{n-27} + 1)^2 \Leftrightarrow 2^{n-27} \leq 2^{3977} \Leftrightarrow n \leq 4004$$

Với $n=4004$ ta có $A = 4^{27} + 4^{2016} + 4^{4004} = (2^{27} + 2^{4004})^2$ là số chính phương

Vậy $n=4004$ thì $A=4^{27}+4^{2016}+4^n$ là số chính phương

Bài 44: a) Cho ba số hữu tỉ a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$. Chứng minh rằng $A = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ là

số hữu tỉ.

b) Cho ba số hữu tỉ x, y, z đôi một phân biệt. Chứng minh rằng:

$$B = \sqrt{\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2}} \text{ là số hữu tỉ.}$$

Lời giải

a) Từ giả thiết suy ra $2ab - 2bc - 2ca = 0$

$$\text{Suy ra } (a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ca = a^2 + b^2 + c^2$$

Vậy $A = \sqrt{(a + b - c)^2} = |a + b - c|$ là số hữu tỉ

$$\text{b) Đặt } a = \frac{1}{x-y}, b = \frac{1}{y-z}, c = \frac{1}{x-z} \text{ suy ra } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}.$$

Áp dụng câu a) suy ra $B = \sqrt{\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2}}$ là số hữu tỉ.

Bài 45: Tìm số thực x để 3 số $x - \sqrt{3}; x^2 + 2\sqrt{3}; x - \frac{2}{x}$ là số nguyên

Lời giải

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Đặt $a = x - \sqrt{3}; b = x^2 + 2\sqrt{3}; c = x - \frac{2}{x}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$

Từ $a = x - \sqrt{3} \Rightarrow x = a + \sqrt{3}$; từ $b = x^2 + 2\sqrt{3} \Rightarrow x^2 = b - 2\sqrt{3}$, nên ta có

$$(a + \sqrt{3})^2 = b - 2\sqrt{3} \Leftrightarrow a^2 + 2\sqrt{3}a + 3 = b - 2\sqrt{3} \Leftrightarrow 2\sqrt{3}(a + 1) = b - a^2 - 3$$

-Nếu $a + 1 \neq 0 \Rightarrow a \neq -1 \Rightarrow 2\sqrt{3} = \frac{b - a^2 - 3}{a + 1}$, vì $a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{b - a^2 - 3}{a + 1} \in \mathbb{Q} \Rightarrow 2\sqrt{3} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \text{VL}$

Vậy $a + 1 = 0$ nên ta có $\begin{cases} a + 1 = 0 \\ b - a^2 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{3} - 1$

Với $x = \sqrt{3} - 1$ ta có $a = -1; b = 4$ và $c = -2$ nguyên, thỏa mãn đầu bài

Bài 46: Tìm x nguyên dương để $4x^3 + 14x^2 + 9x - 6$ là số chính phương

Lời giải

Vì $4x^3 + 14x^2 + 9x - 6$ là số chính phương, nên ta có $4x^3 + 14x^2 + 9x - 6 = k^2$ với $k \in \mathbb{N}$

Ta có $4x^3 + 14x^2 + 9x - 6 = \dots = (x + 2)(4x^2 + 6x - 3)$ nên ta có $(x + 2)(4x^2 + 6x - 3) = k^2$

Đặt $(x + 2, 4x^2 + 6x - 3) = d$ với $d \in \mathbb{N}^*$

Ta có $x + 2 : d \Rightarrow (x + 2)(4x - 2) : d \Rightarrow 4x + 6x - 4 : d$

Ta lại có $4x^2 + 6x - 3 : d \Rightarrow (4x^2 + 6x - 3) - (4x^2 + 6x - 4) = 1 : d \Rightarrow d = 1$

Vậy $(x + 2, 4x^2 + 6x - 3) = 1$ mà $(x + 2)(4x^2 + 6x - 3) = k^2$ nên ta có

$x + 2$ và $4x^2 + 6x - 3$ là số chính phương $\Rightarrow x + 2 = a^2$ và $4x^2 + 6x - 3 = b^2$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$

Vì $x > 0$ nên ta có $4x^2 < b^2 < 4x^2 + 12x + 9 \Leftrightarrow (2x)^2 < b^2 < (2x + 3)^2$

Vì b lẻ nên $b^2 = (2x + 1)^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 6x - 3 = 4x^2 + 4x + 1 \Leftrightarrow x = 2$

Với $x = 2$ ta có $4x^3 + 14x^2 + 9x - 6 = 100 = 10^2$ là số chính phương

Bài 47: Cho $a, b, c \in \mathbb{Q}$; a, b, c đôi một khác nhau.

Chứng minh rằng $\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}$ bằng bình phương của một số

Lời giải

Ta có $\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} =$

$$= \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} \right)^2 - 2 \left(\frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{b-c} + \frac{1}{b-c} \cdot \frac{1}{c-a} + \frac{1}{c-a} \cdot \frac{1}{a-b} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} \right)^2 - 2 \frac{c-a+b-c+a-b}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} \right)^2$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Bài 48: Tìm số tự nhiên n để: $A = n^{2012} + n^{2002} + 1$ là số nguyên tố.

Lời giải

Xét $n = 0$ thì $A = 1$ không phải nguyên tố; $n = 1$ thì $A = 3$ nguyên tố.

Xét $n > 1$: $A = n^{2012} - n^2 + n^{2002} - n + n^2 + n + 1$

$$= n^2((n^3)^{670} - 1) + n((n^3)^{667} - 1) + (n^2 + n + 1)$$

Mà $(n^3)^{670} - 1$ chia hết cho $n^3 - 1$, suy ra $(n^3)^{670} - 1$ chia hết cho $n^2 + n + 1$

Tương tự: $(n^3)^{667} - 1$ chia hết cho $n^2 + n + 1$

Vậy A chia hết cho $n^2 + n + 1 > 1$ nên A là hợp số. Số tự nhiên cần tìm $n = 1$.

Bài 49: Tìm tất cả các số nguyên x sao cho giá trị của biểu thức $x^2 + x + 6$ là một số chính phương

Lời giải

$$x^2 + x + 6 = n^2; (n, x \in \mathbb{Z}) \Rightarrow 4x^2 + 4x + 24 = 4n^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 - 4n^2 = -23$$

$$(2x + 1 - 2n)(2x + 1 + 2n) = -23; 2x + 1 - 2n < 2x + 1 + 2n$$

$2x + 1 - 2n$	-1	-23
$2x + 1 + 2n$	23	1
$4x + 2$	22	-22
x	5	-6

Vậy số nguyên x cần tìm là 5 hoặc -6

Bài 50: Cho $A = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ (với $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$). Chứng minh A không phải là số chính phương.

Lời giải

$$n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2 = n^2(n+1)^2(n^2 - 2n + 2)$$

với $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ thì $n^2 - 2n + 2 = (n-1)^2 + 1 > (n-1)^2$

và $n^2 - 2n + 2 = n^2 - 2(n-1) < n^2$

Vậy $(n-1)^2 < n^2 - 2n + 2 < n^2 \Rightarrow n^2 - 2n + 2$ không là số chính phương $\Rightarrow$ đpcm

Bài 51: Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $n^2 + 17$ là một số chính phương.

Lời giải

$$\text{Đặt } m^2 = n^2 + 17 \quad (m \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow m^2 - n^2 = 17 \Rightarrow (m-n)(m+n) = 17 = 1.17 = 17.1$$

Do $m + n > m - n$

$$\Rightarrow \begin{cases} m+n=17 \\ m-n=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=9 \\ n=8 \end{cases} \text{ Vậy với } n=8 \text{ ta có } n^2 + 17 = 64 + 17 = 81 = 9^2$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Bài 52: Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{70-\sqrt{4901}} + \sqrt[3]{70+\sqrt{4901}}$ là một số nguyên.

Lời giải

Với $x = a + b \Rightarrow x^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) \Rightarrow x^3 = a^3 + b^3 + 3abx$.

Áp dụng: Đặt $a = \sqrt[3]{70-\sqrt{4901}}$, $b = \sqrt[3]{70+\sqrt{4901}}$, $x = \sqrt[3]{70-\sqrt{4901}} + \sqrt[3]{70+\sqrt{4901}}$

$$\Rightarrow x^3 = 70 + 70 + 3\sqrt[3]{70^2 - 4901}x \Rightarrow x^3 = 140 - 3x \Leftrightarrow x^3 + 3x - 140 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)(x^2 + 5x + 28) = 0 \Leftrightarrow x-5 = 0 \text{ (do } x^2 + 5x + 28 > 0) \Leftrightarrow x = 5.$$

Vậy $\sqrt[3]{70-\sqrt{4901}} + \sqrt[3]{70+\sqrt{4901}} = 5$ là một số nguyên (đpcm).

Bài 53: Cho p là một số nguyên tố thỏa mãn $p = a^3 - b^3$ với a, b là hai số nguyên dương phân biệt. Chứng minh rằng : Nếu lấy $4p$ chia cho 3 và loại bỏ phần dư thì nhận được số là bình phương của một số nguyên lẻ.

Lời giải

Ta có $p = a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ là số nguyên tố mà a, b là số nguyên dương $a - b = 1$

$$\Rightarrow a = b + 1 \Rightarrow p = (b+1)^3 - b^3 = 3b^2 + 3b + 1 \Rightarrow 4p = 12b^2 + 12b + 4 \equiv 1 \pmod{3}$$

Nếu lấy $4p$ chia 3 và loại bỏ phần dư ta được $A = 4b^2 + 4b + 1 = (2b+1)^2$ là số chính phương lẻ.

2. Phép chia hết, phép chia có dư

A. Bài toán

Bài 1: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta luôn có:

$$\left[(27n+5)^7 + 10 \right]^7 + \left[(10n+27)^7 + 5 \right]^7 + \left[(5n+10)^7 + 27 \right]^7 \text{ chia hết cho } 42.$$

Bài 2: Tìm số tự nhiên bé nhất có 4 chữ số biết nó chia hết cho 7 được số dư là 2 và bình phương của nó chia cho 11 được số dư là 3.

Bài 3: Chứng minh rằng nếu số nguyên n lớn hơn 1 thỏa mãn $n^2 + 4$ và $n^2 + 16$ là các số nguyên tố thì n chia hết cho 5.

Bài 4: Với mỗi số thực x kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x . Ví dụ $[\sqrt{2}] = 1$;

$$\left[-\frac{3}{2} \right] = -2$$

1) Chứng minh rằng $x-1 < [x] \leq x < [x]+1 = [x+1]$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

2) Có bao nhiêu số nguyên dương $n \leq 840$ thỏa mãn $[\sqrt{n}]$ là ước của n ?

Bài 5: Tìm tất cả các số nguyên dương m, n sao cho $m+n^2$ chia hết cho m^2-n và $n+m^2$ chia hết cho n^2-m .

Bài 6:

1) Chứng minh $n^6 - 2n^4 + n^2$ chia hết cho 36 với mọi n nguyên dương.

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

2) Cho ba số phân biệt a, b, c . Đặt:

$$x = (a+b+c)^2 - 9ab, \quad y = (a+b+c)^2 - 9bc, \quad z = (a+b+c)^2 - 9ac.$$

Chứng minh rằng trong ba số x, y, z có ít nhất một số dương.

Bài 7: Cho a là số tự nhiên lớn hơn 5 và không chia hết cho 5.

Bài 8: Cho m và n là hai số nguyên dương lẻ thỏa

$$\begin{cases} (m^2 + 2):n \\ (n^2 + 2):m \end{cases}$$

- 1) Hãy tìm một cặp gồm hai số nguyên dương lẻ $(m; n)$ thỏa các điều kiện đã cho với $m > 1$ và $n > 1$
- 2) Chứng minh $(m^2 + n^2 + 2):4mn$

Bài 9: Cho n là số tự nhiên lẻ. Chứng minh: $46^n + 296.13^n$ chia hết cho 1947

Bài 10: Trong kì thi Olympic có 17 học sinh thi môn Toán được mang số báo danh là số tự nhiên trong khoảng từ 1 đến 1000. Chứng minh rằng có thể chọn ra 9 học sinh thi Toán có tổng các số báo danh được mang chia hết cho 9.

Bài 11: Biết a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $a^2 - ab + b^2$ chia hết cho 9, chứng minh rằng cả a và b đều chia hết cho 3.

Bài 12: Chứng minh rằng $2n^3 + 3n^2 + n$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên n .

Bài 13: Chứng minh rằng $A = 2^{2^n} + 4^n + 16$ chia hết cho 3 với mọi số nguyên dương n .

Bài 14: Chữ số hàng đơn vị của số $M = a^2 + ab + b^2$ ($a; b \in \mathbb{N}^*$) là 0. Chứng minh M chia hết cho 20.

Bài 15: Chứng minh rằng: $A = 1.2.3...2017.2018 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2017} + \frac{1}{2018}\right)$ chia hết cho 2019

Bài 16: Biết a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $a^2 - ab + b^2$ chia hết cho 9, chứng minh rằng cả a và b đều chia hết cho 3.

Bài 17: Giả sử Trung tâm thành phố Bến Tre có tất cả 2019 bóng đèn chiếu sáng đô thị, bao gồm 671 bóng đèn ánh sáng trắng, 673 bóng đèn ánh sáng vàng nhạt, 675 bóng đèn ánh sáng vàng sậm. Người ta thực hiện dự án thay bóng đèn theo quy luật sau: mỗi lần người ta tháo bỏ hai bóng đèn khác loại và thay vào đó bằng hai bóng đèn thuộc loại còn lại. Hỏi theo quy trình trên, đến một lúc nào đó, người ta có thể nhận được tất cả các bóng đèn đều thuộc cùng một loại không? Giải thích vì sao?

Bài 18: Chứng minh rằng $2n^3 + 3n^2 + n$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên n .

Bài 19: Số tự nhiên $n = 111^6$ có tất cả bao nhiêu ước số nguyên dương phân biệt? Tính tích của tất cả các ước số đó.

Bài 20: Cho biểu thức $A = n^2 + 4n + 5$ (n là số tự nhiên lẻ). Chứng minh rằng A không chia hết cho 8.

Bài 21: Tìm các cặp số nguyên dương $(x; y)$ sao cho $x^2y + x + y$ chia hết cho $xy^2 + y + 1$.

Bài 22: Cho hai số nguyên dương x, y với $x > 1$ và thỏa mãn điều kiện

$2x^2 - 1 = y^{15}$. Chứng minh rằng x chia hết cho 15.

Bài 23: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho $\frac{2^{2020}}{3x+1}$ là số nguyên ?

Bài 24: Cho $A = (a^{2020} + b^{2020} + c^{2020}) - (a^{2016} + b^{2016} + c^{2016})$ với $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ Chứng minh rằng :
A:30.

Bài 25: Chứng minh rằng $A = n^8 + 4n^7 + 6n^6 + 4n^5 + n^4$ chia hết cho 16 với mọi n là số nguyên

Bài 26: Cho $B = n^4 + n^3 - n^2 - n$. Chứng minh rằng B chia hết cho 6 với mọi số nguyên n

Bài 27: Chứng minh với mọi số n lẻ thì $n^2 + 4n + 5$ không chia hết cho 8.

Bài 28: Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $P = a^2 + b^2$ là số nguyên tố. $P - 5$ chia hết cho 8.

Giả sử các số nguyên x, y thỏa mãn $ax^2 - by^2$ chia hết cho P . Chứng minh rằng cả hai số x, y đều chia hết cho P .

Bài 29:

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(a; b)$ sao cho $(a + b^2)$ chia hết cho $(a^2b - 1)$.

Bài 30: Cho a, b, c là các số nguyên khác 0 thỏa mãn điều kiện:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 3.

Bài 31: Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì $n^2 + n + 2$ không chia hết cho 3.

Bài 32: Chứng minh rằng các số $A = 6^{2015} + 1$ và $B = 6^{2016} - 1$ đều là bội của 7.

Bài 33: Cho hai số nguyên a và b thỏa $24a^2 + 1 = b^2$. Chứng minh rằng chỉ có một số a hoặc b chia hết cho 5.

Bài 34: Cho biểu thức: $P = (a + b)(b + c)(c + a) - abc$ với a, b, c là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu $a + b + c$ chia hết cho 4 thì P chia hết cho 4.

Bài 35: Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $p = a^2 + b^2$ là số nguyên tố và $p - 5$ chia hết cho 8. Giả sử x, y là các số nguyên thỏa mãn $ax^2 - by^2$ chia hết cho p . Chứng minh rằng cả hai số x, y chia hết cho p .

Bài 36: Giả sử Trung tâm thành phố Bến Tre có tất cả 2019 bóng đèn chiếu sáng đô thị, bao gồm 671 bóng đèn ánh sáng trắng, 673 bóng đèn ánh sáng vàng nhạt, 675 bóng đèn ánh sáng vàng sậm. Người ta thực hiện dự án thay bóng đèn theo quy luật sau: mỗi lần người ta tháo bỏ hai bóng đèn khác loại và thay vào đó bằng hai bóng đèn thuộc loại còn lại. Hỏi theo quy trình trên, đến một lúc nào đó, người ta có thể nhận được tất cả các bóng đèn đều thuộc cùng một loại không? Giải thích vì sao?

Bài 37: Tìm tất cả các số nguyên dương m, n sao cho $m + n^2$ chia hết cho $m^2 - n$ và $n + m^2$ chia hết cho $n^2 - m$.

Bài 38: Với a, b là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu $4a^2 + 3ab - 11b^2$ chia hết cho 5 thì $a^4 - b^4$ chia hết cho 5.

Bài 39: Chứng minh rằng $A = (2^n - 1)(2^n + 1)$ chia hết cho 3 với mọi số tự nhiên n

Bài 40: Cho a, b, c là các số nguyên khác 0 thỏa mãn điều kiện:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 3.

Bài 41: Tìm tất cả các số nguyên dương a, b sao cho $a + b^2$ chia hết cho $a^2b - 1$.

Bài 42: Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì $(n^2 + n + 1)$ không chia hết cho 9.

Bài 43: Tìm tất cả số nguyên dương n sao cho $A = n \cdot 4^n + 3^n : 7$

Bài 44: Cho các số nguyên $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Đặt $S = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3$ và $P = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Chứng minh rằng: S chia hết cho 6 khi và chỉ khi P chia hết cho 6.

Bài 45: Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì $n^2 + n + 2$ không chia hết cho 3.

B. Lời giải

Bài 1: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta luôn có:

$$\left[(27n+5)^7 + 10 \right]^7 + \left[(10n+27)^7 + 5 \right]^7 + \left[(5n+10)^7 + 27 \right]^7 \text{ chia hết cho } 42.$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } x^7 - x = x(x-1)(x+1)(x^4 + x^2 + 1)$$

Vì $x(x-1)(x+1)$ là tích 3 số nguyên liên tiếp nên nó chia hết cho 6.

$$\text{Theo định lí Ôle thì } x^7 - x \equiv 0 \pmod{7}, \forall x \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow (x^7 - x) : 7 \Rightarrow x^7 \equiv x \pmod{42}, \forall x \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x^7 - x \text{ chia hết cho } \text{BCNN}(6; 7) = 42$$

$$\begin{aligned} & \left[(27n+5)^7 + 10 \right]^7 + \left[(10n+27)^7 + 5 \right]^7 + \left[(5n+10)^7 + 27 \right]^7 \\ & \equiv (27n+5)^7 + 10 + (10n+27)^7 + 5 + (5n+10)^7 + 27 \pmod{42} \\ & \equiv 27n+5+10+10n+27+5+5n+10+27 \pmod{42} \\ & \equiv 42(n+1) \pmod{42} \\ & \equiv 0 \pmod{42} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \left[(27n+5)^7 + 10 \right]^7 + \left[(10n+27)^7 + 5 \right]^7 + \left[(5n+10)^7 + 27 \right]^7 \text{ chia hết cho } 42.$$

Bài 2: Tìm số tự nhiên bé nhất có 4 chữ số biết nó chia hết cho 7 được số dư là 2 và bình phương của nó chia cho 11 được số dư là 3.

Lời giải

Gọi x là số cần tìm ($x \in \mathbb{N}, 1000 \leq x \leq 9999$)

Vì x^2 chia cho 11 dư 3, nên x chia cho 11 dư 5 hoặc dư 6

$$\text{Nếu } x \text{ chia } 11 \text{ dư } 5 \text{ thì } (x-5) : 11 \Rightarrow (x-5+66) : 11 \Rightarrow (x+61) : 11$$

$$\text{Lại có } x \text{ chia } 7 \text{ dư } 2 \Rightarrow (x-2) : 7 \Rightarrow (x-2+63) : 7 \Rightarrow (x+61) : 7$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\Rightarrow (x+61) \in BC(11;7) \Rightarrow x+61=77k \quad (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow 1000 \leq x=77k-61 \leq 9999$$

$$\Rightarrow 14 \leq k \leq 130$$

$$\text{Do } x \text{ nhỏ nhất nên } k=14 \Rightarrow x=77 \cdot 14 - 61 = 1017$$

Vậy số cần tìm là 1017

Bài 3: Chứng minh rằng nếu số nguyên n lớn hơn 1 thỏa mãn $n^2 + 4$ và $n^2 + 16$ là các số nguyên tố thì n chia hết cho 5.

Lời giải

Ta có với mọi số nguyên n thì n^2 chia cho 5 dư 0, 1 hoặc 4.

Nếu n^2 chia cho 5 dư 1 thì $n^2 = 5k + 1 \quad (k \in \mathbb{N}^*)$

$$\Rightarrow n^2 + 4 = 5k + 5 \div 5$$

$\Rightarrow n^2 + 4$ không phải là số nguyên tố (mâu thuẫn với giả thiết)

Nếu n^2 chia cho 5 dư 4 thì $n^2 = 5k + 4 \quad (k \in \mathbb{N}^*)$

$$\Rightarrow n^2 + 16 = 5k + 20 \div 5$$

$\Rightarrow n^2 + 16$ không phải là số nguyên tố (mâu thuẫn với giả thiết)

$$\Rightarrow n^2 \div 5$$

Vậy $n \div 5$

Bài 4: Với mỗi số thực x kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x . Ví dụ $[\sqrt{2}] = 1$;

$$\left[-\frac{3}{2}\right] = -2$$

- 1) Chứng minh rằng $x-1 < [x] \leq x < [x]+1 = [x+1]$ với mọi $x \in \mathbb{R}$
- 2) Có bao nhiêu số nguyên dương $n \leq 840$ thỏa mãn $[\sqrt{n}]$ là ước của n ?

Lời giải

- 1) Ta có: $[x] \leq x$.

Giả sử $[x]+1 \leq x$ thì $[x]+1$ là số nguyên mà $[x]+1 > [x]$

Mà $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x (mâu thuẫn do $[x] < [x]+1$).

Do đó $x < [x]+1 \Rightarrow x-1 < [x]$

$$\text{Lại có } \begin{cases} [x]+1 \leq x+1 \\ [x+1] \leq x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [x]+1 \leq x+1 \\ [x+1]-1 \leq x \end{cases}$$

Mặt khác do $[x]+1$ và $[x+1]-1$ đều là các số nguyên

$$\text{Nên } \begin{cases} [x]+1 \leq [x+1] \\ [x+1]-1 \leq [x] \end{cases} \Rightarrow [x]+1 = [x+1]$$

$$\text{Vậy } x-1 < [x] \leq x < [x]+1 = [x+1]$$

- 2) Giả sử n là số nguyên dương thỏa mãn

Đặt $k = \left[\sqrt{n} \right]$ thì $1 \leq k \leq 28$ và $k^2 \leq n < (k+1)^2$ hay $k^2 \leq n \leq k^2 + 2k$

$$\Rightarrow n = k^2 + r \text{ với } 0 \leq r \leq 2k$$

Mặt khác $n : k$ hay $(k^2 + r) : k$ nên $r = 0; k; 2k$ với $1 \leq k \leq 28$

$$\text{Lại có } 840 = 28^2 + 2.28$$

Mà n có dạng $k^2; k^2 + k; k^2 + 2k$ đều thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy số nguyên dương n thỏa mãn yêu cầu bài toán là $3.28 = 84$.

Bài 5: Tìm tất cả các số nguyên dương m, n sao cho $m+n^2$ chia hết cho m^2-n và $n+m^2$ chia hết cho n^2-m .

Giải:

$$1) \begin{cases} m+n^2 : m^2-n \\ n+m^2 : n^2-m \end{cases} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+n^2 \geq m^2-n \\ n+m^2 \geq n^2-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-n+1 & m+n \geq 0 \\ n-m+1 & m+n \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-n+1 \geq 0 \\ n-m+1 \geq 0 \end{cases} \quad (\text{do } m, n \text{ nguyên dương})$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq m-n \leq 1$$

$$*) \text{ TH1: } m-n = -1 \Leftrightarrow m = n-1$$

$$+) m+n^2 : m^2-n$$

$$\Rightarrow \frac{m+n^2}{m^2-n} \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{n-1+n^2}{n-1^2-n} \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{n^2-3n+1+4n-2}{n^2-3n+1} \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{4n-2}{n^2-3n+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow n^2-3n+1 \leq 4n-2$$

$$\Rightarrow n^2-7n+3 \leq 0 \Rightarrow \frac{7-\sqrt{37}}{2} \leq n \leq \frac{7+\sqrt{37}}{2}$$

$$\text{vì } n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n \in 1; 2; 3; 4; 5; 6$$

$$\Rightarrow m \in 1; 2; 3; 4; 5$$

Thử lại vào (1) ta tìm được các cặp $m; n$ thỏa mãn là: $2; 3$.

$$*) \text{ TH2: } m-n = 0 \Leftrightarrow m = n$$

$$m+n^2 : m^2-n$$

$$\Rightarrow \frac{m+n^2}{m^2-n} \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{n+n^2}{n^2-n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{n^2-n+2n}{n^2-n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{2}{n-1} \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow n-1 \leq 2 \Rightarrow n \leq 3$$

$$\text{Vì } n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n \in 1; 2; 3 \Rightarrow m \in 1; 2; 3$$

Thử lại vào (1) ta tìm được các cặp số $m; n$ thỏa mãn là: $2; 2$, $3; 3$.

$$*) \text{ TH3: } m-n=1 \Leftrightarrow m=n+1$$

$$n+m^2 : n^2-m$$

$$\Rightarrow \frac{n+m^2}{n^2-m} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{n+n+1^2}{n^2-n-1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{n^2+3n+1}{n^2-n-1} \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{4n+2}{n^2-n-1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow n^2-n-1 \leq 4n+2 \Rightarrow n^2-5n-3 \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{5-\sqrt{37}}{2} \leq n \leq \frac{5+\sqrt{37}}{2}$$

$$\text{Vì } n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n \in 1; 2; 3; 4; 5 \Rightarrow m \in 2; 3; 4; 5; 6$$

Thử lại vào (1) ta được các cặp số $m; n$ thỏa mãn là: $3; 2$

Bài 6:

1) Chứng minh $n^6 - 2n^4 + n^2$ chia hết cho 36 với mọi n nguyên dương.

2) Cho ba số phân biệt a, b, c . Đặt:

$$x = (a+b+c)^2 - 9ab, \quad y = (a+b+c)^2 - 9bc, \quad z = (a+b+c)^2 - 9ac.$$

Chứng minh rằng trong ba số x, y, z có ít nhất một số dương.

Giải:

$$1) \text{ Ta có: } n^6 - 2n^4 + n^2 = n^6 - n^4 - n^4 + n^2 = n^4(n^2 - 1) - n^2(n^2 - 1) = [n(n-1)(n+1)]^2$$

$$\text{Đặt } A = n(n-1)(n+1), \text{ ta có } \begin{cases} A:2 \\ A:3 \end{cases} \text{ và } (2, 3) = 1 \Rightarrow A:6 \Rightarrow [n(n-1)(n+1)]^2 : 36 \text{ (đpcm)}$$

2) Ta có:

$$x+y+z = (a+b+c)^2 - 9ab + (a+b+c)^2 - 9bc + (a+b+c)^2 - 9ac = 3(a+b+c)^2 - 9(ab+bc+ca)$$

$$= 3[a^2 + b^2 + c^2 - (ab+bc+ca)] = \frac{3}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$$

$$\text{Vì } a, b, c \text{ là ba số phân biệt nên } \frac{3}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] > 0 \Rightarrow x+y+z > 0.$$

Do đó trong ba số x, y, z phải có ít nhất một số dương.

Bài 7: Cho a là số tự nhiên lớn hơn 5 và không chia hết cho 5.

Lời giải

$$\begin{aligned}
A &= a^{8n} + 3a^{4n} - 4 = (a^{8n} - 1) + 3(a^{4n} - 1) \\
&= \left[(a^8)^n - 1 \right] + 3 \left[(a^4)^n - 1 \right] \\
&= (a^8 - 1) \left[(a^8)^{n-1} + (a^8)^{n-2} + \dots + 1 \right] + 3(a^4 - 1) \left[(a^4)^{n-1} + (a^4)^{n-2} + \dots + 1 \right] \\
&= (a^4 - 1)(a^4 + 1).B + 3(a^4 - 1).C \\
&= (a^4 - 1) \left[(a^4 + 1).B + 3C \right] \\
&= (a^2 - 1)(a^2 + 1).D
\end{aligned}$$

Vì a là số tự nhiên lớn hơn 5 và không chia hết cho 5 nên:

$$\begin{cases}
a = 5k+1 \Rightarrow (a^2 - 1):5 \\
a = 5k+2 \Rightarrow (a^2 + 1):5 \\
a = 5k+3 \Rightarrow (a^2 + 1):5 \\
a = 5k+4 \Rightarrow (a^2 - 1):5
\end{cases} \quad (\text{với } k \text{ là số nguyên dương})$$

Vậy $(a^{8n} + 3a^{4n} - 4):5$ với mọi số tự nhiên n .

Bài 8: Cho m và n là hai số nguyên dương lẻ thỏa $\begin{cases} (m^2 + 2):n \\ (n^2 + 2):m \end{cases}$

- Hãy tìm một cặp gồm hai số nguyên dương lẻ $(m;n)$ thỏa các điều kiện đã cho với $m > 1$ và $n > 1$
- Chứng minh $(m^2 + n^2 + 2):4mn$

Lời giải

1) Với $m = 11$ và $n = 41$ thỏa các điều kiện của bài toán

Vì khi đó $m^2 + 2 = 123:41$ và $n^2 + 2 = 1683:11$

2) Vì $m^2 + 2:n$ mà $n^2:n$ nên $(m^2 + n^2 + 2):n$ (1)

Tương tự $(m^2 + n^2 + 2):m$ (2)

Gọi d là ước chung lớn nhất của m và $n \Rightarrow m^2 + n^2:d$

Theo chứng minh trên $(m^2 + n^2 + 2):m \Rightarrow (m^2 + n^2 + 2):d \Rightarrow 2:d$

$\Rightarrow d = 1$ (3); nếu d lớn hơn 1 thì $d = 2$ mâu thuẫn với m và n lẻ

Từ (1), (2), (3) suy ra $(m^2 + n^2 + 2):mn$

Cuối cùng vì m lẻ nên $m = 2k + 1$ (với $k \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow m^2 = 4k(k+1) + 1$

Tương tự $n^2 = 4l(l+1) + 1$ (với $l \in \mathbb{N}$)

Suy ra $(m^2 + n^2 + 2):4$. Từ đó có điều phải chứng minh

Bài 9: Cho n là số tự nhiên lẻ. Chứng minh: $46^n + 296.13^n$ chia hết cho 1947

Lời giải

Ta có $1947 = 33.59$

$$\text{Và } 496^n + 296.13^n = (46^n - 13^n) + 297.13^n = (46^n - 13^n) + 33.9.13^n$$

Ta dễ dàng có :

$$(46^n - 13^n):(46 - 13) \Rightarrow (46^n - 13^n):33 \Rightarrow (46^n - 13^n) + 33.9.13^n \Rightarrow (46^n + 296.13^n):33 +$$

$$46^n + 296.13^n = (46^n + 13^n) + 295.13^n = (46^n + 13^n) + 59.5.13^n$$

Đề ý rằng : $(46^n + 13^n):(46 + 13) \Rightarrow (46^n + 13^n):59$ (vì n là số tự nhiên lẻ)

Vậy ta có : $(46^n + 296.13^n):1947$ với n là số tự nhiên lẻ

Bài 10: Trong kì thi Olympic có 17 học sinh thi môn Toán được mang số báo danh là số tự nhiên trong khoảng từ 1 đến 1000. Chứng minh rằng có thể chọn ra 9 học sinh thi Toán có tổng các số báo danh được mang chia hết cho 9.

Lời giải (chữ đen)

Với 5 số tự nhiên đôi một khác nhau tùy ý thì có 2 trường hợp xảy ra:

- TH1: Có ít nhất 3 số chia cho 3 có số dư giống nhau $\Rightarrow$ Tổng 3 số tương ứng chia hết cho 3.

- TH2: Có nhiều nhất 2 số chia cho 3 có số dư giống nhau $\Rightarrow$ Có ít nhất 1 số chia hết cho 3, 1 số chia 3 dư 1, 1 số chia 3 dư 2.

Suy ra luôn chọn được 3 số có tổng chia hết cho 3.

Do đó ta chia 17 số báo danh của 17 học sinh thành 3 tập hợp lần lượt có 5; 5; 7 phần tử.

Trong mỗi tập hợp, chọn được 3 số có tổng lần lượt là $3a_1; 3a_2; 3a_3$ ($a_1; a_2; a_3 \in \mathbb{N}$)

Còn lại $17 - 9 = 8$ số, trong 8 số còn lại, chọn tiếp 3 số có tổng là $3a_4$

Còn lại 5 số, chọn tiếp 3 số có tổng là $3a_5$

Trong 5 số a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 có 3 số a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} có tổng chia hết cho 3.

Nên 9 học sinh tương ứng có tổng các số báo danh là $3(a_{i1} + a_{i2} + a_{i3}):9$

Bài 11: Biết a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $a^2 - ab + b^2$ chia hết cho 9, chứng minh rằng cả a và b đều chia hết cho 3.

Lời giải

$a^2 - ab + b^2$ chia hết cho 9 suy ra $4(a^2 - ab + b^2) = (2a - b)^2 + 3b^2$ chia hết cho 9. Do $3b^2$ chia hết

cho 3 nên $(2a - b)^2$ chia hết cho 3, suy ra $2a - b$ chia hết cho 3. Từ đó, ta có $(2a - b)^2$ chia hết cho

9. Suy ra $3b^2$ chia hết cho 9, do đó b^2 chia hết cho 3, suy ra b chia hết cho 3. Mà $2a - b$ chia hết

cho 3 nên ta cũng có a chia hết cho 3. Vậy cả hai số a và b đều chia hết cho 3

Bài 12: Chứng minh rằng $2n^3 + 3n^2 + n$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên n .

Lời giải

Ta có: $2n^3 + 3n^2 + n = n(n+1)(2n+1)$.

Nhận thấy rằng $n(n+1)$ là tích của hai số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2.

Xét $2n^3 + 3n^2 + n = n(n+1)(2n+1)$, ta có:

Nếu n chia hết cho 3 thì $2n^3 + 3n^2 + n$ sẽ chia hết cho 3.

Nếu n chia 3 dư 2 thì $n+1$ sẽ chia hết cho 3 nên $2n^3 + 3n^2 + n$ sẽ chia hết cho 3.

Nếu n chia 3 dư 1 thì $2n+1$ sẽ chia hết cho 3 nên $2n^3 + 3n^2 + n$ sẽ chia hết cho 3.

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Vậy trong mọi trường hợp $2n^3 + 3n^2 + n = n(n+1)(2n+1)$ sẽ chia hết cho 3.

Ta có: $(2;3)=1$ nên $2n^3 + 3n^2 + n$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên n .

Bài 13: Chứng minh rằng $A = 2^{2^n} + 4^n + 16$ chia hết cho 3 với mọi số nguyên dương n .

Lời giải

Ta có $A = 2^{2^n} + 4^n + 16 = (2^{2^n} - 1) + (4^n - 1) + 18$

Đặt $2^{2^n} = 2^{2^k}$ ($k \in \mathbb{N}^*$) suy ra $2^{2^n} - 1 = 2^{2^k} - 1 = 4^k - 1 \vdots 3$

Do đó với mọi n nguyên dương ta có: $2^{2^n} - 1 \vdots 3$; $4^n - 1 \vdots 3$; $18 \vdots 3$

$\Rightarrow A = 2^{2^n} + 4^n + 16 \vdots 3$

Bài 14: Chữ số hàng đơn vị của số $M = a^2 + ab + b^2$ ($a; b \in \mathbb{N}^*$) là 0. Chứng minh M chia hết cho 20.

Lời giải

Do $a^2 + ab + b^2$ có chữ số hàng đơn vị là 0 $\Rightarrow a^2 + ab + b^2 \vdots 10$

$$a^2 + ab + b^2 \vdots 10 \Rightarrow \begin{cases} a^2 + ab + b^2 \vdots 5 & (1) \\ a^2 + ab + b^2 \vdots 2 & (2) \end{cases}$$

Ta đi chứng minh $a; b$ cùng là số chẵn

Nếu $a; b$ cùng lẻ $\Rightarrow a^2 + ab + b^2$ lẻ $\Rightarrow a^2 + ab + b^2$ lẻ (vô lý)

Nếu $a; b$ có 1 số chẵn, 1 số lẻ thì $\Rightarrow a^2 + ab + b^2$ lẻ (vô lý)

suy ra $a; b$ cùng là số chẵn $\Rightarrow a^2 + ab + b^2 \vdots 4$. Do $20 = 5 \cdot 4$; $(5, 4) = 1 \Rightarrow a^2 + ab + b^2 \vdots 20$.

Bài 15: Chứng minh rằng: $A = 1.2.3 \dots 2017.2018 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2017} + \frac{1}{2018}\right)$ chia hết cho 2019

Lời giải

$$A = 1.2.3 \dots 2017.2018 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2017} + \frac{1}{2018}\right)$$

$$A = 1.2.3 \dots 2017.2018 \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{2018}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2017}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2016}\right) + \dots + \left(\frac{1}{1014} + \frac{1}{1015}\right)\right]$$

$$A = 1.2.3 \dots 2017.2018 \cdot \left(\frac{2019}{1.2018} + \frac{2019}{2.2017} + \frac{2019}{3.2016} + \dots + \frac{2019}{1014.1015}\right)$$

$$A = 1.2.3 \dots 2017.2018.2019 \cdot \left(\frac{1}{1.2018} + \frac{1}{2.2017} + \frac{1}{3.2016} + \dots + \frac{1}{1014.1015}\right)$$

$$A = 2019 \cdot \left[1.2.3 \dots 2017.2018 \cdot \left(\frac{1}{1.2018} + \frac{1}{2.2017} + \frac{1}{3.2016} + \dots + \frac{1}{1014.1015}\right)\right]$$

Mà $1.2.3 \dots 2017.2018$ chia hết cho các số 1.2018 ; 2.2017 ; 3.2016 ; $\dots$; 1014.1015

nên $1.2.3 \dots 2017.2018 \cdot \left(\frac{1}{1.2018} + \frac{1}{2.2017} + \frac{1}{3.2016} + \dots + \frac{1}{1014.1015}\right)$ là số tự nhiên

Do đó $A \vdots 2019$ (ĐPCM).

Bài 16: Biết a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $a^2 - ab + b^2$ chia hết cho 9, chứng minh rằng cả a và b đều chia hết cho 3.

Lời giải

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$a^2 - ab + b^2$ chia hết cho 9 suy ra $4(a^2 - ab + b^2) = (2a - b)^2 + 3b^2$ chia hết cho 9. Do $3b^2$ chia hết cho 3 nên $(2a - b)^2$ chia hết cho 3, suy ra $2a - b$ chia hết cho 3. Từ đó, ta có $(2a - b)^2$ chia hết cho 9. Suy ra $3b^2$ chia hết cho 9, do đó b^2 chia hết cho 3, suy ra b chia hết cho 3. Mà $2a - b$ chia hết cho 3 nên ta cũng có a chia hết cho 3. Vậy cả hai số a và b đều chia hết cho 3.

Bài 17: Giả sử Trung tâm thành phố Bến Tre có tất cả 2019 bóng đèn chiếu sáng đô thị, bao gồm 671 bóng đèn ánh sáng trắng, 673 bóng đèn ánh sáng vàng nhạt, 675 bóng đèn ánh sáng vàng sậm. Người ta thực hiện dự án thay bóng đèn theo quy luật sau: mỗi lần người ta tháo bỏ hai bóng đèn khác loại và thay vào đó bằng hai bóng đèn thuộc loại còn lại. Hỏi theo quy trình trên, đến một lúc nào đó, người ta có thể nhận được tất cả các bóng đèn đều thuộc cùng một loại không? Giải thích vì sao?

Lời giải

Ta có 671 chia cho 3 dư 2; 673 chia cho 3 dư 1; 675 chia cho 3 dư 0.

Ta thấy mỗi loại bóng đèn có số bóng khi chia cho 3 được các số dư khác nhau 0, 1, 2.

Sau mỗi bước thay bóng đèn, số bóng đèn mỗi loại giảm đi 1 hoặc tăng thêm 2, khi đó số dư của chúng khi chia cho 3 thay đổi như sau:

-Số chia cho 3 dư 0 sau khi thay chia cho 3 sẽ dư 2.

-Số chia cho 3 dư 1 sau khi thay chia cho 3 sẽ dư 0.

-Số chia cho 3 dư 2 sau khi thay chia cho 3 sẽ dư 1.

Do đó sau mỗi bước thay bóng thì số bóng đèn mỗi loại chia cho 3 cũng có số dư khác nhau là 0, 1, 2. Vì vậy luôn luôn chỉ có 1 loại bóng đèn có số lượng bóng chia hết cho 3. Giả sử đến một lúc nào đó tất cả bóng đèn cùng một loại, thì số bóng đèn của 2 loại kia đều 0 và chia hết cho 3 (mâu thuẫn).

Vậy không thể thay bóng theo quy trình như trên để tất cả bóng đèn cùng một loại.

Bài 18: Chứng minh rằng $2n^3 + 3n^2 + n$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên n .

Lời giải

Ta có: $2n^3 + 3n^2 + n = n(n+1)(2n+1)$.

Nhận thấy rằng $n(n+1)$ là tích của hai số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2.

Xét $2n^3 + 3n^2 + n = n(n+1)(2n+1)$, ta có:

Nếu n chia hết cho 3 thì $2n^3 + 3n^2 + n$ sẽ chia hết cho 3.

Nếu n chia 3 dư 2 thì $n+1$ sẽ chia hết cho 3 nên $2n^3 + 3n^2 + n$ sẽ chia hết cho 3.

Nếu n chia 3 dư 1 thì $2n+1$ sẽ chia hết cho 3 nên $2n^3 + 3n^2 + n$ sẽ chia hết cho 3.

Vậy trong mọi trường hợp $2n^3 + 3n^2 + n = n(n+1)(2n+1)$ sẽ chia hết cho 3.

Ta có: $(2; 3) = 1$ nên $2n^3 + 3n^2 + n$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên n .

Bài 19: Số tự nhiên $n = 111^6$ có tất cả bao nhiêu ước số nguyên dương phân biệt? Tính tích của tất cả các ước số đó.

Lời giải

$$n = 111^6 = 3^6 \cdot 37^6$$

Mỗi ước số nguyên dương của n có dạng $3^x \cdot 37^y$ trong đó $x \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ và $y \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Do x có thể nhận 7 giá trị và y cũng có thể nhận giá trị 7 nên n có tất cả $7 \times 7 = 49$ ước số nguyên dương phân biệt

Nếu a là một ước số nguyên dương của $n, a \neq 111^3$ thì $b = \frac{n}{a}$ cũng là một ước số nguyên dương của $n, b \neq a$. Khi đó a và b tạo thành một cặp ước số nguyên dương của n và chúng có tích đúng bằng n

Trong 49 ước số nguyên dương phân biệt của n , ngoại trừ 111^3 còn 48 ước số còn lại được chia thành 24 cặp ước số có tính chất như cặp ước (a, b)

Vậy tích tất cả các ước nguyên dương phân biệt của n là $(111^6)^{24} \cdot 111^3 = 111^{147}$

Bài 20: Cho biểu thức $A = n^2 + 4n + 5$ (n là số tự nhiên lẻ). Chứng minh rằng A không chia hết cho 8.

Lời giải

Ta có: $n^2 + 4n + 5 = n^2 - 1 + 4n + 6 = (n-1)(n+1) + 2(2n+3)$.

Do n lẻ nên $n-1$ và $n+1$ là 2 số chẵn liên tiếp.

$\Rightarrow (n-1)(n+1)$ chia hết cho 8.

Mà $2n+3$ lẻ $\Rightarrow 2n+3$ không chia hết cho 4.

$\Rightarrow 2(2n+3)$ không chia hết cho 8.

$\Rightarrow (n-1)(n+1) + 2(2n+3)$ không chia hết cho 8.

$\Rightarrow$ đpcm.

Bài 21: Tìm các cặp số nguyên dương $(x; y)$ sao cho $x^2y + x + y$ chia hết cho $xy^2 + y + 1$.

Lời giải

Ta có:

$$x^2y + x + y : xy^2 + y + 1$$

$$\Leftrightarrow y(x^2y + x + y) - x(xy^2 - y + 1) : xy^2 + y + 1$$

$$\Leftrightarrow y^2 - x : xy^2 + y + 1$$

$$\text{TH1: } y^2 = x \Rightarrow \begin{cases} y = m \\ x = m^2 \end{cases} : \text{Với mọi } m \text{ là số tự nhiên khác } 0$$

Thử lại thấy thỏa mãn

TH2: $y^2 > x$, ta có:

$$xy^2 + y + 1 \leq y^2 - x$$

$$\Leftrightarrow (x-1)y^2 + y + x + 1 \leq 0$$

(vô lí do $x, y \geq 1$)

TH3: $y^2 < x$

Ta có: $xy^2 + y + 1 < x - y^2$
 $\Leftrightarrow x(y^2 - 1) + y^2 + y + 1 < 0$
 (vô lí do $x, y \geq 1$)

Vậy, $(x; y) = (m^2; m)$ với m thuộc tập số tự nhiên khác 0

Bài 22: Cho hai số nguyên dương x, y với $x > 1$ và thỏa mãn điều kiện $2x^2 - 1 = y^{15}$. Chứng minh rằng x chia hết cho 15.

Lời giải

Trước tiên, ta chứng minh $x \vdots 3$.

Đặt $y^5 = a$, $a \in \mathbb{N}^*$, ta có $2x^2 - 1 = y^{15} \Leftrightarrow 2x^2 = a^3 + 1 \Leftrightarrow 2x^2 = (a + 1)(a^2 - a + 1)$ (1)

Gọi $\text{ƯCLN}(a + 1; a^2 - a + 1) = d$ ($d \in \mathbb{N}^*$), ta có: $a + 1 \vdots d$, $a^2 - a + 1 \vdots d$.

Suy ra $(a^2 - a + 1) - (a + 1)(a - 2) = 3 \vdots d \Rightarrow d = 1$ hoặc $d = 3$

* Nếu $d = 1$ thì từ (1), ta có:

$$\begin{cases} a + 1 = 2 \\ a^2 - a + 1 = x^2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a + 1 = x^2 \\ a^2 - a + 1 = 2 \end{cases} \quad (\text{loại vì } a \notin \mathbb{N}^*)$$

$$\begin{cases} a + 1 = 2 \\ a^2 - a + 1 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ x = 1 \end{cases} \quad (\text{loại vì phải có } x > 1)$$

* nếu $d = 3$ thì từ (1) ta có: $2x^2 \vdots 9$. Vì $\text{ƯCLN}(2; 9) = 1$ nên $x^2 \vdots 9 \Rightarrow x \vdots 3$ (*)

Chứng minh $x \vdots 5$.

Đặt $y^3 = b$, $b \in \mathbb{N}^*$, ta có: $2x^2 - 1 = b^5 \Leftrightarrow 2x^2 = b^5 + 1$

$$\Leftrightarrow 2x^2 = (b + 1)(b^4 - b^3 + b^2 - b + 1) \quad (2)$$

Gọi $\text{ƯCLN}(b + 1; b^4 - b^3 + b^2 - b + 1) = k$ ($k \in \mathbb{N}^*$)

Ta có: $b + 1 \vdots k$; $b^4 - b^3 + b^2 - b + 1 \vdots k$

$$\Rightarrow (b^4 - b^3 + b^2 - b + 1) - (b + 1)(b^3 - 2b^2 + 3b - 4) = 5 \vdots k$$

Suy ra $k = 1$ hoặc $k = 5$.

* Nếu $k = 1$ thì từ (2) có

$$\begin{cases} b + 1 = x^2 \\ b^4 - b^3 + b^2 - b + 1 = 2 \end{cases} \quad (\text{loại vì } b \notin \mathbb{N}^*) \quad \text{Hoặc: } \begin{cases} b + 1 = 2 \\ b^4 - b^3 + b^2 - b + 1 = x^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ x = 1 \end{cases} \quad (\text{loại vì phải có } x > 1)$$

* Nếu $k = 5$ thì từ (2) suy ra $2x^2 \vdots 25$. Vì $\text{ƯCLN}(2; 25) = 1$ nên $x^2 \vdots 25 \Rightarrow x \vdots 5$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra $x \vdots \text{BCNN}(3; 5)$ hay $x \vdots 15$ (đpcm)

Bài 23: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho $\frac{2^{2020}}{3x+1}$ là số nguyên ?

Lời giải

Cho x là số nguyên. Ta có $\frac{2^{2020}}{3x+1}$ là số nguyên khi $2^{2020} \vdots (3x+1)$. Suy ra $3x+1 = \pm 2^b$

với $b = 0, 1, \dots, 2020$.

TH 1: Xét b là số chẵn, tức là $b = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$).

+ Xét phương trình

$$3x + 1 = 2^{2k} \Leftrightarrow 3x = 4^k - 1 \Leftrightarrow 3x = 3(4^{k-1} + \dots + 1) \Leftrightarrow x = 4^{k-1} + \dots + 1.$$

Vì $0 \leq 2k \leq 2020 \Leftrightarrow 0 \leq k \leq 1010$ nên trường hợp này có 1011 nghiệm.

+ Xét phương trình $3x + 1 = -2^{2k} \Leftrightarrow 3(x + 1) = 2 - 4^k$.

Vì $(2 - 4^k) \not\equiv 3$ nên trường hợp này không có nghiệm nguyên nào.

TH 2: Xét b là số lẻ, tức là $b = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$).

+ Xét phương trình $3x + 1 = 2.4^k \Leftrightarrow 3(x + 1) = 2(1 + 4^k)$.

Vì $2(1 + 4^k) \not\equiv 3$ nên trường hợp này không có nghiệm nguyên nào.

+ Xét phương trình $3x + 1 = -2.4^k \Leftrightarrow 3x = -1 - 2.4^k$.

Vì $(-1 - 2.4^k) \equiv 3$ nên phương trình có nghiệm $x = \frac{-1 - 2.4^k}{3}$.

Ta có $0 \leq 2k + 1 \leq 2020 \Rightarrow 0 \leq k \leq 1009$ nên trường hợp này có 1010 nghiệm.

Vậy có tất cả $1011 + 1010 = 2021$ số nguyên x để $\frac{2^{2020}}{3x + 1}$ là số nguyên.

Bài 24: Cho $A = (a^{2020} + b^{2020} + c^{2020}) - (a^{2016} + b^{2016} + c^{2016})$ với $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ Chứng minh rằng : $A \vdots 30$.

Lời giải

Ta có : $x^5 - x = x(x^4 - 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1) = x(x^2 - 1)[(x^2 - 4) + 5]$

$= (x - 2)(x - 1)x(x + 1)(x + 2) + 5(x - 1)(x + 1)x$

Ta có : $(x - 2)(x - 1)x(x + 1)(x + 2)$ chia hết ch 5 và 6

mà $(5, 6) = 1$ nên $(x - 2)(x - 1)x(x + 1)(x + 2) \vdots 30$

lại có $(x - 1)x(x + 1)$ Chia hết cho 2 và 3 mà $(2, 3) = 1$ nên $5(x - 1)x(x + 1) \vdots 30$

Do đó $x^5 - 1 \vdots 30$

Suy ra $A = (a^{2020} + b^{2020} + c^{2020}) - (a^{2016} + b^{2016} + c^{2016})$

$A = a^{2015}(a^5 - a) + b^{2015}(b^5 - b) + c^{2015}(c^5 - c) \vdots 30$

Vậy $A \vdots 30$

Bài 25: Chứng minh rằng $A = n^8 + 4n^7 + 6n^6 + 4n^5 + n^4$ chia hết cho 16 với mọi n là số nguyên

Lời giải

$A = n^8 + 4n^7 + 6n^6 + 4n^5 + n^4 = n^4 \cdot (n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) = [n(n + 1)]^4$

Vì $n(n + 1)$ là tích hai số nguyên liên tiếp nên $n(n + 1) \vdots 2 \Rightarrow [n(n + 1)]^4 \vdots 2^4 = 16$

Do đó $A \vdots 16$ với mọi n thuộc $\mathbb{Z}$

Bài 26: Cho $B = n^4 + n^3 - n^2 - n$. Chứng minh rằng B chia hết cho 6 với mọi số nguyên n

Lời giải

$B = n^4 + n^3 - n^2 - n$

$B = n^2(n^2 - 1) + n(n^2 - 1)$

$B = n \cdot n \cdot (n - 1)(n + 1) + n(n - 1)(n + 1)$

$B = n(n - 1)(n + 1)(n + 1)$

Do $(n - 1)n(n + 1)$ là tích ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2 và 3

Vậy B chia hết cho 6 với mọi số nguyên n .

Bài 27: Chứng minh với mọi số n lẻ thì $n^2 + 4n + 5$ không chia hết cho 8.

Lời giải

Ta có: $n^2 + 4n + 5 = (n + 2)^2 + 1$.

Vì n là số lẻ suy ra $n + 2 = 2k + 1$, k là số nguyên.

Ta có $(n + 2)^2 + 1 = 4k^2 + 4k + 2$ không chia hết cho 4.

Vậy $n^2 + 4n + 5$ không chia hết cho 8.

Bài 28: Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $P = a^2 + b^2$ là số nguyên tố. $P - 5$ chia hết cho 8.

Giả sử các số nguyên x, y thỏa mãn $ax^2 - by^2$ chia hết cho P . Chứng minh rằng cả hai số x, y đều chia hết cho P .

Lời giải

Đặt $P = 8k + 5$ (k là số tự nhiên)

Ta có $\left[(ax^2)^{4k+2} - (by^2)^{4k+2} \right] : (ax^2 - by^2) \Rightarrow a^{4k+2} \cdot x^{8k+4} - b^{4k+2} \cdot y^{8k+4} : P$

$\Rightarrow (a^{4k+2} + b^{4k+2}) \cdot x^{8k+4} - b^{4k+2} (x^{8k+4} + y^{8k+4}) : P$

Mà $a^{4k+2} + b^{4k+2} = (a^2)^{2k+1} + (b^2)^{2k+1} : a^2 + b^2 = P$ và $b < P \Rightarrow x^{8k+4} + y^{8k+4} : P (*)$

- Nếu trong hai số x, y có một số chia hết cho P . thì từ $(*)$ ta suy ra số thứ hai cũng chia hết cho p .

- Nếu cả hai không chia hết cho P , theo định lý Fec-ma ta có

$x^{8k+4} \equiv y^{8k+4} \equiv 1 \pmod{P} \Rightarrow x^{8k+4} + y^{8k+4} \equiv 2 \pmod{P}$ mâu thuẫn với $(*)$

Vậy cả hai số x, y cùng chia hết cho P .

Bài 29:

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(a; b)$ sao cho $(a + b^2)$ chia hết cho $(a^2b - 1)$.

Lời giải

Giả sử $(a + b^2) : (a^2b - 1)$, tức là: $a + b^2 = k(a^2b - 1)$, với $k \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a + k = b(ka^2 - b) \Leftrightarrow a + k = mb \quad (1)$$

Ở đó $m \in \mathbb{Z}$ mà: $m = ka^2 - b \Leftrightarrow m + b = ka^2 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $(m - 1)(b - 1) = mb - b - m + 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (m - 1)(b - 1) = (a + 1)(k + 1 - ka) \quad (3)$$

Do $m > 0$ (điều này suy ra từ (1) do $a, k, b > 0$) nên $m \geq 1$ (vì $m \in \mathbb{Z}$).

Do $b > 0$ nên $b - 1 \geq 0$ (do $b \in \mathbb{Z}$) $\Rightarrow (m - 1)(b - 1) \geq 0$.

Vì thế từ (3) suy ra: $(a + 1)(k + 1 - ka) \geq 0$.

Lại do $a > 0$ nên suy ra: $k + 1 - ka \geq 0 \Rightarrow k + 1 \geq ka \Rightarrow 1 \geq k(a - 1) \quad (4)$

Vì $a - 1 \geq 0$ (do $a \in \mathbb{Z}$, $a > 0$) và $k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$ nên từ (4) có: $\begin{cases} k(a-1)=0 \\ k(a-1)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=2 \\ k=1 \end{cases}$

- Với $a = 1$. Thay vào (3) ta được: $(m - 1)(b - 1) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m-1=2 \\ b-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ b=3 \end{cases}$

Vậy, trường hợp này ta có: $a = 1, b = 2$ hoặc $a = 1, b = 3$.

- Với $a = 2$ (vì $k = 1$). Thay vào (3) ta có: $(m - 1)(b - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ m=1 \end{cases}$.

Khi $b = 1$, ta được: $a = 2, b = 1$.

Khi $m = 1$: Từ (1) suy ra $a + k = b \Rightarrow b = 3$. Lúc này được: $a = 2, b = 3$.

Tóm lại, có 4 cặp số $(a; b)$ thỏa mãn bài toán là: $(1; 2), (1; 3), (2; 3), (2; 1)$.

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Bài 30: Cho a, b, c là các số nguyên khác 0 thỏa mãn điều kiện:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 3.

Lời giải

Từ giả thiết

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) = 0$$

Vì $a, b, c \neq 0$ nên $a + b + c = 0$

$$\Rightarrow a + b = -c$$

$$\Rightarrow (a + b)^3 = (-c)^3$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = -c^3$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

Lưu ý: Nếu học sinh sử dụng hằng đẳng thức

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

mà không chứng minh thì trừ 0,5 điểm.

Bài 31: Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì $n^2 + n + 2$ không chia hết cho 3.

Lời giải

$$*) \text{ Nếu } n \vdots 3 \Rightarrow n^2 + n \vdots 3$$

$$\text{nên } n^2 + n + 2 \nmid 3 \quad (1)$$

$$*) \text{ Nếu } n \nmid 3 \Rightarrow n^2 + 2 \vdots 3$$

$$\Rightarrow n^2 + n + 2 \nmid 3 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z} \text{ thì } n^2 + n + 2 \nmid 3$$

Bài 32: Chứng minh rằng các số $A = 6^{2015} + 1$ và $B = 6^{2016} - 1$ đều là bội của 7.

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = 6^{2015} + 1 \vdots 6 + 1 = 7 \vdots 7$$

$$B = 6^{2016} - 1 = (6^2)^{1008} - 1 \vdots 6^2 - 1 = 35 \vdots 7$$

Bài 33: Cho hai số nguyên a và b thỏa $24a^2 + 1 = b^2$. Chứng minh rằng chỉ có một số a hoặc b chia hết cho 5.

Lời giải

Cách 1:

$$24a^2 + 1 = b^2 \Leftrightarrow 25a^2 + 1 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 \equiv 1 \pmod{5} \quad (1)$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\text{Ta có: } \begin{cases} a \equiv 0, \pm 1, \pm 2 \pmod{5} \\ b \equiv 0, \pm 1, \pm 2 \pmod{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{5} \\ b^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{5} \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \begin{cases} a^2 \equiv 0 \pmod{5} \\ b^2 \equiv 1 \pmod{5} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a^2 \equiv 1 \pmod{5} \\ b^2 \equiv 0 \pmod{5} \end{cases}.$$

Suy ra chỉ một số a hoặc b chia hết cho 5.

Cách 2:

$$24a^2 + 1 = b^2 \Leftrightarrow 25a^2 + 1 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 5k + 1 \quad (1)$$

$$\forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n = 5l + r \quad (l \in \mathbb{Z}, r \in \{0; 1; 2; 3; 4\})$$

$$\Rightarrow n^2 = 5l_1^2 + r_1^2 \quad (l_1 \in \mathbb{Z}, r_1^2 \in \{0; 1; 4\}) \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \begin{cases} a^2 = 5k_1 + 1 \\ b^2 = 5k_2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a^2 = 5k_1 \\ b^2 = 5k_2 + 1 \end{cases}$$

Suy ra chỉ một số a hoặc b chia hết cho 5.

Bài 34: Cho biểu thức: $P = (a + b)(b + c)(c + a) - abc$ với a, b, c là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu $a + b + c$ chia hết cho 4 thì P chia hết cho 4.

Lời giải

$$a + b + c \vdots 4 \quad (a, b, c \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Đặt } a + b + c = 4k \quad (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow a + b = 4k - c; \quad b + c = 4k - a; \quad a + c = 4k - b$$

$$\text{Ta có: } P = (a + b)(b + c)(c + a) - abc = (4k - c)(4k - a)(4k - b) - abc$$

$$= (16k^2 - 4ak - ack + ac)(4k - b) - abc$$

$$= 64k^3 - 16bk^2 - 16ak^2 + 4abc - 16ck^2 + 4bck + 4ack - abc - abc$$

$$= 4(16k^3 - 4bk^2 - 4ak^2 + abk - 4ck^2 + bck + ack) - 2abc \quad (*)$$

$$\text{Giả sử } a, b, c \text{ đều chia 2 dư 1} \Rightarrow a + b + c \text{ chia 2 dư 1} \quad (1)$$

$$\text{Mà: } a + b + c \vdots 4 \Rightarrow a + b + c \vdots 2 \quad (\text{theo giả thiết}) \quad (2)$$

$$\text{Do đó (1) và (2) mâu thuẫn} \Rightarrow \text{Điều giả sử là sai}$$

$$\Rightarrow \text{Trong ba số } a, b, c \text{ ít nhất có một số chia hết cho 2}$$

$$\Rightarrow 2abc \vdots 4 \quad (**)$$

$$\text{Từ (*) và (**)} \Rightarrow P \vdots 4$$

Bài 35: Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $p = a^2 + b^2$ là số nguyên tố và $p - 5$ chia hết cho 8. Giả sử x, y là các số nguyên thỏa mãn $ax^2 - by^2$ chia hết cho p . Chứng minh rằng cả hai số x, y chia hết cho p .

Lời giải

$$\text{Do } p - 5 \vdots 8 \text{ nên } p = 8k + 5 \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$\text{Vì } (ax^2)^{4k+2} - (by^2)^{4k+2} \vdots (ax^2 - by^2) \vdots p \text{ nên } a^{4k+2} \cdot x^{8k+4} - b^{4k+2} \cdot y^{8k+4} \vdots p$$

$$\text{Nhận thấy } a^{4k+2} \cdot x^{8k+4} - b^{4k+2} \cdot y^{8k+4} = (a^{4k+2} + b^{4k+2})x^{8k+4} - b^{4k+2}(x^{8k+4} + y^{8k+4})$$

$$\text{Do } a^{4k+2} + b^{4k+2} = (a^2)^{2k+1} + (b^2)^{2k+1} \vdots (a^2 + b^2) = p \text{ và } b < p \text{ nên } x^{8k+4} + y^{8k+4} \vdots p \quad (*)$$

Nếu trong hai số x, y có một số chia hết cho p thì từ (*) suy ra số thứ hai cũng chia hết cho p .

Nếu cả hai số x, y đều không chia hết cho p thì theo định lý Fecma ta có:

$$x^{8k+4} = x^{p-1} \equiv 1(\text{mod } p), \quad y^{8k+4} = y^{p-1} \equiv 1(\text{mod } p)$$

$\Rightarrow x^{8k+4} + y^{8k+4} \equiv 2(\text{mod } p)$. Mâu thuẫn với (*). Vậy cả hai số x và y chia hết cho p .

Bài 36: Giả sử Trung tâm thành phố Bến Tre có tất cả 2019 bóng đèn chiếu sáng đô thị, bao gồm 671 bóng đèn ánh sáng trắng, 673 bóng đèn ánh sáng vàng nhạt, 675 bóng đèn ánh sáng vàng sậm. Người ta thực hiện dự án thay bóng đèn theo quy luật sau: mỗi lần người ta tháo bỏ hai bóng đèn khác loại và thay vào đó bằng hai bóng đèn thuộc loại còn lại. Hỏi theo quy trình trên, đến một lúc nào đó, người ta có thể nhận được tất cả các bóng đèn đều thuộc cùng một loại không? Giải thích vì sao?

Lời giải

Ta có 671 chia cho 3 dư 2; 673 chia cho 3 dư 1; 675 chia cho 3 dư 0.

Ta thấy mỗi loại bóng đèn có số bóng khi chia cho 3 được các số dư khác nhau 0, 1, 2. Sau mỗi bước thay bóng đèn, số bóng đèn mỗi loại giảm đi 1 hoặc tăng thêm 2, khi đó số dư của chúng khi chia cho 3 thay đổi như sau:

- Số chia cho 3 dư 0 sau khi thay chia cho 3 sẽ dư 2.

- Số chia cho 3 dư 1 sau khi thay chia cho 3 sẽ dư 0.

- Số chia cho 3 dư 2 sau khi thay chia cho 3 sẽ dư 1.

Do đó sau mỗi bước thay bóng thì số bóng đèn mỗi loại chia cho 3 cũng có số dư khác nhau là 0, 1, 2. Vì vậy luôn luôn chỉ có 1 loại bóng đèn có số lượng bóng chia hết cho 3. Giả sử đến một lúc nào đó tất cả bóng đèn cùng một loại, thì số bóng đèn của 2 loại kia đều 0 và chia hết cho 3 (mâu thuẫn).

Vậy không thể thay bóng theo quy trình như trên để tất cả bóng đèn cùng một loại.

Bài 37: Tìm tất cả các số nguyên dương m, n sao cho $m+n^2$ chia hết cho m^2-n và $n+m^2$ chia hết cho n^2-m .

Lời giải

$$\begin{cases} m+n^2 : m^2-n \\ n+m^2 : n^2-m \end{cases} (1) \Leftrightarrow \begin{cases} m+n^2 \geq m^2-n \\ n+m^2 \geq n^2-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-n+1 & m+n \geq 0 \\ n-m+1 & m+n \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-n+1 \geq 0 \\ n-m+1 \geq 0 \end{cases} \text{ (do } m, n \text{ nguyên dương)} \Leftrightarrow -1 \leq m-n \leq 1$$

*) TH1: $m-n=-1 \Leftrightarrow m=n-1$

$$+) m+n^2 : m^2-n \Rightarrow \frac{m+n^2}{m^2-n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{n-1+n^2}{n-1^2-n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{n^2-3n+1+4n-2}{n^2-3n+1} \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{4n-2}{n^2-3n+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow n^2-3n+1 \leq 4n-2 \Rightarrow n^2-7n+3 \leq 0 \Rightarrow \frac{7-\sqrt{37}}{2} \leq n \leq \frac{7+\sqrt{37}}{2}$$

vì $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n \in 1; 2; 3; 4; 5; 6 \Rightarrow m \in 1; 2; 3; 4; 5$

Thử lại vào (1) ta tìm được các cặp $m; n$ thỏa mãn là: 2; 3.

*) TH2: $m-n=0 \Leftrightarrow m=n$

$$m+n^2 : m^2-n \Rightarrow \frac{m+n^2}{m^2-n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{n+n^2}{n^2-n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{n^2-n+2n}{n^2-n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{2}{n-1} \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow n-1 \leq 2 \Rightarrow n \leq 3$$

Vì $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n \in 1; 2; 3 \Rightarrow m \in 1; 2; 3$

Thử lại vào (1) ta tìm được các cặp số $m; n$ thỏa mãn là: 2; 2, 3; 3.

*) TH3: $m-n=1 \Leftrightarrow m=n+1$

$$n+m^2:n^2-m \Rightarrow \frac{n+m^2}{n^2-m} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{n+n+1^2}{n^2-n-1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{n^2+3n+1}{n^2-n-1} \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{4n+2}{n^2-n-1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow n^2-n-1 \leq 4n+2 \Rightarrow n^2-5n-3 \leq 0 \Rightarrow \frac{5-\sqrt{37}}{2} \leq n \leq \frac{5+\sqrt{37}}{2}$$

Vì $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n \in \{1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow m \in \{2; 3; 4; 5; 6\}$

Thử lại vào (1) ta được các cặp số $m; n$ thỏa mãn là: $3; 2$

Bài 38: Với a, b là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu $4a^2 + 3ab - 11b^2$ chia hết cho 5 thì $a^4 - b^4$ chia hết cho 5.

Lời giải

- Ta có :

$$4a^2 + 3ab - 11b^2 : 5 \Rightarrow (5a^2 + 5ab - 10b^2) - (a^2 + 2ab + b^2) : 5$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 : 5$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2 : 5$$

$$\Rightarrow a+b : 5 \quad (\text{Vì } 5 \text{ là số nguyên tố})$$

- Ta có: $a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a+b)(a-b) : 5$ (đpcm)

Bài 39: Chứng minh rằng $A = (2^n - 1)(2^n + 1)$ chia hết cho 3 với mọi số tự nhiên n

Lời giải

Theo giả thiết n là số tự nhiên nên $2^n - 1; 2^n; 2^n + 1$ là 3 số tự nhiên liên tiếp

Vì tích của 3 số tự nhiên liên tiếp luôn chia hết cho 3 nên $(2^n - 1) \cdot 2^n \cdot (2^n + 1)$ chia hết cho 3

Mặt khác $(2^n; 3) = 1$ nên $(2^n - 1)(2^n + 1)$ chia hết cho 3

Vậy A chia hết cho 3 với mọi số tự nhiên n

Bài 40: Cho a, b, c là các số nguyên khác 0 thỏa mãn điều kiện:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 3.

Lời giải

a) Từ giả thiết

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) = 0$$

Vì $a, b, c \neq 0$ nên $a + b + c = 0$

$$\Rightarrow a + b = -c$$

$$\Rightarrow (a + b)^3 = (-c)^3$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = -c^3$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

Vậy $a^3 + b^3 + c^3 : 3$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$

Lưu ý: Nếu học sinh sử dụng hằng đẳng thức

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

mà không chứng minh thì trừ 0,5 điểm.

Bài 41: Tìm tất cả các số nguyên dương a, b sao cho $a + b^2$ chia hết cho $a^2b - 1$.

Lời giải

Ta có $(a + b^2) \vdots (a^2b - 1)$ suy ra: $a + b^2 = k(a^2b - 1)$, với $k \in \mathbb{N}^*$

$$\Leftrightarrow a + k = b(ka^2 - b) \text{ hay } mb = a + k \quad (1) \text{ với } m = ka^2 - b \in \mathbb{N}^*$$

$$\Leftrightarrow m + b = ka^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $mb - m - b + 1 = a + k - ka^2 + 1$

$$\Leftrightarrow (m - 1)(b - 1) = (a + 1)(k + 1 - ka) \quad (3)$$

$$\text{Do } m, b \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (m - 1)(b - 1) \geq 0$$

Vì thế từ (3) suy ra: $(a + 1)(k + 1 - ka) \geq 0$.

Lại do $a > 0$ nên suy ra: $k + 1 - ka \geq 0 \Rightarrow 1 \geq k(a - 1)$

Vì $a - 1 \geq 0, k > 0$ nên $1 \geq k(a - 1) \geq 0$ và $k(a - 1) \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \begin{cases} k(a - 1) = 0 \\ k(a - 1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \\ k = 1 \end{cases}$$

Với $a = 1$. Thay vào (3) ta được: $(m - 1)(b - 1) = 2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 = 2 \\ b - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \Rightarrow k.a^2 = 5 \Rightarrow a = 1 \\ b = 3 \Rightarrow k.a^2 = 5 \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

Vậy, trường hợp này ta được hai cặp $a = 1; b = 2$ và $a = 1; b = 3$.

$$\text{Với } a = 2 \text{ và } k = 1. \text{ Thay vào (3) ta có: } (m - 1)(b - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ m = 1 \end{cases}.$$

Khi $b = 1$, ta được: $a = 2, b = 1$.

Khi $m = 1$: từ (1) suy ra $a + k = b \Rightarrow b = 3$.

Khi đó: $a = 2, b = 3$.

Vậy có 4 cặp số $(a; b)$ thỏa mãn là: $(1; 2), (1; 3), (2; 3), (2; 1)$.

Bài 42: Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì $(n^2 + n + 1)$ không chia hết cho 9.

Lời giải

Đặt $A = n^2 + n + 1$ do $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n = 3k; n = 3k + 1; n = 3k + 2 \quad (k \in \mathbb{Z})$

* $n = 3k \Rightarrow A$ không chia hết cho 9 (vì A không chia hết cho 3)

* $n = 3k + 1 \Rightarrow A = 9k^2 + 9k + 3$ không chia hết cho 9.

* $n = 3k + 2 \Rightarrow A = 9k^2 + 9k + 7$ không chia hết cho 9

Vậy với mọi số nguyên n thì $A = n^2 + n + 1$ không chia hết cho 9.

Bài 43: Tìm tất cả số nguyên dương n sao cho $A = n.4^n + 3^n \vdots 7$

Lời giải

Với n chẵn $n=2k$ thì

$$A = 2k \cdot 4^{2k} + 3^{2k} = (2k+1) \cdot 4^{2k} + (16^k - 9^k) : 7 \Rightarrow 2k+1 : 7 \Rightarrow k = \frac{7t-1}{2} \Rightarrow n = 14t-1 = 14m+6 (m \in \mathbb{N})$$

Với n lẻ $n=2k+1$

$$A = (2k+1) \cdot 4^{2k+1} + 3^{2k+1} = 2k \cdot 4^{2k+1} + (4^{2k+1} + 3^{2k+1}) : 7 \Rightarrow 2k : 7 \Rightarrow k = 7t \Rightarrow n = 14m+1 (m \in \mathbb{N})$$

Vậy $n = 14m+6$ hoặc $n = 14m+1$ (với mọi $n \in \mathbb{N}$) thì A chia hết cho 7

Bài 44: Cho các số nguyên $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Đặt $S = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3$ và $P = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Chứng minh rằng: S chia hết cho 6 khi và chỉ khi P chia hết cho 6.

Lời giải

Với $a \in \mathbb{Z}$ thì $a^3 - a = (a-1)a(a+1)$ là tích 3 số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 2 và 3. Mà

$$(2 \cdot 3) = 1 \Rightarrow a^3 - a : 6 \Rightarrow S - P = (a_1^3 - a_1) + (a_2^3 - a_2) + \dots + (a_n^3 - a_n) : 6$$

$$\text{Vậy } S : 6 \Leftrightarrow P : 6$$

Bài 45: Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì $n^2 + n + 2$ không chia hết cho 3.

Lời giải

$$*) \text{ Nếu } n : 3 \Rightarrow n^2 + n : 3 \text{ nên } n^2 + n + 2 \not: 3 \quad (1)$$

$$*) \text{ Nếu } n \not: 3 \Rightarrow n^2 + 2 : 3 \Rightarrow n^2 + n + 2 \not: 3 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z} \text{ thì } n^2 + n + 2 \not: 3$$

3. Số tận cùng, chữ số tận cùng

A. Bài toán

Bài 1: Tìm ba chữ số tận cùng của tích của mười hai số nguyên dương đầu tiên.

B. Lời giải

Bài 1: Tìm ba chữ số tận cùng của tích của mười hai số nguyên dương đầu tiên.

Lời giải

$$\text{Đặt: } S = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12$$

$$\Rightarrow \frac{S}{100} = 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 12 \quad (1) \text{ là một số nguyên}$$

$\Rightarrow$ hai chữ số tận cùng của S là 00. Mặt khác, trong suốt quá trình nhân liên tiếp các thừa số ở vế phải của (1), nếu chỉ để ý đến chữ số tận cùng, ta thấy $\frac{S}{100}$ có chữ số tận cùng là 6 (vì $3 \cdot 4 = 12$;

$$2 \cdot 6 = 12; 2 \cdot 7 = 14; 4 \cdot 8 = 32; 2 \cdot 9 = 18; 8 \cdot 11 = 88; 8 \cdot 12 = 96)$$

Vậy ba chữ số tận cùng của S là 600

3. Số tận cùng, chữ số tận cùng

A. Bài toán (giữ nguyên màu)

Bài 1: Điểm số trung bình của một vận động viên bắn súng sau 100 lần bắn là 8,35 điểm. Kết quả cụ thể được ghi trong bảng sau, trong đó có ba ô bị mờ ở chữ số hàng đơn vị không đọc được (tại vị trí đánh dấu *).

Điểm số của mỗi lần bắn	10	9	8	7	6	5
Số lần bắn	2*	40	1*	1*	9	7

Em hãy tìm lại các chữ số hàng đơn vị trong ba ô đó.

B. Lời giải (giữ nguyên màu)

Bài 1: Điểm số trung bình của một vận động viên bắn súng sau 100 lần bắn là 8,35 điểm. Kết quả cụ thể được ghi trong bảng sau, trong đó có ba ô bị mờ ở chữ số hàng đơn vị không đọc được (tại vị trí đánh dấu *).

Điểm số của mỗi lần bắn	10	9	8	7	6	5
Số lần bắn	2*	40	1*	1*	9	7

Em hãy tìm lại các chữ số hàng đơn vị trong ba ô đó.

Lời giải

Tổng các số tại các ô bị mờ số là $100 - (40 + 9 + 7) = 44$

Tổng số điểm trong 100 lần bắn là $8,35 \cdot 100 = 835$

Tổng số điểm tại các vị trí ô không bị mất số là $9 \cdot 40 + 6 \cdot 9 + 5 \cdot 3 = 449$

Suy ra tổng số điểm bắn được tại vị trí các ô bị mất là $835 - 449 = 386$, đây là số chẵn

Suy ra tại ô 7 điểm số lần bắn chỉ có thể là số chẵn, vì vậy chỉ có 3 khả năng là 10, 12, 14.

Gọi x, y lần lượt là số lần bắn được 10 điểm và 8 điểm

Điều kiện: $x, y \in \mathbb{N}; 20 \leq x < 30; 10 \leq y < 20$

Trường hợp 1: Ô 7 điểm nhận giá trị 10, khi đó theo đề bài ta có hệ phương trình.

$$\begin{cases} x + y = 34 \\ 449 + 10x + 8y + 70 = 835 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 34 \\ 10x + 8y = 316 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 22 \\ y = 12 \end{cases} \text{ thỏa điều kiện}$$

Trường hợp 2: Ô 7 điểm nhận giá trị 12, khi đó theo đề bài ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 32 \\ 449 + 10x + 8y + 84 = 835 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 32 \\ 10x + 8y = 316 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 23 \\ y = 9 \end{cases} \text{ loại}$$

Trường hợp 3: Ô 7 điểm nhận giá trị 14, khi đó $x = 20$ và $y = 10$ suy ra

Tổng số điểm bắn được là:

$$20 \cdot 10 + 9 \cdot 40 + 8 \cdot 10 + 7 \cdot 14 + 6 \cdot 9 + 5 \cdot 7 = 827 \text{ không phù hợp}$$

Vậy chữ số hàng đơn vị tại các ô 10 điểm, 8 điểm, 7 điểm lần lượt là 2, 2, 0

4. Số chữ số của một số tự nhiên

A. Bài toán

Bài 1: Biết rằng $\underbrace{111\dots1}_{2018 \text{ chữ số } 1} \underbrace{5555\dots5}_{2018 \text{ chữ số } 5}$ là tích của hai số lẻ liên tiếp. Tính tổng hai số lẻ đó.

Bài 2: Tìm một số có hai chữ số; biết rằng số đó chia hết cho 3 và nếu thêm số 0 vào giữa các chữ số rồi cộng vào số mới tạo thành một số bằng hai lần chữ số hàng trăm của nó thì được một số lớn gấp 9 lần số phải tìm.

B. Lời giải

Bài 1: Biết rằng $\underbrace{111...1}_{2018 \text{ chữ số } 1} \underbrace{5555...5}_{2018 \text{ chữ số } 5}$ là tích của hai số lẻ liên tiếp. Tính tổng hai số lẻ đó.

Lời giải

$$\begin{aligned} \underbrace{1111...1}_{2018 \text{ chu so } 1} \underbrace{5555...5}_{2018 \text{ chu so } 5} &= \underbrace{1111...1}_{2018 \text{ chu so } 1} \cdot \underbrace{100...05}_{2017 \text{ chu so } 0} \\ &= \underbrace{1111...1}_{2018 \text{ chu so } 1} \cdot \underbrace{3.333...35}_{2017 \text{ chu so } 3} \\ &= \underbrace{3333...3}_{2018 \text{ chu so } 3} \cdot \underbrace{3333...35}_{2017 \text{ chu so } 3} \\ &= \underbrace{6666...68}_{2017 \text{ chu so } 6} \end{aligned}$$

Vậy tổng của 2 số lẻ đó là:

$$\underbrace{6666...68}_{2017 \text{ số}}$$

Bài 2: Tìm một số có hai chữ số; biết rằng số đó chia hết cho 3 và nếu thêm số 0 vào giữa các chữ số rồi cộng vào số mới tạo thành một số bằng hai lần chữ số hàng trăm của nó thì được một số lớn gấp 9 lần số phải tìm.

Lời giải

Gọi số cần tìm là $\overline{ab}$. Ta có: $\overline{ab} : 3$ và $\overline{a0b} + 2a = 9\overline{ab}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b) : 3 \\ 100a + b + 2a = 9(10a + b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b) : 3 \\ 3a = 2b \end{cases}$$

Từ $3a = 2b \Rightarrow 2b : 3$ mà $(2,3) = 1 \Rightarrow b : 3$ do $(a+b) : 3 \Rightarrow a : 3$ mà $3a : 2 \Rightarrow a : 2$

Ta có $a : 3, a : 2, (2,3) = 1 \Rightarrow a : 6, 1 \leq a \leq 9 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow b = 9$

Vậy $\overline{ab} = 69$

5. Phương trình nghiệm nguyên

A. Bài toán

Bài 1: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 = 5$

Bài 2: Tìm tất cả các cặp số nguyên thỏa mãn: $(x^2 - x + 1)(y^2 + xy) = 3x - 1$.

Bài 3: Tìm x, y nguyên sao cho $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{18}$.

Bài 4: Tìm tất cả các số x, y nguyên dương thỏa mãn phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{617}$.

Bài 5: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^4 + x^2 - y^2 - y + 20 = 0$.

Bài 6: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 - 2y(x - y) = 2(x + 1)$.

Bài 7: Tìm tất cả các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn $\frac{x^2 + y^2}{x + y} = \frac{85}{13}$.

Bài 8: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $5^x + 2.5^y + 5^z = 4500$ với $x < y < z$.

Bài 9: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $y^2 + 2xy - 3x - 2 = 0$

Bài 10: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $2x^6 + y^2 - 2x^3y = 320$

Bài 11: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $1 + x + x^2 + x^3 = y^3$

Bài 12: Giải phương trình nghiệm nguyên $8x^2 - 3xy - 5y = 25$

Bài 13: Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 91$ và $b^2 = ca$.

Bài 14: Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $(x - 2018)^2 = y^4 - 6y^3 + 11y^2 - 6y$

Bài 15: Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình $2^x + 3 = y^2$

Bài 16: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $(x - y)(2x + y + 1) + 9(y - 1) = 13$

Bài 17: Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2017$

Bài 18: Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn: $x^2 - y^2 + 4x - 2y = 18$.

Bài 19:

1. Tìm cặp số nguyên x, y thỏa mãn $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - y^2 - y = 0$.

2. Có bao nhiêu số nguyên dương có 6 chữ số $\overline{abcdef}$ sao cho $100a - d + 10b - e + c - f$ chia hết cho 1001?

Bài 20: Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình

$$\frac{x - y}{x^2 + xy + y^2} = \frac{7}{13}$$

Bài 21: Tìm cặp số nguyên x, y thỏa mãn $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - y^2 - y = 0$.

Bài 22: Tìm số nguyên x, y thỏa mãn $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$

Bài 23: Giải phương trình nghiệm nguyên: $4x^2 + 8x = 38 - 6y^2$

Bài 24: Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương x, y thỏa mãn phương trình

$$5x^2 + 6xy + 2y^2 + 2x + 2y - 40 = 0.$$

Bài 25: Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $x(1 + x + x^2) = 4y(y - 1)$.

Bài 26: Tìm số thực x để 3 số $x - \sqrt{3}; x^2 + 2\sqrt{3}; x - \frac{2}{x}$ là số nguyên

Bài 27: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 + xy - x - y = 1$.

Bài 28: Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$

Bài 29: Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

$$2xy^2 + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy$$

Bài 30: Cho ba số x, y, z thỏa các hệ thức $(z-1)x - y = 1$ và $x + zy = 2$. Chứng minh rằng $(2x-y)(z^2 - z + 1) = 7$ và tìm tất cả các số nguyên x, y, z thỏa hệ thức trên.

Bài 31: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2x + 5y - 3xy = 1$.

Bài 32: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2y^2 + x - 2y + 5 = xy$.

Bài 33: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 y^2 (x + y) + x = 2 + y(x - 1)$.

Bài 34: Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $x^2 + 2xy + 7(x + y) + 2y^2 + 10 = 0$.

Bài 35: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2xy^2 + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy$

Bài 36: Cho ba số x, y, z thỏa các hệ thức $(z-1)x - y = 1$ và $x + zy = 2$. Chứng minh rằng $(2x-y)(z^2 - z + 1) = 7$ và tìm tất cả các số nguyên x, y, z thỏa hệ thức trên.

Bài 37: Tìm các số x, y nguyên dương thỏa mãn phương trình: $16(x^3 - y^3) = 15xy + 371$.

Bài 38: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2x + 5y - 3xy = 1$.

Bài 39: Tìm số tự nhiên $\overline{abcd}$ sao cho $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + a = 4321$.

Bài 40: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $\sqrt{x+y+3} + 1 = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

Bài 41: Tìm tất cả cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $2020(x^2 + y^2) - 2019(2xy + 1) = 5$.

Bài 42: Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để $A = \frac{x^4 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 3x + 6}$ nhận giá trị là một số nguyên.

Bài 43: Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $y^2 + y = x^4 + x^3 + x^2 + x$.

Bài 44: Tìm các số nguyên của PT: $x^2 - xy - 5x + 5y = 2$.

Bài 45: Tìm tất cả các số nguyên x cho $\frac{x-3}{x^2+1}$ là một số nguyên.

Bài 46: Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương $(p; q; n)$, trong đó p, q là các số nguyên tố thỏa mãn: $p(p+3) + q(q+3) = n(n+3)$.

Bài 47: Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình: $3x - 16y - 24 = \sqrt{9x^2 + 16x + 32}$

Bài 48: Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình: $2y^2x + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy$

Bài 49: Tìm các số nguyên dương n để $A = \frac{(n-8)^2 - 48}{n+5}$ có giá trị là số nguyên dương.

Bài 50: Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn đẳng thức: $x^2 + y(y^2 + y - 3x) = 0$

Bài 51: Chứng minh rằng với mọi số nguyên x thì $P(x) = 1985 \cdot \frac{x^3}{3} + 1979 \cdot \frac{x^2}{3} + 5 \cdot \frac{x}{6}$ có giá trị là số nguyên.

Bài 52: Cho $f(x)$ là đa thức với hệ số nguyên. Biết $f(2017) \cdot f(2018) = 2019$. Chứng minh rằng phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm nguyên.

Bài 53: Tìm nghiệm $(x; y)$ của phương trình $x^2 + 2y^2 + 3xy + 8 = 9x + 10y$ với x, y thuộc $\mathbb{N}^*$.

Bài 54: Tìm nghiệm x, y nguyên dương thỏa mãn phương trình: $2x^2 - 2xy = 5x - y - 19$.

Bài 55: Có thể lát kín một cái sân hình vuông cạnh 3,5m bằng những viên gạch hình chữ nhật kích thước 25cm x 100cm mà không cắt gạch được hay không?

Bài 56: Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn phương trình $xy^2 + 2xy + x = 32y$.

Bài 57: Giải phương trình trên tập nguyên

$$x^2 + 5y^2 - 4xy + 4x - 8y - 12 = 0$$

Bài 58: Tìm $x, y, z \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $\sqrt{x+2\sqrt{3}} = \sqrt{y} + \sqrt{z}$.

Bài 59: Tìm các số tự nhiên x, y biết rằng:

$$(2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4) - 5^y = 11879$$

Bài 60: Cho tam giác vuông có độ dài các cạnh là những số nguyên và số đo chu vi bằng hai lần số đo diện tích. Tìm độ dài các cạnh của tam giác đó.

Bài 61: Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn: $2y^2x + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy$

Bài 62: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $3^x + 171 = y^2$

Bài 63: Tìm tất cả các cặp số nguyên (m, n) sao cho $2n^3 - mn^2 - 3n^2 + 14n - 7m - 5 = 0$

Bài 64: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 - 25 = y(y + 6)$

Bài 65: Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) thỏa mãn đẳng thức:

$$a^3 - b^3 + 3(a^2 - b^2) + 3(a - b) = (a + 1)(b + 1) + 25.$$

Bài 66: Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $5(x^2 + xy + y^2) = 7(x + 2y)$

Bài 67: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $5x^2 + y^2 = 17 - 2xy$

Bài 68: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $y^2 - 5y + 62 = (y - 2)x^2 + (y^2 - 6y + 8)x$.

Bài 69: Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa phương trình $2x^2 + y^2 + xy = 2(x + y)$

Bài 70: Tìm các số x, y nguyên dương thỏa mãn phương trình: $16(x^3 - y^3) = 15xy + 371$.

Bài 71: Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình: $x + xy + y = 9$.

Bài 72: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $y^2 = -2(x^6 - x^3y - 32)$

Bài 73:

1) Chứng minh rằng với k là số nguyên thì $2016k + 3$ không phải là lập phương của một số nguyên.

2) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - 25 = y(y + 6)$

Bài 74: Tìm các số nguyên a, b thỏa mãn $\frac{5}{a+b\sqrt{2}} - \frac{4}{a-b\sqrt{2}} + 18\sqrt{2} = 3$

Bài 75: Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $x^5 + y^2 = xy^2 + 1$

Bài 76: Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn: $2y^2x + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy$

Bài 77: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $6x^2 + 5y^2 = 74$

B. Lời giải

Bài 1: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 = 5$

Lời giải

$$x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 = 5 \Leftrightarrow (x + y)(x^2 - xy + y^2) - xy(x + y) = 5$$

$$\Leftrightarrow (x + y)(x^2 - 2xy + y^2) = 5$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x^2-2xy+y^2)=5$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x-y)^2=5 \quad (1)$$

Vì $x; y \in \mathbb{Z}$ và $(x-y)^2 \geq 0$ nên

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ (x-y)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \\ x+y=5 \\ x-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ x=2 \\ y=3 \end{cases}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm nguyên $(3;2)$ và $(2;3)$.

Bài 2: Tìm tất cả các cặp số nguyên thỏa mãn: $(x^2-x+1)(y^2+xy)=3x-1$.

Lời giải

Vì $(x^2-x+1)(y^2+xy)=3x-1$ nên $(3x-1):(x^2-x+1)$

$$\Rightarrow (3x-1)(3x-2):(x^2-x+1)$$

$$\Rightarrow (9x^2-9x+2):(x^2-x+1)$$

$$\Rightarrow [9(x^2-x+1)-7]:(x^2-x+1)$$

$$\Rightarrow 7:(x^2-x+1)$$

$$\Rightarrow (x^2-x+1) \in \{1;7\} \quad (\text{vì } x^2-x+1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0)$$

$$\Rightarrow x \in \{-2;0;1;3\}$$

Với $x=-2$, ta có phương trình: $7y^2-14y+7=0 \Leftrightarrow y=1$

Với $x=0$, ta có phương trình: $y^2=-1$ (phương trình vô nghiệm)

Với $x=1$, ta có phương trình: $y^2+y-2=0 \Leftrightarrow y=1$ hoặc $y=-2$

Với $x=3$, ta có phương trình: $7y^2+21y-8=0$ (phương trình có nghiệm vô tỷ)

Vậy phương trình có ba nghiệm nguyên $(-2;1)$; $(1;1)$ và $(1;-2)$.

Bài 3: Tìm x, y nguyên sao cho $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{18}$.

Lời giải

Ta có: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{18} \quad (x \geq 0; y \geq 0) \quad (1)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 3\sqrt{2} - \sqrt{y}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 = (3\sqrt{2} - \sqrt{y})^2$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\Leftrightarrow 6\sqrt{2y} = y - x + 18$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2y} = \frac{y - x + 18}{6} \in \mathbb{Q}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2y} = a \in \mathbb{Q}$$

$$\Leftrightarrow 2y = a^2 \in \mathbb{Q}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 \in \mathbb{N} \\ a : 2 \end{cases} \quad (\text{vì } 2y \in \mathbb{Z}; a \geq 0)$$

$$\text{Đặt } a = 2m \quad (m \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow 2y = (2m)^2 \Rightarrow y = 2m^2 \Rightarrow \sqrt{y} = m\sqrt{2}$$

$$\text{Tương tự: } \sqrt{x} = n\sqrt{2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$(1) \Leftrightarrow n\sqrt{2} + m\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow m + n = 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n=0 \\ m=3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} n=1 \\ m=2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} n=2 \\ m=1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} n=3 \\ m=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=18 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=2 \\ y=8 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=8 \\ y=2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=18 \\ y=0 \end{cases}$$

Vậy phương trình có bốn nghiệm nguyên $(0;18); (2;8); (8;2)$ và $(18;0)$.

Bài 4: Tìm tất cả các số x, y nguyên dương thỏa mãn phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{617}$.

Lời giải

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{617} \Leftrightarrow \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{617} \Leftrightarrow xy - 617(x+y) = 0 \Leftrightarrow xy - 617x - 617y + 617^2 = 617^2$$

$$\Leftrightarrow (x-617)(y-617) = 617^2$$

Vì x, y nguyên dương nên $x-617$ và $y-617$ là ước lớn hơn -617 của 617^2

Vì 617 là số nguyên tố nên xảy ra 3 trường hợp:

$$\begin{cases} x-617=617 \\ y-617=617 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x-617=1 \\ y-617=617^2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x-617=617^2 \\ y-617=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1234 \\ y=1234 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=618 \\ y=381306 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=381306 \\ y=618 \end{cases}$$

Vậy phương trình có ba nghiệm nguyên $(1234;1234); (618;381306)$ và $(381306;618)$.

Bài 5: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^4 + x^2 - y^2 - y + 20 = 0$.

Lời giải

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$x^4 + x^2 - y^2 - y + 20 = 0 \Leftrightarrow x^4 + x^2 + 20 = y^2 + y$$

$$\text{Mà } x^4 + x^2 < x^4 + x^2 + 20 \leq x^4 + x^2 + 20 + 8x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2 + 1) < y(y + 1) \leq (x^2 + 4)(x^2 + 5)$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên ta xét các trường hợp sau:

$$\text{TH1: } y(y + 1) = (x^2 + 1)(x^2 + 2)$$

$$\Leftrightarrow x^4 + x^2 + 20 = x^4 + 3x^2 + 2 \Leftrightarrow 2x^2 = 18 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

$$\text{Với } x^2 = 9, \text{ ta có } y^2 + y = 9^2 + 9 + 20 \Leftrightarrow y^2 + y - 110 = 0 \Leftrightarrow y = 10; y = -11 \text{ (nhận)}$$

$$\text{TH2: } y(y + 1) = (x^2 + 2)(x^2 + 3)$$

$$\Leftrightarrow x^4 + x^2 + 20 = x^4 + 5x^2 + 6 \Leftrightarrow 4x^2 = 14 \Leftrightarrow x^2 = \frac{7}{2} \text{ (loại)}$$

$$\text{TH3: } y(y + 1) = (x^2 + 3)(x^2 + 4)$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3} \text{ (loại)}$$

$$\text{TH4. } y(y + 1) = (x^2 + 4)(x^2 + 5) \Leftrightarrow 8x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{Với } x^2 = 0, \text{ ta có: } y^2 + y = 20 \Leftrightarrow y^2 + y - 20 = 0 \Leftrightarrow y = -5; y = 4 \text{ (nhận)}$$

Vậy nghiệm nguyên của PT là: $(3; 10); (3; -11); (-3; 10); (-3; -11); (0; -5); (0; 4)$

Bài 6: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 - 2y(x - y) = 2(x + 1)$.

Lời giải

$$x^2 - 2y(x - y) = 2(x + 1) \Leftrightarrow x^2 - 2(y + 1)x + 2(y^2 - 1) = 0 \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } \Delta' = y^2 + 2y + 1 - 2y^2 + 2 = -y^2 + 2y + 3 = 4 - (y - 1)^2 \leq 4$$

Để phương trình (1) có nghiệm nguyên thì Δ' phải là số chính phương

$$\Rightarrow \Delta' = 0; 1; 4$$

$$\text{Với } \Delta' = 0, \text{ ta có: } (y - 1)^2 = 4 \Leftrightarrow y^2 - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = -1 \text{ hoặc } y = 3$$

$$y = -1 \text{ thì } (1) \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$y = 3 \text{ thì } (1) \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

$$\text{Với } \Delta' = 1, \text{ ta có: } 4 - (y - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 - 2y - 2 = 0 \text{ (phương trình có nghiệm vô tỉ)}$$

$$\text{Với } \Delta' = 4, \text{ ta có: } (y - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow y = 1$$

$$y = 1 \text{ thì } (1) \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 4$$

Vậy phương trình (1) có 4 nghiệm nguyên: $(x; y) \in \{(0; 1); (4; 1); (4; 3); (0; -1)\}$

Bài 7: Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $\frac{x^2 + y^2}{x + y} = \frac{85}{13}$.

Lời giải

$$\text{Vì } x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x + y, x^2 + y^2 \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y} = \frac{85}{13} \Leftrightarrow 85(x + y) = 13(x^2 + y^2) > 0$$

$$\Rightarrow x + y > 0 \text{ và } (x + y) : 13 \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức $x^2 + y^2 \geq \frac{(x + y)^2}{2}$, ta có:

$$\text{Ta có: } 85(x + y) = 13(x^2 + y^2) \geq \frac{13}{2}(x + y)^2 \Rightarrow x + y \leq \frac{170}{13} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow x + y = 13 \Rightarrow x^2 + y^2 = 85$$

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ x^2 + y^2 = 85 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 13 - x \\ x^2 + (13 - x)^2 = 85 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 13 - x \\ 2x^2 - 26x + 84 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 7 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 7 \\ y = 6 \end{cases}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm nguyên: $(6; 7)$ và $(7; 6)$

Bài 8: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $5^x + 2.5^y + 5^z = 4500$ với $x < y < z$.

Lời giải

$$\text{Từ } 5^x + 2.5^y + 5^z = 4500 \quad (*)$$

$$\Rightarrow 5^x (1 + 2.5^{y-x} + 5^{z-x}) = 4500 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3$$

$$\Rightarrow 5^x = 5^3; 1 + 2.5^{y-x} + 5^{z-x} = 36 = 1 + 35$$

$$\Rightarrow x = 3; 5^{y-x} (2 + 5^{z-y}) = 5 \cdot 7$$

$$\Rightarrow x = 3; y - 3 = 1; 2 + 5^{z-y} = 7 = 2 + 5$$

$$\Rightarrow x = 3; y = 4; z - y = 1$$

$$\Rightarrow x = 3; y = 4; z = 5 \text{ thỏa } (*)$$

Bài 9: Tìm các số nguyên $x; y$ thỏa mãn: $y^2 + 2xy - 3x - 2 = 0$

Lời giải

$$\text{Ta có } y^2 + 2xy - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + 3x + 2 \Leftrightarrow (x + y)^2 = (x + 1)(x + 2) \quad (*)$$

VT của (*) là số chính phương; VP của (*) là tích của 2 số nguyên liên tiếp nên phải có 1 số bằng

$$0. \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \Rightarrow y=1 \\ x=-2 \Rightarrow y=2 \end{cases}$$

Vậy có 2 cặp số nguyên $(x; y) = (-1; 1)$ hoặc $(x; y) = (-2; 2)$

Bài 10: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $2x^6 + y^2 - 2x^3y = 320$

Lời giải

$$y^2 - 2x^3y + (2x^6 - 320) = 0$$

$$\Delta' = x^6 - 2x^6 + 320 = 320 - x^6 \geq 0 \Leftrightarrow x^6 \leq 320 \Leftrightarrow |x| \leq 2 \quad (\text{vì } x \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow x = 0; \pm 1; \pm 2$$

$$* \quad x = 0 \Rightarrow y \in \mathbb{I} \Rightarrow y \notin \mathbb{Z}$$

$$* \quad x = \pm 1 \Rightarrow y \in \mathbb{I} \Rightarrow y \notin \mathbb{Z}$$

$$* \quad x = \pm 2 \Rightarrow \Delta' = 320 - (\pm 2)^6 = 256 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 16 \Rightarrow y = \frac{(\pm 2)^3 \pm 16}{1} = \dots$$

$$\text{KL: } (x; y) = (-2; -24); (-2; 8); (2; -8); (2; 24)$$

Bài 11: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $1 + x + x^2 + x^3 = y^3$

Lời giải

$$\text{Ta có } x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0; 5x^2 + 11x + 7 = 5\left(x + \frac{11}{10}\right)^2 + \frac{19}{20} > 0$$

$$x^3 + (x^2 + x + 1) = 1 + x + x^2 + x^3 = (8 + 12x + 6x^2 + x^3) - (5x^2 + 11x + 7)$$

$$\Rightarrow x^3 < 1 + x + x^2 + x^3 < (x + 2)^3$$

vì $x, y \in \mathbb{Z}$ mà $y^3 = 1 + x + x^2 + x^3$ Suy ra

$$(x + 1)^3 = 1 + x + x^2 + x^3 \Leftrightarrow x(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\text{Với } x = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$\text{Với } x = -1 \Rightarrow y = 0$$

$$\text{Vậy } (x; y) \in \{(0; 1); (-1; 0)\}$$

Bài 12: Giải phương trình nghiệm nguyên $8x^2 - 3xy - 5y = 25$

Lời giải

$$8x^2 - 3xy - 5y = 25 \Leftrightarrow y(3x + 5) = 8x^2 - 25 \Leftrightarrow y = \frac{8x^2 - 25}{3x + 5} \Leftrightarrow 9y = 24x - 40 - \frac{25}{3x + 5} \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Khi } 3x + 5 \text{ là ước } 25 \text{ từ đó tìm được } (x; y) \in \{(-10; -31); (-2; -7); (0; -5)\}$$

(cách khác nhân 2 vế với 9 đưa về tích)

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Bài 13: Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 91$ và $b^2 = ca$.

Lời giải

Đặt $b = qa; c = q^2a (q > 1)$ thì ta được $a(1 + q + q^2) = 91 = 13 \cdot 7$.

Trường hợp 1: Nếu q là số tự nhiên thì ta được $\begin{cases} a = 1 \\ 1 + q + q^2 = 91 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ q = 9 \end{cases} \Rightarrow a = 1; b = 9; c = 81$.

$\begin{cases} a = 7 \\ 1 + q + q^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 \\ q = 3 \end{cases} \Rightarrow a = 7; b = 21; c = 63$.

$\begin{cases} a = 13 \\ 1 + q + q^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 13 \\ q = 2 \end{cases} \Rightarrow a = 13; b = 26; c = 52$.

Trường hợp 2: Nếu q là số hữu tỷ thì giả sử $q = \frac{x}{y} (x \geq 3; y \geq 2)$.

Khi đó $a(1 + q + q^2) = 91 \Leftrightarrow a(x^2 + xy + y^2) = 91y^2 (x^2 + xy + y^2 \geq 19)$

Ta có $c = \frac{ax^2}{y^2} \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{a}{y^2} \in \mathbb{N} \Rightarrow a = ty^2 \Rightarrow x^2 + xy + y^2 = 91 \Rightarrow x = 6; y = 5$ và $a = 25; b = 30; c = 36$.

Vậy có 8 bộ số $(a; b; c)$ thỏa mãn $(1; 9; 81), (81; 9; 1), (7; 21; 63), (63; 21; 7); \dots$

Bài 14: Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $(x - 2018)^2 = y^4 - 6y^3 + 11y^2 - 6y$

Lời giải

$(x - 2018)^2 = y^4 - 6y^3 + 11y^2 - 6y \Leftrightarrow (x - 2018)^2 + 1 = (y^2 - 3y + 1)^2$

$\Leftrightarrow (x - 2018)^2 - (y^2 - 3y + 1)^2 = 1 \Leftrightarrow (y^2 - 3y - x + 2019)(y^2 - 3y + x - 2017) = 1$

Vì cặp $x; y$ nguyên nên:

TH1: $\begin{cases} y^2 - 3y - x + 2019 = 1 \\ y^2 - 3y + x - 2017 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2018 \\ y^2 - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2018; y = 0 \\ x = 2018; y = 3 \end{cases}$

TH2: $\begin{cases} y^2 - 3y - x + 2019 = -1 \\ y^2 - 3y + x - 2017 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2018 \\ y^2 - 3y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2018; y = 1 \\ x = 2018; y = 2 \end{cases}$

Vậy phương trình có các nghiệm $(x; y) \in \{(2018; 0), (2018; 1), (2018; 2), (2018; 3)\}$

Bài 15: Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình $2^x + 3 = y^2$

Giải:

Với $x = 0$ thì $y = 2$ hoặc $y = -2$

Với $x = 1$ thì $y^2 = 5$ (loại)

Với $x \geq 2$ thì VT chia 4 dư 3,

Vì VT là số tự nhiên lẻ $\Rightarrow y$ là số tự nhiên lẻ

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$\Rightarrow$ VP chia 4 dư 1 $\Rightarrow$ vô lí.

Vậy nghiệm tự nhiên của phương trình là $(x, y) = (0; 2)$

Bài 16: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $(x - y)(2x + y + 1) + 9(y - 1) = 13$

Giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } (x - y)(2x + y + 1) + 9(y - 1) = 13 &\Leftrightarrow 2x^2 + xy + x - 2xy - y^2 - y + 9y - 9 - 13 = 0 \\ (2x^2 - 2xy + 6x) + (xy - y^2 + 3y) - (5x - 5y + 15) &= 7 \Leftrightarrow 2x(x - y + 3) + y(x - y + 3) - 5(x - y + 3) = 7 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (x - y + 3)(2x + y - 5) = 7$$

$$+ \text{ TH1: } \begin{cases} x - y + 3 = 1 \\ 2x + y - 5 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -2 \\ 2x + y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{3} \\ y = \frac{16}{3} \end{cases} \text{ (loại)}$$

$$+ \text{ TH2: } \begin{cases} x - y + 3 = 7 \\ 2x + y - 5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 4 \\ 2x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{3} \\ y = \frac{-2}{3} \end{cases} \text{ (loại)}$$

$$+ \text{ TH3: } \begin{cases} x - y + 3 = -1 \\ 2x + y - 5 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -4 \\ 2x + y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$+ \text{ TH4: } \begin{cases} x - y + 3 = -7 \\ 2x + y - 5 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -10 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 8 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy pt đã cho có nghiệm nguyên $(x; y)$ là: $(-2; 2), (-2; 8)$.

Bài 17: Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2017$

Giải:

$$\text{Phương trình: } \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2017 \quad (x, y \geq 0) \Leftrightarrow x = 2017^2 + y - 4034\sqrt{y}$$

$$\text{Do } x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{y} \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là: $x = a^2; y = (2017 - a)^2$

Bài 18: Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn: $x^2 - y^2 + 4x - 2y = 18$.

Giải:

Ta có

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + 4x - 2y = 18 &\Leftrightarrow (x^2 + 4x + 4) - (y^2 + 2y + 1) = 21 \Leftrightarrow (x + 2)^2 - (y + 1)^2 = 21 \\ &\Leftrightarrow (x - y + 1)(x + y + 3) = 21. \end{aligned}$$

Do đó sảy ra các trường hợp sau:

$$+) \begin{cases} x - y + 1 = 1 \\ x + y + 3 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 9 \end{cases}$$

$$+) \begin{cases} x - y + 1 = 3 \\ x + y + 3 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Bài 19:

1. Tìm cặp số nguyên x, y thỏa mãn $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - y^2 - y = 0$.

2. Có bao nhiêu số nguyên dương có 6 chữ số $\overline{abcdef}$ sao cho $100 \overline{a-d} + 10 \overline{b-e} + \overline{c-f}$ chia hết cho 1001?

Giải:

1. Ta có:

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - y^2 - y = 0 \Leftrightarrow x^4 + x^2 + 1 + 2x^3 + 2x^2 + 2x - y^2 - y - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + 1^2 - y^2 - y - 1 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + x + 1^2 - 4y^2 - 4y - 1 = 3$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + x + 1^2 - 2y + 1^2 = 3 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x + 1 - 2y = 2x^2 + 2x + 3 + 2y = 3.$$

Vì x, y nguyên nên xảy ra các trường hợp sau:

+ TH1:

$$\begin{cases} 2x^2 + 2x + 1 - 2y = 1 \\ 2x^2 + 2x + 3 + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = 0 \\ 2x^2 + 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ x = -1 \end{cases}.$$

+ TH2:

$$\begin{cases} 2x^2 + 2x + 1 - 2y = 3 \\ 2x^2 + 2x + 3 + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = -4 \\ 4x^2 + 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 0 \\ x = -1 \end{cases}.$$

+ TH3:

$$\begin{cases} 2x^2 + 2x + 1 - 2y = -1 \\ 2x^2 + 2x + 3 + 2y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = -4 \\ 4x^2 + 4x + 8 = 0(VN) \end{cases}$$

+ TH4:

$$\begin{cases} 2x^2 + 2x + 1 - 2y = -3 \\ 2x^2 + 2x + 3 + 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = 0 \\ 4x^2 + 4x + 8 = 0(VN) \end{cases}$$

Vậy có 4 cặp (x, y) thỏa mãn yêu cầu đề bài là: $(0; 0), (0; -1), (-1; 0), (-1; -1)$.

2. Ta có: $100 \overline{a-d} + 10 \overline{b-e} + \overline{c-f} = \overline{abc} - \overline{def} = 1001\overline{abc} - 1000\overline{abc} + \overline{def} = 1001\overline{abc} - \overline{abcdef}$.

Suy ra $100 \overline{a-d} + 10 \overline{b-e} + \overline{c-f}$ chia hết cho 1001 khi và chỉ khi $\overline{abcdef}$ chia hết cho 1001. Do đó $\overline{abcdef} = 1001m, m \in \mathbb{N}$.

Lại có:

$$100000 \leq \overline{abcdef} \leq 999999 \Leftrightarrow 100000 \leq 1001m \leq 999999 \Leftrightarrow \frac{100000}{1001} \leq m \leq 999.$$

Do $m \in \mathbb{N}$ nên $m \in 100; 101; \dots; 999$. Vậy có 800 số thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài 20: Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình

$$\frac{x-y}{x^2+xy+y^2} = \frac{7}{13}$$

Giải:

Điều kiện: $x^2+xy+y^2 \neq 0$. Từ phương trình suy ra $x-y \neq 0$. Bây giờ ta viết lại phương trình đã cho dưới dạng

$$13(x-y) = 7(x^2+xy+y^2) \quad (1)$$

Từ đây, ta có $13(x-y)$ chia hết cho 7. Mà $(13, 7=1)$ nên $x-y$ chia hết cho 7. (2)

$$\text{Mặt khác, ta lại có } x^2+xy+y^2 = \frac{1}{4}(x-y)^2 + \frac{3}{4}(x+y)^2 \geq \frac{1}{4}(x-y)^2$$

Do đó, kết hợp với (1), ta suy ra

$$13(x-y) \geq \frac{7}{4}(x-y)^2$$

Từ đó, với chú ý $x-y \neq 0$, ta có đánh giá $0 < x-y < \frac{52}{7}$. Kết hợp với (2), ta được

$$x-y = 7 \text{ và } x^2+xy+y^2 = 13.$$

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} x-y=7 \\ x^2+xy+y^2=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-4 \\ x=4 \\ y=-3 \end{cases}$$

Bài 21: Tìm cặp số nguyên x, y thỏa mãn $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - y^2 - y = 0$.

Giải:

1. Ta có:

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - y^2 - y = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 + x^2 + 1 + 2x^3 + 2x^2 + 2x - y^2 - y - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + 1^2 - y^2 - y - 1 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + x + 1^2 - 4y^2 - 4y - 1 = 3$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + x + 1^2 - 2y + 1^2 = 3 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x + 1 - 2y = 2x^2 + 2x + 3 + 2y = 3$$

Vì x, y nguyên nên xảy ra các trường hợp sau:

+ TH1:

$$\begin{cases} 2x^2 + 2x + 1 - 2y = 1 \\ 2x^2 + 2x + 3 + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = 0 \\ 2x^2 + 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

+ TH2:

$$\begin{cases} 2x^2 + 2x + 1 - 2y = 3 \\ 2x^2 + 2x + 3 + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = -4 \\ 4x^2 + 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 0 \\ x = -1 \end{cases}.$$

+ TH3:

$$\begin{cases} 2x^2 + 2x + 1 - 2y = -1 \\ 2x^2 + 2x + 3 + 2y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = -4 \\ 4x^2 + 4x + 8 = 0(VN) \end{cases}$$

+ TH4:

$$\begin{cases} 2x^2 + 2x + 1 - 2y = -3 \\ 2x^2 + 2x + 3 + 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = 0 \\ 4x^2 + 4x + 8 = 0(VN) \end{cases}$$

Vậy có 4 cặp (x, y) thỏa mãn yêu cầu đề bài là: $(0; 0), (0; -1), (-1; 0), (-1; -1)$.

Bài 22: Tìm số nguyên x, y thỏa mãn $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$

Lời giải

Ta có $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$

$$\Leftrightarrow (x + y)^2 = xy(xy + 1)$$

$$+ \text{ Nếu } x + y = 0 \Rightarrow xy(xy + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ xy = -1 \end{cases}$$

Với $xy = 0$. Kết hợp với $x + y = 0 \Rightarrow x = y = 0$

$$\text{Với } xy = -1. \text{ Kết hợp với } x + y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

+ Nếu $x + y \neq 0 \Rightarrow (x + y)^2$ là số chính phương

$xy(xy + 1)$ là hai số nguyên liên tiếp khác 0 nên chúng nguyên tố cùng nhau. Do đó không thể cùng là số chính phương

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là $(x; y) = (0; 0); (1; -1); (-1; 1)$

Bài 23: Giải phương trình nghiệm nguyên: $4x^2 + 8x = 38 - 6y^2$

Lời giải

$$4x^2 + 8x = 38 - 6y^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x = 19 - 3y^2 \Leftrightarrow 2(x+1)^2 = 3(7 - y^2) (*)$$

Ta thấy: $2(x+1)^2 : 2 \Rightarrow 7 - y^2 : 2 \Rightarrow y$ lẻ

Ta lại có: $7 - y^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 \leq 7$. Do đó $y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$

Lúc đó: $2(x+1)^2 = 18 \Rightarrow (x+1) = \pm 3$ nên $x_1 = 2; x_2 = -4$

Ta thấy các cặp số $(2; 1), (2; -1), (-4; 1), (-4; -1)$ thỏa mãn (*) nên là nghiệm của phương trình.

Bài 24: Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương x, y thỏa mãn phương trình

$$5x^2 + 6xy + 2y^2 + 2x + 2y - 40 = 0.$$

Lời giải

Ta có

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$5x^2 + 6xy + 2y^2 + 2x + 2y - 40 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y + 1 + 4x^2 + 4xy + y^2 = 41$$

$$\Leftrightarrow (x+y+1)^2 + (2x+y)^2 = 41$$

$$\Leftrightarrow (x+y+1)^2 + (2x+y)^2 = 4^2 + 5^2$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} x+y+1=4 \\ 2x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \quad \text{TH2: } \begin{cases} x+y+1=5 \\ 2x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases} \text{ (loại)}$$

Vậy các nghiệm nguyên dương của phương trình là (2; 1).

Bài 25: Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $x(1+x+x^2) = 4y(y-1)$.

Lời giải

$$\text{Có: } x(1+x+x^2) = 4y(y-1) \Leftrightarrow (x^3+x^2) + (x+1) = 4y^2 - 4y + 1$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2+1) = (2y-1)^2 \quad (1)$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow (2y-1)^2 > 0$, nên từ (1) $\Rightarrow x \geq 0$ và x chẵn.

$$\text{Giả sử } (x+1, x^2+1) = d \Rightarrow d \text{ lẻ và } x^2-1 \vdots d; x^2+1 \vdots d \Rightarrow 2 \vdots d \Rightarrow d=1$$

Vì $(x+1)(x^2+1)$ là số chính phương, $(x+1, x^2+1)=1$ nên $(x+1)$ và (x^2+1) cũng là hai số chính phương.

$$\text{Do } x \geq 0 \Rightarrow x^2 < x^2+1 \leq (x+1)^2 \Rightarrow x^2+1 = (x+1)^2 \Rightarrow x=0$$

$$\text{Khi } x=0, \text{ có } (1) \Leftrightarrow 4y(y-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy có hai cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là: (0;0), (0;1)

Bài 26: Tìm số thực x để 3 số $x-\sqrt{3}; x^2+2\sqrt{3}; x-\frac{2}{x}$ là số nguyên

Lời giải

$$\text{Đặt } a = x-\sqrt{3}; b = x^2+2\sqrt{3}; c = x-\frac{2}{x} \text{ với } a, b, c \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Từ } a = x-\sqrt{3} \Rightarrow x = a+\sqrt{3}; \text{ từ } b = x^2+2\sqrt{3} \Rightarrow x^2 = b-2\sqrt{3}, \text{ nên ta có}$$

$$(a+\sqrt{3})^2 = b-2\sqrt{3} \Leftrightarrow a^2+2\sqrt{3}a+3 = b-2\sqrt{3} \Leftrightarrow 2\sqrt{3}(a+1) = b-a^2-3$$

$$\text{-Nếu } a+1 \neq 0 \Rightarrow a \neq -1 \Rightarrow 2\sqrt{3} = \frac{b-a^2-3}{a+1}, \text{ vì } a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{b-a^2-3}{a+1} \in \mathbb{Q} \Rightarrow 2\sqrt{3} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \text{VL}$$

$$\text{Vậy } a+1=0 \text{ nên ta có } \begin{cases} a+1=0 \\ b-a^2-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=4 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{3}-1$$

Với $x = \sqrt{3}-1$ ta có $a = -1; b = 4$ và $c = -2$ nguyên, thỏa mãn đầu bài

Bài 27: Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 + xy - x - y = 1$.

Lời giải

$$\text{Ta có } x^2 + y^2 + xy - x - y = 1 \Leftrightarrow (x+y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$$

Ta có bảng giá trị tương ứng (học sinh có thể xét từng trường hợp)

$x+y$	$x-1$	$y-1$	Nghiệm $(x; y)$

2	0	0	(1;1)
-2	0	0	Loại
0	2	0	Loại
0	-2	0	(-1;1)
0	0	2	Loại
0	0	-2	(1;-1)

Vậy các số $(x; y)$ cần tìm là $(1;1)$, $(-1;1)$, $(1;-1)$

Bài 28: Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$

Lời giải

Với $x, y \neq 0$ ta có $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x+2y-xy=0 \Leftrightarrow x(y-2)-2(y-2)=4 \Leftrightarrow (x-2)(y-2)=4$$

Lập bảng xét các ước của 4 ta có các nghiệm

$$(x; y) \in \{(-2;1); (1;-2); (3;6); (4;4); (6;3)\}$$

Bài 29: Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

$$2xy^2 + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy$$

Lời giải

$$2xy^2 + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy \Leftrightarrow x^2 - x(2y^2 - y + 1) + 2y^2 - y - 1 = 0 \quad (1)$$

Cách 1:

$$\text{Đặt } 2y^2 - y + 1 = a, \text{ khi đó PT (1) trở thành } \Leftrightarrow x^2 - ax + a - 2 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Phương trình (2) có } \Delta = a^2 - 4a + 8 = (a-2)^2 + 4$$

Phương trình (1) có nghiệm nguyên $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có nghiệm nguyên

$\Rightarrow \Delta$ là số chính phương

$$\text{Đặt } (a-2)^2 + 4 = k^2 \quad (k \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow k^2 - (a-2)^2 = 4 \Leftrightarrow (k+a-2)(k-a+2) = 4$$

Vì $(k+a-2) + (k-a+2) = 2k$ là số chẵn và có tích cũng là số chẵn nên $(k+a-2)$ và $(k-a+2)$ là số chẵn.

$$\text{Do đó } \begin{cases} k+a-2=2 \\ k-a+2=2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} k+a-2=-2 \\ k-a+2=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=2 \\ a=2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} k=-2 \\ a=2 \end{cases}$$

$$\text{Vậy phương trình (2) có 2 nghiệm là } \begin{cases} x = \frac{a + \sqrt{k^2}}{2} = \frac{2+2}{2} = 2 \\ x = \frac{a - \sqrt{k^2}}{2} = \frac{2-2}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } 2y^2 - y - 1 = a = 2 \Leftrightarrow 2y^2 - y - 1 = 0 \Leftrightarrow 2y^2 - 2y + y - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-1)(2y+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases} \text{ . Ta chọn } y=1 \text{ (vì } y \in \mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm nguyên $(x; y)$ của phương trình là $(2; 1)$ và $(0; 1)$

Bài 30: Cho ba số x, y, z thỏa các hệ thức $(z-1)x - y = 1$ và $x + zy = 2$. Chứng minh rằng $(2x - y)(z^2 - z + 1) = 7$ và tìm tất cả các số nguyên x, y, z thỏa hệ thức trên.

Lời giải

Từ hai hệ thức đã cho, xem z là tham số giải hệ phương trình 2 ẩn x, y theo z ta được

$$x = \frac{z+2}{z^2-z+1} \text{ và } y = \frac{2z-3}{z^2-z+1}.$$

$$\Rightarrow 2x - y = \frac{2z+4}{z^2-z+1} - \frac{2z-3}{z^2-z+1} = \frac{7}{z^2-z+1} \Rightarrow \text{điều phải chứng minh.}$$

Do $z^2 - z + 1 = \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ nên từ hệ thức $(2x - y)(z^2 - z + 1) = 7$ cho ta $2x - y > 0$.

Mà $x, y, z \in \mathbb{Z}$ suy ra $z^2 - z + 1 = 7$ hoặc $z^2 - z + 1 = 1$.

Trường hợp 1: $z^2 - z + 1 = 7$

Ta có $z^2 - z - 6 = 0 \Leftrightarrow (z-3)(z+2) = 0 \Rightarrow z = 3; z = -2$.

Với $z = 3 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$ (loại).

Với $z = -2 \Rightarrow x = 0$ và $y = -1$ (nhận).

Trường hợp 2: $z^2 - z + 1 = 1 \Leftrightarrow z^2 - z = 0 \Leftrightarrow z(z-1) = 0 \Rightarrow z = 0; z = 1$.

Với $z = 0 \Rightarrow x = 2$ và $y = -3$ (nhận).

Với $z = 1 \Rightarrow x = 3$ và $y = -1$ (nhận).

Bài 31: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2x + 5y - 3xy = 1$.

Lời giải

Ta có: $2x + 5y - 3xy = 1 \Leftrightarrow 6x - 9xy + 15y = 3$

$$\Leftrightarrow 3x(2-3y) - 10 + 15y = -7 \Leftrightarrow 3x(2-3y) - 5(2-3y) = -7$$

$$\Leftrightarrow (3x-5)(2-3y) = -7$$

$$\text{Th1: } \begin{cases} 3x-5=1 \\ 2-3y=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \text{ (thỏa).}$$

$$\text{Th2: } \begin{cases} 3x-5=-1 \\ 2-3y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{4}{3} \\ y=\frac{-5}{3} \end{cases} \text{ (không thỏa).}$$

$$\text{Th3: } \begin{cases} 3x-5=7 \\ 2-3y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases} \text{ (thỏa)}$$

$$\text{Th4: } \begin{cases} 3x-5=-7 \\ 2-3y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{-2}{3} \\ y=\frac{1}{3} \end{cases} \text{ (không thỏa).}$$

Vậy nghiệm nguyên $(x; y)$ của phương trình là $(2; 3); (4; 1)$.

Bài 32: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2y^2 + x - 2y + 5 = xy$.

Lời giải

Ta có: $2y^2 + x - 2y + 5 = xy \Leftrightarrow x(y-1) = 2y^2 - 2y + 5$

$$\Leftrightarrow x = 2y + \frac{5}{y-1}$$

($y=1$ không thỏa mãn PT)

Vì x, y là các số nguyên nên $y-1$ là ước của 5.

$$TH1: y-1=1 \Rightarrow y=2 \Rightarrow x=9.$$

$$TH2: y-1=-1 \Rightarrow y=0 \Rightarrow x=-5.$$

$$TH3: y-1=5 \Rightarrow y=6 \Rightarrow x=13.$$

$$TH4: y-1=-5 \Rightarrow y=-4 \Rightarrow x=-9.$$

Vậy PT có các nghiệm nguyên $(x;y)$ là: $(9;2), (-5;0), (13;6), (-9;-4)$.

Bài 33: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2y^2(x+y) + x = 2 + y(x-1)$.

Lời giải

Đặt $a = xy, b = x + y \Rightarrow a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b^2 \geq 4a$ (*)

Phương trình (1) trở thành: $a^2b + b = a + 2$.

$$\Leftrightarrow b = \frac{a+2}{a^2+1}$$

$$\Rightarrow a+2 : a^2+1 \Rightarrow a^2-4 : a^2+1 \Rightarrow (a^2+1) - 5 : a^2+1 \Rightarrow 5 : a^2+1$$

$$\Rightarrow a^2+1 \in \{1;5\} \Rightarrow a^2 \in \{0;4\} \Rightarrow a \in \{0;-2;2\}$$

$$\text{Nếu } a=0 \Rightarrow b=2 \Rightarrow \begin{cases} xy=0 \\ x+y=2 \end{cases} \Rightarrow (x,y) \in \{(0;2), (2;0)\}$$

$$\text{Nếu } a=-2 \Rightarrow b=0 \Rightarrow \begin{cases} xy=-2 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases} \quad (\text{loại vì không thỏa mãn } x, y \in \mathbb{Z})$$

Nếu $a=2 \Rightarrow b=\frac{4}{5}$, loại vì không thỏa mãn $b \in \mathbb{Z}$.

Vậy nghiệm nguyên (x, y) của phương trình đã cho là: $(0;2), (2;0)$.

Cách 2: Đưa phương trình về dạng: $(x+y)(xy)^2 - xy + (x+y-2) = 0$

Đặt $t = xy, t \in \mathbb{Z}$ ta được phương trình ẩn t : $(x+y)t^2 - t + (x+y-2) = 0$ (1)

$$\text{Nếu } x+y=0 \Rightarrow xy=-2 \Leftrightarrow \begin{cases} xy=-2 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases} \text{ Hoặc } \begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases} \quad (\text{Loại})$$

*) Nếu $x+y \neq 0$, ta có phương trình bậc 2 ẩn t :

$$(x+y)t^2 - t + (x+y-2) = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \Delta = 1 - 4(x+y)(x+y-2) \geq 0 \Leftrightarrow (x+y-1)^2 \leq \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow (x+y-1)^2 \in \{0;1\} \Leftrightarrow (x+y-1) \in \{-1;0;1\} \Leftrightarrow x+y \in \{1;2\}$$

$$*) \text{ Nếu } x + y = 1 \Rightarrow \begin{cases} xy = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ xy = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \text{ (loại)}$$

$$*) \text{ Nếu } x + y = 2 \Rightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ xy = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow (x, y) \in \{(0; 2), (2; 0)\} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy nghiệm nguyên (x, y) của phương trình đã cho là: $(0; 2), (2; 0)$.

Bài 34: Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $x^2 + 2xy + 7(x + y) + 2y^2 + 10 = 0$.

Lời giải

$$x^2 + 2xy + 7(x + y) + 2y^2 + 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (2y + 7)x + 2y^2 + 7y + 10 = 0 \quad (1).$$

Phương trình (1) có nghiệm khi $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (2y + 7)^2 - 4(2y^2 + 7y + 10) \geq 0$

$$\Leftrightarrow 9 - 4y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (3 + 2y)(3 - 2y) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}, \text{ mà } y \text{ là số nguyên nên } y \in \{-1; 0; 1\}.$$

Xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $y = -1$, phương trình (1) $\Leftrightarrow x^2 + 5x + 5 = 0$ không có nghiệm nguyên vì Δ không là số chính phương.

Trường hợp 2: $y = 0$, phương trình (1) $\Leftrightarrow x^2 + 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = -5$ hoặc $x = -2$.

Trường hợp 3: $y = 1$, phương trình (1) $\Leftrightarrow x^2 + 9x + 19 = 0$ không có nghiệm nguyên vì Δ không là số chính phương.

Kết luận: Phương trình có nghiệm nguyên là $(x; y) \in \{(-5; 0), (-2; 0)\}$.

Bài 35: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2xy^2 + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy$

Lời giải

$$2xy^2 + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy \Leftrightarrow x^2 - x(2y^2 - y + 1) + 2y^2 - y - 1 = 0 \quad (1)$$

Đặt $2y^2 - y + 1 = a$, khi đó PT (1) trở thành $\Leftrightarrow x^2 - ax + a - 2 = 0 \quad (2)$

Phương trình (2) có $\Delta = a^2 - 4a + 8 = (a - 2)^2 + 4$

Phương trình (1) có nghiệm nguyên $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có nghiệm nguyên

$\Rightarrow \Delta$ là số chính phương

$$\text{Đặt } (a - 2)^2 + 4 = k^2 \quad (k \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow k^2 - (a - 2)^2 = 4 \Leftrightarrow (k + a - 2)(k - a + 2) = 4$$

Vì $(k + a - 2) + (k - a + 2) = 2k$ là số chẵn và có tích cũng là số chẵn nên $(k + a - 2)$ và $(k - a + 2)$ là số chẵn.

$$\text{Do đó } \begin{cases} k + a - 2 = 2 \\ k - a + 2 = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} k + a - 2 = -2 \\ k - a + 2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ a = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} k = -2 \\ a = 2 \end{cases}$$

$$\text{Vậy phương trình (2) có 2 nghiệm là } \begin{cases} x = \frac{a + \sqrt{k^2}}{2} = \frac{2 + 2}{2} = 2 \\ x = \frac{a - \sqrt{k^2}}{2} = \frac{2 - 2}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } 2y^2 - y - 1 = a = 2 \Leftrightarrow 2y^2 - y - 1 = 0 \Leftrightarrow 2y^2 - 2y + y - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-1)(2y+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases} \text{ Ta chọn } y=1 \text{ (vì } y \in \mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm nguyên $(x; y)$ của phương trình là $(2; 1)$ và $(0; 1)$

Bài 36: Cho ba số x, y, z thỏa các hệ thức $(z-1)x-y=1$ và $x+zy=2$. Chứng minh rằng $(2x-y)(z^2-z+1)=7$ và tìm tất cả các số nguyên x, y, z thỏa hệ thức trên.

Lời giải

Từ hai hệ thức đã cho, xem z là tham số giải hệ phương trình 2 ẩn x, y theo z ta được

$$x = \frac{z+2}{z^2-z+1} \text{ và } y = \frac{2z-3}{z^2-z+1}.$$

$$\Rightarrow 2x-y = \frac{2z+4}{z^2-z+1} - \frac{2z-3}{z^2-z+1} = \frac{7}{z^2-z+1} \Rightarrow \text{điều phải chứng minh.}$$

$$\text{Do } z^2-z+1 = \left(z-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ nên từ hệ thức } (2x-y)(z^2-z+1)=7 \text{ cho ta } 2x-y > 0.$$

Mà $x, y, z \in \mathbb{Z}$ suy ra $z^2-z+1=7$ hoặc $z^2-z+1=1$.

Trường hợp 1: $z^2-z+1=7$

$$\text{Ta có } z^2-z-6=0 \Leftrightarrow (z-3)(z+2)=0 \Rightarrow z=3; z=-2.$$

$$\text{Với } z=3 \Rightarrow x=\frac{5}{2} \text{ (loại).}$$

$$\text{Với } z=-2 \Rightarrow x=0 \text{ và } y=-1 \text{ (nhận).}$$

Trường hợp 2: $z^2-z+1=1 \Leftrightarrow z^2-z=0 \Leftrightarrow z(z-1)=0 \Rightarrow z=0; z=1.$

$$\text{Với } z=0 \Rightarrow x=2 \text{ và } y=-3 \text{ (nhận).}$$

$$\text{Với } z=1 \Rightarrow x=3 \text{ và } y=-1 \text{ (nhận).}$$

Bài 37: Tìm các số x, y nguyên dương thỏa mãn phương trình: $16(x^3-y^3)=15xy+371$.

Lời giải

$$\text{Vì } x, y \text{ nguyên dương nên } 16(x^3-y^3)=15xy+371 > 0 \Rightarrow x > y.$$

$$\text{Ta lại có } 15xy=16(x^3-y^3)-371 \text{ là số lẻ nên } x, y \text{ đều lẻ. suy ra } y \geq 1; x > y \geq 1 \Rightarrow x \geq 3.$$

Xét $x=3 \Rightarrow y < 3 \Rightarrow y=1$ thay vào phương trình thỏa mãn.

$$\text{Xét } x \geq 5 \text{ ta có } x-2 \geq y, \text{ suy ra } 16(x^3-y^3) \geq 16[x^3-(x-2)^3] = 16(6x^2-12x+8).$$

Mặt khác $15xy+371 \leq 15x(x-2)+371=15x^2-30x+371$. Ta chứng minh

$$16(6x^2-12x+8) > 15x^2-30x+371.$$

$$\text{Thật vậy, } 16(6x^2-12x+8) > 15x^2-30x+371$$

$$\Leftrightarrow 81x^2-162x-243 > 0 \Leftrightarrow x^2-2x-3 > 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3) > 0 \text{ đúng với mọi } x \geq 5.$$

$$\text{Suy ra } 16(x^3-y^3) > 15xy+371 \text{ với mọi } x \geq 5.$$

Vậy phương trình có nghiệm $(x; y) = (3; 1)$.

Bài 38: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2x+5y-3xy=1$.

Lời giải

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Ta có: $2x + 5y - 3xy = 1 \Leftrightarrow 6x - 9xy + 15y = 3$
 $\Leftrightarrow 3x(2 - 3y) - 10 + 15y = -7 \Leftrightarrow 3x(2 - 3y) - 5(2 - 3y) = -7$
 $\Leftrightarrow (3x - 5)(2 - 3y) = -7$

Th1: $\begin{cases} 3x - 5 = 1 \\ 2 - 3y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ (thỏa).

Th2: $\begin{cases} 3x - 5 = -1 \\ 2 - 3y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = \frac{-5}{3} \end{cases}$ (không thỏa).

Th3: $\begin{cases} 3x - 5 = 7 \\ 2 - 3y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$ (thỏa)

Th4: $\begin{cases} 3x - 5 = -7 \\ 2 - 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-2}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$ (không thỏa).

Vậy nghiệm nguyên $(x; y)$ của phương trình là $(2; 3); (4; 1)$.

Bài 39: Tìm số tự nhiên $\overline{abcd}$ sao cho $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + a = 4321$.

Lời giải

Ta có: $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + a = 4321 \Leftrightarrow 1111a + 111b + 11c + d = 4321 \quad (1)$

Vì $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ và $1 \leq a \leq 9, 0 \leq b, c, d \leq 9$ nên $3214 \leq 1111a \leq 4321$

$\Rightarrow a = 3$. Thay vào (1) ta được: $111b + 11c + d = 988 \quad (2)$

Lập luận tương tự ta có: $880 \leq 111b \leq 988 \Rightarrow b = 8$. Thay vào (2) ta được:

$11c + d = 100$

Mà $91 \leq 11c \leq 100 \Rightarrow c = 9$ và $d = 1$.

Bài 40: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $\sqrt{x+y+3} + 1 = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

Lời giải

$\sqrt{x+y+3} + 1 = \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad x \in \mathbb{Z}^+; y \in \mathbb{Z}^+.$

$\Leftrightarrow x + y + 3 + 2\sqrt{x+y+3} + 1 = x + 2\sqrt{xy} + y$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+y+3} = \sqrt{xy} - 2$

$\Leftrightarrow x + y + 3 = xy - 4\sqrt{xy} + 4$

$\Leftrightarrow \sqrt{xy} = \frac{xy - x - y + 1}{4}$

Nếu xy là số không chính phương thì VT là số vô tỉ còn VP là số hữu tỉ, vô lý

Vậy $xy = k^2 \Rightarrow \sqrt{xy} = k$

$$\begin{aligned}
\text{Ta có } x + y + 3 &= xy - 4\sqrt{xy} + 4 \Leftrightarrow x + y + 2\sqrt{xy} = xy - 2\sqrt{xy} + 1 \Leftrightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = (\sqrt{xy} + 1)^2 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy} + 1 \quad (*) \\
&\Leftrightarrow \sqrt{y} = k - 1 - \sqrt{x} \Leftrightarrow y = (k - 1)^2 - 2(k - 1)\sqrt{x} + x \\
&\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{(k - 1)^2 + x - y}{2(k - 1)} \text{ vì } (k > 2)
\end{aligned}$$

Nếu x là số không chính phương thì VT là số vô tỉ còn VP là số hữu tỉ, vô lý

Vậy x là số chính phương, Lý luận tương tự thì y là số chính phương

Đặt $x = a^2; y = b^2$

$$\text{Từ } (*) \quad a + b = ab + 1 \Leftrightarrow (a - 1)(b - 1) = 2$$

$$\text{Ta tìm được } (a; b) = (2; 3); (3; 2) \Leftrightarrow (x; y) = (4; 9); (9; 4)$$

Bài 41: Tìm tất cả cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $2020(x^2 + y^2) - 2019(2xy + 1) = 5$.

Lời giải

$$2020(x^2 + y^2) - 2019(2xy + 1) = 5$$

$$\Leftrightarrow 2019(x - y)^2 + x^2 + y^2 = 2024 \quad (1)$$

$$\Rightarrow 2019(x - y)^2 \leq 2024 \Rightarrow (x - y)^2 \leq \frac{2024}{2019} \Rightarrow 0 \leq (x - y)^2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq |x - y| \leq 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x - y| = 0 \\ |x - y| = 1 \end{cases}$$

Nếu $|x - y| = 0 \Rightarrow x = y$, từ (1) $\Rightarrow 2x^2 = 2024 \Rightarrow x^2 = 1012$ (vô nghiệm nguyên)

Nếu $|x - y| = 1$ thì $\begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$ và từ (1) $\Rightarrow x^2 + y^2 = 5$ (2)

Thay $y = x - 1$ vào (2) ta được:

$$\Rightarrow x^2 + (x - 1)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Thay $y = x + 1$ vào (2) ta được:

$$\Rightarrow x^2 + (x + 1)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm nguyên: $(x; y) = (-1; 2); (-2; 1); (1; -2); (2; -1)$

Bài 42: Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để $A = \frac{x^4 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 3x + 6}$ nhận giá trị là một số nguyên.

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{x^4 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 3x + 6} = \frac{x^2(x^2 + 1) + (x + 2)}{(x^4 + x^2) + (3x^3 + 3x) + (6x^2 + 6)}$$

$$\Rightarrow A = \frac{x^2(x^2 + 1) + (x + 2)}{x^2(x^2 + 1) + 3x(x^2 + 1) + 6(x^2 + 1)} = \frac{x^2(x^2 + 1) + (x + 2)}{(x^2 + 1)(x^2 + 3x + 6)}$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\begin{aligned}
&\text{Do } A; x \text{ nguyên} \Rightarrow x^2(x^2 + 1) + (x + 2) \text{ chia hết cho } (x^2 + 1)(x^2 + 3x + 6) \\
&\Rightarrow x^2(x^2 + 1) + (x + 2) \text{ chia hết cho } x^2 + 1 \Rightarrow x + 2 \text{ chia hết cho } x^2 + 1 \\
&\Rightarrow (x + 2)(x - 2) \text{ chia hết cho } x^2 + 1 \Rightarrow x^2 - 4 \text{ chia hết cho } x^2 + 1 \\
&\Rightarrow (x^2 + 1) - 5 \text{ chia hết cho } x^2 + 1 \Rightarrow 5 \text{ chia hết cho } x^2 + 1 \\
&\Rightarrow x^2 + 1 \text{ là ước dương của } 5 \Rightarrow x^2 + 1 \in \{1; 5\} \Rightarrow x^2 \in \{0; 4\} \Rightarrow x \in \{0; \pm 2\}
\end{aligned}$$

Thử lại: Với $x = -2$ thì A nguyên

Vậy với $x = -2$ thì A nhận giá trị là một số nguyên.

Bài 43: Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $y^2 + y = x^4 + x^3 + x^2 + x$.

Lời giải

Ta có

$$y^2 + y = x^4 + x^3 + x^2 + x \Leftrightarrow 4y^2 + 4y + 1 = 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 1$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} (2y+1)^2 = (2x^2+x)^2 + (3x+1)(x+1) \\ (2y+1)^2 = (2x^2+x+1)^2 - x(x+1) \end{cases}
\end{aligned}$$

Ta thấy : nếu $x < -1$ hoặc $x > 2$ thì $(3x+1)(x+1) > 0$ và $x(x-2) > 0$ nên từ (1) và (2) ta suy

ra $(2x^2+x+1)^2 > (2y+1)^2 > (2x^2+x)^2$ (*) Loại vì không có số nguyên y thỏa mãn.

Từ đó suy ra $-1 \leq x \leq 2 \Rightarrow x \in \{-1, 0, 1, 2\}$

$$\text{Xét } x = 2 \Rightarrow y^2 + y = 30 \Rightarrow y = 5, y = -6$$

$$\text{Xét } x = 1 \Rightarrow y^2 + y = 4 \text{ loại}$$

$$\text{Xét } x = 0 \Rightarrow y^2 + y = 0 \Rightarrow y = 0, y = -1$$

$$\text{Xét } x = -1 \Rightarrow y^2 + y = 0 \Rightarrow y = 0, y = -1$$

Vậy hệ đã cho có 6 nghiệm là $(0, 5), (2, -6), (0, 0), (0, -1), (-1, 0), (-1, -1)$.

Bài 44: Tìm các số nguyên của PT: $x^2 - xy - 5x + 5y = 2$

Lời giải

$$\text{Từ } x^2 - xy - 5x + 5y = 2$$

$$\Leftrightarrow x(x-y) - 5(x-y) = 2$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x-5) = 2$$

Vì $2 = 1.2 = 2.1 = (-1).(-2) = (-2).(-1)$ nên ta có 4 trường hợp sau:

$$\text{Trường hợp 1: } \begin{cases} x-y=1 \\ x-5=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6 \\ x=7 \end{cases} (TM)$$

$$\text{Trường hợp 2: } \begin{cases} x-y=2 \\ x-5=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4 \\ x=6 \end{cases} (TM)$$

$$\text{Trường hợp 3: } \begin{cases} x-y=-1 \\ x-5=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4 \\ x=3 \end{cases} (TM)$$

$$\text{Trường hợp 4: } \begin{cases} x-y=-2 \\ x-5=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6 \\ x=4 \end{cases} (TM)$$

Vậy có 4 cặp (x, y) thỏa mãn là: $(7; 6); (6; 4); (3; 4); (4; 6)$.

Bài 45: Tìm tất cả các số nguyên x cho $\frac{x-3}{x^2+1}$ là một số nguyên.

Lời giải

Vì $\frac{x-3}{x^2+1}$ là số nguyên nên $\frac{(x-3)(x+3)}{x^2+1}$ cũng là số nguyên.

Ta thấy $\frac{(x-3)(x+3)}{x^2+1} = \frac{x^2-9}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{10}{x^2+1} = 1 - \frac{10}{x^2+1}$.

Do đó $10 : x^2+1 \Rightarrow x^2+1 \in U(10) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10\}$.

- $x^2+1=-1 \Rightarrow x^2=-2$ (vô lí)
- $x^2+1=1 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0$
- $x^2+1=-2 \Rightarrow x^2=-3$ (vô lí)
- $x^2+1=2 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=1 \vee x=-1$
- $x^2+1=-5 \Rightarrow x^2=-6$ (vô lí)
- $x^2+1=5 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=2 \vee x=-2$
- $x^2+1=-10 \Rightarrow x^2=-11$ (vô lí)
- $x^2+1=10 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=3 \vee x=-3$

Thử lại:

- Thay $x=0$ vào $\frac{x-3}{x^2+1}$, ta thấy $\frac{0-3}{0^2+1} = -3 \in \mathbb{Z}$
- Thay $x=1$ vào $\frac{x-3}{x^2+1}$, ta thấy $\frac{1-3}{1^2+1} = -1 \in \mathbb{Z}$
- Thay $x=-1$ vào $\frac{x-3}{x^2+1}$, ta thấy $\frac{-1-3}{(-1)^2+1} = -2 \in \mathbb{Z}$
- Thay $x=2$ vào $\frac{x-3}{x^2+1}$, ta thấy $\frac{2-3}{2^2+1} = \frac{-1}{5} \notin \mathbb{Z}$
- Thay $x=-2$ vào $\frac{x-3}{x^2+1}$, ta thấy $\frac{-2-3}{(-2)^2+1} = -1 \in \mathbb{Z}$
- Thay $x=3$ vào $\frac{x-3}{x^2+1}$, ta thấy $\frac{3-3}{3^2+1} = 0 \in \mathbb{Z}$
- Thay $x=-3$ vào $\frac{x-3}{x^2+1}$, ta thấy $\frac{-3-3}{(-3)^2+1} = \frac{-6}{10} \notin \mathbb{Z}$

Vậy $x \in \{-2; -1; 0; 1; 3\}$ thì $\frac{x-3}{x^2+1}$ là một số nguyên.

Bài 46: Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương $(p; q; n)$, trong đó p, q là các số nguyên tố thỏa mãn: $p(p+3) + q(q+3) = n(n+3)$.

Lời giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $p \leq q$.

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Trường hợp 1: $p = 2$

$$\Rightarrow p(p+3) = 2(2+3) = 2.5 = 10$$

$$\Rightarrow 10 + q(q+3) = n(n+3)$$

$$\Leftrightarrow 10 = n^2 + 3n - q^2 - 3q = (n^2 - q^2) + (3n - 3q)$$

$$\Leftrightarrow 10 = (n-q)(n+q) + 3(n-q)$$

$$\Leftrightarrow 10 = (n-q)(n+q+3)$$

Vì $p(p+3) + q(q+3) = n(n+3)$ mà $p; q; n$ là các số nguyên dương $\Rightarrow n > q \geq 2$.

$$\Rightarrow n+q+3 > 2+2+3 = 7$$

$$\text{Mà } 10 = 1.10 = 2.5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n+q+3=10 \\ n-q=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n+q=7 \\ n-q=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=4 \\ q=3 \end{cases}$$

So với điều kiện thỏa mãn.

Vậy bộ ba số nguyên dương $(p; q; n)$ cần tìm là $(2; 3; 4)$.

Trường hợp 2: $p = 3$

$$\Rightarrow p(p+3) = 3.(3+3) = 3.6 = 18$$

$$\Rightarrow 18 + q(q+3) = n(n+3) \Leftrightarrow 18 = n^2 + 3n - q^2 - 3q = (n^2 - q^2) + (3n - 3q)$$

$$\Leftrightarrow 18 = (n-q)(n+q) + 3(n-q)$$

$$\Leftrightarrow 18 = (n-q)(n+q+3)$$

Vì $p(p+3) + q(q+3) = n(n+3)$ mà $p; q; n$ là các số nguyên dương $\Rightarrow n > q \geq 3$.

$$\Rightarrow n+q+3 > 3+3+3 = 9$$

$$\text{Mà } 18 = 1.18 = 2.9 = 3.6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n+q+3=18 \\ n-q=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n+q=15 \\ n-q=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=8 \\ q=7 \end{cases}$$

So với điều kiện thỏa mãn.

Vậy bộ ba số nguyên dương $(p; q; n)$ cần tìm là $(3; 7; 8)$.

Trường hợp 3: $p > 3$

Ta sẽ chứng minh với 1 số nguyên a bất kì không chia hết cho 3 thì tích $a(a+3)$ luôn chia 3 dư 1.

Thật vậy:

$$\text{Nếu } a : 3 \text{ dư } 1 \Rightarrow a = 3k+1 \Rightarrow a+3 = 3k+4$$

$$\Rightarrow a(a+3) = (3k+1)(3k+4) = 9k^2 + 15k + 4 : 3 \text{ dư } 1.$$

$$\text{Nếu } a : 3 \text{ dư } 2 \Rightarrow a = 3k+2 \Rightarrow a+3 = 3k+5$$

$$\Rightarrow a(a+3) = (3k+2)(3k+5) = 9k^2 + 21k + 10 : 3 \text{ dư } 1.$$

Trở lại bài toán chính:

$$\text{Vì } q \geq p > 3 \Rightarrow p \nmid 3; q \nmid 3.$$

$$\Rightarrow p(p+3) + q(q+3) : 3 \text{ dư } 2.$$

$$\text{Mà } n(n+3) : 3 \text{ dư } 1 \text{ (nếu } n \nmid 3) \text{ hoặc } n(n+3) : 3 \text{ nếu } n : 3.$$

$$\Rightarrow p(p+3) + q(q+3) \neq n(n+3)$$

Suy ra không có bộ ba số nguyên dương $(p; q; n)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 47: Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$3x - 16y - 24 = \sqrt{9x^2 + 16x + 32}$$

Lời giải

$$3x - 16y - 24 = \sqrt{9x^2 + 16x + 32} \quad (1)$$

$$\text{ĐK: } 3x - 16y - 24 \geq 0$$

$$3x - 16y - 24 = \sqrt{9x^2 + 16x + 32}$$

$$\Leftrightarrow (3x - 16y - 24)^2 = 9x^2 + 16x + 32$$

$$\Leftrightarrow 9(3x - 16y - 24)^2 = 9(9x^2 + 16x + 32)$$

$$\Leftrightarrow (9x - 48y - 72)^2 = 81x^2 + 144x + 288$$

$$\Leftrightarrow (9x - 48y - 72)^2 = (9x + 8)^2 + 224$$

$$\Leftrightarrow (9x - 48y - 72)^2 - (9x + 8)^2 = 224$$

$$\Leftrightarrow (9x - 48y - 72 + 9x + 8)(9x - 48y - 72 - 9x - 8) = 224$$

$$\Leftrightarrow (18x - 48y - 64)(-48y - 80) = 224$$

$$\Leftrightarrow -32 \cdot (9x - 24y - 32)(3y + 5) = 224$$

$$\Leftrightarrow (9x - 24y - 32) \cdot (3y + 5) = -7$$

Với x, y nguyên thì $(3y+5)$ là ước của (-7) và chia cho 3 dư 2

$$\Rightarrow (3y+5) = -1 \text{ hoặc } (3y+5) = -7$$

$$+) \text{ TH1: } (3y+5) = -1 \Leftrightarrow y = -2 \Rightarrow x = -1$$

$$+) \text{ TH2: } (3y+5) = -7 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow x = -7$$

Vậy các cặp nghiệm nguyên $(x; y)$ là $(-1; -2); (-7; -4)$

Bài 48: Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình: $2y^2x + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy$

Lời giải

$$2y^2x + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2y^2 + y) = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=1 \\ x-2y^2+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ 2y^2-y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=-1 \\ x-2y^2+y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2y^2-y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm nguyên là $(2; 1)$ và $(0; 1)$

Bài 49: Tìm các số nguyên dương n để $A = \frac{(n-8)^2 - 48}{n+5}$ có giá trị là số nguyên dương.

Lời giải

$$\text{Ta có: } (n-8)^2 - 48 = n^2 - 16n + 16 \text{ nên } A = n - 21 + \frac{121}{n+5}$$

$$121 = 11^2 \text{ và } n+5 \geq 6; n+5 \in \mathbb{Z}$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$n + 5 = 11$ được $n = 6$ và $A = -4$

$n + 5 = 121$ được $n = 116$ và $A = 96$

Vậy $n = 116$.

Bài 50: Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn đẳng thức: $x^2 + y(y^2 + y - 3x) = 0$

Lời giải

Ta có: $x^2 + y(y^2 + y - 3x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3xy + y^2 + y^3 = 0$ (1)

Coi (1) là pt bậc 2 với ẩn x .

Có $\Delta = y^2(5 - 4y)$

Nếu $y \geq 2$ thì $\Delta < 0$ phương trình (1) vô nghiệm

Với $y = 1$ phương trình (1) trở thành $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1; x_2 = 2$

KL: $x = 1, y = 1$ và $x = 2, y = 1$.

Bài 51: Chứng minh rằng với mọi số nguyên x thì: $P(x) = 1985 \cdot \frac{x^3}{3} + 1979 \cdot \frac{x^2}{3} + 5 \cdot \frac{x}{6}$ có giá trị là số nguyên.

Lời giải

Ta có:

$$P(x) = 1985 \cdot \frac{x^3}{3} + 1979 \cdot \frac{x^2}{3} + 5 \cdot \frac{x}{6}$$

$$P(x) = \frac{3970x^3 + 3958x^2 + 5x}{6} = 661x^3 + 659x^2 + x + \frac{4x^3 + 3x^2 - x}{6}$$

Ta có:

$$\frac{4x^3 + 3x^2 - x}{6} = \frac{x^3 - x + 3x^3 + 3x^2}{6} = \frac{(x-1)x(x+1) + 3x^2(x+1)}{6}$$

$$\text{Vì } (x-1)x(x+1):6, 3x^2(x+1):6 \Rightarrow \frac{4x^3 + 3x^2 - x}{6}:6$$

Vậy $P(x) = 1985 \cdot \frac{x^3}{3} + 1979 \cdot \frac{x^2}{3} + 5 \cdot \frac{x}{6}$ có giá trị là số nguyên.

Bài 52: Cho $f(x)$ là đa thức với hệ số nguyên. Biết $f(2017) \cdot f(2018) = 2019$. Chứng minh rằng phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm nguyên.

Lời giải

Từ giả thiết ta có $f(2017), f(2018)$ là các số nguyên và $x = 2017, x = 2018$ không là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

Giả sử phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm nguyên là $x = a \in \mathbb{Z}$, theo định lý Bơ-zu:

$f(x) = (x - a) \cdot g(x)$ với $g(x)$ là đa thức hệ số nguyên không nhận $x = 2017, x = 2018$ làm nghiệm

Do vậy: $f(2017) = (2017 - a) \cdot g(2017), f(2018) = (2018 - a) \cdot g(2018)$

Nhân vế với vế và áp dụng giả thiết $f(2017) \cdot f(2018) = 2019$:

$$2019 = (2017 - a) \cdot g(2017) \cdot (2018 - a) \cdot g(2018)$$

Điều này là vô lý vì vế trái là số lẻ, còn vế phải là số chẵn (vì $2017 - a; 2018 - a$ là 2 số nguyên liên tiếp, tích là số chẵn).

Vậy $f(x) = 0$ không có nghiệm nguyên (đpcm).

GV có thể mở rộng cho HS:

- Số 2017 và 2018 có thể thay bởi bất cứ số nguyên nào miễn sao có 1 số chẵn và 1 số lẻ. Số 2019 có thể thay bằng 1 số nguyên lẻ bất kỳ.

- Liệu có tìm được đa thức nào hệ số nguyên thỏa mãn giả thiết

$$f(2017) \cdot f(2018) = 2019?$$

- Đa số chứng minh phương trình không có nghiệm đều sử dụng phương pháp phản chứng (dựa vào chia hết, số tận cùng ...).

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Bài 53: Tìm nghiệm $(x; y)$ của phương trình $x^2 + 2y^2 + 3xy + 8 = 9x + 10y$ với x, y thuộc $\mathbb{N}^*$.

Lời giải

$$x^2 + 2y^2 + 3xy + 8 = 9x + 10y$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2xy + xy + 2y^2 - 8(x + y) - (x + 2y) + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x + 2y) + y(x + 2y) - 8(x + y) - (x + 2y) + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y - 1)(x + 2y) - 8(x + y - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y - 1)(x + 2y - 8) = 0 \quad (1)$$
 Với $x \geq 1, y \geq 1$ (vì thuộc $\mathbb{N}^*$) suy ra $x + y - 1 \geq 1 > 0$
 Do đó (1) $\Leftrightarrow x + 2y = 8$
 Ta có $2y \leq 8 - 1 = 7$ nên $y \leq 7/2$
 Mà y thuộc $\mathbb{N}^*$ suy ra $y = 1; 2; 3$
 Lập bảng kết quả

x	1	2	3
y	6	4	2

Vậy tập hợp bộ số (x, y) thỏa mãn là $\{(6; 1), (4; 2), (2; 3)\}$

Bài 54: Tìm nghiệm x, y nguyên dương thỏa mãn phương trình: $2x^2 - 2xy = 5x - y - 19$.

Lời giải

Từ PT ta có $y = \frac{2x^2 - 5x + 19}{2x - 1} = \frac{x(2x - 1) - 2(2x - 1) + 17}{2x - 1} = x - 2 + \frac{17}{2x - 1}$ ($x \neq \frac{1}{2}$ vì nếu $x = \frac{1}{2}$ không nguyên)

$\Rightarrow$ với x nguyên thì y nguyên khi và chỉ khi $\frac{17}{2x - 1}$ nguyên $\Leftrightarrow 17 : 2x - 1 \Leftrightarrow 2x - 1$ là ước của 17.

Mà 17 có các ước là $\pm 1; \pm 17$

Do x nguyên dương nên $2x - 1 \geq 1 \Rightarrow 2x - 1 = 1$ hoặc $2x - 1 = 17 \Rightarrow x = 1$ hoặc $x = 9$

$\Rightarrow y = 16$ hoặc $y = 8$.

Vậy PT có các nghiệm nguyên là: $(x; y) = (1; 16); (9; 8)$

Bài 55: Có thể lát kín một cái sân hình vuông cạnh 3,5m bằng những viên gạch hình chữ nhật kích thước 25cm x 100cm mà không cắt gạch được hay không?

Lời giải

Không thể lát sân mà không phải cắt gạch vì nếu gọi số gạch lát theo chiều dài và chiều rộng của viên gạch là x, y thì hệ PT sau phải có nghiệm nguyên:

$$\begin{cases} 100x = 350 \\ 25y = 350 \end{cases} \text{ nhưng hệ vô nghiệm nguyên}$$

Bài 56: Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn phương trình $xy^2 + 2xy + x = 32y$.

Lời giải

$$xy^2 + 2xy + x = 32y \Leftrightarrow x(y+1)^2 = 32y$$

$$\text{Do } y \text{ nguyên dương} \Rightarrow y+1 \neq 0 \Rightarrow x = \frac{32y}{(y+1)^2}$$

$$\text{Vì } (y, y+1) = 1 \Rightarrow (y+1)^2 \in U(32)$$

$$\text{mà } 32 = 2^5 \Rightarrow (y+1)^2 = 2^2 \text{ và } (y+1)^2 = 2^4 \text{ (Do } (y+1)^2 > 1)$$

$$\text{*Nếu } (y+1)^2 = 2^2 \Rightarrow y = 1; x = 8$$

$$\text{*Nếu } (y+1)^2 = 2^4 \Rightarrow y = 3; x = 6$$

Vậy nghiệm nguyên dương của phương trình là:

$$\begin{cases} x=8 \\ y=1 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x=6 \\ y=3 \end{cases}$$

Bài 57: Giải phương trình trên tập nguyên

$$x^2 + 5y^2 - 4xy + 4x - 8y - 12 = 0$$

Lời giải

$$x^2 + 5y^2 - 4xy + 4x - 8y - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x(y-1) - (5y^2 - 8y - 12) = 0(*)$$

để PT(*) có nghiệm nguyên x thì Δ' chính phương

$$\Delta' = 4(y-1)^2 - 5(5y^2 - 8y - 12) = 16 - y^2 \leq 16$$

từ đó tìm được $(x; y) \in \{(2; 0); (-6; 0); (-10; -4); (6; 4)\}$

Cách khác $x^2 + 5y^2 - 4xy + 4x - 8y - 12 = 0 \Leftrightarrow (x - 2y + 2)^2 + y^2 = 16 = 4^2 + 0^2$
xét từng trường hợp sẽ ra nghiệm

Bài 58: Tìm $x, y, z \in N$ thỏa mãn $\sqrt{x+2\sqrt{3}} = \sqrt{y} + \sqrt{z}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \sqrt{x+2\sqrt{3}} = \sqrt{y} + \sqrt{z} \Leftrightarrow x+2\sqrt{3} = y+z+2\sqrt{yz}$$

$$\Leftrightarrow (x-y-z)+2\sqrt{3} = 2\sqrt{yz} \Rightarrow (x-y-z)^2 + 4\sqrt{3}(x-y-z) + 12 = 4yz \quad (1)$$

TH1. Nếu $x-y-z \neq 0$ Ta có $\sqrt{3} = \frac{4yz - (x-y-z)^2 - 12}{4(x-y-z)}$ (2) vô lý

(do $x, y, z \in N$ nên vế phải của (2) là số hữu tỷ).

TH2. $x-y-z = 0$ khi đó (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x-y-z=0 \\ yz=3 \end{cases}$ (3)

$$\text{Giải (3) ra ta được } \begin{cases} x=4 \\ y=1 \\ z=3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=4 \\ y=3 \\ z=1 \end{cases} \text{ thử lại thỏa mãn}$$

Bài 59: Tìm các số tự nhiên x, y biết rằng:

$$(2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4) - 5^y = 11879$$

Lời giải

Đặt $A = (2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4)$, ta có $2^x \cdot A$ là tích của 5 số tự nhiên liên tiếp nên

$2^x \cdot A$ chia hết cho 5. Nhưng 2^x không chia hết cho 5, do đó A chia hết cho 5.

Nếu $y \geq 1$, ta có $(2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4) - 5^y$ chia hết cho 5 mà 11879 không chia hết cho 5 nên $y \geq 1$ không thỏa mãn, suy ra $y = 0$.

$$\text{Khi đó, ta có } (2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4) - 5^y = 11879$$

$$\Leftrightarrow (2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4) - 1 = 11879$$

$$\Leftrightarrow (2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4) = 11880$$

$$\Leftrightarrow (2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4) = 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy $x = 3; y = 0$ là hai giá trị cần tìm.

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Bài 60: Cho tam giác vuông có độ dài các cạnh là những số nguyên và số đo chu vi bằng hai lần số đo diện tích. Tìm độ dài các cạnh của tam giác đó.

Lời giải

Gọi độ dài các cạnh của tam giác vuông là a, b, c (a là độ dài cạnh huyền)

Theo giả thiết và định lý Pitago, ta có:

$$\begin{cases} a + b + c = bc & (1) \\ b^2 + c^2 = a^2 & (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow b^2 + c^2 + 2bc = 2(a + b + c) + a^2$$

$$\Leftrightarrow (b + c - 1)^2 = (a + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b + c - 2 = a \\ a + b + c = 0 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Thế $a = b + c - 2$ vào (2) ta được:

$$2 + bc - 2b - 2c = 0 \Leftrightarrow (b-2)(c-2) = 2$$

Vì b, c là các số nguyên dương nên ta có các trường hợp sau:

T.Hợp	$b - 2$	$c - 2$	b	c	a	K.Luận
1	1	2	3	4	5	Nhận
2	2	1	4	3	5	Nhận
3	-1	-2	1	0		Loại
4	-2	-1	0	1		Loại

Vậy tam giác cần tìm có các cạnh là 3; 4; 5

Bài 61: Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn: $2y^2x + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy$

Lời giải

$$2y^2x + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy$$

$$\Leftrightarrow 2y^2x + x + y + 1 - x^2 - 2y^2 - xy = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2y^2 - y - x) = -1$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $x - 1 \in U(-1) = \{1; -1\}$

+) Nếu $x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2$

Khi đó $2y^2 - y - 2 = -1$

$$\Leftrightarrow y = 1 \text{ (t/m)} \text{ hoặc } y = \frac{-1}{2} \notin \mathbb{Z} \text{ (loại)}$$

+) Nếu $x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0$

Khi đó $2y^2 - y = 1$

$$\Leftrightarrow y = 1 \text{ (t/m)} \text{ hoặc } y = \frac{-1}{2} \notin \mathbb{Z} \text{ (loại)}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}; \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$$

Bài 62: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $3^x + 171 = y^2$

Lời giải

Ta có $3^{x-2} + 19 = z^2 \Leftrightarrow (z-3^k)(z+3^k) = 19$. Vì 19 là số nguyên tố và $z-3^k < z+3^k$ nên

$$\begin{cases} z-3^k=1 \\ z+3^k=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=10 \\ 3^k=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=10 \\ k=2 \end{cases}$$

Vậy $x=6$ và $y=30$.

Bài 63: Tìm tất cả các cặp số nguyên (m, n) sao cho $2n^3 - mn^2 - 3n^2 + 14n - 7m - 5 = 0$

Lời giải

$$2n^3 - mn^2 - 3n^2 + 14n - 7m - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 2n - 3 + \frac{16}{n^2 + 7} \quad (1)$$

$$\text{Vì } m, n \in \mathbb{Z} \text{ nên } n^2 + 7 \in U(16) \Rightarrow n^2 + 7 \in \{8, 16\} \Rightarrow n^2 \in \{1, 9\} \Rightarrow n \in \{\pm 1, \pm 3\} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy được:

$$(m, n) = \{(1; 1), (-3; -1), (4; 3), (-8; -3)\}$$

Bài 64: Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

$$x^2 - 25 = y(y+6)$$

Lời giải

$$\text{Từ } x^2 - 25 = y(y+6)$$

$$\text{Ta có : } (y+3+x)(y+3-x) = -16$$

Đề ý trong phương trình chỉ chứa ẩn số x với số mũ bằng 2, do đó ta có thể hạn chế giải với x là số tự nhiên.

$$\text{Khi đó: } y+3+x \geq y+3-x.$$

$$\text{Ta có } (y+3+x) + (y+3-x) = 2(y+3) \text{ là số chẵn}$$

Suy ra 2 số $(y+3+x)$ và $(y+3-x)$ cùng tính chẵn lẻ. Ta lại có tích của chúng là số chẵn, vậy 2 số $(y+3+x)$ và $(y+3-x)$ là 2 số chẵn.

Ta chỉ có cách phân tích -16 ra tích của 2 số chẵn sau đây:

$$-16 = 8(-2) = 4(-4) = 2(-8) \text{ trong đó thừa số đầu bằng giá trị } (y+3+x).$$

$$\text{Khi } y+3+x=8, y+3-x=-2 \text{ ta có } x=5, y=0.$$

$$\text{Khi } y+3+x=4, y+3-x=-4 \text{ ta có } x=4, y=-3.$$

$$\text{Khi } y+3+x=2, y+3-x=-8 \text{ ta có } x=5, y=-6.$$

Vì thế phương trình đã cho có các nghiệm:

$$(x, y) \in \{(\pm 5, 0); (\pm 4, -3); (\pm 5, -6)\}.$$

Bài 65: Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) thỏa mãn đẳng thức:

$$a^3 - b^3 + 3(a^2 - b^2) + 3(a - b) = (a+1)(b+1) + 25.$$

Lời giải

$$a^3 - b^3 + 3(a^2 - b^2) + 3(a - b) = (a+1)(b+1) + 25$$

$$\Leftrightarrow (a^3 + 3a^2 + 3a + 1) - (b^3 + 3b^2 + 3b + 1) = (a+1)(b+1) + 25$$

$$\Leftrightarrow (a+1)^3 - (b+1)^3 = (a+1)(b+1) + 25 \quad (*)$$

Đặt $x = a+1, y = b+1 (x, y \in \mathbb{Z}; x, y \geq 2)$.

Khi đó (*) trở thành: $x^3 - y^3 = xy + 25 \Leftrightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2) = xy + 25 \quad (**)$

+ Từ (**) suy ra $x > y \Rightarrow x - y \geq 1$, mà $x^2 + xy + y^2 > 0$ nên:

$$x^2 + xy + y^2 \leq xy + 25 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 25 \Rightarrow x \leq 4 \quad (1).$$

+ Hơn nữa: $x > y$ và $x, y \geq 2$ nên $xy \geq 6$.

$$\text{Suy ra } x^3 - y^3 = xy + 25 \geq 31 \Rightarrow x^3 > 31 \Rightarrow x > 3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $x = 4$. Do $x > y$ và $y \geq 2$ nên $y \in \{2; 3\}$.

+ Thử lại, chỉ có $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$ thỏa (**). Suy ra $\begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$ là cặp số cần

Bài 66: Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $5(x^2 + xy + y^2) = 7(x + 2y)$

Lời giải

$$5(x^2 + xy + y^2) = 7(x + 2y) \quad (1)$$

$$\Rightarrow 7(x + 2y) : 5 \Rightarrow (x + 2y) : 5$$

$$\text{Đặt } x + 2y = 5t \quad (2) \quad (t \in \mathbb{Z})$$

$$(1) \text{ trở thành } x^2 + xy + y^2 = 7t \quad (3)$$

Từ (2) $\Rightarrow x = 5t - 2y$ thay vào (3) ta được

$$3y^2 - 15ty + 25t^2 - 7t = 0 \quad (*)$$

$$\Delta = 84t - 75t^2$$

$$\text{Để } (*) \text{ có nghiệm } \Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 84t - 75t^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq t \leq \frac{28}{25}$$

$$\text{Vì } t \in \mathbb{Z} \Rightarrow t = 0 \text{ hoặc } t = 1$$

Thay vào (*)

$$\text{Với } t = 0 \Rightarrow y_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\text{Với } t = 1 \Rightarrow \begin{cases} y_2 = 3 \Rightarrow x_2 = -1 \\ y_3 = 2 \Rightarrow x_3 = 1 \end{cases}$$

Bài 67: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $5x^2 + y^2 = 17 - 2xy$

Lời giải

$$5x^2 + y^2 = 17 - 2xy \Leftrightarrow 4x^2 + (x + y)^2 = 17$$

$$\Rightarrow 4x^2 \leq 17 \Rightarrow x^2 \leq \frac{17}{4} \text{ vì } x^2 \text{ là số chính phương nên } x^2 = 0; 1; 4$$

$$\text{Nếu } x^2 = 0 \Rightarrow (x + y)^2 = 17 \text{ (loại)}$$

$$\text{Nếu } x^2 = 1 \Rightarrow (x + y)^2 = 13 \text{ (loại)}$$

$$\text{Nếu } x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = -2$$

$$x = 2 \Rightarrow (2 + y)^2 = 1 \Rightarrow y = -3 \text{ hoặc } y = -1.$$

$$x = -2 \Rightarrow (-2 + y)^2 = 1 \Rightarrow y = 3 \text{ hoặc } y = 1.$$

Vậy phương trình có nghiệm: $(x; y) = (2; -3), (2; -1), (-2; 3), (-2; 1)$

Bài 68: Tìm nghiệm nguyên của phương trình $y^2 - 5y + 62 = (y - 2)x^2 + (y^2 - 6y + 8)x$.

Lời giải

$$\text{Ta có } (1) \Leftrightarrow (y - 2)(y - 3) + 56 = (y - 2)x^2 + (y - 2)(y - 4)x$$

$$\Leftrightarrow (y-2)[x^2 + (y-4)x - (y-3)] = 56$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(y-2)(x+y-3) = 56.$$

Nhận thấy $(y-2) + (x-1) = x+y-3$, nên ta phải phân tích số 56 thành tích của ba số nguyên mà tổng hai số đầu bằng số còn lại.

Như vậy ta có

$$+) 56 = 1.7.8 \Rightarrow (x; y) = (2; 9).$$

$$+) 56 = 7.1.8 \Rightarrow (x; y) = (8; 3).$$

$$+) 56 = (-8).1.(-7) \Rightarrow (x; y) = (-7; 3).$$

$$+) 56 = 1.(-8).(-7) \Rightarrow (x; y) = (2; -6).$$

$$+) 56 = (-8).7.(-1) \Rightarrow (x; y) = (-7; 9).$$

$$+) 56 = 7.(-8).(-1) \Rightarrow (x; y) = (8; -6).$$

Vậy phương trình có 6 nghiệm nguyên như trên.

Bài 69: Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa phương trình $2x^2 + y^2 + xy = 2(x+y)$

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với : $2x^2 + (y-2)x + y^2 - 2y = 0$ (1)

Xem đây là phương trình bậc hai theo ẩn x

$$\Delta = (y-2)^2 - 8(y^2 - 2y) = -7y^2 + 12y + 4 = (y-2)(-7y-2)$$

$$\text{Đề (1) có nghiệm thì } \Delta \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-2}{7} \leq y \leq 2 \text{ do } y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow y \in \{0, 1, 2\}$$

- Với $y=0 \Rightarrow 2x^2 = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$
- Với $y=1 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{2} (\text{loại}) \\ x=1 \end{cases}$
- Với $y=2 \Leftrightarrow 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x=0$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $(0; 2); (1; 1); (1; 0); (0; 0)$

Bài 70. Tìm các số x, y nguyên dương thỏa mãn phương trình: $16(x^3 - y^3) = 15xy + 371$.

Lời giải

Vì x, y nguyên dương nên $16(x^3 - y^3) = 15xy + 371 > 0 \Rightarrow x > y$.

Ta lại có $15xy = 16(x^3 - y^3) - 371$ là số lẻ nên x, y đều lẻ. suy ra $y \geq 1; x > y \geq 1 \Rightarrow x \geq 3$.

Xét $x=3 \Rightarrow y < 3 \Rightarrow y=1$ thay vào phương trình thỏa mãn.

Xét $x \geq 5$ ta có $x-2 \geq y$, suy ra $16(x^3 - y^3) \geq 16[x^3 - (x-2)^3] = 16(6x^2 - 12x + 8)$.

Mặt khác $15xy + 371 \leq 15x(x-2) + 371 = 15x^2 - 30x + 371$. Ta chứng minh

$$16(6x^2 - 12x + 8) > 15x^2 - 30x + 371.$$

Thật vậy, $16(6x^2 - 12x + 8) > 15x^2 - 30x + 371$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\Leftrightarrow 81x^2 - 162x - 243 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3) > 0 \text{ đúng với mọi } x \geq 5.$$

Suy ra $16(x^3 - y^3) > 15xy + 371$ với mọi $x \geq 5$.

Vậy phương trình có nghiệm $(x; y) = (3; 1)$.

Bài 71: Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình: $x + xy + y = 9$.

Lời giải

- Từ (gt) ta có $(x+1)(y+1) = 10$; vì $10 = 1 \cdot 10 = 2 \cdot 5$

- Vì $x, y \in \mathbb{N}$

- Lập bảng ta tìm được 4 nghiệm $(x; y) = (0; 9); (9; 0); (1; 4); (4; 1)$

Bài 72: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $y^2 = -2(x^6 - x^3y - 32)$

Lời giải

Ta có: $y^2 = -2(x^6 - x^3y - 32) \Leftrightarrow x^6 + (y - x^3)^2 = 64$

$\Rightarrow x^6 \leq 64 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$ do $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-1; -2; 1; 0; 1; 2\}$

Xét các trường hợp:

$+ x = 2 \Rightarrow (y - x^3)^2 = 0 \Rightarrow y = 8$

$+ x = 1 \Rightarrow (y - x^3)^2 = 63 \Rightarrow y \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ pt này không có nghiệm nguyên

$+ x = 0 \Rightarrow (y - x^3)^2 = 4 \Rightarrow y = 8 \text{ và } y = -8$

$+ x = -1 \Rightarrow (y - x^3)^2 = 63 \Rightarrow y \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ pt này không có nghiệm nguyên

$+ x = -2 \Rightarrow (y - x^3)^2 = 0 \Rightarrow y = -8$

Vậy nghiệm của phương trình là: $(0; 8); (0; -8); (2; 8); (-2; -8)$.

Bài 73:

1) Chứng minh rằng với k là số nguyên thì $2016k + 3$ không phải là lập phương của một số nguyên.

2) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - 25 = y(y+6)$

Lời giải

1) Chứng minh rằng với k là số nguyên thì $2016k + 3$ không phải là lập phương của một số nguyên.

Giả sử $2016k + 3 = a^3$ với k và a là số nguyên.

Suy ra: $2016k = a^3 - 3$

Ta chứng minh $a^3 - 3$ không chia hết cho 7.

Thật vậy: Ta biểu diễn $a = 7m + r$, với $r \in \{0; 1; -1; 2; -2; 3; -3\}$.

Trong tất cả các trường hợp trên ta đều có $a^3 - 3$ không chia hết cho 7

Mà $2016k$ luôn chia hết cho 7, nên $a^3 - 3 \neq 2016k$. ĐPCM

2) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 - 25 = y(y+6)$

Từ $x^2 - 25 = y(y+6)$

Ta có: $(y+3+x)(y+3-x) = -16$

Đề ý trong phương trình chỉ chứa ẩn số x với số mũ bằng 2, do đó ta có thể hạn chế giải với x là số tự nhiên.

Khi đó: $y+3+x \geq y+3-x$.

Ta có $(y+3+x)(y+3-x) = 2(y+3)$ là số chẵn

Suy ra 2 số $(y+3+x)$ và $(y+3-x)$ cùng tính chẵn lẻ. Ta lại có tích của chúng là số chẵn, vậy 2 số $(y+3+x)$ và $(y+3-x)$ là 2 số chẵn.

Ta chỉ có cách phân tích -16 ra tích của 2 số chẵn sau đây:

$-16 = 8(-2) = 4(-4) = 2(-8)$ trong @ã thỏa sè @Çu b»ng gi, trÞ $(y+3+x)$.

Khi $y+3+x = 8$, $y+3-x = -2$ ta cã $x = 5$, $y = 0$.

Khi $y+3+x = 4$, $y+3-x = -4$ ta cã $x = 4$, $y = -3$.

Khi $y+3+x = 2$, $y+3-x = -8$ ta cã $x = 5$, $y = -6$.

V× thÕ ph--ng tr×nh @· cho cã c, c nghiÖm:

$(x, y) \in \{(\pm 5, 0); (\pm 5, -6); (\pm 4, -3)\}$

Bài 74: Tìm các số nguyên a, b thỏa mãn $\frac{5}{a+b\sqrt{2}} - \frac{4}{a-b\sqrt{2}} + 18\sqrt{2} = 3$

Lời giải

$$\frac{5}{a+b\sqrt{2}} - \frac{4}{a-b\sqrt{2}} + 18\sqrt{2} = 3$$

$$\Leftrightarrow 5a - 5b\sqrt{2} - 4a - 4b\sqrt{2} + 18\sqrt{2}(a^2 - 2b^2) = 3(a^2 - 2b^2)$$

$$\Leftrightarrow 5a - 5b\sqrt{2} - 4a - 4b\sqrt{2} + 18a^2\sqrt{2} - 36b^2\sqrt{2} = 3a^2 - 6b^2$$

$$\Leftrightarrow 18a^2\sqrt{2} - 36b^2\sqrt{2} - 9b\sqrt{2} = 3a^2 - 6b^2 - a$$

$$\Leftrightarrow (18a^2 - 36b^2 - 9b)\sqrt{2} = 3a^2 - 6b^2 - a$$

$$\text{-Nếu } 18a^2 - 36b^2 - 9b \neq 0 \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{3a^2 - 6b^2 - a}{18a^2 - 36b^2 - 9b}$$

$$\text{Vì } a, b \text{ nguyên nên } \frac{3a^2 - 6b^2 - a}{18a^2 - 36b^2 - 9b} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \text{Vô lý vì } \sqrt{2} \text{ là số vô tỉ}$$

$$\text{-Vậy ta có } 18a^2 - 36b^2 - 9b = 0 \Rightarrow \begin{cases} 18a^2 - 36b^2 - 9b = 0 \\ 3a^2 - 6b^2 - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 - 6b^2 = \frac{3}{2}b \\ 3a^2 - 6b^2 = a \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}b$$

$$\text{Thay } a = \frac{3}{2}b \text{ vào } 3a^2 - 6b^2 - a = 0 \text{ ta có}$$

$$a \text{ có } 3 \cdot \frac{9}{4}b^2 - 6b^2 - \frac{3}{2}b = 0 \Leftrightarrow 27b^2 - 24b^2 - 6b = 0 \Leftrightarrow 3b(b-2) = 0$$

Ta có $b=0$ (loại); $b=2$ (thỏa mãn), vậy $a=3$. Kết luận

Bài 75: Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^5 + y^2 = xy^2 + 1$

Lời giải

$$\text{Ta có } x^5 + y^2 = xy^2 + 1 \Leftrightarrow (x^5 - 1) - (xy^2 - y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) - y^2(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 - y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = y^2 \end{cases}$$

*Nếu $x-1=0 \Rightarrow x=1$ ta có $1 + y^2 = y^2 + 1$ đúng với mọi y nguyên

Vậy nghiệm của PT là $(1; y \in \mathbb{Z})$

$$\text{*Nếu } x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = y^2 \Rightarrow 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 = (2y)^2$$

Ta có

$$(2y)^2 - (2x^2 + x)^2 = 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 - 4x^4 - 4x^3 - x^2$$

$$= 3x^2 + 4x + 4 = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{8}{3} > 0$$

$$\text{Vậy ta có } (2x^2 + x)^2 < (2y)^2 *$$

$$\text{Ta có } (2x^2 + x + 2)^2 - (2y)^2 = 5x^2 \geq 0, \text{ Vậy ta có } (2y)^2 \geq (2x^2 + x + 2)^2 **$$

Từ * và ** ta có

$$(2x^2 + x)^2 < (2y)^2 \leq (2x^2 + x + 2)^2 \Rightarrow (2y)^2 = (2x^2 + x + 1)^2;$$

$$(2y)^2 = (2x^2 + x + 2)^2$$

$$\text{Nếu } (2y)^2 = (2x^2 + x + 1)^2 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=3 \end{cases}$$

$$+ \text{ nếu } x=-1 \Rightarrow y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1$$

$$+ \text{ Nếu } x=3 \Rightarrow y^2=121 \Rightarrow y=\pm 11$$

$$- \text{ Nếu } (2y)^2 = (2x^2 + x + 2)^2 \Leftrightarrow -5x^2 = 0 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1.$$

Kết luận

Bài 76: Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn: $2y^2x + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy$

Lời giải

$$2y^2x + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + xy$$

$$\Leftrightarrow 2y^2x + x + y + 1 - x^2 - 2y^2 - xy = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2y^2 - y - x) = -1$$

$$\text{Vì } x, y \in \mathbb{Z} \text{ nên } x-1 \in U(-1) = \{1; -1\}$$

$$+) \text{ Nếu } x-1=1 \Rightarrow x=2$$

$$\text{Khi đó } 2y^2 - y - 2 = -1$$

$$\Leftrightarrow y=1 \text{ (t/m) hoặc } y = \frac{-1}{2} \notin \mathbb{Z} \text{ (loại)}$$

$$+) \text{ Nếu } x-1=-1 \Rightarrow x=0$$

$$\text{Khi đó } 2y^2 - y = 1$$

$$\Leftrightarrow y=1 \text{ (t/m) hoặc } y = \frac{-1}{2} \notin \mathbb{Z} \text{ (loại)}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}; \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$$

Bài 77: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $6x^2 + 5y^2 = 74$

Lời giải

Cách 1:

$$\text{Ta có : } 6x^2 + 5y^2 = 74 \Leftrightarrow 6x^2 - 24 = 50 - 5y^2$$

$$\Leftrightarrow 6(x^2 - 4) = 5(10 - y^2) \quad (*)$$

$$\text{Từ } (*) \text{ suy ra: } 6(x^2 - 4) : 5. \text{ Mà } (6;5) = 1 \text{ nên } (x^2 - 4) : 5$$

$$\text{Đặt } x^2 - 4 = 5t \text{ (} t \in \mathbb{N} \text{) } \Rightarrow x^2 = 5t + 4. \text{ Thay vào } (*) \Rightarrow y^2 = 10 - 6t$$

$$\text{Vì } \begin{cases} x^2 > 0 \\ y^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 5t + 4 > 0 \\ y^2 = 10 - 6t > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t > -\frac{4}{5} \\ t < \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow -\frac{4}{5} < t < \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow t=0 \text{ hoặc } t=1$$

$$\oplus \text{ Khi } t=0 \text{ thì } y^2=10 \text{ (loại vì } y \in \mathbb{Z} \text{)}$$

$$\oplus \text{ Khi } t=1 \text{ thì } \begin{cases} x^2=9 \\ y^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \text{ (vì } x>0; y>0 \text{)}$$

Cách 2:

$$\text{Ta có : } 6x^2 + 5y^2 = 74 \Leftrightarrow 6x^2 - 24 = 50 - 5y^2 \Leftrightarrow 6(x^2 - 4) = 5(10 - y^2) \quad (*)$$

$$\text{Từ } (*) \text{ suy ra: } 6(x^2 - 4) : 5. \text{ Mà } (6;5) = 1 \text{ nên } (x^2 - 4) : 5$$

$$\Rightarrow [(x^2 - 4) + 5] : 5 \Leftrightarrow (x^2 + 1) : 5 \quad (**).$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Từ bài ra $\Rightarrow 0 < 6x^2 < 74 \Rightarrow 0 < x^2 \leq 12$. Kết hợp (**) $\Rightarrow x^2 = 4$ hoặc $x^2 = 9$

⊕ Khi $x^2 = 4$ thì $y^2 = 10$ (loại vì $y \in \mathbb{Z}$)

⊕ Khi $x^2 = 9$ thì $y^2 = 4 \Rightarrow (x = 3 \vee y = 2)$ (vì $x > 0; y > 0$)

CÁC DẠNG BÀI TẬP THI HSG TOÁN 9 QUA CÁC ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI

IV. Dạng 4: Phương trình

1. Phương trình bậc nhất một ẩn

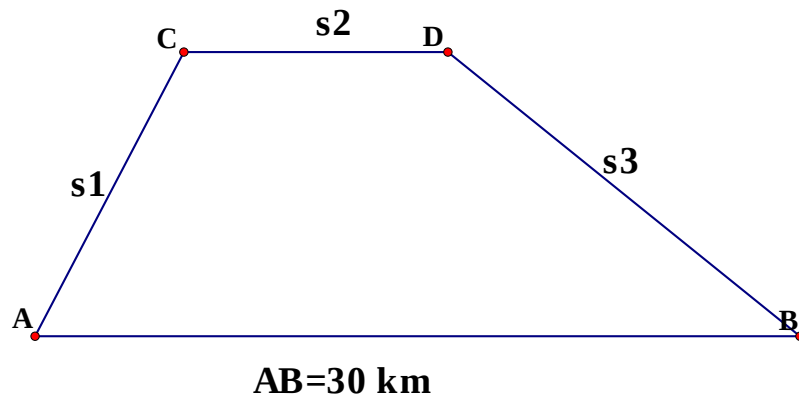
A. Bài toán

Bài 1: Quãng đường từ A đến B gồm đoạn lên dốc AC , đoạn nằm ngang CD , đoạn xuống dốc DB , tổng cộng dài 30 km . Một người đi từ A đến B rồi đi từ B về A hết tất cả 4 giờ 25 phút. Tính quãng đường nằm ngang, biết rằng vận tốc lên dốc (cả đi lẫn về) là 10 km/h ; vận tốc xuống dốc (cả đi lẫn về) là 20 km/h ; vận tốc trên đoạn đường nằm ngang 15 km/h .

B. Lời giải

Bài 1: Quãng đường từ A đến B gồm đoạn lên dốc AC , đoạn nằm ngang CD , đoạn xuống dốc DB , tổng cộng dài 30 km . Một người đi từ A đến B rồi đi từ B về A hết tất cả 4 giờ 25 phút. Tính quãng đường nằm ngang, biết rằng vận tốc lên dốc (cả đi lẫn về) là 10 km/h ; vận tốc xuống dốc (cả đi lẫn về) là 20 km/h ; vận tốc trên đoạn đường nằm ngang 15 km/h .

Lời giải



Gọi $AC = s_1$; $CD = s_2$; $BD = s_3$; $s_1 > 0$; $s_2 > 0$; $s_3 > 0$

Ta có: $s_1 + s_2 + s_3 = 30(\text{km})$.

Gọi vận tốc lên, vận tốc ngang, xuống lần lượt là v_1 ; v_2 ; v_3 .

Thời gian đi và về là: $4\text{h } 25' = \frac{53}{12} \text{ h}$.

Theo đề bài, ta có phương trình: $\frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} + \frac{s_3}{v_3} + \frac{s_1}{v_3} + \frac{s_2}{v_2} + \frac{s_3}{v_1} = \frac{53}{12}$

$$\Leftrightarrow s_1 \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_3} \right) + s_3 \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_3} \right) + \frac{2s_2}{v_2} = \frac{53}{12}$$

$$\Leftrightarrow s_1 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{20} \right) + s_3 \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{10} \right) + \frac{2s_2}{15} = \frac{53}{12}$$

$$\Leftrightarrow (s_1 + s_3) \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{20} \right) + \frac{2s_2}{15} = \frac{53}{12}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{20} (30 - s_2) \frac{2s_2}{15} = \frac{53}{12}$$

$$\Leftrightarrow s_2 = 5 \text{ (km)}$$

Vậy quãng đường ngang CD là 5 (km) .

2. Phương trình bậc hai và định lý Vi-et

A. Bài toán

Bài 1: Cho phương trình: $2013x^2 - (m - 2014)x - 2015 = 0$, với m là tham số. Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $\sqrt{x_1^2 + 2014} - x_1 = \sqrt{x_2^2 + 2014} + x_2$.

Bài 2: Tìm giá trị của m để phương trình $x^2 - mx + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn hệ thức $(x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 = 2$.

Bài 3: Cho phương trình: $x^2 + 2(a + b)x + 4ab = 0$ (x là ẩn số; a, b là tham số). Tìm điều kiện của a và b để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt trong đó có ít nhất một nghiệm dương.

Bài 4: Cho phương trình: $x^2 + 2(m - 2)x - m^2 = 0$, với m là tham số. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 < x_2; |x_1| - |x_2| = 6$.

Bài 5: Cho phương trình $x^4 - 2(m + 4)x^2 + m^2 + 8 = 0$ (1) với m là tham số.

1) Giải phương trình (1) khi $m = 0$.

2) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $x_1; x_2; x_3; x_4$ thỏa mãn điều kiện $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 240$

Bài 6: Cho phương trình (ẩn x): $x^2 - 3(m + 1)x + 2m^2 + 5m + 2 = 0$. Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 thỏa mãn $|x_1 + x_2| = 2|x_1 - x_2|$.

Bài 7: Tìm m để phương trình: $(x - 2)(x - 3)(x + 4)(x + 5) = m$ có 4 nghiệm phân biệt.

Bài 8: Giải phương trình: $3\sqrt{x^3 + 8} = 2x^2 - 3x + 10$.

Bài 9: Cho phương trình $x^2 + (m^2 + 1)x + m - 2 = 0$ (1), m là tham số. Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{2x_1 - 1}{x_2} + \frac{2x_2 - 1}{x_1} = x_1x_2 + \frac{55}{x_1x_2}$.

Bài 10: Cho phương trình $x^2 + 2(2m - 3)x + m^2 = 0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 khác 0, (chúng có thể trùng nhau) và biểu thức $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 11: Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 4 = 0$

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 = 26m$

b) Tìm m nguyên để phương trình có hai nghiệm nguyên.

Bài 12: Cho phương trình: $x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$.

a) Chứng minh rằng phương trình đã cho luôn có nghiệm.

b) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$B = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(1 + x_1x_2)}.$$

Bài 13: Cho phương trình $x^2 - (3m - 2)x + 2m^2 - 5m - 3 = 0$, x là ẩn, m là tham số. Tìm tất cả giá trị của m để phương trình có ít nhất một nghiệm dương.

Bài 14: Cho hai số thực m, n khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$

Chứng minh rằng phương trình $(x^2 + mx + n)(x^2 + nx + m) = 0$ luôn có nghiệm

Bài 15: Do bị bệnh bại não nên tay chân của Cảnh (11 tuổi, bản Tà Ớt, xã Châu Hạnh, huyện Quỳnh Châu, tỉnh Nghệ An) bị co quắp, không đi lại được từ lúc mới chào đời. Lên 6 tuổi, nhìn bạn bè cắp sách đến trường em cũng muốn mẹ cho đi học. Thương con ham học, những ngày đầu Cảnh được người thân công đến trường. Ít ngày sau, chứng kiến cảnh người thân của bạn phải vất vả bỏ bê công việc, Khanh đã quyết định công bạn vượt qua con đường dài 1,8 km nhiều sỏi đá để tới trường.

Lúc về, trên quãng đường dài 1,8 km, trời nắng, Khanh công bạn với vận tốc ít hơn lúc đi 0,2 m/s. Do đó, thời gian công bạn lúc về của Khanh chậm hơn lúc đi là 12 phút 30 giây. Tính vận tốc lúc công bạn đi của Khanh.

Bài 16: Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 + 2kx + 4 = 0$ (k là tham số). Tìm tất cả

các giá trị của k sao cho: $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 \leq 3$.

Bài 17: Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3 = 0$ (x là ẩn, m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + 4x_1 + 2x_2 - 2mx_1 = 1$.

Bài 18: Cho phương trình: $x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$. Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm

x_1, x_2 với mọi m . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(1 + x_1x_2)}$ khi m thay đổi.

Bài 19: Xét phương trình $x^2 - m^2x + 2m + 2 = 0$ (1) (ẩn x). Tìm các giá trị nguyên dương của m để phương trình (1) có nghiệm nguyên.

Bài 20: Cho phương trình: $x^2 - (2m+1)x + m^2 + m - 6 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt

Bài 21: Cho phương trình: $x^2 - 6x - m = 0$ (Với m là tham số). Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn $x_1^2 - x_2^2 = 12$

Bài 22: Cho phương trình $x^2 - mx + m - 1 = 0$

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn biểu thức

$A = \frac{4x_1x_2 + 6}{x_1^2 + x_2^2 + 2(1 + x_1x_2)}$ đạt giá trị nhỏ nhất

Bài 23: Tìm 2 số m, n cùng dấu thỏa mãn điều kiện: $|m| + 2|n|$ đạt giá trị nhỏ nhất sao cho hai phương trình sau có nghiệm chung: $x^2 + mx + 2 = 0$; $x^2 + 2nx + 6 = 0$.

Bài 24: Cho phương trình: $x^2 + 2(m-3)x - m - 3 = 0$. Tìm các giá trị của m để phương trình có một nghiệm nhỏ hơn 2 và một nghiệm lớn hơn 2.

Bài 25: Cho phương trình $x^2 + 4x - m = 0$ (1) (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)(x_1^2 + x_2^2) = 4(m+2)$.

Bài 26: Cho ba số thực dương phân biệt a, b, c thỏa $a + b + c = 3$. Xét ba phương trình bậc hai $4x^2 + 4ax + b = 0$, $4x^2 + 4bx + c = 0$, $4x^2 + 4cx + a = 0$. Chứng minh rằng trong ba phương trình trên có ít nhất một phương trình có nghiệm và có ít nhất một phương trình vô nghiệm.

Bài 27: Cho phương trình $2018x^2 - (m - 2019)x - 2020 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

$$\sqrt{x_1^2 + 2019} - x_1 = \sqrt{x_2^2 + 2019} + x_2.$$

Bài 28: Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 4 = 0$ (1) (m là tham số).

a) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m .

b) Với giá trị nào của m thì phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

$$x_1 + x_2 = \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1}.$$

Bài 29: Cho phương trình (ẩn x) $x^2 + (m-1)x + m - 6 = 0$. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho biểu thức $A = (x_1^2 - 4)(x_2^2 - 4)$ có giá trị lớn nhất.

Bài 30: Cho hai số thực a, b không âm thỏa mãn $18a + 4b \geq 2013$. Chứng minh rằng phương trình sau luôn có nghiệm: $18ax^2 + 4bx + 671 - 9a = 0$.

Bài 31: Cho hai phương trình: $x^2 - x + m + 1 = 0$ (1)

$$x^2 + (m+2)x + 2m + 4 = 0 \quad (2) \quad (m \text{ là tham số}).$$

a) Giải phương trình (1) khi $m = -3$.

b) Tìm m để phương trình (2) có một nghiệm bằng -3. Tìm nghiệm còn lại.

c) Tìm m để phương trình (1) và (2) tương đương.

Bài 32: Cho phương trình: $x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$.

a) Chứng minh rằng phương trình đã cho luôn có nghiệm.

b) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$B = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(1 + x_1x_2)}$$

Bài 33: Cho phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - m - 6 = 0$ (m là tham số).

a) Với giá trị nào của m thì phương trình đã cho có hai nghiệm x_1 và x_2 sao cho

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{18}{7}.$$

b) Với giá trị nào của m thì phương trình đã cho có hai nghiệm x_1 và x_2 sao cho $|x_1| + |x_2| = 8$

Bài 34: Cho phương trình $5x^2 + mx - 28 = 0$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $5x_1 + 2x_2 = 1$.

Bài 35: Cho phương trình $x^4 - 2(m-2)x^2 + 2m - 6 = 0$. Tìm các giá trị của m sao cho phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Bài 36: Cho phương trình $x^2 + 2(m-2)x + m^2 - 2m + 4 = 0$. Tìm m để phương trình

$$\text{có hai nghiệm thực phân biệt } x_1, x_2 \text{ thỏa mãn } \frac{2}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{1}{15m}.$$

Bài 37: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $\frac{a}{6} + \frac{b}{5} + \frac{c}{4} = 0$. Chứng minh rằng phương trình

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ luôn có nghiệm.}$$

Bài 38: Cho phương trình: $2x^2 + 3mx - \sqrt{2} = 0$ (m là tham số). Có hai nghiệm x_1 và x_2 . Tìm giá

$$\text{trị nhỏ nhất của biểu thức: } M = (x_1 - x_2)^2 + \left(\frac{1 + x_1^2}{x_1} - \frac{1 + x_2^2}{x_2} \right)^2$$

Bài 39: Biết phương trình $(m-2)x^2 - 2(m-1)x + m = 0$ có hai nghiệm tương ứng là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông. Tìm m để độ dài đường cao ứng với cạnh huyền của tam giác vuông đó bằng $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Bài 40: Cho phương trình $x^2 + (m^2 + 1)x + m - 2 = 0$ (1), m là tham số. Tìm m để phương trình

$$(1) \text{ có hai nghiệm phân biệt } x_1, x_2 \text{ thỏa mãn } \frac{2x_1 - 1}{x_2} + \frac{2x_2 - 1}{x_1} = x_1 x_2 + \frac{55}{x_1 x_2}.$$

Bài 41: Cho phương trình: $x^2 - 2mx + m^2 - m - 6 = 0$ (m là tham số). Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 sao cho $|x_1| + |x_2| = 8$?

B. Lời giải

Bài 1: Cho phương trình: $2013x^2 - (m - 2014)x - 2015 = 0$, với m là tham số. Tìm m để phương

trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $\sqrt{x_1^2 + 2014} - x_1 = \sqrt{x_2^2 + 2014} + x_2$.

Lời giải

$$2013x^2 - (m - 2014)x - 2015 = 0$$

$$\Delta = (m - 2014)^2 + 4 \cdot 2013 \cdot 2015 > 0$$

$\Rightarrow$ Phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m

Theo hệ thức Vi – et ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m - 2014}{2013} \\ x_1 x_2 = \frac{-2015}{2013} \end{cases}$$

$$\sqrt{x_1^2 + 2014} - x_1 = \sqrt{x_2^2 + 2014} + x_2$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \begin{cases} (\sqrt{x_1^2 + 2014} + x_1)(\sqrt{x_2^2 + 2014} + x_2) = 2014 \\ (\sqrt{x_1^2 + 2014} - x_1)(\sqrt{x_2^2 + 2014} - x_2) = 2014 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{(x_1^2 + 2014)(x_2^2 + 2014)} + x_2\sqrt{x_1^2 + 2014} + x_1\sqrt{x_2^2 + 2014} + x_1x_2 = 2014 \\ \sqrt{(x_1^2 + 2014)(x_2^2 + 2014)} - x_2\sqrt{x_1^2 + 2014} - x_1\sqrt{x_2^2 + 2014} + x_1x_2 = 2014 \end{cases} \\
&\Rightarrow \sqrt{x_1^2 + 2014}(x_1 + x_2) + \sqrt{x_2^2 + 2014}(x_1 + x_2) = 0 \\
&\Rightarrow (x_1 + x_2)(\sqrt{x_1^2 + 2014} + \sqrt{x_2^2 + 2014}) = 0 \\
&\Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \\
&\Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \\
&\Rightarrow \frac{m - 2014}{2013} = 0 \\
&\Rightarrow m = 2014 \\
&\text{Vậy } m = 2014
\end{aligned}$$

Bài 2: Tìm giá trị của m để phương trình $x^2 - mx + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thoả mãn hệ thức $(x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 = 2$.

Lời giải

$$x^2 - mx + 1 = 0$$

$$\Delta = (-m)^2 - 4.1.1 = m^2 - 4$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow m < -2$ hoặc $m > 2$

Áp dụng hệ thức Vi – et, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$$

$$(x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 = 2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 + 2(x_1 + x_2) - 2x_1 x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m - 2 = 0$$

Giải phương trình ta được: $m = \sqrt{3} - 1$ (loại); $m = -\sqrt{3} - 1$ (nhận)

Vậy $m = -\sqrt{3} - 1$

Bài 3: Cho phương trình: $x^2 + 2(a + b)x + 4ab = 0$ (x là ẩn số; a, b là tham số). Tìm điều kiện của a và b để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt trong đó có ít nhất một nghiệm dương.

Lời giải

$$x^2 + 2(a + b)x + 4ab = 0$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\Delta' = (a+b)^2 - 1.4ab = (a-b)^2$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = (a-b)^2 > 0 \Leftrightarrow a \neq b$

Phương trình có ít nhất một nghiệm dương

$\Leftrightarrow$ phương trình có 2 nghiệm trái dấu hoặc phương trình có 2 nghiệm đều dương

TH1: Phương trình có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow 1.4ab < 0 \Leftrightarrow ab < 0$

TH2: Phương trình có 2 nghiệm đều dương $\Leftrightarrow \begin{cases} 4ab > 0 \\ -2(a+b) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab > 0 \\ a+b < 0 \end{cases}$

Vậy $a \neq b$ và trong 2 số a, b phải có ít nhất một số âm

Bài 4: Cho phương trình: $x^2 + 2(m-2)x - m^2 = 0$, với m là tham số. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 < x_2; |x_1| - |x_2| = 6$.

Lời giải

$$x^2 + 2(m-2)x - m^2 = 0$$

$$\Delta' = (m-2)^2 - 1.(-m^2) = 2m^2 - 4m + 4 = 2(m-1)^2 + 2 > 0$$

$\Rightarrow$ Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$

Áp dụng hệ thức Vi - et, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 - 2m \\ x_1 x_2 = -m^2 \end{cases}$$

$$|x_1| - |x_2| = 6 \Leftrightarrow (|x_1| - |x_2|)^2 = 36 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2|x_1 x_2| = 36$$

$$\text{Vì } x_1 x_2 = -m^2 < 0 \quad |x_1 x_2| = -x_1 x_2 = m^2$$

Nên ta có phương trình:

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 = 36 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 = 36 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 + x_2 = -6 \end{cases}$$

$$\text{TH1: } x_1 + x_2 = 6 \Leftrightarrow 4 - 2m = 6 \Leftrightarrow m = -1$$

$$\text{TH1: } x_1 + x_2 = -6 \Leftrightarrow 4 - 2m = -6 \Leftrightarrow m = 5$$

Với $m = -1$, ta có phương trình: $x^2 - 6x - 1 = 0$

Giải phương trình ta được: $x_1 = 3 - \sqrt{10}; x_2 = 3 + \sqrt{10}$

$$|x_1| - |x_2| = |3 - \sqrt{10}| - |3 + \sqrt{10}| = \sqrt{10} - 3 - 3 - \sqrt{10} = -6 \text{ (loại)}$$

Với $m = 5$, ta có phương trình: $x^2 + 6x - 25 = 0$

Giải phương trình ta được: $x_1 = -3 - \sqrt{34}; x_2 = -3 + \sqrt{34}$

$$|x_1| - |x_2| = |-3 - \sqrt{34}| - |-3 + \sqrt{34}| = 3 + \sqrt{34} - \sqrt{34} + 3 = 6 \text{ (nhận)}$$

Vậy $m = 5$ là giá trị cần tìm

Bài 5: Cho phương trình $x^4 - 2(m+4)x^2 + m^2 + 8 = 0$ (1) với m là tham số.

- 1) Giải phương trình (1) khi $m = 0$.
- 2) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $x_1; x_2; x_3; x_4$ thỏa mãn điều kiện $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 240$

Lời giải

- 1) Với $m = 0$, ta có phương trình: $x^4 - 8x^2 + 8 = 0$

Đặt $y = x^2$ ($y \geq 0$), ta có phương trình: $y^2 - 8y + 8 = 0$

Giải phương trình ta được: $y = 4 \pm 2\sqrt{2}$ (nhận)

$$y = 4 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 = 4 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$$

$$y = 4 - 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 = 4 - 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{ \pm\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}; \pm\sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \right\}$

- 2) $x^4 - 2(m+4)x^2 + m^2 + 8 = 0$ (1)

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$), ta có phương trình:

$$t^2 - 2(m+4)t + m^2 + 8 = 0 \quad (2)$$

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $x_1; x_2; x_3; x_4$

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m+4)^2 - (m^2 + 8) > 0 \\ S = 2(m+4) > 0 \\ P = m^2 + 8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8m + 8 > 0 \\ m > -4 \end{cases} \Leftrightarrow m > -1$$

Giả sử $t_1; t_2$ là 2 nghiệm của phương trình (2) thì theo Vi - ét ta có:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 2(m+4) \\ t_1 t_2 = m^2 + 8 \end{cases}$$

Giả sử 4 nghiệm của phương trình (1) là: $x_1 = -\sqrt{t_2}; x_2 = -\sqrt{t_1}; x_3 = \sqrt{t_1}; x_4 = \sqrt{t_2}$

Ta có: $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 240 \Leftrightarrow 2(t_1^2 + t_2^2) = 240 \Leftrightarrow t_1^2 + t_2^2 = 120 \Leftrightarrow (t_1 + t_2)^2 - 2t_1 t_2 = 120$

$$\Leftrightarrow [2(m+4)]^2 - 2(m^2 + 8) = 120$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 + 32m - 72 = 0$$

Giải phương trình ta được: $m_1 = 2$ (nhận); $m_2 = -18$ (loại)

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

Bài 6: Cho phương trình (ẩn x): $x^2 - 3(m+1)x + 2m^2 + 5m + 2 = 0$. Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 thỏa mãn $|x_1 + x_2| = 2|x_1 - x_2|$.

Lời giải

$$x^2 - 3(m+1)x + 2m^2 + 5m + 2 = 0$$

$$\Delta = 9(m+1)^2 - 4(2m^2 + 5m + 2) = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và $x_2 \Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 1$

Áp dụng định lý Vi - ét, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3(m-1) \\ x_1 x_2 = 2m^2 + 5m + 2 \end{cases}$$

$$|x_1 + x_2| = 2|x_1 - x_2| \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 = 4(x_1 - x_2)^2 \Leftrightarrow 3(x_1 + x_2)^2 - 16x_1 x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 27(m+1)^2 - 16(2m^2 + 5m + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 5m^2 + 26m + 5 = 0$$

Giải phương trình ta được: $m_1 = -5$ (nhận); $m_2 = \frac{-1}{5}$ (nhận)

Vậy $m = -5$ và $m = \frac{-1}{5}$ là các giá trị cần tìm.

Bài 7: Tìm m để phương trình: $(x-2)(x-3)(x+4)(x+5) = m$ có 4 nghiệm phân biệt.

Lời giải

$$(x-2)(x-3)(x+4)(x+5) = m \Leftrightarrow (x^2 + 2x - 8)(x^2 + 2x - 15) = m \quad (1)$$

Đặt $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 = y$ ($y \geq 0$), ta có phương trình:

$$(y-9)(y-16) = m \Leftrightarrow y^2 - 25y + 144 - m = 0 \quad (2)$$

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (-25)^2 - 4(144 - m) > 0 \\ S = \frac{25}{1} > 0 \\ P = \frac{144 - m}{1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m + 49 > 0 \\ 144 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-49}{4} < m < 144$$

Vậy với $\frac{-49}{4} < m < 144$ thì phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Bài 8: Giải phương trình: $3\sqrt{x^3+8} = 2x^2 - 3x + 10$.

Giải

ĐK: $x \geq -2$. Với điều kiện biến đổi phương trình đã cho trở thành:

$$3\sqrt{(x+2)(x^2-2x+4)} = 2(x^2-2x+4) + (x+2)$$

Chia cả hai vế của phương trình cho $x^2 - 2x + 4$, ta được

$$\frac{x+2}{x^2-2x+4} - 3\sqrt{\frac{x+2}{x^2-2x+4}} + 2 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{\frac{x+2}{x^2-2x+4}} \quad (t \geq 0)$$

Thay vào (1) ta được $t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = 2$ (t/m)

$$+ \text{ với } t = 1 \text{ ta có } \sqrt{\frac{x+2}{x^2-2x+4}} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \text{ (t/m).}$$

$$+ \text{ với } t = 2 \text{ ta có } \sqrt{\frac{x+2}{x^2-2x+4}} = 2 \Leftrightarrow 4x^2 - 9x + 14 = 0 \text{ (vô nghiệm).}$$

Bài 9: Cho phương trình $x^2 + (m^2 + 1)x + m - 2 = 0$ (1), m là tham số. Tìm m để phương trình

$$(1) \text{ có hai nghiệm phân biệt } x_1, x_2 \text{ thỏa mãn } \frac{2x_1-1}{x_2} + \frac{2x_2-1}{x_1} = x_1x_2 + \frac{55}{x_1x_2}.$$

Giải:

$$1) \Delta = (m^2 + 1)^2 - 4(m - 2) = m^4 + 2(m - 1)^2 + 7 > 0$$

$$\text{Theo định lí Vi-ét ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = -(m^2 + 1) \\ x_1x_2 = m - 2 \end{cases}$$

$$\frac{2x_1-1}{x_2} + \frac{2x_2-1}{x_1} = x_1x_2 + \frac{55}{x_1x_2} \Leftrightarrow \frac{(2x_1-1)x_1 + (2x_2-1)x_2}{x_1x_2} = \frac{(x_1x_2)^2 + 55}{x_1x_2}$$

$$\Rightarrow 2x_1^2 - x_1 + 2x_2^2 - x_2 = (x_1x_2)^2 + 55 \Leftrightarrow 2(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 - (x_1 + x_2) - (x_1x_2)^2 - 55 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(-(m^2 + 1))^2 - 4(m - 2) + (m^2 + 1) - (m - 2)^2 + 55 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(m^4 + 2m^2 + 1) - 4m + 8 + m^2 + 1 - m^2 + 4m - 4 - 55 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^4 + 2m^2 - 24 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Đặt } m^2 = a \quad (a \geq 0)$$

$$\text{Phương trình (2) trở thành } a^2 + 2a - 24 = 0$$

Ta có $\Delta' = 25 > 0 \Rightarrow$ phương trình có 2 nghiệm:

$$a_1 = 4 \text{ (Nhận); } a_2 = -6 \text{ (Loại, vì } a < 0)$$

$$+) \text{ Với } a = 4 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm 2$$

Vậy $m = 2$; $m = -2$ là giá trị cần tìm.

Bài 10: Cho phương trình $x^2 + 2(2m - 3)x + m^2 = 0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m

để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 khác 0, (chúng có thể trùng nhau) và biểu thức $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải:

Phương trình có hai nghiệm khác 0 khi

$$\begin{cases} (2m-3)^2 - m^2 \geq 0 \\ m^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-3)(m-1) \geq 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ m \geq 3 \\ m \neq 0 \end{cases}$$

Mặt khác, theo hệ thức Vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2(2m-3) \\ x_1 x_2 = m^2 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \text{Lại có } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} &= \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-2(2m-3)}{m^2} = \frac{-12m+18}{3m^2} = \frac{-2m^2 + 2m^2 - 12m + 18}{3m^2} \\ &= -\frac{2}{3} + \frac{2(m-3)^2}{3m^2} \geq -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $m = 3$.

Bài 11: Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 4 = 0$

- a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 = 26m$
 b) Tìm m nguyên để phương trình có hai nghiệm nguyên.

Lời giải

a) $x^2 - 2mx + m - 4 = 0$

Ta có: $\Delta' = m^2 - m + 4 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0 \quad \forall m$

Vậy phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m .

Theo định lý Viet: $x_1 + x_2 = 2m; \quad x_1 x_2 = m - 4$

$$x_1^3 + x_2^3 = 26m \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 26m$$

$$\Leftrightarrow 8m^3 - 6m(m-4) = 26m \Leftrightarrow m(8m^2 - 6m - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 0; m = 1; m = -\frac{1}{4}$$

b) Gọi x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) là hai nghiệm nguyên của phương trình.

Ta có: $x_1 + x_2 = 2m; \quad x_1 x_2 = m - 4$.

Suy ra $x_1 + x_2 - 2x_1 x_2 = 8 \Leftrightarrow 2(x_1 + x_2) - 4x_1 x_2 - 1 = 15 \Leftrightarrow (2x_1 - 1)(2x_2 - 1) = -15$.

TH1: $\begin{cases} 2x_1 - 1 = -1 \\ 2x_2 - 1 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow m = 4$

TH2: $\begin{cases} 2x_1 - 1 = -5 \\ 2x_2 - 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow m = 0$

TH3: $\begin{cases} 2x_1 - 1 = -15 \\ 2x_2 - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -7 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow m = -3$

$$\text{TH4: } \begin{cases} 2x_1 - 1 = -3 \\ 2x_2 - 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow m = 1$$

Thử lại $m=0, m=1, m=-3, m=4$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Bài 12: Cho phương trình: $x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$.

a) Chứng minh rằng phương trình đã cho luôn có nghiệm.

b) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$B = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(1 + x_1x_2)}.$$

Lời giải

phương trình: $x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$ có $a + b + c = 0$ nên có hai nghiệm: $x_1 = 1, x_2 = 2m - 1$.

Chứng tỏ PT luôn có nghiệm $\forall m$

(hoặc tính theo Δ để biện luận)

Do PT luôn có nghiệm nên theo ĐL Vi-et ta có:

$$x_1 + x_2 = 2m, x_1 \cdot x_2 = 2m - 1$$

$$\text{Suy ra: } B = \frac{2(2m - 1) + 3}{(x_1 + x_2)^2 + 2} = \frac{4m + 1}{4m^2 + 2}$$

Nhận thấy rằng mẫu số của B luôn dương, do đó để B nhỏ nhất thì ta chỉ xét $4m + 1 < 0$ hay $m < -1/4$, đặt $-t = m + 1/4 < 0$, (nên $t > 0$)

Vậy $m = -t - 1/4$ thay vào B, ta được:

$$B = \frac{4(-t - 1/4) + 1}{4(-t - 1/4)^2 + 2} = \frac{-4t}{4t^2 + 2t + 9/4}$$

Để B nhỏ nhất thì $C = \frac{4t}{4t^2 + 2t + 9/4}$ phải lớn nhất, $C > 0$

Để C lớn nhất thì $D = \frac{4t^2 + 2t + 9/4}{4t} = t + \frac{1}{2} + \frac{9}{16t}$ nhỏ nhất

$$\text{Áp dụng BĐT Cô si: } D = \left(t + \frac{9}{16t}\right) + \frac{1}{2} \geq 2 \cdot \sqrt{t \cdot \frac{9}{16t}} + \frac{1}{2} = 2$$

Dấu = xảy ra khi $t = \frac{9}{16t} \Rightarrow t = \frac{3}{4}$ khi đó $m = -1$, vậy $\min B = -1/2$ khi $m = -1$

Bài 13: Cho phương trình $x^2 - (3m - 2)x + 2m^2 - 5m - 3 = 0$, x là ẩn, m là tham số. Tìm tất cả giá trị của m để phương trình có ít nhất một nghiệm dương.

Lời giải

$$\Delta = (3m - 2)^2 - 4(2m^2 - 5m - 3) = (m + 4)^2 \geq 0, \forall m$$

Do đó phương trình luôn có nghiệm: $x_1 = 2m + 1; x_2 = m - 3$

Phương trình có ít nhất 1 nghiệm dương khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 1 > 0 \\ m - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{-1}{2}$$

Cách 2: Do $\Delta \geq 0, \forall m$ nên phương trình luôn có 2 nghiệm.

Ta có thể giải bài toán ngược: “Tìm m để PT có 2 nghiệm không dương”

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\text{ĐK này tương đương với } \begin{cases} S \leq 0 \\ P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow m \leq \frac{-1}{2}$$

Bài 14: Cho hai số thực m, n khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$

Chứng minh rằng phương trình $(x^2 + mx + n)(x^2 + nx + m) = 0$ luôn có nghiệm

Lời giải

$$\text{. Ta có } \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2(m+n)}{2mn} = \frac{mn}{2mn} \Leftrightarrow 2(m+n) = mn$$

$$\text{Ta có } (x^2 + mx + n)(x^2 + nx + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + mx + n = 0 & (1) \\ x^2 + nx + m = 0 & (2) \end{cases}$$

Phương trình (1) là PT bậc hai có $\Delta_1 = m^2 - 4n$

Phương trình (2) là PT bậc hai có $\Delta_2 = n^2 - 4m$

$$\text{Do đó } \Delta_1 + \Delta_2 = m^2 - 4n + n^2 - 4m = m^2 + n^2 - 4(m+n) = m^2 + n^2 - 2mn = (m-n)^2 \geq 0$$

Suy ra trong Δ_1 và Δ_2 có ít nhất một số lớn hơn hoặc bằng 0.

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm

Bài 15: Do bị bệnh bại não nên tay chân của Cảnh (11 tuổi, bản Tà Oát, xã Châu Hạnh, huyện Quỳnh Châu, tỉnh Nghệ An) bị co quắp, không đi lại được từ lúc mới chào đời. Lên 6 tuổi, nhìn bạn bè cắp sách đến trường em cũng muốn mẹ cho đi học. Thương con ham học, những ngày đầu Cảnh được người thân công đến trường. Ít ngày sau, chứng kiến cảnh người thân của bạn phải vất vả bỏ bê công việc, Khanh đã quyết định công bạn vượt qua con đường dài 1,8 km nhiều sỏi đá để tới trường.

Lúc về, trên quãng đường dài 1,8 km, trời nắng, Khanh công bạn với vận tốc ít hơn lúc đi 0,2 m/s. Do đó, thời gian công bạn lúc về của Khanh chậm hơn lúc đi là 12 phút 30 giây. Tính vận tốc lúc công bạn đi của Khanh.

Lời giải

a) Gọi x (m/s) là vận tốc lúc công bạn đi của Khanh.

Điều kiện $x > 0,2$.

Vận tốc lúc công bạn về của Khanh là $x - 0,2$.

Theo đề bài, ta có phương trình:

$$\frac{1800}{x-0,2} - \frac{1800}{x} = 750$$

$$\Leftrightarrow 750x^2 - 150x - 360 = 0 \text{ (hay } 25x^2 - 5x - 12 = 0)$$

Giải phương trình ta được $x_1 = 0,8$ (nhận); $x_2 = -0,6$ (loại)

Vậy vận tốc lúc công bạn đi của Khanh là 0,8 (m/s).

Bài 16: Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 + 2kx + 4 = 0$ (k là tham số). Tìm tất cả

$$\text{các giá trị của } k \text{ sao cho : } \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 \leq 3.$$

Lời giải

Vì Phương trình $x^2 + 2kx + 4 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 nên $\Delta' \geq 0$.

$$\Leftrightarrow k^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow k^2 \geq 4 \quad (1); \text{ Theo hệ thức Vi-et ta có : } \begin{cases} x_1 + x_2 = -2k \\ x_1 \cdot x_2 = 4 \end{cases}$$

Do đó :

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 \leq 3 \Leftrightarrow \frac{x_1^4 + x_2^4}{x_1^2 x_2^2} \leq 3 \Leftrightarrow \frac{(x_1^2 + x_2^2)^2}{x_1^2 x_2^2} \leq 5 \Leftrightarrow \left(\frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2}\right)^2 \leq 5$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4k^2 - 8}{4}\right)^2 \leq 5 \Leftrightarrow (k^2 - 2)^2 \leq 5 \Leftrightarrow -\sqrt{5} \leq k^2 - 2 \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow 0 \leq k^2 \leq 2 + \sqrt{5} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $4 \leq k^2 \leq 2 + \sqrt{5} \Leftrightarrow -\sqrt{2 + \sqrt{5}} \leq k \leq -2$

Hoặc $2 \leq k \leq \sqrt{2 + \sqrt{5}}$

Vậy tất cả các giá trị của k cần tìm là : $-\sqrt{2 + \sqrt{5}} \leq k \leq -2$ và $2 \leq k \leq \sqrt{2 + \sqrt{5}}$

Bài 17: Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3 = 0$ (x là ẩn, m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + 4x_1 + 2x_2 - 2mx_1 = 1$.

Lời giải

Ta có: $\Delta' = [-(m-1)]^2 - 1 \cdot (m^2 - 3) = 4 - 2m$

Để phương trình có hai nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 4 - 2m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 2$

Khi $m \leq 2$ thì phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 .

Theo hệ thức vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 2 \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 - 3 \end{cases}$

Theo yêu cầu bài toán: $x_1^2 + 4x_1 + 2x_2 - 2mx_1 = 1$. Vì x_1 là nghiệm của phương trình nên

$$x_1^2 - 2(m-1)x_1 + m^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 = 2(m-1)x_1 - m^2 + 3$$

$$\Rightarrow x_1^2 + 4x_1 + 2x_2 - 2mx_1 = 1 \Leftrightarrow 2(m-1)x_1 - m^2 + 3 + 4x_1 + 2x_2 - 2mx_1 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x_1 + 2x_2 - m^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow 2(x_1 + x_2) - m^2 + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(2m-2) - m^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow -m^2 + 4m - 2 = 0$$

$$\Rightarrow m_1 = 2 + \sqrt{2} \text{ (loại)}, m_2 = 2 - \sqrt{2} \text{ (nhận)}.$$

Vậy $m = 2 - \sqrt{2}$ thì phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + 4x_1 + 2x_2 - 2mx_1 = 1$.

Bài 18: Cho phương trình: $x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$. Chứng minh phương trình luôn có hai nghiệm

x_1, x_2 với mọi m . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{2x_1 x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(1 + x_1 x_2)}$ khi m thay đổi.

Lời giải

Ta có $\Delta' = (m-1)^2 \geq 0, \forall m$ nên phương trình có hai nghiệm với mọi m .

Theo định lý Vi-et, ta có $x_1 + x_2 = 2m, x_1 x_2 = 2m - 1$, suy ra

$$P = \frac{4m + 1}{4m^2 + 2} = 1 - \frac{(2m-1)^2}{4m^2 + 2} \leq 1. \text{ Max } P = 1, \text{ khi } m = \frac{1}{2}.$$

Bài 19: Xét phương trình $x^2 - m^2x + 2m + 2 = 0$ (1) (ẩn x). Tìm các giá trị nguyên dương của m để phương trình (1) có nghiệm nguyên.

Lời giải

Giả sử tồn tại $m \in \mathbb{N}^*$ để pt có nghiệm x_1, x_2

Theo vi-et: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m^2 \\ x_1 x_2 = 2m + 2 \end{cases} \Rightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) = -m^2 + 2m + 3$ Với $m \in \mathbb{N}^*$. Ta cần $x_1 x_2 \geq 4$ và $x_1 + x_2 \geq 1$ mà x_1 hoặc x_2 nguyên và $x_1 + x_2 = m^2 \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x_1, x_2 \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) \geq 0$

$\Leftrightarrow -m^2 + 2m + 3 \geq 0 \Leftrightarrow (m+1)(m-3) \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 3 \Rightarrow m \in \{1; 2; 3\}$ Với $m = 1$; $m = 2$ thay vào ta

thấy pt đã cho vô nghiệm

Với $m = 3$ thay vào pt ta được nghiệm của pt đã cho là $x = 1$; $x = 8$ thỏa mãn. Vậy $m = 3$

Bài 20: Cho phương trình: $x^2 - (2m+1)x + m^2 + m - 6 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt

Lời giải

Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a.c > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25 > 0 \\ m^2 + m - 6 > 0 \\ 2m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ m > 2 \\ m > -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m > 2$$

Bài 21: Cho phương trình: $x^2 - 6x - m = 0$ (Với m là tham số). Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn $x_1^2 - x_2^2 = 12$

Lời giải

Để phương trình có nghiệm $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -9$ (*)

$$\text{Mặt khác ta phải có } \begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 \cdot x_2 = -m \\ x_1^2 - x_2^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 \cdot x_2 = -m \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_1 \cdot x_2 = -m \\ x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -8 \text{ TM ĐK (*)}$$

Bài 22: Cho phương trình $x^2 - mx + m - 1 = 0$

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn biểu thức

$$A = \frac{4x_1 x_2 + 6}{x_1^2 + x_2^2 + 2(1 + x_1 x_2)} \text{ đạt giá trị nhỏ nhất}$$

Lời giải

a) Phương trình $x^2 - mx + m - 1 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m + 4 > 0 \\ m > 0 \\ m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)^2 > 0 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > 1 \end{cases}$$

Vậy với $\begin{cases} m \neq 0 \\ m > 1 \end{cases}$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm dương phân biệt

b) Vì $\Delta = (m-2)^2 \geq 0$ với mọi m nên phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Theo hệ thức vi – ét ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = m - 1 \end{cases}$$

$$A = \frac{4x_1 x_2 + 6}{x_1^2 + x_2^2 + 2(1 + x_1 x_2)} = \frac{4x_1 x_2 + 6}{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 2 + 2x_1 x_2} = \frac{4x_1 x_2 + 6}{(x_1 + x_2)^2 + 2}$$

$$\text{Khi đó } \Leftrightarrow A = \frac{4(m-1) + 6}{m^2 + 2} = \frac{4m + 2}{m^2 + 2}$$

$$\Leftrightarrow A(m^2 + 2) = 4m + 2$$

$$\Leftrightarrow Am^2 - 4m + 2A - 2 = 0 \quad (1)$$

(1) có nghiệm khi

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 4 - A(2A - 2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2A^2 - 2A - 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (A+1)(A-2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq A \leq 2$$

Vậy Min $A = -1$; khi đó

$$(1) \Leftrightarrow -m^2 - 4m - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m+2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -2$$

Vậy với $m = -2$ thì phương trình có hai nghiệm thỏa mãn đề bài

Bài 23: Tìm 2 số m, n cùng dấu thỏa mãn điều kiện: $|m| + 2|n|$ đạt giá trị nhỏ nhất sao cho hai phương trình sau có nghiệm chung: $x^2 + mx + 2 = 0$; $x^2 + 2nx + 6 = 0$.

Lời giải

Do m, n cùng dấu nên:

- Nếu $m > 0$; $n > 0$ thì: $|m| + 2|n| = m + 2n$.

- Nếu $m < 0$; $n < 0$ thì: $|m| + 2|n| = -m - 2n = -(m + 2n)$.

+ Gọi x_0 là nghiệm chung của hai phương trình ta được:

$$\begin{cases} x_0^2 + mx_0 + 2 = 0 \\ x_0^2 + 2nx_0 + 6 = 0 \end{cases} \text{ có nghiệm chung}$$

$$\Rightarrow 2x_0^2 + (m+2n)x_0 + 8 = 0 \text{ có nghiệm } x_0.$$

$$\Rightarrow \Delta = (m+2n)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (m+2n)^2 \geq 64$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+2n \geq 8 \\ m+2n \leq -8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow |m| + 2|n| \geq 8$$

Vậy $|m| + 2|n|$ đạt GTNN là 8 khi:

$$\begin{cases} m+2n = 8 \\ m+2n = -8 \end{cases}$$

+ TH1: $m+2n=8$, ta được: $2x_0^2 + 8x_0 + 8 = 0 \Leftrightarrow x_0^2 + 4x_0 + 4 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -2$. Ta có:

$$\begin{cases} (-2)^2 + m(-2) + 2 = 0 \\ (-2)^2 + 2n(-2) + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = \frac{5}{2} \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

+ TH2: $m+2n=-8$, ta được: $2x_0^2 - 8x_0 + 8 = 0 \Leftrightarrow 2(x_0 - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2$. Ta có:

$$\begin{cases} 2^2 + m \cdot 2 + 2 = 0 \\ 2^2 + 2n \cdot 2 + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ n = \frac{-5}{2} \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy với $m=3$ và $n=\frac{5}{2}$ thì hai phương trình có nghiệm chung $x_0 = -2$.

Với $m=-3$ và $n=\frac{-5}{2}$ thì hai phương trình có nghiệm chung $x_0 = 2$.

Bài 24: Cho phương trình: $x^2 + 2(m-3)x - m - 3 = 0$. Tìm các giá trị của m để phương trình có một nghiệm nhỏ hơn 2 và một nghiệm lớn hơn 2.

Lời giải

Xét phương trình: $x^2 + 2(m-3)x - m - 3 = 0$

Giả sử: $x_1 < 2 < x_2$

$$\text{Áp dụng Vi-et ta có: } \begin{cases} x_1 \cdot x_2 = -m - 3 \\ x_1 + x_2 = -2(m-3) \end{cases}$$

Để phương trình có một nghiệm nhỏ hơn 2 và một nghiệm lớn hơn 2 thì:

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ (x_1 - 2)(x_2 - 2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-3)^2 + m + 3 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 9 + m + 3 > 0 \\ -m - 3 - 2(-2(m-3)) + 4 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 5m + 12 > 0 \\ 3m - 11 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow m < \frac{11}{3} \quad (\text{do } m^2 - 5m + 12 \text{ luôn lớn hơn } 0).$$

Vậy với $m < \frac{11}{3}$ thì phương trình có một nghiệm nhỏ hơn 2 và một nghiệm lớn hơn 2.

Bài 25: Cho phương trình $x^2 + 4x - m = 0$ (1) (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình

(1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)(x_1^2 + x_2^2) = 4(m+2)$.

Lời giải

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = 4 + m > 0 \Leftrightarrow m > -4.$$

Áp dụng hệ thức Vi-ét:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -4 \\ x_1 x_2 = -m \end{cases}.$$

$$gt \Leftrightarrow \frac{4(16+2m)}{m} = 4(m+2) \quad (m \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow m^2 = 16 \Leftrightarrow m = \pm 4.$$

Kết hợp với điều kiện $m > -4; m \neq 0$ được $m = 4$ thỏa mãn.

Bài 26: Cho ba số thực dương phân biệt a, b, c thỏa $a + b + c = 3$. Xét ba phương trình bậc hai $4x^2 + 4ax + b = 0, 4x^2 + 4bx + c = 0, 4x^2 + 4cx + a = 0$. Chứng minh rằng trong ba phương trình trên có ít nhất một phương trình có nghiệm và có ít nhất một phương trình vô nghiệm.

Lời giải.

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a > b > c > 0$.

Từ $a + b + c = 3$ thì $\Rightarrow a > 1 > c > 0$.

Ba phương trình đã cho lần lượt có các biệt số Δ' là:

$$\Delta_1 = 4a^2 - 4b; \Delta_2 = 4b^2 - 4c; \Delta_3 = 4c^2 - 4a$$

Suy ra $\Delta_3 < 0$ (vì $c^2 < 1 < a$) $\Rightarrow$ phương trình $4x^2 + 4cx + a = 0$ vô nghiệm

Và $\Delta_1 > 4a^2 - 4a > 0$ (vì $a > b$ và $a > 1$) $\Rightarrow$ phương trình $4x^2 + 4ax + b = 0$ có nghiệm.

Bài 27: Cho phương trình $2018x^2 - (m - 2019)x - 2020 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:

$$\sqrt{x_1^2 + 2019} - x_1 = \sqrt{x_1^2 + 2019} + x_2.$$

Lời giải

Do $a, c < 0$ nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m. Ta có:

$$\sqrt{x_1^2 + 2019} - x_1 = \sqrt{x_2^2 + 2019} + x_2.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x_1^2 + 2019} - \sqrt{x_2^2 + 2019} = x_2 + x_1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1^2 - x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + 2019} - \sqrt{x_2^2 + 2019}} = x_2 + x_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ \sqrt{x_1^2 + 2019} - \sqrt{x_2^2 + 2019} = x_1 - x_2 \end{cases}$$

* Trường hợp 1: $x_1 + x_2 = 0$

$$\Leftrightarrow m - 2019 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 2019$$

* Trường hợp 2: Không xảy ra do: $\sqrt{x_1^2 + 2019} > |x_1|$; $\sqrt{x_2^2 + 2019} > |x_2|$

Vậy $m = 2019$.

Bài 28: Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 4 = 0$ (1) (m là tham số).

a) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m.

b) Với giá trị nào của m thì phương trình (1) có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn:

$$x_1 + x_2 = \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1}.$$

Lời giải

a) Phương trình: $x^2 - 2mx + m - 4 = 0$ (1)

Phương trình (1) là phương trình bậc hai của x có:

$$\Delta' = (-m)^2 - 1 \cdot (m - 4) = m^2 - m + 4$$

$$\Rightarrow \Delta' = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0 \text{ với mọi } m$$

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m

b) Với mọi m phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$.

$$\text{Theo định lí Vi-ét, ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = m - 4 \end{cases}$$

Ta lại có:

$$x_1 + x_2 = \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1 x_2} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = \frac{(x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2)}{x_1 x_2}$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2) \left(\frac{x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2}{x_1 x_2} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow (x_1 + x_2) \cdot \frac{(x_1 - x_2)^2}{x_1 x_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \text{ hoặc } \frac{(x_1 - x_2)^2}{x_1 x_2}$$

• TH1: $x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow 2m = 0 \Leftrightarrow m = 0$

• TH2: $\frac{(x_1 - x_2)^2}{x_1 x_2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 x_2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 0 \\ x_1 x_2 \neq 0 \end{cases}$ (vô nghiệm vì $\Delta' > 0, \forall m$)

Vậy với $m = 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn:

$$x_1 + x_2 = \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1}$$

Bài 29: Cho phương trình (ẩn x) $x^2 + (m-1)x + m-6 = 0$. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho biểu thức $A = (x_1^2 - 4)(x_2^2 - 4)$ có giá trị lớn nhất.

Lời giải

$$\Delta = (m-1)^2 - 4(m-6) = m^2 - 6m + 25 = (m-3)^2 + 16 > 0 \quad \forall m.$$

Suy ra phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Theo định lý Vi-ét, ta có $x_1 + x_2 = -(m-1)$, $x_1 x_2 = m-6$.

$$\text{Ta có: } A = x_1^2 x_2^2 - 4(x_1^2 + x_2^2) + 16 = x_1^2 x_2^2 - 4(x_1 + x_2)^2 + 8x_1 x_2 + 16.$$

$$A = (m-6)^2 - 4(m-1)^2 + 8(m-6) + 16 = -3m^2 + 4m = -3\left(m - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{4}{3} \leq \frac{4}{3}$$

Vậy khi $m = \frac{2}{3}$ thì A có giá trị lớn nhất bằng $\frac{4}{3}$.

Bài 30: Cho hai số thực a, b không âm thỏa mãn $18a + 4b \geq 2013$ (1)

Chứng minh rằng phương trình sau luôn có nghiệm: $18ax^2 + 4bx + 671 - 9a = 0$ (2)

Lời giải

TH1: Với $a = 0$ thì (2) $\Leftrightarrow 4bx + 671 = 0$

Từ (1) $\Rightarrow b \neq 0$. Vậy (2) luôn có nghiệm $x = -\frac{671}{4b}$

TH2: Với $a \neq 0$, ta có: $\Delta' = 4b^2 - 18a(671 - 9a) = 4b^2 - 6a \cdot 2013 + 162a^2$

$$\geq 4b^2 - 6a(18a + 4b) + 162a^2 = 4b^2 - 24ab + 54a^2 = (2b - 6a)^2 + 16a^2 \geq 0, \forall a, b$$

Vậy phương trình luôn có nghiệm.

Bài 31: Cho hai phương trình: $x^2 - x + m + 1 = 0$ (1)

$$x^2 + (m+2)x + 2m + 4 = 0 \quad (2) \quad (m \text{ là tham số}).$$

a) Giải phương trình (1) khi $m = -3$.

b) Tìm m để phương trình (2) có một nghiệm bằng -3. Tìm nghiệm còn lại.

c) Tìm m để phương trình (1) và (2) tương đương.

Lời giải

a) Khi $m = -3$ thì phương trình (1) trở thành: $x^2 - x + (-3) + 1 = 0$
 $x^2 - x - 2 = 0$

Ta thấy: $a - b + c = 1 - (-1) - 2 = 0 \Rightarrow$ Pt (1) có hai nghiệm: $x_1 = -1; x_2 = -\frac{-2}{1} = 2$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Vậy khi $m = -3$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $x_1 = -1; x_2 = 2$

b) Để phương trình (2) có một nghiệm bằng -3 thì

$$(-3)^2 + (m+2)(-3) + 2m + 4 = 0 \Rightarrow m = 7$$

Gọi nghiệm đã cho là $x_1 = -3$, nghiệm còn lại là x_2 .

Theo Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = -(m+2)$

$$\Rightarrow -3 + x_2 = -(7+2) \Rightarrow x_2 = -6$$

Vậy để phương trình (2) có một nghiệm bằng -3 thì $m = 7$, nghiệm còn lại là -6 .

c) Ta thấy cả hai phương trình đã cho đều là phương trình bậc hai ẩn x .

Gọi biệt thức của hai phương trình (1), (2) lần lượt là Δ_1 và Δ_2

$$\text{Khi đó } \Delta_1 = (-1)^2 - 4.1.(m+1) = -4m - 3$$

$$\Delta_2 = (m+2)^2 - 4.1.(2m+4) = m^2 - 4m - 12 = (m+2)(m-6)$$

Gọi tập nghiệm của hai phương trình (1), (2) lần lượt là S_1 và S_2 .

Hai phương trình (1) và (2) tương đương với nhau khi và chỉ khi:

* Hoặc $S_1 = S_2 = \emptyset$: Khi đó hai phương trình (1) và (2) tương đương với nhau khi:

$$\begin{cases} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4m - 3 < 0 \\ (m+2)(m-6) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{3}{4} \\ -2 < m < 6 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{4} < m < 6$$

* Hoặc $S_1 = S_2 \neq \emptyset$: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1)

x_3, x_4 là hai nghiệm của phương trình (2)

Khi đó hai phương trình (1) và (2) tương đương với nhau khi:

$$\begin{cases} \Delta_1 \geq 0 \\ \Delta_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 = x_3 + x_4 \\ x_1 \cdot x_2 = x_3 \cdot x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4m - 3 \geq 0 \\ (m+2)(m-6) \geq 0 \\ 1 = -(m+2) \\ m+1 = 2m+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -\frac{3}{4} \\ m \leq -2 \text{ hoặc } m \geq 6 \\ m = -3 \\ m = -3 \end{cases} \Leftrightarrow m = -3$$

Vậy hai pt (1) và (2) tương đương với nhau khi $-\frac{3}{4} < m < 6$ hoặc $m = -3$.

Bài 32: Cho phương trình: $x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$.

a) Chứng minh rằng phương trình đã cho luôn có nghiệm.

b) Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$B = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(1 + x_1x_2)}$$

Lời giải

Phương trình: $x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$ có $a + b + c = 0$ nên có hai nghiệm: $x_1 = 1, x_2 = 2m - 1$.

Chứng tỏ PT luôn có nghiệm $\forall m$ (hoặc tính theo Δ để biện luận).

Do PT luôn có nghiệm nên theo ĐL Vi-et ta có: $x_1 + x_2 = 2m, x_1 \cdot x_2 = 2m - 1$

$$\text{Suy ra: } B = \frac{2(2m-1) + 3}{(x_1 + x_2)^2 + 2} = \frac{4m+1}{4m^2 + 2}$$

Nhận thấy rằng mẫu số của B luôn dương, do đó để B nhỏ nhất thì ta chỉ xét $4m+1 < 0$ hay

$$m < -\frac{1}{4}, \text{ đặt } -t = m + \frac{1}{4} < 0, (\text{nên } t > 0)$$

Thay $m = -t - \frac{1}{4}$ vào B, ta được: $B = \frac{4\left(-t - \frac{1}{4}\right) + 1}{4\left(-t - \frac{1}{4}\right)^2 + 2} = \frac{-4t}{4t^2 + 2t + \frac{9}{4}}$

Để B nhỏ nhất thì $C = \frac{4t}{4t^2 + 2t + \frac{9}{4}}$ phải lớn nhất, $C > 0$

Để C lớn nhất thì $D = \frac{4t^2 + 2t + \frac{9}{4}}{4t} = t + \frac{1}{2} + \frac{9}{16t}$ nhỏ nhất

Áp dụng BĐT Cô si: $D = \left(t + \frac{9}{16t}\right) + \frac{1}{2} \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{9}{16t}} + \frac{1}{2} = 2$

Dấu “=” xảy ra khi $t = \frac{9}{16t} \Rightarrow t = \frac{3}{4}$ khi đó $m = -1$, vậy $\min B = -\frac{1}{2}$ khi $m = -1$.

Bài 33: Cho phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - m - 6 = 0$ (m là tham số).

a) Với giá trị nào của m thì phương trình đã cho có hai nghiệm x_1 và x_2 sao cho $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{18}{7}$.

b) Với giá trị nào của m thì phương trình đã cho có hai nghiệm x_1 và x_2 sao cho $|x_1| + |x_2| = 8$

Lời giải

a) Để phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - m - 6 = 0$ có hai nghiệm thì:

$$\Delta' = m^2 - (m^2 - m - 6) = m + 6 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -6 \quad (1)$$

Với điều kiện (1),

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{18}{7} \Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{18}{7} \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} = \frac{18}{7} \text{ và } x_1 x_2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4m^2 - 2(m^2 - m - 6)}{m^2 - m - 6} = \frac{18}{7} \Leftrightarrow \frac{m^2 + m + 6}{m^2 - m - 6} = \frac{9}{7} \quad (m \neq -2; m \neq 3)$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 8m - 48 = 0 \Leftrightarrow m_1 = -4; m_2 = 12 \text{ (thỏa điều kiện (1) và đều khác -2 và khác 3)}$$

Vậy để $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{18}{7}$ thì $m = -4$ hoặc $m = 12$.

b) Với điều kiện (1), $|x_1| + |x_2| = 8 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1 x_2| = 64 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 2|x_1 x_2| = 64 \quad (2)$

+ Nếu x_1 và x_2 cùng dấu thì $x_1 x_2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -6 \\ m^2 - m - 6 = (m+2)(m-3) \geq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow -6 \leq m \leq -2 \text{ hoặc } m \geq 3 \quad (3)$$

Khi đó (2) $\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 = 64 \Leftrightarrow 4m^2 = 64 \Leftrightarrow m = \pm 4$ (thỏa điều kiện (3)).

+ Nếu x_1 và x_2 trái dấu thì $x_1 x_2 < 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 6 = (m+2)(m-3) < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 3 \quad (4)$

Khi đó (2) $\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 64 \Leftrightarrow 4m^2 - 4(m^2 - m - 6) = 64$

$$\Leftrightarrow m + 6 = 16 \Leftrightarrow m = 10 \text{ (không thỏa điều kiện (4)).}$$

Vậy để $|x_1| + |x_2| = 8$ thì $m = \pm 4$.

Bài 34: Cho phương trình $5x^2 + mx - 28 = 0$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $5x_1 + 2x_2 = 1$.

Lời giải

Phương trình $5x^2 + mx - 28 = 0$ (m là tham số)

$\Delta = m^2 + 560 > 0$ với mọi m

$\Rightarrow$ Phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Do đó theo định lý Vi-et, ta có:

$$x_1 + x_2 = -\frac{m}{5} \quad (1)$$

$$x_1 x_2 = -\frac{28}{5} \quad (2)$$

$$5x_1 + 2x_2 = 1 \quad (3)$$

$$\text{Từ (3) suy ra } x_2 = \frac{1-5x_1}{2} \quad (4)$$

Thay (4) vào (2) suy ra $5x_1(1-5x_1) = -56$

$$\Leftrightarrow 25x_1^2 - 5x_1 - 56 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{8}{5} \text{ hoặc } x_1 = -\frac{7}{5}$$

$$\text{Với } x_1 = \frac{8}{5} \rightarrow x_2 = -\frac{7}{2}$$

$$\text{Thay vào (1) ta có } \frac{8}{5} - \frac{7}{2} = -\frac{m}{5} \Leftrightarrow m = \frac{19}{2}$$

$$\text{Với } x_1 = -\frac{7}{5} \rightarrow x_2 = 4 \rightarrow -\frac{7}{5} + 4 = -\frac{m}{5} \text{ suy ra } m = -13.$$

Bài 35: Cho phương trình $x^4 - 2(m-2)x^2 + 2m - 6 = 0$. Tìm các giá trị của m sao cho phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Lời giải

$$x^4 - 2(m-2)x^2 + 2m - 6 = 0 \quad (1)$$

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$). Phương trình (1) trở thành:

$$t^2 - 2(m-2)t + 2m - 6 = 0 \quad (2)$$

$$\Delta' = (m-2)^2 - (2m-6) = m^2 - 6m + 10 = (m-3)^2 + 1 > 0 \text{ với mọi } m.$$

Phương trình (2) luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m .

Ứng với mỗi nghiệm $t > 0$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt. Do đó, phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt khi chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt dương.

$$\Leftrightarrow 2m - 6 > 0 \text{ và } 2(m-2) > 0 \Leftrightarrow m > 3.$$

Vậy $m > 3$ thỏa mãn yêu cầu.

Bài 36: Cho phương trình $x^2 + 2(m-2)x + m^2 - 2m + 4 = 0$. Tìm m để phương trình

$$\text{có hai nghiệm thực phân biệt } x_1, x_2 \text{ thỏa mãn } \frac{2}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{1}{15m}.$$

Lời giải

PT đã cho có hai nghiệm phân biệt có điều kiện:

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow (m-2)^2 - (m^2 - 2m + 4) > 0 \Leftrightarrow m < 0 \quad (*)$$

$$\text{Với } m < 0 \text{ theo Vi-et ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 - 2m \\ x_1 x_2 = m^2 - 2m + 4 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \frac{2}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{1}{15m} \Leftrightarrow \frac{2}{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2} - \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{1}{15m} \quad (1)$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\Leftrightarrow \frac{1}{m^2 - 6m + 4} - \frac{1}{m^2 - 2m + 4} = \frac{1}{15m}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{m + \frac{4}{m} - 6} - \frac{1}{m + \frac{4}{m} - 2} = \frac{1}{15} \text{ Đặt } m + \frac{4}{m} = t \text{ do } m < 0 \Rightarrow t < 0$$

$$\text{Ta có (1) trở thành } \frac{1}{t-6} - \frac{1}{t-2} = \frac{1}{15} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 \\ t = 12 \end{cases} \Rightarrow t = -4$$

$$\text{Với } t = -4 \text{ ta có } m + \frac{4}{m} = -4 \Leftrightarrow m = -2 \text{ thỏa mãn (*)}$$

Bài 37: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $\frac{a}{6} + \frac{b}{5} + \frac{c}{4} = 0$. Chứng minh rằng phương trình

$ax^2 + bx + c = 0$ luôn có nghiệm.

Lời giải

Với $a = 0 \Rightarrow b = -\frac{5}{4}c$ ta được $\frac{5}{4}cx = c$.

Nếu $c = 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Nếu $c \neq 0$, phương trình có nghiệm $x = \frac{4}{5}$.

Với $a \neq 0$,

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac = b^2 - 4a \left(-\frac{4}{6}a - \frac{4}{5}b \right) = b^2 + \frac{16}{5}ab + \frac{8}{3}a^2 = b^2 + \frac{16}{5}ab + \frac{64}{25}a^2 + \frac{8}{75}a^2 \\ &= \left(b + \frac{8}{5}a \right)^2 + \frac{8}{75}a^2 > 0, \forall a \neq 0, \forall b. \text{ Suy ra, phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.} \end{aligned}$$

Vậy phương trình luôn có nghiệm.

Bài 38: Cho phương trình: $2x^2 + 3mx - \sqrt{2} = 0$ (m là tham số). Có hai nghiệm x_1 và x_2 . Tìm giá

trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = (x_1 - x_2)^2 + \left(\frac{1 + x_1^2}{x_1} - \frac{1 + x_2^2}{x_2} \right)^2$

Lời giải

PT có a, c trái dấu nên luôn có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2

$$\text{Ta có: } x_1 + x_2 = -\frac{3m}{2} \text{ và } x_1 \cdot x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$M = (x_1 - x_2)^2 + \left(\frac{1 + x_1^2}{x_1} - \frac{1 + x_2^2}{x_2} \right)^2 = \dots =$$

$$(x_1 - x_2)^2 \left[1 + \frac{(1 - x_1 x_2)^2}{(x_1 x_2)^2} \right] = \left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 \right] \left[1 + \frac{(1 - x_1 x_2)^2}{(x_1 x_2)^2} \right]$$

$$= \left(9 + \frac{9\sqrt{2}}{2} \right) m^2 + 8\sqrt{2} + 8 \geq 8\sqrt{2} + 8$$

Dấu “=” xảy ra khi $m = 0$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Bài 39: Biết phương trình $(m-2)x^2 - 2(m-1)x + m = 0$ có hai nghiệm tương ứng là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông. Tìm m để độ dài đường cao ứng với cạnh huyền của tam giác vuông đó bằng $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Lời giải

Phương trình $(m-2)x^2 - 2(m-1)x + m = 0 \Leftrightarrow (x-1)((m-2)x-m)=0$ có hai nghiệm khi và chỉ khi $m \neq 2$. Khi đó 2 nghiệm của phương trình là $a=1$ và $b=\frac{m}{m-2}$.

Hai nghiệm đó là độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác vuông suy ra $\frac{m}{m-2} > 0 \Leftrightarrow m < 0$ hoặc $m > 2$.

Từ hệ thức $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2}$ trong tam giác vuông ta có $\frac{1}{1^2} + \frac{(m-2)^2}{m^2} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{m-2}{m} = \pm \frac{1}{2}$

Với $\frac{m-2}{m} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2m-4=m \Rightarrow m=4$ (thỏa mãn)

Với $\frac{m-2}{m} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2m-4=-m \Rightarrow m=\frac{4}{3}$ (loại)

Vậy $m=4$ là giá trị cần tìm.

Bài 40: Cho phương trình $x^2 + (m^2+1)x + m-2 = 0$ (1), m là tham số. Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{2x_1-1}{x_2} + \frac{2x_2-1}{x_1} = x_1x_2 + \frac{55}{x_1x_2}$.

Lời giải

$$\Delta = (m^2+1)^2 - 4(m-2) = m^4 + 2(m-1)^2 + 7 > 0$$

$$\text{Theo định lí Vi-ét ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = -(m^2+1) \\ x_1x_2 = m-2 \end{cases}$$

$$\frac{2x_1-1}{x_2} + \frac{2x_2-1}{x_1} = x_1x_2 + \frac{55}{x_1x_2} \Leftrightarrow \frac{(2x_1-1)x_1 + (2x_2-1)x_2}{x_1x_2} = \frac{(x_1x_2)^2 + 55}{x_1x_2}$$

$$\Rightarrow 2x_1^2 - x_1 + 2x_2^2 - x_2 = (x_1x_2)^2 + 55 \Leftrightarrow 2(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2 - (x_1+x_2) - (x_1x_2)^2 - 55 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(-(m^2+1))^2 - 4(m-2) + (m^2+1) - (m-2)^2 + 55 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(m^4 + 2m^2 + 1) - 4m + 8 + m^2 + 1 - m^2 + 4m - 4 - 55 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^4 + 2m^2 - 24 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Đặt } m^2 = a \quad (a \geq 0)$$

$$\text{Phương trình (2) trở thành } a^2 + 2a - 24 = 0$$

Ta có $\Delta' = 25 > 0 \Rightarrow$ phương trình có 2 nghiệm:

$$a_1 = 4 \text{ (Nhận); } a_2 = -6 \text{ (Loại, vì } a < 0)$$

$$\Rightarrow \text{Với } a = 4 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm 2$$

Vậy $m=2$; $m=-2$ là giá trị cần tìm.

Bài 41: Cho phương trình: $x^2 - 2mx + m^2 - m - 6 = 0$ (m là tham số). Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 sao cho $|x_1| + |x_2| = 8$?

Lời giải

Phương trình: $x^2 - 2mx + m^2 - m - 6 = 0$ có hai nghiệm thì:

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\Delta' = m^2 - (m^2 - m - 6) = m + 6 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -6.$$

Theo hệ thức Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = m^2 - m - 6 \end{cases}$$

Ta có:

$$|x_1| + |x_2| = 8 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1 x_2| = 64$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 2|x_1 x_2| = 64 \quad (1)$$

Trường hợp 1:

$$\text{Nếu } x_1 \text{ và } x_2 \text{ cùng dấu thì: } x_1 x_2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -6 \\ m^2 - m - 6 = (m + 2)(m - 3) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq m \leq -2 \\ m \geq 3 \end{cases} \quad (*)$$

$$\text{Khi đó } (1) \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 = 64 \Leftrightarrow 4m^2 = 64 \Leftrightarrow m = \pm 4 \text{ (thỏa mãn } (*)).$$

Trường hợp 2:

$$\text{Nếu } x_1 \text{ và } x_2 \text{ trái dấu thì: } x_1 x_2 < 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 6 = (m + 2)(m - 3) < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 3 \quad (**)$$

$$\text{Khi đó } (1) \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 64 \Leftrightarrow 4m^2 - 4(m^2 - m - 6) = 64$$

$$\Leftrightarrow m + 6 = 16 \Leftrightarrow m = 10 \text{ (không thỏa mãn điều kiện } (**)).$$

Kết luận: $m = \pm 4$

3. Phương trình bậc cao

A. Bài toán (giữ nguyên màu)

Bài 1: Giải phương trình: $x^4 + 9 = 5x(3 - x^2)$

Bài 2: Giải phương trình: $\frac{2x}{x^2 - x + 1} - \frac{x}{x^2 + x + 1} = \frac{5}{3}$

Bài 3: Giải phương trình $(x^2 - 4x)(x^2 - 4) = 20$.

Bài 4:

a. Giải phương trình: $\frac{2x}{2x^2 - 5x + 3} + \frac{13x}{2x^2 + x + 3} = 6$.

b. Cho $P(x) = x^2 + ax + b$ với $a, b \in \mathbb{N}$. Biết $P(1) = 2017$. Tính $P(3) + P(-1)$.

Bài 5: Tìm các số thực x thỏa $x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0$

Bài 6: Cho hai số thực m, n khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$

Chứng minh rằng phương trình $(x^2 + mx + n)(x^2 + nx + m) = 0$ luôn có nghiệm

Bài 7: Giải phương trình $(x^2 - 4x + 11)(x^4 - 8x^2 + 21) = 35$.

Bài 8: Cho phương trình $x^3 - 5x^2 + (2m + 5)x - 4m + 2 = 0$, m là tham số.

a) Tìm điều kiện của m để phương trình có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 .

b) Tìm giá trị của m để $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 11$.

Bài 9: Giải phương trình: $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$.

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Bài 10: Giải phương trình: $x^3 - 3x^2 + 2x + 6 = 0$

Bài 11: Gọi a, b, c là ba nghiệm của phương trình $2x^3 - 9x^2 + 6x - 1 = 0$ Không giải phương trình, hãy tính tổng: $S = \frac{a^5 - b^5}{a - b} + \frac{b^5 - c^5}{b - c} + \frac{c^5 - a^5}{c - a}$

Bài 12: Giải phương trình $(x + 1)(x + 2)(x + 4)(x + 8) = 28x^2$

B. Lời giải (giữ nguyên màu)

Bài 1: Giải phương trình: $x^4 + 9 = 5x(3 - x^2)$

Lời giải

Vì $x = 0$ không phải là nghiệm của nên chia 2 vế của phương trình cho x^2 , ta được:

$$x^4 + 9 = 5x(3 - x^2) \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{x}\right)^2 + 5\left(x - \frac{3}{x}\right) + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{3}{x} = -2 \\ x - \frac{3}{x} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 3 = 0 \\ x^2 + 3x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \\ x = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2} \end{cases}$$

Bài 2: Giải phương trình: $\frac{2x}{x^2 - x + 1} - \frac{x}{x^2 + x + 1} = \frac{5}{3}$

Lời giải

Ta có $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \forall x$; $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \forall x$

Dễ thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình, chia cả tử và mẫu mỗi phân thức cho x , do đó phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{2}{t-1} - \frac{1}{t+1} = \frac{5}{3} \quad \left(\text{với } t = x + \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow 5t^2 - 3t - 14 = 0 (t \neq 1; t \neq -1) \Leftrightarrow (t-2)(5t+7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -\frac{7}{5} \end{cases}$$

* Nếu $t = 2 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

* Nếu $t = -\frac{7}{5} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = -\frac{7}{5} \Leftrightarrow \left(x + \frac{7}{10}\right)^2 + \frac{51}{100} = 0$ vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài 3: Giải phương trình

a) $(x^2 - 4x)(x^2 - 4) = 20$.

b) $x^4 + 2x^3 = 4x + 4$

Lời giải

Ta có

$$(x^2 - 4x)(x^2 - 4) = 20 \Leftrightarrow x(x-4)(x-2)(x+2) = 20 \Leftrightarrow (x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 8) = 20$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x - 4 + 4)(x^2 - 2x - 4 - 4) = 20 \Leftrightarrow (x^2 - 2x - 4)^2 - 16 = 20. \Leftrightarrow (x^2 - 2x - 4)^2 = 36$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 4 = 6 \\ x^2 - 2x - 4 = -6 \end{cases}$$

Ta thấy phương trình $x^2 - 2x - 4 = -6$ vô nghiệm.

Mặt khác, $x^2 - 2x - 4 = 6 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{11} \\ x = 1 + \sqrt{11} \end{cases}$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 1 - \sqrt{11}$ và $x = 1 + \sqrt{11}$.

b)

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^3 &= 4x + 4 \\ \Leftrightarrow x^4 + 2x^3 + x^2 &= x^2 + 4x + 4 \\ \Leftrightarrow x^2(x^2 + 2x + 1) &= (x + 2)^2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x(x + 1) = x + 2 \\ x(x + 1) = -x - 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \\ x^2 + 2x + 2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Vì $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 > 0$ nên phương trình có nghiệm là $x = \sqrt{2}; x = -\sqrt{2}$

Bài 4:

a. Giải phương trình: $\frac{2x}{2x^2 - 5x + 3} + \frac{13x}{2x^2 + x + 3} = 6$.

b. Cho $P(x) = x^2 + ax + b$ với $a, b \in \mathbb{N}$. Biết $P(1) = 2017$. Tính $P(3) + P(-1)$.

Lời giải

a. ĐKXD: $x \neq 1; x \neq \frac{3}{2}$.

Xét $x = 0$ không là nghiệm.

Xét $x \neq 0$, phương trình đã cho tương đương với $\frac{2}{2x - 5 + \frac{3}{x}} + \frac{13}{2x + 1 + \frac{3}{x}} = 6$.

Đặt $2x - 5 + \frac{3}{x} = t$ ta được $\frac{2}{t} + \frac{13}{t + 6} = 6 \Leftrightarrow 2t^2 + 7t - 4 = 0 \Leftrightarrow (2t - 1)(t + 4) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = -4 \end{cases}$$

Với $t = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x - 5 + \frac{3}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ x = 2 \end{cases}$.

Với $t = -4 \Rightarrow 2x - 5 + \frac{3}{x} = -4 \Rightarrow 2x^2 - x + 3 = 0$ vô nghiệm.

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \left\{ \frac{3}{4}; 2 \right\}$.

b. Vì $P(1) = 2017 \Rightarrow 2017 = 1 + a + b \Rightarrow a + b = 2016$.

Do đó $P(3) + P(-1) = (9 + 3a + b) + (1 - a + b) = 10 + 2(a + b) = 4042$.

Bài 5: Tìm các số thực x thỏa $x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0$

Lời giải

Chia 2 vế cho x^2 ta được:

$$x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x} + 1\right)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = -1 - \sqrt{2} \quad (1) \text{ hoặc } x + \frac{1}{x} = -1 + \sqrt{2} \quad (2)$$

Giải (1) ta được

$$x = \frac{-1 - \sqrt{2} - \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2} \text{ hoặc } x = \frac{-1 - \sqrt{2} + \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2} \quad (3)$$

Giải (2) vô nghiệm

Vậy chỉ có hai giá trị của x ở (3) thỏa bài toán

Bài 6: Cho hai số thức m, n khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$

Chứng minh rằng phương trình $(x^2 + mx + n)(x^2 + nx + m) = 0$ luôn có nghiệm

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2(m+n)}{2mn} = \frac{mn}{2mn} \Leftrightarrow 2(m+n) = mn$$

$$\text{Ta có } (x^2 + mx + n)(x^2 + nx + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + mx + n = 0 & (1) \\ x^2 + nx + m = 0 & (2) \end{cases}$$

Phương trình (1) là PT bậc hai có $\Delta_1 = m^2 - 4n$

Phương trình (2) là PT bậc hai có $\Delta_2 = n^2 - 4m$

$$\text{Do đó } \Delta_1 + \Delta_2 = m^2 - 4n + n^2 - 4m = m^2 + n^2 - 4(m+n) = m^2 + n^2 - 2mn = (m-n)^2 \geq 0$$

Suy ra trong Δ_1 và Δ_2 có ít nhất một số lớn hơn hoặc bằng 0.

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm

Bài 7: Giải phương trình $(x^2 - 4x + 11)(x^4 - 8x^2 + 21) = 35$.

Lời giải

$$\text{Phương trình đã cho tương đương với } [(x-2)^2 + 7][(x^2 - 4)^2 + 5] = 35 \quad (1)$$

$$\text{Do } \left. \begin{array}{l} (x-2)^2 + 7 \geq 7 \forall x \\ (x^2 - 4)^2 + 5 \geq 5 \forall x \end{array} \right\} \Rightarrow [(x-2)^2 + 7][(x^2 - 4)^2 + 5] \geq 35 \forall x$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + 7 = 7 \\ (x^2 - 4)^2 + 5 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$$

Bài 8: Cho phương trình $x^3 - 5x^2 + (2m + 5)x - 4m + 2 = 0$, m là tham số.

- a) Tìm điều kiện của m để phương trình có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 .
 b) Tìm giá trị của m để $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 11$.

Lời giải

$$a) x^3 - 5x^2 + (2m + 5)x - 4m + 2 = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 3x + 2m - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 - 3x + 2m - 1 = 0(*) \end{cases} \text{ Nếu } \begin{cases} x = 2 \\ x^2 - 3x + 2m - 1 = 0 \end{cases} \text{ trừ 0,25 điểm}$$

Để (1) có ba nghiệm phân biệt thì pt (*) có hai nghiệm phân biệt khác 2

$$\text{Điều kiện là } \begin{cases} \Delta > 0 \\ 4 - 6 + 2m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13 - 8m > 0 \\ 2m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{2} \neq m < \frac{13}{8}$$

b) Ta có ba nghiệm phân biệt của phương trình (1) là $x_1 = 2$; x_2 ; x_3 trong đó x_2 ; x_3 là hai nghiệm phân biệt của pt (*)

$$\text{Khi đó } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 11 \Leftrightarrow 4 + (x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3 = 11 \Leftrightarrow (x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3 = 7(**)$$

$$\text{áp dụng định lý Vi-ét đối với pt (*) ta có } \begin{cases} x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 \cdot x_3 = 2m - 1 \end{cases} \quad (0,25 \text{ đ})$$

$$\text{Vậy } (**) \Leftrightarrow 9 - 2(2m - 1) = 7 \Leftrightarrow m = 1 \text{ (thỏa mãn ĐK)}$$

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Bài 9: Giải phương trình: $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$.

Lời giải

Ta thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình

Chia cả 2 vế của phương trình cho x^2 ta được:

$$6x^2 - 5x - 38 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0$$

$$\text{Đặt } y = x + \frac{1}{x} \text{ thì: } x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

$$\text{Ta được pt: } 6y^2 - 5y - 50 = 0 \Leftrightarrow (3y - 10)(2y + 5) = 0$$

$$\text{Do đó: } y = \frac{10}{3} \text{ và } y = -\frac{5}{2}$$

$$* \text{ Với } y = \frac{10}{3} \text{ thì: } x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x - 1)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

$$* \text{ Với } y = -\frac{5}{2} \text{ thì: } x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x + 1)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = -\frac{1}{2} \\ x_4 = -2 \end{cases}$$

Bài 10: Giải phương trình: $x^3 - 3x^2 + 2x + 6 = 0$

Lời giải

Ta có $x^3 - 3x^2 + 2x + 6 = 0$
 $\Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 4x + 6) = 0$
 $\Leftrightarrow x+1=0$ (1) hoặc $x^2 - 4x + 6 = 0$ (2)
 (1) $\Leftrightarrow x = -1$
 (2) $\Leftrightarrow (x-2)^2 + 2 = 0$. Do $(x-2)^2 + 2 \neq 0 \forall x$ nên pt này vô nghiệm.
 Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{-1\}$

Bài 11: Gọi a, b, c là ba nghiệm của phương trình $2x^3 - 9x^2 + 6x - 1 = 0$

Không giải phương trình, hãy tính tổng: $S = \frac{a^5 - b^5}{a - b} + \frac{b^5 - c^5}{b - c} + \frac{c^5 - a^5}{c - a}$

Lời giải

Vì a, b, c là ba nghiệm của phương trình

$$2x^3 - 9x^2 + 6x - 1 = 0$$

Khi phân tích đa thức $2x^3 - 9x^2 + 6x - 1$ ra thừa số ta được:

$$2x^3 - 9x^2 + 6x - 1 = 2(x-a)(x-b)(x-c)$$

$$\Leftrightarrow (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c = \frac{9}{2} \\ ab+bc+ca = 3 \\ abc = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = \left(\frac{9}{2}\right)^2 - 2 \cdot 3 = \frac{57}{4}$$

Tính $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$:

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = (ab+bc+ca)^2 - 2(ab \cdot bc + bc \cdot ca + ca \cdot ab)$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = (ab+bc+ca)^2 - 2abc(a+b+c)$$

$$\Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = 3^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$$

Tính $a^3 + b^3 + c^3$:

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = \frac{9}{2} \left(\frac{57}{4} - 3 \right) + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{417}{8}$$

Vậy:

$$\begin{cases} a+b+c=\frac{9}{2} \\ ab+bc+ca=3 \\ abc=\frac{1}{2} \\ a^2+b^2+c^2=\frac{57}{4} \\ a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\frac{9}{2} \\ a^3+b^3+c^3=\frac{417}{8} \end{cases}$$

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} S &= \frac{a^5-b^5}{a-b} + \frac{b^5-c^5}{b-c} + \frac{c^5-a^5}{c-a} \\ \Leftrightarrow S &= (a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4) + (b^4+b^3c+b^2c^2+bc^3+c^4) \\ &\quad + (c^4+c^3a+c^2a^2+ca^3+a^4) \\ \Leftrightarrow S &= 2a^4+2b^4+2c^4+a^3b+b^3a+b^3c+c^3b+a^3c+c^3a+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \\ \Leftrightarrow S &= (a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2) + (a^4+a^3b+a^3c) + (b^4+b^3a+b^3c) \\ &\quad + (c^4+c^3a+c^3b) - (a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \\ \Leftrightarrow S &= (a^2+b^2+c^2)^2 + a^3(a+b+c) + b^3(a+b+c) + c^3(a+b+c) \\ &\quad - (a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \\ \Leftrightarrow S &= (a^2+b^2+c^2)^2 + (a^3+b^3+c^3)(a+b+c) - (a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \\ \Leftrightarrow S &= \left(\frac{57}{4}\right)^2 + \frac{9}{2} \cdot \frac{417}{8} - \frac{9}{2} = \frac{3465}{8} \end{aligned}$$

Bài 12: Giải phương trình $(x+1)(x+2)(x+4)(x+8) = 28x^2$

Lời giải

$$(x+1)(x+2)(x+4)(x+8) = 28x^2$$

$$(x^2+9x+8)(x^2+8x+8) = 28x^2$$

$+x=0$ không phải là nghiệm của phương trình (1)

+ Với $x \neq 0$ chia hai vế (1) cho x^2 ta được:

$$(1) \Leftrightarrow \left(x + \frac{8}{x} + 6\right)\left(x + \frac{8}{x} + 9\right) = 28$$

$$\text{Đặt } t = x + \frac{8}{x}$$

$$(1) \text{ trở thành } (t+6)(t+9) = 28 \Leftrightarrow t^2 + 15t + 26 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = -13 \end{cases}$$

Với $t = -2$ ta có $x + \frac{8}{x} = -2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 8 = 0$. PT này vô nghiệm.

Với $t = -13$ ta có $x + \frac{8}{x} = -13 \Leftrightarrow x^2 + 13x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -13 \pm \sqrt{137}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = -13 \pm \sqrt{137}$.

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

4. Phương trình chứa ẩn ở mẫu

A. Bài toán

Bài 1: Giải phương trình: $\frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{(2x+2)^2} = 3.$

Bài 2: Giải phương trình: $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = \frac{10}{9}.$

Bài 3: Với $0 \leq x; y; z \leq 1$. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình:

$$\frac{x}{1+y+zx} + \frac{y}{1+z+xy} + \frac{z}{1+x+yz} = \frac{3}{x+y+z}$$

Bài 4: Giải phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} = 2$

Bài 5: Giải phương trình: $\frac{1}{x-1} - \frac{3x^2}{x^3-1} = \frac{2x}{x^2+x+1}$

Bài 6: Giải phương trình: $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = \frac{10}{9}$

Bài 7: Giải phương trình: $\frac{x^2-4x}{x-1} \left(x + \frac{x-4}{x-1}\right) = 5$

B. Lời giải

Bài 1: Giải phương trình: $\frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{(2x+2)^2} = 3.$

Lời giải

ĐKXĐ: $x \neq -1; x \neq -\frac{1}{2}$

Đặt $2x+1=t$, ta có phương trình:

$$\frac{1}{t^2} + \frac{1}{(t+1)^2} = 3 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)^2 + \frac{2}{t(t+1)} - 3 = 0$$

Đặt $y = \frac{1}{t(t+1)}$, ta có phương trình: $y^2 + 2y - 3 = 0$

Giải phương trình ta được: $y = 1; y = -3$

$$y = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{t(t+1)} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{t(t+1)} = 1 \Leftrightarrow t^2 + t - 1 = 0$$

Giải phương trình ta được: $t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$$t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{-3 + \sqrt{5}}{4}$$

$$t = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{-3 - \sqrt{5}}{4}$$

$$y = -3 \Leftrightarrow \frac{1}{t(t+1)} = -3 \Leftrightarrow t^2 + t + \frac{1}{3} = 0 \text{ (phương trình vô nghiệm)}$$

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình là: } x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{4}$$

Bài 2: Giải phương trình: $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = \frac{10}{9}$.

Lời giải

Đk: $x \neq \pm 1$. Phương trình tương đương với

$$\left(\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1}\right)^2 - 2\frac{x^2}{x^2-1} = \frac{10}{9} \Leftrightarrow \left(\frac{2x^2}{x^2-1}\right)^2 - \frac{2x^2}{x^2-1} - \frac{10}{9} = 0.$$

Đặt $t = \frac{2x^2}{x^2-1}$, ta được phương trình $t^2 - t - \frac{10}{9} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{3}$ hoặc $t = -\frac{2}{3}$

Với $t = \frac{5}{3}$, ta được $\frac{2x^2}{x^2-1} = \frac{5}{3}$ (vô nghiệm)

Với $t = -\frac{2}{3}$, ta được $\frac{2x^2}{x^2-1} = -\frac{2}{3}$ suy ra $x = \pm \frac{1}{2}$.

Bài 3: Với $0 \leq x; y; z \leq 1$. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình:

$$\frac{x}{1+y+zx} + \frac{y}{1+z+xy} + \frac{z}{1+x+yz} = \frac{3}{x+y+z}$$

Lời giải

Do vai trò x,y,z như nhau nên $0 \leq x \leq y \leq z \leq 1$

* TH1: Nếu $x=0$ suy ra

$$\begin{aligned} \frac{y}{1+z} + \frac{z}{1+zy} &= \frac{3}{y+z} \\ \Rightarrow \left(\frac{y}{1+z} - \frac{1}{y+z}\right) + \left(\frac{z}{1+zy} - \frac{1}{y+z}\right) &= \frac{1}{y+z} \\ \Rightarrow \frac{(y-1)(y+1+z)}{(1+z)(y+z)} + \frac{z^2-1}{(1+yz)(y+z)} &= \frac{1}{y+z} \end{aligned}$$

Ta có VT < 0 mà VP ≥ 0 nên trong trường hợp này không có nghiệm

* TH2: Nếu x khác 0 mà $0 \leq x \leq y \leq z \leq 1 \Rightarrow (z-1)(1-x) \leq 0 \Leftrightarrow xz - x - z + 1 \geq 0$

$$\Leftrightarrow 1 + zx \geq x + z \quad \text{Dấu “=” xảy ra khi: } x=1 \text{ hoặc } z=1.$$

+ Ta lại có: $1 + zx \geq x + z \Leftrightarrow 1 + y + zx \geq x + y + z$

$$\Rightarrow \frac{x}{1 + y + zx} \leq \frac{x}{x + y + z}$$

+ Tương tự: $\frac{y}{1 + z + xy} \leq \frac{y}{x + y + z}$

$$\frac{z}{1 + x + yz} \leq \frac{z}{x + y + z}$$

$$\Rightarrow VT = \frac{x}{1 + y + zx} + \frac{y}{1 + z + xy} + \frac{z}{1 + x + yz} \leq \frac{x + y + z}{x + y + z} = 1. \quad (2)$$

+ Mặt khác, vì: $0 \leq x, y, z \leq 1 \Rightarrow x + y + z \leq 3$. Dấu “=” xảy ra khi: $x = y = z = 1$

$$\Rightarrow VP = \frac{3}{x + y + z} \geq \frac{3}{3} = 1 \quad \text{Dấu “=” xảy ra khi: } x = y = z = 1 \quad (3)$$

+ Từ (2) và (3) $\Rightarrow VT = VP$ chỉ đúng khi: $VT = VP = 1$. Khi đó $x = y = z = 1$.

* Vậy phương trình có nghiệm duy nhất: $(x; y; z) = (1; 1; 1)$.

Bài 4: Giải phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} = 2$

Lời giải

$$\text{ĐKXĐ: } -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}; x \neq 0$$

Đặt: $\sqrt{2-x^2} = a$ ta được:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{a} = 2 \\ x^2 + a^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + x = 2ax \\ (a+x)^2 - 2ax = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + x = 2ax \\ (a+x)^2 - (a+x) - 2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Giải (1):

$$(a+x)^2 - (a+x) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+x+1)(a+x-2) = 0$$

Suy ra: $a+x = -1$ hoặc $a+x = 2$

+) Với $a+x = -1 \Rightarrow ax = -\frac{1}{2}$ ta được: $x = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ (thỏa mãn)

+) Với $a+x = 2 \Rightarrow ax = 1$. Ta tìm được $x = 1$ (thỏa mãn)

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1; x = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$.

Bài 5: Giải phương trình: $\frac{1}{x-1} - \frac{3x^2}{x^3-1} = \frac{2x}{x^2+x+1}$

Lời giải

* ĐK: $x \neq 1$.

$$\frac{1}{x-1} - \frac{3x^2}{x^3-1} = \frac{2x}{x^2+x+1} \Leftrightarrow \frac{x^2+x+1}{x^3-1} - \frac{3x^2}{x^3-1} = \frac{2x(x-1)}{x^3-1}$$

$$\Rightarrow x^2+x+1-3x^2 = 2x^2-2x \Leftrightarrow 4x^2-3x-1=0 \quad (*)$$

Giải phương trình (*) ta được:
$$\begin{cases} x=1 \\ x=\frac{-1}{4} \end{cases}$$

Kết hợp với ĐK ta có $x = \frac{-1}{4}$ là nghiệm của phương trình.

Bài 6: Giải phương trình: $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = \frac{10}{9}$

Lời giải

* ĐKXD: $x \neq \pm 1$.

Phương trình tương đương với $\left(\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1}\right)^2 - 2\frac{x^2}{x^2-1} = \frac{10}{9} \Leftrightarrow \left(\frac{2x^2}{x^2-1}\right)^2 - \frac{2x^2}{x^2-1} - \frac{10}{9} = 0$.

Đặt $t = \frac{2x^2}{x^2-1}$, ta được phương trình $t^2 - t - \frac{10}{9} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{3}$ hoặc $t = -\frac{2}{3}$

Với $t = \frac{5}{3}$, ta được $\frac{2x^2}{x^2-1} = \frac{5}{3}$ (vô nghiệm)

Với $t = -\frac{2}{3}$, ta được $\frac{2x^2}{x^2-1} = -\frac{2}{3}$ suy ra $x = \pm \frac{1}{2}$. (thỏa mãn ĐKXD)

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là: $S = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$

Bài 7: Giải phương trình: $\frac{x^2-4x}{x-1} \left(x + \frac{x-4}{x-1}\right) = 5$

Lời giải

Điều kiện xác định $x \neq 1$

Đặt $y = \frac{x(x-4)}{x-1}$ suy ra $x + \frac{x-4}{x-1} = x-4 + \frac{x-4}{x-1} + 4 = y+4$

Phương trình trở thành:

$$y(y+4) = 5 \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=-5 \end{cases}$$

• Với $y=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{5+\sqrt{21}}{2} \\ x_2 = \frac{5-\sqrt{21}}{2} \end{cases}$

• Với $y=-5 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-1+\sqrt{21}}{2} \\ x_2 = \frac{-1-\sqrt{21}}{2} \end{cases}$

5. Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

A. Bài toán

Bài 1: Giải phương trình $\frac{|5-3x|-|x-1|}{x-3+|3+2x|} = 4$

Bài 2: Tìm x thỏa $|9x-8|+|7x-6|+|5x-4|+|3x-2|+x=0$.

Bài 3: Giải phương trình: $|x-2014|+|x-2016|+|y-2016|+|x|=2016$

B. Lời giải

Bài 1: Giải phương trình $\frac{|5-3x|-|x-1|}{x-3+|3+2x|} = 4$

Lời giải

Điều kiện $x-3+|3+2x| \neq 0$

Phương trình tương đương

$$|3x-5| - |x-1| - 4|2x+3| - 4x + 12 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Xét } x < -\frac{3}{2} \text{ Thì } (*) \Leftrightarrow -3x + 5 + (x-1) + 4(2x+3) - 4x + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = -28$$

$$\Leftrightarrow x = -14 \text{ (Thỏa mãn đk)}$$

$$\text{Xét } -\frac{3}{2} \leq x < 1 \text{ Thì } (*)$$

$$\Leftrightarrow -3x + 5 + x - 1 - 4(2x+3) - 4x + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{7} \text{ (Thỏa mãn đk)}$$

$$\text{Xét } 1 \leq x < \frac{5}{3} \text{ Thì } (*)$$

$$\Leftrightarrow -3x + 5 - (x-1) - 4(2x+3) - 4x + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{8} \text{ (Loại)}$$

$$\text{Xét } x \geq \frac{5}{3} \text{ Thì } (*) \Leftrightarrow 3x - 5 - (x-1) - 4(2x+3) - 4x + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{5} \text{ (Loại)}$$

$$\text{Vậy phương trình có nghiệm } x \in \left\{-14; \frac{2}{7}\right\}$$

Bài 2: Tìm x thỏa $|9x-8|+|7x-6|+|5x-4|+|3x-2|+x=0$.

Lời giải

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Từ đề bài suy ra $x < 0$

Suy ra $9x - 8 < 0$; $7x - 6 < 0$; $5x - 4 < 0$; $3x - 2 < 0$

Phương trình đã cho trở thành $-9x + 8 - 7x + 6 - 5x + 4 - 3x + 2 + x = 0$

$\Leftrightarrow -23x + 20 = 0$. Kết luận pt vô nghiệm.

Bài 3: Giải phương trình: $|x - 2014| + |x - 2016| + |y - 2016| + |x| = 2016$

Lời giải

$$|x - 2014| + |x - 2016| + |y - 2016| + |x| = 2016 \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } |x - 2016| + |x| = |2016 - x| + |x| \geq |x + 2016 - x| = 2016 \quad (2)$$

Chỉ ra được dấu « = » xảy ra khi $0 \leq x \leq 2016$ (*)

Từ (1) và (2) suy được: $|x - 2014| + |y - 2016| = 0$

$$\text{Lập luận suy được: } \begin{cases} |x - 2014| = 0 \\ |y - 2016| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2014 \\ y = 2016 \end{cases}$$

Đối chiếu ĐK (*) và kết luận được nghiệm

6. Phương trình vô tỉ

A. Bài toán

Bài 1: Giải phương trình: $2(2x - 1) - 3\sqrt{5x - 6} = \sqrt{3x - 8}$.

Bài 2: Giải phương trình: $\frac{26x + 5}{\sqrt{x^2 + 30}} + 2\sqrt{26x + 5} = 3\sqrt{x^2 + 30}$.

Bài 3: Giải phương trình: $\frac{\sqrt{27 + x^2 + x}}{2 + \sqrt{5 - (x^2 + x)}} = \frac{\sqrt{27 + 2x}}{2 + \sqrt{5 - 2x}}$.

Bài 4: Giải phương trình: $5\sqrt{x^3 + 1} = 2(x^2 + 2)$.

Bài 5: Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 9} - \sqrt{x^2 - 16} = 1$.

Bài 6: Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 4x + 12} = 2x - 4 + \sqrt{x + 1}$.

Bài 7: Giải phương trình: $x^2 + 2x + 7 = 3\sqrt{(x^2 + 1)(x + 3)}$.

Bài 8: Giải phương trình: $2x + 3 + \sqrt{4x^2 + 9x + 2} = 2\sqrt{x + 2} + \sqrt{4x + 1}$.

Bài 9: Giải phương trình: $x^2 - x - 4 = 2\sqrt{x - 1}(1 - x)$.

Bài 10: Giải phương trình $\frac{1}{\sqrt{x + 1}} + \frac{1}{\sqrt{x - 1}} = 1$.

Bài 11: Giải PT: $x^2 + 6x + 8 = 3\sqrt{x + 2}$.

Bài 12: Giải PT: $\sqrt{43 - x} = x - 1$.

Bài 13: Giải phương trình: $x^2 - x - 1 = \sqrt{8x + 1}$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Bài 14: Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 12} + 5 = 3x + \sqrt{x^2 + 5}$

Bài 15: Giải phương trình: $x^2 + \sqrt{x + 2018} = 2018$

Bài 16: Giải phương trình:

a) $\frac{x^2}{3 + \sqrt{9 - x^2}} + \frac{1}{4(3 - \sqrt{9 - x^2})} = 1$

b) $\frac{1}{x^2} + \sqrt{x + 2} = \frac{1}{x} + \sqrt{2x + 1}$

Bài 17: Tìm tất cả các số của x thỏa mãn $\sqrt{x - 4\sqrt{x - 2}} + 2 + \sqrt{x + 6\sqrt{x - 2}} + 7 = 7$

Bài 18: Giải phương trình : $6x^2 + 2x + 1 = 3x\sqrt{6x + 3}$.

Bài 19: Giải phương trình: $x^2 + \sqrt{x + 2014} = 2014$.

Bài 20: Giải phương trình: $4(x^2 + 4x + 2) = 11\sqrt{x^4 + 4}$

Bài 21: Giải phương trình: $\sqrt{2x^2 + 5x + 12} + \sqrt{2x^2 + 3x + 2} = x + 5$

Bài 22: Giải phương trình $\frac{x^3}{\sqrt{5 - x^2}} + 8x^2 = 40$.

Bài 23: Giải phương trình $\sqrt{30 - \frac{5}{x^2}} + \sqrt{6x^2 - \frac{5}{x^2}} = 6x^2$

Bài 24: Giải phương trình: $x^2 - 4x + 1 + \sqrt{3x - 1} = 0$.

Bài 25: Giải phương trình: $2\sqrt{2x - 1} + \sqrt{x + 3} - \sqrt{5x + 11} = 0$

Bài 26: Giải phương trình $\sqrt{4x^2 + 5x + 1} - 2\sqrt{x^2 - x + 1} = 9x - 3$.

Bài 27: Giải phương trình: $x^2 + 5x + 1 = (x + 5)\sqrt{x^2 + 1}$

Bài 28: Tìm x biết: $\sqrt{24 + 8\sqrt{9 - x^2}} = x + 2\sqrt{3 - x} + 4$.

Bài 29: Giải phương trình $\sqrt[3]{2 - x} = 1 - \sqrt{x - 1}$

Bài 30: Giải phương trình: $\sqrt{4x^2 - 15x + 20} = 4x - 10 + 7\sqrt{x - 1}$.

Bài 31: Giải phương trình: $\sqrt{2x + 3} = \frac{8x^3 + 4x}{2x + 5}$.

Bài 32: Giải phương trình: $\sqrt{x^2 + 5x + 4} - x^2 = 5x + 2$

Bài 33: Giải phương trình: $\sqrt{3 - 4x} + \sqrt{4x + 1} = -16x^2 - 8x + 1$ (1).

Bài 34: Giải phương trình: $2\sqrt{3 - x} + \sqrt{2 + x} = 5$.

Bài 35: Tìm x biết: $\sqrt{24 + 8\sqrt{9 - x^2}} = x + 2\sqrt{3 - x} + 4$.

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Bài 36: Giải phương trình $\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}$

Bài 37: Giải phương trình: $2017\sqrt{2017x-2016} + \sqrt{2018x-2017} = 2018$.

Bài 38: Giải phương trình: $\sqrt{4x^2-15x+20} = 4x-10+7\sqrt{x-1}$.

Bài 39: Giải phương trình $\sqrt{30-\frac{5}{x^2}} + \sqrt{6x^2-\frac{5}{x^2}} = 6x^2$

Bài 40: Giải phương trình:

a. $x^2 - 10x + 27 = \sqrt{6-x} + \sqrt{x-4}$

b. $x^2 - 2x - x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + 4 = 0$

Bài 41: Giải phương trình: $2x^2 - 5x + 5 = \sqrt{5x-1}$

Bài 42: Giải phương trình: $10\sqrt{x^3+1} = 3x^2 + 6$

Bài 43: Giải phương trình: $x^2 + 4x + 5 = 2\sqrt{2x+3}$

Bài 44: Tìm tất cả các giá trị của x, y, z sao cho: $\sqrt{x} + \sqrt{y-z} + \sqrt{z-x} = \frac{1}{2}(y+3)$.

Bài 45: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{1-x} + \sqrt{4+x} = 3$

b) $x^2 + 4x + 5 = 2\sqrt{2x+3}$

Bài 46: Tìm x; y thỏa mãn: $2(x\sqrt{y-4} + y\sqrt{x-4}) = xy$

Bài 47: Giải phương trình: $2(5x + 3\sqrt{x^2+x-2}) = 27 + 3\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2}$.

Bài 48: Giải phương trình $x^2 + 2x - \sqrt{x^2 + 2x + 2} = 0$.

Bài 49: Giải phương trình $(1 - \sqrt{1-x})\sqrt[3]{2-x} = x$.

Bài 50: Giải phương trình $\sqrt{1-x} + \sqrt{4+x} = 3$.

Bài 51: Giải phương trình $2x^2 + \sqrt{x^2 - 2x - 19} = 4x + 74$.

Bài 52: Giải phương trình: $3x + 2\sqrt{27x^3 + 8} = 9x^2 + 6$.

Bài 53: Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x^2 = 3x + 7$.

Bài 54: Giải phương trình $2x^2 + 3x - 2 = (2x - 1)\sqrt{2x^2 + x - 3}$.

Bài 55: Giải phương trình $\sqrt{2x^2 + 3x + 2} + \sqrt{4x^2 + 6x + 21} = 11$.

Bài 56: Giải phương trình $x^2 - 6(x+3)\sqrt{x+1} + 14x + 3\sqrt{x+1} + 13 = 0$.

Bài 57: Giải phương trình: $2(x^2 + 2) = 5\sqrt{x^3 + 1}$.

Bài 58: Giải phương trình $x^3 - x^2 + 12x\sqrt{x-1} + 20 = 0$.

Bài 59: Giải phương trình sau: $\sqrt{2x-1} + \sqrt{5-x} = x-2 + 2\sqrt{-2x^2 + 11x - 5}$

Bài 60: Giải phương trình $\sqrt{2x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1} = 3x$

Bài 61: Giải phương trình: $\sqrt{x+3} + 3\sqrt{2x-3} + \sqrt{x-1} + \sqrt{2x-3} = 2\sqrt{2}$

Bài 62: Giải phương trình: $(x^2 + x + 1)(\sqrt[3]{(3x-2)^2} + \sqrt[3]{3x-2} + 1) = 9$

Bài 63: giải phương trình $x^3 + \sqrt{(x+1)^3} = 9x + 8$.

Bài 64: Giải phương trình: $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = 2$

Bài 65: Giải phương trình: $x^3 + \sqrt{(1-x^2)^3} = x\sqrt{2(1-x^2)}$

Bài 66: Giải phương trình: $x^2 - 4x + 1 + \sqrt{3x-1} = 0$

Bài 67: Giải phương trình: $4x^3 + 5x^2 + 1 = \sqrt{3x+1} - 3x$

Bài 68: Giải phương trình: $2x^2 - 3\sqrt{x^2 - 4x + 5} = 8(x-1)$

Bài 69: Tìm x biết : $\sqrt{x^2 - \frac{1}{4}} + \sqrt{x^2 + x + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}(2x^3 + x^2 + 2x + 1)$

Bài 70: Giải phương trình $x^2(x^2 + 2) = 4 - x\sqrt{2x^2 + 4}$.

Bài 71: Giải phương trình $3x - 1 + \frac{x-1}{4x} = \sqrt{3x+1}$

Bài 72: Giải phương trình: $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-1} = 1$.

Bài 73: Tìm các số thực x, y thỏa mãn:

$$(x^2 + 1)^2 y^2 + 16x^2 + \sqrt{x^2 - 2x - y^3 + 9} = 8x^3 y + 8xy$$

Bài 74: Giải phương trình sau: $\sqrt{4x^2 + 20x + 25} + \sqrt{x^2 + 6x + 9} = 10x - 20$

Bài 75: Giải phương trình: $x^2 + 4x + 5 = 2\sqrt{2x+3}$

Bài 76: Giải phương trình: $x^2 + 6x + 1 = (2x+1)\sqrt{x^2 + 2x + 3}$

Bài 77: Giải phương trình : $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \frac{x+3}{2}$

Bài 78: Giải phương trình: $\sqrt{2x^2 + 5x + 12} + \sqrt{2x^2 + 3x + 2} = x + 5$.

Bài 79: Giải phương trình $x^2 + \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2 = 0$.

Bài 80: Giải phương trình: $x^2 = \sqrt{x^3 - x^2} + \sqrt{x^2 - x}$

Bài 81: Tìm điều kiện xác định của các biểu thức sau:

$$M = \frac{2018}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}} \quad N = \frac{-2019}{\sqrt{x - \sqrt{2x+3}}}$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Bài 82: Giải phương trình: $2017\sqrt{2017x-2016} + \sqrt{2018x-2017} = 2018$.

Bài 83: Giải phương trình: $\sqrt{2x-3} + \sqrt{5-2x} = 3x^2 - 12x + 14$

Bài 84: Giải phương trình

1) Giải phương trình : $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \frac{x+3}{2}$

2) Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+5x+12} + \sqrt{2x^2+3x+2} = x+5$.

Bài 85: Giải phương trình: $x^2 - 2x + 3 = 2\sqrt{2x^2 - 4x + 3}$

Bài 86: Giải phương trình $x^2 - x - 4 = 2\sqrt{x-1}(1-x)$

Bài 87: Giải phương trình sau: $\sqrt{4x^2 + 20x + 25} + \sqrt{x^2 + 6x + 9} = 10x - 20$

B. Lời giải

Bài 1: Giải phương trình: $2(2x-1) - 3\sqrt{5x-6} = \sqrt{3x-8}$.

Lời giải

$$2(2x-1) - 3\sqrt{5x-6} = \sqrt{3x-8} \quad \left(x \geq \frac{8}{3} \right)$$

$$\Leftrightarrow 4(2x-1) - 6\sqrt{5x-6} - 2\sqrt{3x-8} = 0$$

$$\Leftrightarrow [(5x-6) - 6\sqrt{5x-6} + 9] + [(3x-8) - 2\sqrt{3x-8} + 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{5x-6} + 3)^2 + (\sqrt{3x-8} - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{5x-6} + 3 = 0 \\ \sqrt{3x-8} - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x-8} = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ (nhận)}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 3$.

Bài 2: Giải phương trình: $\frac{26x+5}{\sqrt{x^2+30}} + 2\sqrt{26x+5} = 3\sqrt{x^2+30}$.

Lời giải

$$\text{ĐKXD: } x \geq -\frac{5}{26}$$

Đặt $\sqrt{26x+5} = a$ ($a \geq 0$); $\sqrt{x^2+30} = b$ ($b > 0$), ta có phương trình:

$$\frac{a^2}{b} + 2a = 3b \Leftrightarrow a^2 + 2ab - 3b^2 = 0 \Leftrightarrow (a+b)^2 - 4b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+3b)(a-b) = 0 \Leftrightarrow a-b = 0 \Leftrightarrow a = b$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{26x+5} = \sqrt{x^2+30} \Leftrightarrow 26x+5 = x^2+30 \Leftrightarrow x^2-26x+25 = 0$$

Giải phương trình ta được: $x = 1$ (nhận); $x = 25$ (nhận)

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{1; 25\}$

Bài 3: Giải phương trình:
$$\frac{\sqrt{27+x^2+x}}{2+\sqrt{5-(x^2+x)}} = \frac{\sqrt{27+2x}}{2+\sqrt{5-2x}}.$$

Lời giải

ĐKXD: $x \leq \frac{5}{2}; x^2 + x \leq 5$

Đặt $a = \sqrt{5-(x^2+x)}$; $b = \sqrt{5-2x}$ ($a, b \geq 0$), ta có phương trình:

$$\frac{\sqrt{32-a^2}}{2+a} = \frac{\sqrt{32-b^2}}{2+b}$$

Nếu $a > b \geq 0$ thì $\sqrt{32-a^2} < \sqrt{32-b^2}$ và $\frac{1}{a+2} < \frac{1}{2+b}$ tức là VT < VP, mâu thuẫn.

Tương tự với $a < b$ cũng mâu thuẫn.

$$\text{Do đó } a = b \Leftrightarrow \sqrt{5-(x^2+x)} = \sqrt{5-2x} \Leftrightarrow 5-(x^2+x) = 5-2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (nhận) hoặc } x = 1 \text{ (nhận)}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{0; 1\}$

Bài 4: Giải phương trình: $5\sqrt{x^3+1} = 2(x^2+2).$

Lời giải

$$5\sqrt{x^3+1} = 2(x^2+2) \text{ (ĐK: } x \geq 1)$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)} = 2(x^2+2)$$

$$\text{Đặt } \sqrt{x+1} = a; \sqrt{x^2-x+1} = b \text{ (} a, b \geq 0)$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = x^2 + 2$$

Ta có phương trình:

$$5ab = 2(a^2 + b^2) \Leftrightarrow 2a^2 - 4ab - ab + 2b^2 = 0 \Leftrightarrow (2a-b)(a-2b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a-b=0 \\ a-2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=b \\ a=2b \end{cases}$$

$$2a = b \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1} = \sqrt{x^2-x+1} \Leftrightarrow 4x+4 = x^2-x+1 \Leftrightarrow x^2-5x-3=0$$

$$\text{Giải phương trình ta được: } x_1 = \frac{5+\sqrt{37}}{2} \text{ (nhận); } x_2 = \frac{5-\sqrt{37}}{2} \text{ (nhận)}$$

$a = 2b \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 - x + 1} = \sqrt{x + 1} \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 4 = x + 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 5x + 3 = 0$ (phương trình vô nghiệm)

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{ \frac{5 + \sqrt{37}}{2}; \frac{5 - \sqrt{37}}{2} \right\}$

Bài 5: Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 9} - \sqrt{x^2 - 16} = 1$.

Lời giải

$$\sqrt{x^2 - 9} - \sqrt{x^2 - 16} = 1 \text{ (ĐK: } x \leq -4; x \geq 4)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 9} = \sqrt{x^2 - 16} + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 9 = x^2 - 16 + 2\sqrt{x^2 - 16} + 1$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 - 16} = 6$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 16} = 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 5 \text{ (nhận)}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{-5; 5\}$

Bài 6: Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 4x + 12} = 2x - 4 + \sqrt{x + 1}$.

Lời giải

$$\sqrt{x^2 + 4x + 12} = 2x - 4 + \sqrt{x + 1} \text{ (ĐK: } x \geq -1)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 4x + 12} - \sqrt{x + 1} = 2x - 4 \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } (x^2 + 4x + 12) - (x + 1) = x^2 + 3x + 11 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{35}{4} > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 4x + 12} > \sqrt{x + 1}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + 4x + 12} - \sqrt{x + 1} > 0 \Rightarrow 2x - 4 > 0 \Rightarrow x > 2$$

$$(1) \Leftrightarrow x^2 + 4x + 12 - 2\sqrt{x^2 + 4x + 12} \cdot \sqrt{x + 1} + x + 1 = 4(x^2 - 4x + 4)$$

$$\text{Đặt } \sqrt{x^2 + 4x + 12} = a; \sqrt{x + 1} = b \text{ (} a, b > 0)$$

$$\Rightarrow a^2 - 8b^2 = x^2 - 4x + 4$$

Ta có phương trình:

$$a^2 - 2ab + b^2 = 4(a^2 - 8b^2) \Leftrightarrow 3a^2 + 2ab - 33b^2 = 0 \Leftrightarrow (a - 3b)(3a + 11b) = 0 \Leftrightarrow a = 3b$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 4x + 12} = 3\sqrt{x + 1} \Leftrightarrow x^2 + 4x + 12 = 9x + 9 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$\text{Giải phương trình ta được: } x_1 = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \text{ (nhận); } x_2 = \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \text{ (loại)}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{ \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \right\}$

Bài 7: Giải phương trình: $x^2 + 2x + 7 = 3\sqrt{(x^2 + 1)(x + 3)}$.

Lời giải

$$x^2 + 2x + 7 = 3\sqrt{(x^2 + 1)(x + 3)} \quad (\text{ĐK: } x \geq -3)$$

$$\text{Ta có: } x^2 + 2x + 7 = (x^2 + 1) + 2(x + 3)$$

Đặt $a = \sqrt{x^2 + 1}$ ($a > 0$); $b = \sqrt{x + 3}$ ($b \geq 0$), ta có phương trình:

$$a^2 + 2b^2 = 3ab \Leftrightarrow (a - b)(a - 2b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = 2b \end{cases}$$

$$a = b \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{x + 3} \Leftrightarrow x^2 + 1 = x + 3 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

Giải phương trình ta được: $x_1 = -1$ (nhận); $x_2 = 2$ (nhận)

$$a = 2b \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = 2\sqrt{x + 3} \Leftrightarrow x^2 + 1 = 4(x + 3) \Leftrightarrow x^2 - 4x - 11 = 0$$

Giải phương trình ta được: $x_3 = 2 + \sqrt{15}$ (nhận); $x_4 = 2 - \sqrt{15}$ (nhận)

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $\{2; -1; 2 - \sqrt{15}; 2 + \sqrt{15}\}$

Bài 8: Giải phương trình: $2x + 3 + \sqrt{4x^2 + 9x + 2} = 2\sqrt{x + 2} + \sqrt{4x + 1}$.

Lời giải

$$2x + 3 + \sqrt{4x^2 + 9x + 2} = 2\sqrt{x + 2} + \sqrt{4x + 1} \quad \left(\text{ĐK: } x \geq -\frac{1}{4} \right) \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 2x + 3 + \sqrt{(x + 2)(4x + 1)} = 2\sqrt{x + 2} + \sqrt{4x + 1}$$

$$\text{Đặt } t = 2\sqrt{x + 2} + \sqrt{4x + 1} \quad (t > 0)$$

$$\Leftrightarrow t^2 = 8x + 4\sqrt{(x + 2)(4x + 1)} + 9$$

$$\Leftrightarrow 2x + \sqrt{(x + 2)(4x + 1)} = \frac{t^2 - 9}{4}$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{t^2 - 9}{4} + 3 = t \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0$$

Giải phương trình ta được: $t_1 = 1$ (nhận); $t_2 = 3$ (nhận)

$$t = 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x + 2} + \sqrt{4x + 1} = 1 \Leftrightarrow 4(x + 2) + 4\sqrt{(x + 2)(4x + 1)} + 4x + 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)(4x+1)} = -2(x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ (x+2)(4x+1) = 4(x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \text{ (loại)}$$

$$t = 3 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+2} + \sqrt{4x+1} = 3 \Leftrightarrow 4(x+2) + 4\sqrt{(x+2)(4x+1)} + 4x+1 = 9$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)(4x+1)} = -2x \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ (x+2)(4x+1) = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{9} \text{ (nhận)}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\frac{2}{9}$

Bài 9: Giải phương trình: $x^2 - x - 4 = 2\sqrt{x-1}(1-x)$.

Lời giải

$$x^2 - x - 4 = 2\sqrt{x-1}(1-x) \text{ (ĐK : } x \geq 1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x\sqrt{x-1} + x - 1 - 2(x + \sqrt{x-1}) - 3 = 0$$

Đặt $x + \sqrt{x-1} = y$ ($y \geq 1$), ta có phương trình: $y^2 - 2y - 3 = 0$

Giải phương trình ta được: $y_1 = -1$ (loại); $y_2 = 3$ (nhận)

$$\begin{aligned} y = 3 &\Leftrightarrow x + \sqrt{x-1} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 3-x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x-1 = 9-6x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ \begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -\frac{2}{9}$.

Bài 10: Giải phương trình $\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 1$.

Lời giải

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 1 \text{ (ĐK : } x \geq 0; x \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{x-1} = 1 \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} - 1 = 0$$

Đặt $\sqrt{x} = t$ ($t \geq 0; t \neq 1$), ta có phương trình: $t^2 - 2t - 1 = 0$

Giải phương trình ta được: $t_1 = 1 + \sqrt{2}$ (nhận); $t_2 = 1 - \sqrt{2}$ (loại)

$$t = 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow x = (1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = 6 + 2\sqrt{5}$

Bài 11: Giải PT: $x^2 + 6x + 8 = 3\sqrt{x+2}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
 x^2 + 6x + 8 &= 3\sqrt{x+2} \quad (DK : x \geq -2) \\
 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 + 3(x+2) &= 3\sqrt{x+2} \\
 \Leftrightarrow (x+1)(x+2) + 3\sqrt{x+2}(\sqrt{x+2}-1) &= 0 \\
 \Leftrightarrow (x+1)(x+2) + 3\sqrt{x+2}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+1}\right) &= 0 \\
 \Leftrightarrow (x+1)\sqrt{x+2}\left(\sqrt{x+2} + \frac{3}{\sqrt{x+2}+1}\right) &= 0 \\
 \Leftrightarrow (x+1)\sqrt{x+2} = 0 \quad \left(Do : \sqrt{x+2} + \frac{3}{\sqrt{x+2}+1} > 0\right) \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \end{cases} (TM)
 \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $\{-2; -1\}$

Bài 12: Giải PT: $\sqrt{43-x} = x-1$.

Lời giải

$$\sqrt{43-x} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 43-x = (x-1)^2 \end{cases}$$

$$x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

$$43-x = (x-1)^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 42 = 0$$

Giải phương trình ta được: $x = 7$ (nhận); $x = -6$ (loại)

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{7\}$.

Bài 13: Giải phương trình: $x^2 - x - 1 = \sqrt{8x+1}$

Lời giải

$$DK \quad x \geq -\frac{1}{8}$$

$$\text{Đặt } \sqrt{8x+1} = y, y \geq 0 \text{ ta có: } \begin{cases} x^2 - x - 1 = y \\ 8x+1 = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 4x - 4 = 4y \\ 8x+1 = y^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 4x - 3 = y^2 + 4y \Leftrightarrow (2x+1)^2 = (y+2)^2$$

$$\Leftrightarrow y = 2x-1 \text{ hoặc } y = -2x-3$$

$$\bullet \text{ Với } y = 2x-1 \Rightarrow \sqrt{8x+1} = 2x-1, \text{ giải ra được } x = 3$$

$$\text{Với } y = -2x-3 \Rightarrow \sqrt{8x+1} = -2x-3$$

Bài 14: Giải phương trình $\sqrt{x^2+12}+5=3x+\sqrt{x^2+5}$

Lời giải

Để phương trình có nghiệm thì : $\sqrt{x^2+12}-\sqrt{x^2+5}=3x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{3}$

$$\sqrt{x^2+12}-4=3x-6+\sqrt{x^2+5}-3 \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+12}+4}=3(x-2)+\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+5}+3}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\frac{x+1}{\sqrt{x^2+5}+3}-3\right)=0 \Leftrightarrow x=2$$

Để dàng chứng minh được $\frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\frac{x+1}{\sqrt{x^2+5}+3}-3 < 0, \forall x > \frac{5}{3}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{2\}$

Bài 15: Giải phương trình: $x^2+\sqrt{x+2018}=2018$

Lời giải

2) ĐKXD: $x \geq -2018$, đặt $\sqrt{x+2018}=t, , t \geq 0 \Rightarrow t^2-x=2018$

Ta có $x^2+\sqrt{x+2018}=2018 \Leftrightarrow x^2+t=t^2-x \Leftrightarrow (x+t)(x-t+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+t=0 \\ x+1=t \end{cases}$

$$+ \text{ TH1: } \begin{cases} x+t=0 \\ -2018 \leq x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-2018=0 \\ -2018 \leq x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{1-3\sqrt{897}}{2}$$

$$+ \text{ TH2: } \begin{cases} x+1=t \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2017=0 \\ x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{-1+\sqrt{8069}}{2}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là: $x=\frac{1-3\sqrt{897}}{2}; x=\frac{-1+\sqrt{8069}}{2}$.

Bài 16: Giải phương trình:

$$\text{a) } \frac{x^2}{3+\sqrt{9-x^2}}+\frac{1}{4(3-\sqrt{9-x^2})}=1$$

$$\text{b) } \frac{1}{x^2}+\sqrt{x+2}=\frac{1}{x}+\sqrt{2x+1}$$

Lời giải

$$\text{a) Phương trình: } \frac{x^2}{3+\sqrt{9-x^2}}+\frac{1}{4(3-\sqrt{9-x^2})}=1$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 9-x^2 \geq 0 \\ 3-\sqrt{9-x^2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{3+\sqrt{9-x^2}} + \frac{1}{4(3-\sqrt{9-x^2})} &= 1 \Leftrightarrow \frac{(3-\sqrt{9-x^2})(3+\sqrt{9-x^2})}{(3+\sqrt{9-x^2})} + \frac{1}{4(3-\sqrt{9-x^2})} = 1 \\
\Leftrightarrow (3-\sqrt{9-x^2}) + \frac{1}{4(3-\sqrt{9-x^2})} &= 1 \\
\Leftrightarrow 4(3-\sqrt{9-x^2})^2 - 4(3-\sqrt{9-x^2}) + 1 &= 0 \\
\Leftrightarrow (3-\sqrt{9-x^2}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{9-x^2} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{11}{4} \\
\Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{11}}{2} \text{ (tmdk)}
\end{aligned}$$

b) điều kiện: $x \geq -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2} + \sqrt{x+2} &= \frac{1}{x} + \sqrt{2x+1} \\
\Leftrightarrow \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} &= \sqrt{2x+1} - \sqrt{x+2} \\
\Leftrightarrow \frac{1}{x^2} \cdot (1-x) \cdot (\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+2}) &= (\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+2})(\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+2}) \\
\Leftrightarrow \frac{1}{x^2} \cdot (1-x) \cdot (\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+2}) &= x-1 \\
\Leftrightarrow (1-x) \cdot \left[\frac{1}{x^2} (\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+2}) + 1 \right] &= 0 \\
\Leftrightarrow 1-x = 0 \left(\text{do } \frac{1}{x^2} (\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+2}) + 1 > 0 \right) \\
\Leftrightarrow x = 1
\end{aligned}$$

Vậy: $x = 1$ là nghiệm của phương trình.

Bài 17: Tìm tất cả các số của x thỏa mãn $\sqrt{x-4\sqrt{x-2}+2} + \sqrt{x+6\sqrt{x-2}+7} = 7$

Lời giải

$$\begin{aligned}
&\text{ĐK } x \geq 2 \\
&\sqrt{x-4\sqrt{x-2}+2} + \sqrt{x+6\sqrt{x-2}+7} = 7 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-2}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-2}+3)^2} = 7 \\
&\Leftrightarrow |\sqrt{x-2}-2| + \sqrt{x-2} + 3 = 7 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2}-2 + \sqrt{x-2} + 3 = 7 \\ 2-\sqrt{x-2} + \sqrt{x-2} + 3 = 7 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x-2} = 6 \\ 5 = 7(\text{loại}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 11 \text{ (t/m)}$$

Bài 18: Giải phương trình : $6x^2 + 2x + 1 = 3x\sqrt{6x+3}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{2}$. Do $6x^2 + 2x + 1 = 5x^2 + (x+1)^2 > 0$ nên từ phương trình ta suy ra

$x > 0$. Bây giờ, đặt $a = \sqrt{6x+3}$, ta có $6x^2 + 2x + 1 = 6x^2 + \frac{1}{3}a^2$ nên phương trình có thể được viết lại thành

$$6x^2 + \frac{1}{3}a^2 = 3xa,$$

$$\text{hay } (a-6x)(a-3x) = 0.$$

Từ đây, ta có $a = 3x$ hoặc $a = 6x$.

- Với $a = 3x$, ta có $9x^2 = 6x + 3$. Từ đây, với chú ý $x > 0$, ta giải được $x = 0$.
- Với $a = 6x$, ta có $36x^2 = 6x + 3$. Từ đây, với chú ý $x > 0$, ta giải được

$$x = \frac{1+\sqrt{13}}{12}.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 1$ và $x = \frac{1+\sqrt{13}}{12}$

Bài 19: Giải phương trình $x^2 + \sqrt{x+2014} = 2014$.

Lời giải

Điều kiện: $x \geq -2014$

Đặt $t = \sqrt{x+2014} \Rightarrow t^2 = x+2014 \text{ (t} \geq 0\text{)}$

Ta có hệ sau :
$$\begin{cases} x^2 + t = 2014 & (1) \\ t^2 - x = 2014 & (2) \end{cases}$$

Trừ vế theo vế phương trình (2) cho phương trình (1) ta được :

$$t^2 - x^2 - x - t = 0$$

$$\Leftrightarrow (t+x)(t-x-1) = 0 \Leftrightarrow t = -x \text{ hoặc } t = x+1$$

- Với $t = -x$ ta có : $(-x)^2 = x+2014 \Leftrightarrow x^2 - x - 2014 = 0 \text{ (*)}$

Giải (*) được nghiệm $x = \frac{1+\sqrt{8057}}{2}$ (loại vì $t \geq 0$) hoặc $x = \frac{1-\sqrt{8057}}{2}$

- Với $t = x+1$ ta có: $(x+1)^2 = x+2014 \Leftrightarrow x^2 + x - 2013 = 0 \text{ (**)}$

Giải (**) được nghiệm $x = \frac{-1+\sqrt{8053}}{2}$ hoặc $x = \frac{-1-\sqrt{8053}}{2}$ (loại vì $t \geq 0$)

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \frac{-1+\sqrt{8053}}{2}$ hoặc $x = \frac{1-\sqrt{8057}}{2}$

Bài 20: Giải phương trình: $4(x^2 + 4x + 2) = 11\sqrt{x^4 + 4}$

Lời giải

$$4(x^2 + 4x + 2) = 11\sqrt{x^4 + 4} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 6(x^2 + 2x + 2) - 2(x^2 - 2x + 2) = 11\sqrt{(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6(x^2 + 2x + 2)}{x^2 - 2x + 2} - 2 = 11\sqrt{\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 - 2x + 2}}$$

do $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 > 0$ với mọi x

$$\text{Đặt } t = \sqrt{\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 - 2x + 2}} \quad (t > 0)$$

Ta được phương trình: $6t^2 - 11t - 2 = 0$

Giải (*) được $t = 2$ thỏa mãn yêu cầu

$$\text{Nên } t = \sqrt{\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 - 2x + 2}} = 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 - 2x + 2} = 4 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{3}$$

Bài 21: Giải phương trình: $\sqrt{2x^2 + 5x + 12} + \sqrt{2x^2 + 3x + 2} = x + 5$

Lời giải

$$\text{Đặt } a = \sqrt{2x^2 + 5x + 12}; \quad b = \sqrt{2x^2 + 3x + 2} \Rightarrow a^2 - b^2 = 2x + 10 \Rightarrow x + 5 = \frac{a^2 - b^2}{2}$$

Thay vào phương trình ta được:

$$a + b = \frac{a^2 - b^2}{2} \Leftrightarrow 2(a + b) - (a^2 - b^2) = 0 \Leftrightarrow (a + b)(2 - a + b) = 0$$

vì $a + b > 0$ nên $2 - (a - b) = 0$ hay $a - b = 2$

$$\text{Giải ta tìm được } x = -1; x = \frac{1}{7}$$

Bài 22: Giải phương trình $\frac{x^3}{\sqrt{5 - x^2}} + 8x^2 = 40$.

Lời giải

$$1. \text{ ĐK: } 5 - x^2 > 0 \Rightarrow -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$$

$$\text{Ta có: } \frac{x^3}{\sqrt{5 - x^2}} + 8x^2 = 40$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 8x^2 \cdot \sqrt{5 - x^2} = 40 \cdot \sqrt{5 - x^2}$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 8 \cdot \sqrt{5-x^2} \cdot (x^2-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - (2 \cdot \sqrt{5-x^2})^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2 \cdot \sqrt{5-x^2}) \cdot (x^2 + 2x \cdot \sqrt{5-x^2} + 20 - 4x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2 \cdot \sqrt{5-x^2}) \cdot (2x \cdot \sqrt{5-x^2} - 3x^2 - 20) = 0$$

TH1: $x - 2 \cdot \sqrt{5-x^2} = 0$ ĐK: $x > 0$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4 \cdot (5-x^2)$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 = 20$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 2$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

TH2: $2x \cdot \sqrt{5-x^2} - 3x^2 - 20 = 0$

$$\Leftrightarrow 2x \cdot \sqrt{5-x^2} = 3x^2 + 20$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 \cdot (5-x^2) = 9x^4 + 120x^2 + 400$$

$$\Leftrightarrow 13x^4 + 100x^2 + 400 = 0 \text{ (vô nghiệm)}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 2$.

Bài 23: Giải phương trình $\sqrt{30 - \frac{5}{x^2}} + \sqrt{6x^2 - \frac{5}{x^2}} = 6x^2$

Lời giải

ĐK: $x^2 \geq \sqrt{\frac{5}{6}}$

Vì $x^2 \geq \sqrt{\frac{5}{6}} \Rightarrow \frac{5}{x^2} > 0; 6x^2 - 1 > 0$, theo côsi ta có $\sqrt{30 - \frac{5}{x^2}} = \sqrt{\frac{5}{x^2}(6x^2 - 1)} \leq \frac{\frac{5}{x^2} + (6x^2 - 1)}{2}$

Dấu = có khi $\frac{5}{x^2} = 6x^2 - 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Vì $x^2 \geq \sqrt{\frac{5}{6}} \Rightarrow 6x^2 - \frac{5}{x^2} \geq 0$, theo côsi ta có $\sqrt{6x^2 - \frac{5}{x^2}} = \sqrt{(6x^2 - \frac{5}{x^2}) \cdot 1} \leq \frac{(6x^2 - \frac{5}{x^2}) + 1}{2}$

Dấu = có khi $6x^2 - \frac{5}{x^2} = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Vậy ta có $\sqrt{30 - \frac{5}{x^2}} + \sqrt{6x^2 - \frac{5}{x^2}} \leq \frac{\frac{5}{x^2} + 6x^2 - 1 + 6x^2 - \frac{5}{x^2} + 1}{2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{30 - \frac{5}{x^2}} + \sqrt{6x^2 - \frac{5}{x^2}} \leq 6x^2 \text{ Dấu = có khi } \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Vậy $x = \pm 1$ là nghiệm phương trình $\sqrt{30 - \frac{5}{x^2}} + \sqrt{6x^2 - \frac{5}{x^2}} = 6x^2$

Bài 24: Giải phương trình: $x^2 - 4x + 1 + \sqrt{3x-1} = 0$.

Lời giải

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\text{ĐK: } x \geq \frac{1}{3}$$

$$x^2 - 4x + 1 + \sqrt{3x-1} = 0 \Leftrightarrow x^2 - (3x-1) - x + \sqrt{3x-1} = 0$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{3x-1} \geq 0 \text{ ta được: } x^2 - t^2 - x + t = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-t)(x+t) - (x-t) = 0 \Leftrightarrow (x-t)(x+t-1) = 0$$

$$\text{Với TH } x-t=0 \text{ hay } x=\sqrt{3x-1} \Leftrightarrow x^2=3x-1 \Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2} \text{ t/m}$$

$$\text{Với TH } x+t-1=0 \text{ hay } t=1-x \Rightarrow \sqrt{3x-1}=1-x, \text{ ĐK: } x \leq 1$$

$$\Rightarrow 3x-1=1-2x+x^2 \Rightarrow x=\frac{5-\sqrt{17}}{2} \text{ t/m (loại } x=\frac{5+\sqrt{17}}{2})$$

$$\text{Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm: } x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}, x=\frac{5-\sqrt{17}}{2}$$

$$\text{Bài 25: Giải phương trình } 2\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+3} - \sqrt{5x+11} = 0.$$

Lời giải

$$\text{Điều kiện } x \geq \frac{1}{2}$$

$$2\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+3} - \sqrt{5x+11} = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+3} = \sqrt{5x+11}$$

$$\Leftrightarrow 9x-1+4\sqrt{2x^2+5x-3}=5x+11 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+5x-3}=3-x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ 2x^2+5x-3=9-6x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x^2+11x-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-12 \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện ta được $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

$$\text{Bài 26: Giải phương trình } \sqrt{4x^2+5x+1} - 2\sqrt{x^2-x+1} = 9x-3.$$

Lời giải

$$\sqrt{4x^2+5x+1} - 2\sqrt{x^2-x+1} = 9x-3.$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{4x^2+5x+1} - 2\sqrt{x^2-x+1})(\sqrt{4x^2+5x+1} + 2\sqrt{x^2-x+1}) = (9x-3)(\sqrt{4x^2+5x+1} + 2\sqrt{x^2-x+1})$$

$$\Leftrightarrow 9x-3 = (9x-3)(\sqrt{4x^2+5x+1} + 2\sqrt{x^2-x+1})$$

$$\Leftrightarrow (9x-3)(\sqrt{4x^2+5x+1} + 2\sqrt{x^2-x+1} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 9x-3=0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Ta dễ chứng minh được phương trình $\sqrt{4x^2+5x+1} + 2\sqrt{x^2-x+1} - 1 = 0$ vô nghiệm

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{3}$

$$\text{Bài 27: Giải phương trình: } x^2 + 5x + 1 = (x+5)\sqrt{x^2+1}$$

Lời giải

$$x^2 + 5x + 1 = (x+5)\sqrt{x^2+1}$$

$$x^2+1+5x = (x+5)\sqrt{x^2+1}$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\begin{aligned}
x^2+1+5x-x\sqrt{x^2+1}-5\sqrt{x^2+1}&=0 \\
\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}-x)+5(x-\sqrt{x^2+1})&=0 \\
(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}-5)&=0 \\
(\sqrt{x^2+1}-x)=0 \text{ hoặc } (\sqrt{x^2+1}-5)&=0 \\
\sqrt{x^2+1}=x \text{ hoặc } \sqrt{x^2+1}=5 \\
x^2+1=x^2 \text{ (không có } x \text{ thỏa mãn), hoặc } x^2+1=25 \\
x^2=24 \\
x=\pm\sqrt{24}
\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của PT là $x = \pm\sqrt{24}$

Bài 28: Tìm x biết: $\sqrt{24+8\sqrt{9-x^2}} = x+2\sqrt{3-x}+4$.

Lời giải

Điều kiện: $9-x^2 \geq 0$ và $3-x \geq 0 \Leftrightarrow |x| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$

Ta có

$$24+8\sqrt{9-x^2} = 4(3-x+2\sqrt{3-x}\sqrt{3+x}+3+x) = 4(\sqrt{3-x}+\sqrt{3+x})^2$$

Nên phương trình trở thành: $2(\sqrt{3-x}+\sqrt{3+x}) = x+2\sqrt{3-x}+4$

Hay $2\sqrt{3-x} = x+4$

$$\Leftrightarrow 3+x-2\sqrt{3+x}+1=0 \Leftrightarrow (\sqrt{3-x}-1)^2=0 \Leftrightarrow 3+x=1 \Leftrightarrow x=-2 \text{ (thỏa)}$$

Bài 29: Giải phương trình $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 1$, đặt $a = \sqrt{x-1}; b = \sqrt[3]{2-x}$ thì ta có $a \geq 0, b \leq 1$ và:

$$a^2+b^3=1 \quad (1)$$

Từ giả thiết ta có: $a+b=1$ thay $a=1-b$ ta có $(1-b)^2+b^3=1$

Hay

$$b(b-1)(b+2)=0$$

Suy ra $b \in \{-2; 0; 1\} \Rightarrow x \in \{10; 2; 1\}$ thử lại ta thấy thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{10; 2; 1\}$

Bài 30: Giải phương trình: $\sqrt{4x^2-15x+20} = 4x-10+7\sqrt{x-1}$.

Lời giải

Ta có: $2\sqrt{x-1}-2x+5=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}=2x-5$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ 4(x-1) = (2x-5)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{6+\sqrt{7}}{2}$$

Thử lại $x = \frac{6+\sqrt{7}}{2}$ không là nghiệm của phương trình nên loại.

xét $x \neq \frac{6+\sqrt{7}}{2}$, ta có: $2\sqrt{x-1}-2x+5=0$

do đó, với điều kiện $x \geq 1$, ta có:

$$\begin{aligned}\sqrt{4x^2-15x+20} &= 4x-10+7\sqrt{x-1} \\ \Leftrightarrow \sqrt{4x^2-15x+20}-3\sqrt{x-1}-2(2\sqrt{x-1}+2x-5) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{4x^2-24x+29}{\sqrt{4x^2-15x+20}+3\sqrt{x-1}} + \frac{2(4x^2-24x+29)}{2\sqrt{x-1}-(2x-5)} &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-24x+29=0(1) \\ 8\sqrt{x-1}+2x-5+2\sqrt{4x^2-15x+20}=0(2) \end{cases}\end{aligned}$$

Giải (1), ta được: $x = \frac{6-\sqrt{7}}{2} \left(x \neq \frac{6+\sqrt{7}}{2} \right)$.

Giải (2), phương trình vô nghiệm, vì:

$$\begin{aligned}8\sqrt{x-1}+2x-5+2\sqrt{4x^2-15x+20} \\ = 8\sqrt{x-1}+2(x-1)+(2\sqrt{4x^2-15x+20}-3) > 0\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất: $S = \left\{ \frac{6-\sqrt{7}}{2} \right\}$.

Bài 31: Giải phương trình: $\sqrt{2x+3} = \frac{8x^3+4x}{2x+5}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \geq \frac{-3}{2}$

$$\sqrt{2x+3} = \frac{8x^3+4x}{2x+5} \Leftrightarrow (2x+5)\sqrt{2x+3} = 8x^3+4x$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2x+3})^3 + 2\sqrt{2x+3} = (2x)^3 + 2(2x)$$

Đặt $a = \sqrt{2x+3} \geq 0$, $b = 2x$

$$\text{Ta có: } a^3 + 2a = b^3 + 2b \Leftrightarrow (a-b) \left[\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} + 2 \right] = 0 \Leftrightarrow a = b$$

$$\text{Suy ra: } \sqrt{2x+3} = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 0 \\ 2x+3 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{13}}{4}$$

Bài 32: $\sqrt{x^2+5x+4} - x^2 = 5x+2$

Lời giải

Đặt $t = \sqrt{x^2+5x+4} (t \geq 0)$ phương trình thành :

$$t = t^2 - 2 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 & (N) \\ t = -1 & (L) \end{cases}$$

$$t = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 5x + 4} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 4 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -5 \end{cases}$$

Bài 33: Giải phương trình: $\sqrt{3-4x} + \sqrt{4x+1} = -16x^2 - 8x + 1$ (1).

Lời giải

$$\text{ĐK: } -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } (\sqrt{3-4x} + \sqrt{4x+1})^2 &= 3-4x + 2\sqrt{(3-4x)(1+4x)} + 1+4x \\ &= 4 + 2\sqrt{(3-4x)(1+4x)} \geq 4 \Rightarrow \sqrt{3-4x} + \sqrt{1+4x} \geq 2 \quad (2) \end{aligned}$$

$$\text{Lại có : } -16x^2 - 8x + 1 = 2 - (4x+1)^2 \leq 2 \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(3-4x)(1+4x)} = 0 \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ x = -\frac{1}{4} \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4} \quad (\text{thỏa mãn}(*))$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -\frac{1}{4}$

Bài 34: Giải phương trình $2\sqrt{3-x} + \sqrt{2+x} = 5$.

Lời giải

Giải phương trình $2\sqrt{3-x} + \sqrt{2+x} = 5$.

Điều kiện xác định: $-2 \leq x \leq 3$.

Đặt $\sqrt{2+x} = t$ ($t \geq 0$), suy ra $x = t^2 - 2$.

Ta được phương trình theo t : $2\sqrt{5-t^2} + t = 5$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow 2\sqrt{5-t^2} = 5-t \Rightarrow 4(5-t^2) = (5-t)^2 \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow t = 1.$$

Thử lại ta thấy $t = 1$ thỏa mãn phương trình (1).

$t = 1 \Leftrightarrow x = -1$. Vậy phương trình có một nghiệm $x = -1$.

Bài 35: Tìm x biết: $\sqrt{24+8\sqrt{9-x^2}} = x + 2\sqrt{3-x} + 4$.

Lời giải

Điều kiện: $9-x^2 \geq 0$ và $3-x \geq 0 \Leftrightarrow |x| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$

Ta có

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$24 + 8\sqrt{9-x^2} = 4(3-x+2\sqrt{3-x}\sqrt{3+x}+3+x) = 4(\sqrt{3-x}+\sqrt{3+x})^2$$

Nên phương trình trở thành: $2(\sqrt{3-x}+\sqrt{3+x}) = x+2\sqrt{3-x}+4$

$$\text{Hay } 2\sqrt{3-x} = x+4$$

$$\Leftrightarrow 3+x-2\sqrt{3+x}+1=0 \Leftrightarrow (\sqrt{3-x}-1)^2=0 \Leftrightarrow 3+x=1 \Leftrightarrow x=-2 \text{ (thỏa)}$$

Bài 36: Giải phương trình $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$

Lời giải

Giải phương trình $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$

Điều kiện: $x \geq 1$, đặt $a=\sqrt{x-1}$; $b=\sqrt[3]{2-x}$ thì ta có $a \geq 0, b \leq 1$ và:

$$a^2+b^3=1 \quad (1)$$

Từ giả thiết ta có: $a+b=1$ thay $a=1-b$ ta có $(1-b)^2+b^3=1$

Hay

$$b(b-1)(b+2)=0$$

Suy ra $b \in \{-2; 0; 1\} \Rightarrow x \in \{10; 2; 1\}$ thử lại ta thấy thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{10; 2; 1\}$

Bài 37: Giải phương trình: $2017\sqrt{2017x-2016} + \sqrt{2018x-2017} = 2018$.

Lời giải

$$\text{ĐKXD: } x \geq \frac{2017}{2018}.$$

$$\text{Xét } \frac{2017}{2018} \leq x < 1 \Rightarrow \begin{cases} 2017x-2016 < 1 \\ 2018x-2017 < 1 \end{cases} \Rightarrow 2017\sqrt{2017x-2016} + \sqrt{2018x-2017} < 2018.$$

$$\text{Xét } x > 1 \Rightarrow \begin{cases} 2017x-2016 > 1 \\ 2018x-2017 > 1 \end{cases} \Rightarrow 2017\sqrt{2017x-2016} + \sqrt{2018x-2017} > 2018.$$

Xét $x=1$ thỏa mãn phương trình. Vậy phương trình có nghiệm $x=1$.

Bài 38: Giải phương trình: $\sqrt{4x^2-15x+20} = 4x-10+7\sqrt{x-1}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2\sqrt{x-1}-2x+5=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}=2x-5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ 4(x-1)=(2x-5)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{6+\sqrt{7}}{2}$$

Thử lại $x = \frac{6+\sqrt{7}}{2}$ không là nghiệm của phương trình nên loại.

$$\text{xét } x \neq \frac{6+\sqrt{7}}{2}, \text{ ta có: } 2\sqrt{x-1}-2x+5=0$$

do đó, với điều kiện $x \geq 1$, ta có:

$$\sqrt{4x^2-15x+20} = 4x-10+7\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4x^2 - 15x + 20} - 3\sqrt{x-1} - 2(2\sqrt{x-1} + 2x-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x^2 - 24x + 29}{\sqrt{4x^2 - 15x + 20} + 3\sqrt{x-1}} + \frac{2(4x^2 - 24x + 29)}{2\sqrt{x-1} - (2x-5)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 24x + 29 = 0(1) \\ 8\sqrt{x-1} + 2x - 5 + 2\sqrt{4x^2 - 15x + 20} = 0(2) \end{cases}$$

Giải (1), ta được: $x = \frac{6-\sqrt{7}}{2} \left(x \neq \frac{6+\sqrt{7}}{2} \right)$.

Giải (2), phương trình vô nghiệm, vì:

$$8\sqrt{x-1} + 2x - 5 + 2\sqrt{4x^2 - 15x + 20}$$

$$= 8\sqrt{x-1} + 2(x-1) + (2\sqrt{4x^2 - 15x + 20} - 3) > 0$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất: $S = \left\{ \frac{6-\sqrt{7}}{2} \right\}$.

Bài 39: Giải phương trình $\sqrt{30 - \frac{5}{x^2}} + \sqrt{6x^2 - \frac{5}{x^2}} = 6x^2$

Lời giải

ĐK: $x^2 \geq \sqrt{\frac{5}{6}}$ Vì $x^2 \geq \sqrt{\frac{5}{6}} \Rightarrow \frac{5}{x^2} > 0; 6x^2 - 1 > 0$, theo côsi ta có

$$\sqrt{30 - \frac{5}{x^2}} = \sqrt{\frac{5}{x^2}(6x^2 - 1)} \leq \frac{\frac{5}{x^2} + (6x^2 - 1)}{2} \text{ Dấu = có khi } \frac{5}{x^2} = 6x^2 - 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$\text{Vì } x^2 \geq \sqrt{\frac{5}{6}} \Rightarrow 6x^2 - \frac{5}{x^2} \geq 0, \text{ theo côsi ta có } \sqrt{6x^2 - \frac{5}{x^2}} = \sqrt{(6x^2 - \frac{5}{x^2}) \cdot 1} \leq \frac{(6x^2 - \frac{5}{x^2}) + 1}{2}$$

$$\text{Dấu = có khi } 6x^2 - \frac{5}{x^2} = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$\text{Vậy ta có } \sqrt{30 - \frac{5}{x^2}} + \sqrt{6x^2 - \frac{5}{x^2}} \leq \frac{\frac{5}{x^2} + 6x^2 - 1 + 6x^2 - \frac{5}{x^2} + 1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{30 - \frac{5}{x^2}} + \sqrt{6x^2 - \frac{5}{x^2}} \leq 6x^2 \text{ Dấu = có khi } \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$\text{Vậy } x = \pm 1 \text{ là nghiệm phương trình } \sqrt{30 - \frac{5}{x^2}} + \sqrt{6x^2 - \frac{5}{x^2}} = 6x^2$$

Bài 40: Giải phương trình:

$$\text{a. } x^2 - 10x + 27 = \sqrt{6-x} + \sqrt{x-4}$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$b. \quad x^2 - 2x - x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + 4 = 0$$

Lời giải

a. ĐK: $4 \leq x \leq 6$:

$$VT = x^2 - 10x + 27 = (x-5)^2 + 2 \geq 2, \text{ dấu "}" xảy ra } \Leftrightarrow x = 5$$

$$VP = \sqrt{6-x} + \sqrt{x-4} \leq \sqrt{(1^2+1^2)((\sqrt{6-x})^2 + (\sqrt{x-4})^2)} \Leftrightarrow VP \leq 2, \text{ dấu "}" xảy ra}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{6-x}} = \frac{1}{\sqrt{x-4}} \Rightarrow 6-x = x-4 \Leftrightarrow x = 5$$

$$VT = VP \Leftrightarrow x = 5 \text{ (TMĐK)}, \text{ Vậy nghiệm của phương trình: } x = 5$$

b. ĐK: $x \geq 0$. Nhận thấy: $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình, chia cả hai vế cho x ta có:

$$x^2 - 2x - x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + 4 = 0 \Leftrightarrow x - 2 - \sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{4}{x}\right) - \left(\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) - 2 = 0$$

$$\text{Đặt } \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} = t > 0 \Leftrightarrow t^2 = x + 4 + \frac{4}{x} \Leftrightarrow x + \frac{4}{x} = t^2 - 4, \text{ thay vào ta có:}$$

$$\Leftrightarrow (t^2 - 4) - t - 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 - t - 6 = 0 \Leftrightarrow (t-3)(t+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -2 \end{cases}$$

$$\text{Đối chiếu ĐK của } t \Rightarrow t = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} = 3 \Leftrightarrow x - 3\sqrt{x} + 2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 1 \end{cases}$$

Bài 41: Giải phương trình: $2x^2 - 5x + 5 = \sqrt{5x-1}$

Lời giải

$$\text{ĐKXD } x \geq \frac{1}{5}$$

$$2x^2 - 5x + 5 = \sqrt{5x-1} \Leftrightarrow 2(x^2 - 3x + 2) + x + 1 - \sqrt{5x-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - 3x + 2) + \frac{(x+1)^2 - (\sqrt{5x-1})^2}{x+1+\sqrt{5x-1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - 3x + 2) + \frac{x^2 - 3x + 2}{x+1+\sqrt{5x-1}} = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 3x + 2) \left(2 + \frac{1}{x+1+\sqrt{5x-1}} \right) = 0$$

$$\text{do } x \geq \frac{1}{5} \Rightarrow 2 + \frac{1}{x+1+\sqrt{5x-1}} > 0; x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$S = \{1; 2\}$$

Bài 42: Giải phương trình: $10\sqrt{x^3+1} = 3x^2 + 6$

Lời giải

$$10\sqrt{x^3+1}=3(x^2+2) \Leftrightarrow 10\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)}=3(x^2+2) \text{ điều kiện } x \geq -1$$

$$\text{Đặt } \sqrt{x+1}=a \quad (a \geq 0)$$

$$\sqrt{x^2-x+1}=b \quad (b>0) \text{ Ta có: } 10ab=3a^2+3b^2$$

$$\Leftrightarrow (a-3b)(3a-b)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=3b \\ b=3a \end{cases}$$

Trường hợp 1: $a=3b$

$$\text{Ta có: } \sqrt{x+1}=3\sqrt{x^2-x+1} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 9x^2-9x+9=x+1 \Leftrightarrow 9x^2-10x+8=0$$

$$\Delta' = 25-9.8 < 0 \Rightarrow \text{phương trình (1) vô nghiệm}$$

Trường hợp 2: $b=3a$

$$\text{Ta có: } 3\sqrt{x+1}=\sqrt{x^2-x+1}$$

$$\Leftrightarrow 9(x+1)=x^2-x+1$$

$$\Leftrightarrow x^2-10x-8=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=5+\sqrt{33} \text{ (TM)} \\ x_2=5-\sqrt{33} \text{ (TM)} \end{cases}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x=5 \pm \sqrt{33}$

Bài 43: Giải phương trình: $x^2+4x+5=2\sqrt{2x+3}$

Lời giải

$$x^2+4x+5=2\sqrt{2x+3} \quad (1)$$

$$\text{Điều kiện: } 2x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{3}{2} \quad (1) \Leftrightarrow x^2+4x+5-2\sqrt{2x+3}=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+1+2x+3-2\sqrt{2x+3}+1=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+(\sqrt{2x+3}-1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ \sqrt{2x+3}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ 2x+3=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \text{ thỏa mãn điều kiện}$$

Bài 44: Tìm tất cả các giá trị của x, y, z sao cho: $\sqrt{x}+\sqrt{y-z}+\sqrt{z-x}=\frac{1}{2}(y+3). (2)$

Lời giải

$$\text{Điều kiện } x \geq 0; y-z \geq 0; z-x \geq 0 \Leftrightarrow y \geq z \geq x \geq 0$$

$$(2) \Leftrightarrow 2\sqrt{x}+2\sqrt{y-z}+2\sqrt{z-x}=x+y-z+z-x+3$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)^2 + (\sqrt{y-z}-1)^2 + (\sqrt{z-x}-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=1 \\ \sqrt{y-z}=1 \\ \sqrt{z-x}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \text{ (thỏa điều kiện)} \\ z=2 \end{cases}$$

Bài 45: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{1-x} + \sqrt{4+x} = 3$

b) $x^2 + 4x + 5 = 2\sqrt{2x+3}$

Lời giải

a/ ĐK: $-4 \leq x \leq 1$

Bình phương 2 vế: $1-x+4+x+2\sqrt{(1-x)(4+x)} = 9 \Leftrightarrow \sqrt{(1-x)(4+x)} = 2$

$$\Leftrightarrow 4-3x-x^2 = 4 \Leftrightarrow x(x+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-3 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm: $x = 0$; $x = -3$

b/ $x^2 + 4x + 5 = 2\sqrt{2x+3}$ ĐKXD: $x \geq \frac{-3}{2}$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2x + 1) + (2x + 3 - 2\sqrt{2x+3} + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (\sqrt{2x+3}-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ \sqrt{2x+3}=1 \end{cases} \Rightarrow x = -1$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = -1$

Bài 46: Tìm x ; y thỏa mãn: $2(x\sqrt{y-4} + y\sqrt{x-4}) = xy$

Lời giải

$$2(x\sqrt{y-4} + y\sqrt{x-4}) = xy \Leftrightarrow x.2.\sqrt{y-4} + y.2.\sqrt{x-4} = xy$$

Xét VP = $x.2.\sqrt{y-4} + y.2.\sqrt{x-4}$ theo BĐT cosi: $2\sqrt{y-4} \leq \frac{4+y-4}{2} = \frac{y}{2}$; $2\sqrt{x-4} \leq \frac{4+x-4}{2} = \frac{x}{2}$

vậy VP $\leq$ VT

Dấu = xảy ra khi: $\begin{cases} \sqrt{x-4}=2 \\ \sqrt{y-4}=2 \end{cases} \Rightarrow x = y = 8$

Bài 47: Giải phương trình: $2(5x + 3\sqrt{x^2 + x - 2}) = 27 + 3\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2}$.

Lời giải

ĐK: $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$

$$2(5x + 3\sqrt{x^2 + x - 2}) = 27 + 3\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2}$$

$$\Leftrightarrow 10x + 6\sqrt{x^2 + x - 2} = 27 + 3\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} \quad (1).$$

$$\text{Đặt } t = 3\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} \text{ mà } x \geq 1 \Rightarrow t \geq \sqrt{3}.$$

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow t^2 - t - 20 = 0 \Leftrightarrow (t+4)(t-5) = 0 \Leftrightarrow t = 5 \quad (t \geq \sqrt{3}).$$

$$\text{Khi đó ta có phương trình: } 3\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} = 5$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x-1} - 3 + \sqrt{x+2} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-2)}{\sqrt{x-1}+1} + \frac{x-2}{\sqrt{x+2}+2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2) \left(\frac{3}{\sqrt{x-1}+1} + \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \quad \left(\text{do } \frac{3}{\sqrt{x-1}+1} + \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} > 0 \right).$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{2\}$.

Bài 48: Giải phương trình $x^2 + 2x - \sqrt{x^2 + 2x + 2} = 0$.

Lời giải

$$x^2 + 2x - \sqrt{x^2 + 2x + 2} = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2x + 2) - \sqrt{x^2 + 2x + 2} - 2 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x + 2} = -1(L) \\ \sqrt{x^2 + 2x + 2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - \sqrt{3} \\ x = -1 + \sqrt{3} \end{cases}$$

Bài 49: Giải phương trình $(1 - \sqrt{1-x})\sqrt[3]{2-x} = x$.

Lời giải

ĐK: $x \leq 1$

$$(1 - \sqrt{1-x})\sqrt[3]{2-x} = x \Leftrightarrow x\sqrt[3]{2-x} = x(1 + \sqrt{1-x}) \Leftrightarrow x(\sqrt[3]{2-x} - 1 - \sqrt{1-x}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt[3]{2-x} = 1 + \sqrt{1-x} \end{cases}$$

Xét phương trình $\sqrt[3]{2-x} = 1 + \sqrt{1-x}$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} \sqrt[3]{2-x} = a \\ \sqrt{1-x} = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b+1 \\ a^3 - b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b+1 \\ b^3 + 3b^2 + 3b + 1 - b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b+1 \\ b^3 + 2b^2 + 3b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow x=1. \text{Đổi chiều ĐKXD ta có: } x \in \{0;1\}.$$

Bài 50: Giải phương trình $\sqrt{1-x} + \sqrt{4+x} = 3$.

Lời giải

$$\text{Điều kiện xác định } \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ 4+x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 1 \quad (*)$$

Với điều kiện (*), phương trình đã cho tương đương với:

$$5 + 2\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{4+x} = 9 \Leftrightarrow \sqrt{(1-x)(4+x)} = 2 \Leftrightarrow (1-x)(4+x) = 4 \Leftrightarrow x^2 + 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-3 \end{cases}. \text{Đổi chiều với điều kiện (*) ta được } x=0; x=-3.$$

Bài 51: Giải phương trình $2x^2 + \sqrt{x^2 - 2x - 19} = 4x + 74$

Lời giải

$$\text{Điều kiện } x^2 - 2x - 19 \geq 0$$

$$2(2x^2 - 2x - 19) + \sqrt{x^2 - 2x - 19} - 36 = 0$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2 - 2x - 19}, t \geq 0$$

$$\text{Phương trình tương đương với } 2t^2 + t - 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4(n) \\ t = -\frac{9}{2}(l) \end{cases}$$

$$t = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x - 19} = 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 19 = 16 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 35 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = -5 \end{cases}$$

Thay vào điều kiện ta thấy hai nghiệm thỏa mãn

$$\text{Vậy } S = \{-5; 7\}$$

Bài 52: Giải phương trình: $3x + 2\sqrt{27x^3 + 8} = 9x^2 + 6$.

Lời giải

$$3x + 2\sqrt{27x^3 + 8} = 9x^2 + 6$$

$$\Leftrightarrow 3x + 2\sqrt{(3x+2)(9x^2-6x+4)} = 9x^2 + 6 \quad (\text{Điều kiện } x \geq \frac{-2}{3})$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 + 6 - 2\sqrt{(3x-2)(9x^2-6x+4)} - 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 - 6x + 4 - 2\sqrt{(3x+2)(9x^2-6x+4)} + 3x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{9x^2 - 6x + 4} - \sqrt{3x+2} \right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 - 6x + 4 = 3x + 2$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 - 9x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ x = \frac{1}{3} \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x \in \left\{ \frac{2}{3}; \frac{1}{3} \right\}$.

Bài 53: Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x^2 = 3x + 7$.

Lời giải

Có $x^2 - 3x + 5 = x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} + \frac{11}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow VT > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

ĐKXĐ: $x > \frac{-7}{3}$

$$\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x^2 = 3x + 7$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 3x + 5} + x^2 - 3x + 5 - 12 = 0$$

Đặt $\sqrt{x^2 - 3x + 5} = t$ ($t > 0$) ta có phương trình

$$t^2 + t - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \text{ (TM)} \\ t = -4 \text{ (KTM)} \end{cases}$$

Với $t = 3$ ta có

$$\sqrt{x^2 - 3x + 5} = 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (TM)} \\ x = 4 \text{ (TM)} \end{cases}$$

Vậy phương trình (1) có tập nghiệm $S = \{-1; 4\}$

Bài 54: Giải phương trình $2x^2 + 3x - 2 = (2x - 1)\sqrt{2x^2 + x - 3}$.

Lời giải

ĐKXĐ: $x \geq 1$ hoặc $x \leq -\frac{3}{2}$.

$$PT \Leftrightarrow (2x - 1)(x + 2) = (2x - 1)\sqrt{2x^2 + x - 3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ x + 2 = \sqrt{2x^2 + x - 3} \end{cases}$$

$$2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ (không thỏa mãn ĐKXĐ)}$$

$$x+2=\sqrt{2x^2+x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 2x^2+x-3=x^2+4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2-3x-7=0 \end{cases}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x_1 = \frac{3+\sqrt{37}}{2}$; $x_2 = \frac{3-\sqrt{37}}{2}$ (thỏa mãn ĐKXD)

Bài 55: Giải phương trình $\sqrt{2x^2+3x+2} + \sqrt{4x^2+6x+21} = 11$.

Lời giải

$$\sqrt{2x^2+3x+2} + \sqrt{4x^2+6x+21} = 11$$

$$\text{Ta có: } 2x^2+3x+2 = 2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0, \forall x$$

$$4x^2+6x+21 = 4\left(x+\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{75}{4} > 0, \forall x$$

Đặt $a = 2x^2+3x+2$ ($a > 0$), phương trình cho trở thành: $\sqrt{a} + \sqrt{2a+17} = 11$ (1)

Bình phương hai vế phương trình (1) ta được:

$$3a+17+2\sqrt{2a^2+17a} = 121$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2a^2+17a} = 104-3a \quad (a < \frac{104}{3})$$

$$\Rightarrow 4(2a^2+17a) = 10816-624a+9a^2$$

$$\Leftrightarrow a^2-692a+10816=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=676 \text{ (loại)} \\ a=16 \text{ (nhận)} \end{cases}$$

$$\text{Với } a=16 \Rightarrow 2x^2+3x+2=16 \Leftrightarrow 2x^2+3x-14=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=\frac{-7}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm: $x=2$; $x=\frac{-7}{2}$

Bài 56: Giải phương trình $x^2-6(x+3)\sqrt{x+1}+14x+3\sqrt{x+1}+13=0$.

Lời giải

$$\text{Giải phương trình } x^2-6(x+3)\sqrt{x+1}+14x+3\sqrt{x+1}+13=0.$$

Điều kiện $x \geq -1$ khi đó: (1) $\Leftrightarrow (x+1)(x+13)-(6x+15)\sqrt{x+1}=0$.

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}[(x+13)\sqrt{x+1}-(6x+15)]=0$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \text{ hoặc } (x+13)\sqrt{x+1}=6x+15 \quad (2)$$

Do 2 vế của (2) đều không âm nên (2)

$$\Leftrightarrow (x^2+26x+169)(x+1)=36x^2+180x+225$$

$$\Leftrightarrow x^3-9x^2+15x-56=0 \Leftrightarrow (x-8)(x^2-x+7)=0$$

$$\Leftrightarrow x=8 \text{ hoặc } x^2-x+7=0 \text{ (vô nghiệm). Kết luận}$$

Bài 57: Giải phương trình: $2(x^2 + 2) = 5\sqrt{x^3 + 1}$.

Lời giải

$$\text{ĐK: } x^3 + 1 \geq 0$$

$$2(x^2 + 2) = 5\sqrt{x^3 + 1}$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - x + 1 + x + 1) = 5\sqrt{(x+1)(x^2 - x + 1)}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \frac{x+1}{x^2 - x + 1} - 5\sqrt{\frac{x+1}{x^2 - x + 1}} + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{x+1}{x^2 - x + 1}} = 2 \\ \sqrt{\frac{x+1}{x^2 - x + 1}} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Bài 58: Giải phương trình $x^3 - x^2 + 12x\sqrt{x-1} + 20 = 0$.

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } x \geq 1$$

$$(1) \Leftrightarrow x^2(x-1) - 12x\sqrt{x-1} + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x\sqrt{x-1} - 2)(x\sqrt{x-1} - 10) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{x-1} = 2 \\ x\sqrt{x-1} = 10 \end{cases}$$

$$\text{TH1: } x\sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow x^3 - x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

$$\text{TH2: } x\sqrt{x-1} = 10 \Leftrightarrow x^3 - x^2 = 100 \Leftrightarrow x = 5 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 2$ và $x = 5$.

Bài 59: Giải phương trình và hệ phương trình sau:

$$\sqrt{2x-1} + \sqrt{5-x} = x-2 + 2\sqrt{-2x^2 + 11x - 5};$$

Lời giải

$$\text{Giải phương trình: } \sqrt{2x-1} + \sqrt{5-x} = x-2 + 2\sqrt{-2x^2 + 11x - 5} \quad (2)$$

$$\text{Phương trình xác định } \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 5-x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 5$$

$$\text{Khi đó phương trình (2)} \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} + \sqrt{5-x} = x-2 + 2\sqrt{(2x-1)(5-x)}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} \sqrt{2x-1} = a \\ \sqrt{5-x} = b \end{cases} \quad (a, b \geq 0) \Rightarrow x+4 = a^2 + b^2 \Rightarrow x-2 = a^2 + b^2 - 6$$

$$\text{Ta có phương trình: } a+b = a^2 + b^2 - 6 + 2ab \Leftrightarrow (a+b)^2 - (a+b) - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b-3)(a+b+2) = 0 \Leftrightarrow a+b-3 = 0 \text{ (do } a+b+2 > 0, \forall a, b \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow a+b = 3 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 9 \Leftrightarrow x+4 + 2\sqrt{(2x-1)(5-x)} = 9$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(2x-1)(5-x)} - (5-x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{5-x} (2\sqrt{2x-1} - \sqrt{5-x}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{5-x} = 0 \Leftrightarrow x = 5 \text{ (thỏa mãn)} \\ 4(2x-1) = 5-x \Leftrightarrow 9x = 9 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{1; 5\}$

Bài 60: Giải phương trình $\sqrt{2x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1} = 3x$ (1)

Lời giải

Điều kiện xác định $\forall x \in \mathbb{R}$

Từ giả thiết ta nhận thấy $x > 0$ (do vế trái dương),

Chia cả hai vế cho x , ta có $\sqrt{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = 3$

Đặt $t = \frac{1}{x}$ ($t > 0$) ta được phương trình

$$\sqrt{t^2+t+2} + \sqrt{t^2-t+1} = 3 \Leftrightarrow (\sqrt{t^2+t+2}-2) + (\sqrt{t^2-t+1}-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{t^2+t-2-4}{\sqrt{t^2+t+2}+2} + \frac{t^2-t+1-1}{\sqrt{t^2-t+1}+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1) \left(\frac{t+2}{\sqrt{t^2+t+2}+2} + \frac{t}{\sqrt{t^2-t+1}+1} \right) = 0 \Leftrightarrow t-1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1) \left(\frac{t+2}{\sqrt{t^2+t+2}+2} + \frac{1}{\sqrt{t^2-t+1}+1} \right) = 0 \Leftrightarrow t-1 = 0$$

Với $t-1=0 \Rightarrow x=1$

Vậy phương trình có đúng một nghiệm $x=1$.

Bài 61: Giải phương trình $\sqrt{x+3} + 3\sqrt{2x-3} + \sqrt{x-1} + \sqrt{2x-3} = 2\sqrt{2}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \geq \frac{3}{2}$.

Phương trình (1) viết lại $\sqrt{2x+6} + 6\sqrt{2x-3} + \sqrt{2x-2} + 2\sqrt{2x-3} = 4$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-3} + 6\sqrt{2x-3} + 9 + \sqrt{2x-3} + 2\sqrt{2x-3} + 1 = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{2x-3}+3)^2} + \sqrt{(\sqrt{2x-3}+1)^2} = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x-3} + 3 + \sqrt{2x-3} + 1 = 4$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2x-3} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

Bài 62: Giải phương trình: $(x^2+x+1)\left(\sqrt[3]{(3x-2)^2} + \sqrt[3]{3x-2} + 1\right) = 9$

Lời giải

Ta có:

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\begin{aligned}
& (x^2+x+1)\left(\sqrt[3]{(3x-2)^2} + \sqrt[3]{3x-2} + 1\right) = 9 \\
& \Rightarrow (x^2+x+2)\left[\left(\sqrt[3]{3x-2}\right)^2 + \sqrt[3]{3x-2} + 1\right] = 9 \\
& \Rightarrow (x^2+x+2)\left(\sqrt[3]{3x-2}-1\right)\left[\left(\sqrt[3]{3x-2}\right)^2 + \sqrt[3]{3x-2} + 1\right] = 9\left(\sqrt[3]{3x-2}-1\right) \\
& \Rightarrow (x^2+x+2)\left[\left(\sqrt[3]{3x-2}\right)^3 - 1\right] = 9\left(\sqrt[3]{3x-2}-1\right) \\
& \Rightarrow (x^2+x+2)(3x-3) = 9\left(\sqrt[3]{3x-2}-1\right) \\
& \Rightarrow (x^2+x+2)(x-1) - 3\left(\sqrt[3]{3x-2}-1\right) = 0 \\
& \Rightarrow x^3 - 1 - 3\sqrt[3]{3x-2} + 3 = 0 \\
& \Rightarrow x^3 - 3\sqrt[3]{3x-2} + 2 = 0 \quad (*)
\end{aligned}$$

Đặt $\sqrt[3]{3x-2} = t \Rightarrow t^3 = 3x-2$.

$$\begin{aligned}
(*) & \Rightarrow \begin{cases} x^3 - 3t + 2 = 0 \\ t^3 = 3x - 2 \end{cases} \\
& \Rightarrow \begin{cases} x^3 - 3t + 2 = 0 & (1) \\ t^3 - 3x + 2 = 0 & (2) \end{cases}
\end{aligned}$$

Lấy (1)-(2), ta được:

$$\begin{aligned}
& x^3 - t^3 - 3t + 3x = 0 \\
& \Rightarrow (x-t)(x^2 + xt + t^2) + 3(x-t) = 0 \\
& \Rightarrow (x-t)(x^2 + xt + t^2 + 3) = 0 \\
& \Rightarrow (x-t)[x^2 + t.x + (t^2 + 3)] = 0
\end{aligned}$$

$$\blacksquare \quad x = t \Rightarrow x = \sqrt[3]{3x-2}$$

$$\begin{aligned}
& \Rightarrow x^3 = 3x - 2 \\
& \Rightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \\
& \Rightarrow x^3 - x - 2x + 2 = 0 \\
& \Rightarrow x(x^2 - 1) - 2(x-1) = 0 \\
& \Rightarrow x(x-1)(x+1) - 2(x-1) = 0 \\
& \Rightarrow (x-1)[x(x+1) - 2] = 0 \\
& \Rightarrow (x-1)(x^2 + x - 2) = 0 \\
& \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (kép)} \\ x = -2 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\blacksquare \quad x^2 + t.x + (t^2 + 3) = 0$$

$$\Delta = t^2 - 4.1.(t^2 + 3) = -3t^2 - 12 < 0$$

Vậy $x^2 + t.x + (t^2 + 3) = 0$ vô nghiệm.

Vậy $S = \{-2; 1\}$.

Bài 63: giải phương trình $x^3 + \sqrt{(x+1)^3} = 9x + 8$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $x \geq -1$.

Phương trình cho tương đương với $(x+1)[x^2 - x - 8 + \sqrt{x+1}] = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 - x - 8 + \sqrt{x+1} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } x^2 - x - 8 + \sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow (x-3) \left[x + 2 + \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2} \right] = 0 \quad (1)$$

$$\text{Do } x + 2 + \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2} > 0, \forall x \geq -1 \text{ nên } (1) \Leftrightarrow x = 3.$$

Tập nghiệm của phương trình là $\{-1; 3\}$.

Bài 64: Giải phương trình: $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = 2$

Lời giải

* ĐK: $x \geq 1$

Đưa phương trình về dạng:

$$|\sqrt{x-1}-1| + |\sqrt{x-1}+1| = 2 \Leftrightarrow |\sqrt{x-1}-1| + \sqrt{x-1}+1 = 2 \quad (*) \quad (\text{Do } \sqrt{x-1}+1 > 0)$$

* Trường hợp 1: $\sqrt{x-1}-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$. Khi đó phương trình (*) trở thành:

$$2\sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (thỏa mãn)}$$

* Trường hợp 2: $\sqrt{x-1}-1 < 0 \Leftrightarrow 1 \leq x < 2$. Khi đó phương trình (*) trở thành:

$$-\sqrt{x-1}+1 + \sqrt{x-1}+1 = 2 \Leftrightarrow 2 = 2 \text{ (luôn đúng)}$$

Kết hợp cả 2 trường hợp ta được $1 \leq x \leq 2$ là nghiệm của phương trình.

Bài 65: Giải phương trình: $x^3 + \sqrt{(1-x^2)^3} = x\sqrt{2(1-x^2)}$

Lời giải

* ĐK: $(1-x^2) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$

$$\text{Đặt } a = x; b = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$a^3 + b^3 = ab\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 = \sqrt{2(a^2 + b^2)}ab$$

$$\Leftrightarrow (a^3 + b^3)^2 = 2(a^2 + b^2)(ab)^2$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2(a^2 + b^2 - ab)^2 = 2(a^2 + b^2)(ab)^2$$

$$\text{Ta có: } (a+b)^2 \geq 4ab; (a^2 + b^2 - ab) \geq \frac{a^2 + b^2}{2}; (a^2 + b^2 - ab) \geq ab$$

Do đó:

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$(a+b)^2(a^2+b^2-ab) \geq 4ab \cdot \frac{a^2+b^2}{2} \cdot ab$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2(a^2+b^2-ab) \geq 2(a^2+b^2)(ab)^2$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:

$$a=b \Leftrightarrow x=\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow 2x^2=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ (thỏa mãn ĐK)}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

Bài 66: Giải phương trình: $x^2 - 4x + 1 + \sqrt{3x-1} = 0$

Lời giải

* ĐK: $x \geq \frac{1}{3}$

$$x^2 - 4x + 1 + \sqrt{3x-1} = 0 \Leftrightarrow x^2 - (3x-1) - x + \sqrt{3x-1} = 0$$

Đặt $t = \sqrt{3x-1} \geq 0$ ta được: $x^2 - t^2 - x + t = 0$

$$\Leftrightarrow (x-t)(x+t) - (x-t) = 0 \Leftrightarrow (x-t)(x+t-1) = 0$$

Với TH $x-t=0$ hay $x=\sqrt{3x-1} \Leftrightarrow x^2=3x-1 \Leftrightarrow x=\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ (thỏa mãn ĐK)

Với TH $x+t-1=0$ hay $t=1-x \Rightarrow \sqrt{3x-1}=1-x$, ĐK: $x \leq 1$

$$\Rightarrow 3x-1=1-2x+x^2 \Rightarrow x=\frac{5-\sqrt{17}}{2} \text{ (thỏa mãn ĐK) (loại } x=\frac{5+\sqrt{17}}{2} \text{)}$$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm: $x=\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, $x=\frac{5-\sqrt{17}}{2}$

Bài 67: Giải phương trình $4x^3 + 5x^2 + 1 = \sqrt{3x+1} - 3x$

Lời giải

* ĐK: $x \geq \frac{-1}{3}$

$$\begin{aligned}
4x^3 + 5x^2 + 1 &= \sqrt{3x+1} - 3x \\
\Leftrightarrow 4x^3 + 5x^2 + 1 - \sqrt{3x+1} + 3x &= 0 \\
\Leftrightarrow 4x^3 + 5x^2 + x + (2x+1) - \sqrt{3x+1} &= 0 \\
\Leftrightarrow 4x^3 + 5x^2 + x + \frac{(2x+1)^2 - (3x+1)}{(2x+1) + \sqrt{3x+1}} &= 0 \\
\Leftrightarrow (4x^2 + x)(x+1) + \frac{4x^2 + x}{(2x+1) + \sqrt{3x+1}} &= 0 \\
\Leftrightarrow (4x^2 + x) \left[(x+1) + \frac{1}{(2x+1) + \sqrt{3x+1}} \right] &= 0 (*)
\end{aligned}$$

Với $x \geq \frac{-1}{3}$ thì $(x+1) + \frac{1}{(2x+1) + \sqrt{3x+1}} > 0$

$$(*) \Leftrightarrow 4x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 0; x = -\frac{1}{4}$

Bài 68: Giải phương trình: $2x^2 - 3\sqrt{x^2 - 4x + 5} = 8(x-1)$ (1)

Lời giải

* ĐK: $x^2 - 4x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + 1 \geq 0$ (luôn đúng $\forall x$).

$$(1) \Leftrightarrow 2(x^2 - 4x + 5) - 3\sqrt{x^2 - 4x + 5} - 2 = 0$$

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 4x + 5}, t \geq 0$. Phương trình (1) trở thành:

$$2t^2 - 3t - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2(TM) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x + 5} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{3} \\ t = -\frac{1}{2}(L) \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là $\{2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}\}$.

Bài 69: Tìm x biết: $\sqrt{x^2 - \frac{1}{4}} + \sqrt{x^2 + x + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}(2x^3 + x^2 + 2x + 1)$

Lời giải

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2 - \frac{1}{4}} + \sqrt{x^2 + x + \frac{1}{4}} &= \frac{1}{2}(2x^3 + x^2 + 2x + 1) \\
\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 - \frac{1}{4}} + \sqrt{x^2 + x + \frac{1}{4}} &= (2x^3 + x^2) + (2x + 1)
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4x^2 - 1} + 2\sqrt{4x^2 + 4x + 1} = (x^2 + 1)(2x + 1)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2x+1)(2x-1)} + 2|2x+1| = (x^2 + 1)(2x + 1)$$

Vế trái không âm, $x^2 + 1$ dương nên $2x + 1$ không âm

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2x+1)(2x-1)} + 2(2x+1) = (x^2 + 1)(2x + 1)$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2x+1)(2x+1)} = (x^2+1)(2x+1)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2x+1)^2} = (x^2+1)(2x+1)$$

$$\Leftrightarrow 2x+1 = (x^2+1)(2x+1)$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)(x^2+1-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x+1=0 \text{ hoặc } x^2=0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1}{2} \text{ hoặc } x = 0 \text{ (thỏa điều kiện)}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{-1}{2} \text{ hoặc } x = 0.$$

Bài 70: Giải phương trình $x^2(x^2+2) = 4 - x\sqrt{2x^2+4}$.

Lời giải

$$\text{Đặt } t = x\sqrt{2x^2+4} \Rightarrow t^2 = 2(x^4+2x^2) \Rightarrow x^2(x^2+2) = \frac{t^2}{2}$$

$$\text{ta được phương trình } \frac{t^2}{2} = 4 - t \Leftrightarrow t^2 + 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 \\ t = 2 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = -4 \text{ ta có } x\sqrt{2x^2+4} = -4 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 2(x^4+2x^2) = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x^4+2x^2-8=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}$$

$$\text{Với } t = 2 \text{ ta có } x\sqrt{2x^2+4} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2(x^4+2x^2) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^4+2x^2-2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 = \sqrt{3}-1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{\sqrt{3}-1}$$

Bài 71: Giải phương trình $3x-1+\frac{x-1}{4x} = \sqrt{3x+1}$

Lời giải

$$\text{đkxd } x \geq \frac{-1}{3}$$

$$3x-1+\frac{x-1}{4x} = \sqrt{3x+1} \Leftrightarrow 4x(3x-1)+x-1 = 4x\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow 12x^2-3x-1 = 4x\sqrt{3x+1}$$

$$16x^2 = (2x+\sqrt{3x+1})^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 2x+\sqrt{3x+1} \\ -4x = 2x+\sqrt{3x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \sqrt{3x+1} \\ -6x = \sqrt{3x+1} \end{cases}$$

$$\text{giải ra pt có 2 nghiệm } x=1; x = \frac{3-\sqrt{153}}{72}$$

Bài 72: Giải phương trình: $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-1} = 1$.

Lời giải

Điều kiện $x \geq 1$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-1}=1 \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}-\sqrt{x-1}=1$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{x-1}-1|-\sqrt{x-1}=1 \quad (1)$$

Khi $\sqrt{x-1} \geq 1 \Leftrightarrow x-1 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 2$: Ta có

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x-1}-1-\sqrt{x-1}=1. \text{ Phương trình vô nghiệm}$$

Khi $0 \leq \sqrt{x-1} < 1 \Leftrightarrow 0 \leq x-1 < 1 \Leftrightarrow 1 \leq x < 2$: Ta có

$$(1) \Leftrightarrow (1) \Leftrightarrow 1-\sqrt{x-1}-\sqrt{x-1}=1 \Leftrightarrow -2\sqrt{x-1}=0 \Leftrightarrow x=1$$

Vậy $x=1$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Bài 73: Tìm các số thực x, y thỏa mãn:

$$(x^2+1)^2 y^2 + 16x^2 + \sqrt{x^2-2x-y^3+9} = 8x^3 y + 8xy$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } (*) \Leftrightarrow [(x^2+1)y-4x]^2 + \sqrt{x^2-2x-y^3+9} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+1)y-4x=0 \\ x^2-2x-y^3+9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yx^2-4x+y=0 \quad (1) \\ x^2-2x-y^3+9=0 \quad (2) \end{cases}$$

+ Nếu $y=0$ thì từ (1) suy ra $x=0$, thay vào (2) không thỏa mãn

+ Nếu $y \neq 0$, ta coi (1), (2) là phương trình bậc hai ẩn x . Điều kiện để có nghiệm x là:

$$\begin{cases} \Delta_1' = 4-y^2 \geq 0 \\ \Delta_2' = y^3-8 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq y \leq 2 \\ y \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow y=2$$

Thay $y=2$ vào hệ (1), (2) ta được:

$$\begin{cases} 2x^2-4x+2=0 \\ x^2-2x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

Vậy $x=1, y=2$.

Bài 74: Giải phương trình sau: $\sqrt{4x^2+20x+25} + \sqrt{x^2+6x+9} = 10x-20$

Lời giải

Đkxd: $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{4x^2+20x+25} + \sqrt{x^2+6x+9} = 10x-20$$

Vì $\sqrt{4x^2+20x+25} + \sqrt{x^2+6x+9} \geq 0$ với $\forall x$

$$\Rightarrow 10x-20 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$$

Ta có:

$$\sqrt{4x^2 + 20x + 25} + \sqrt{x^2 + 6x + 9} = 10x - 20$$

$$\Leftrightarrow |2x + 5| + |x + 3| = 10x - 20$$

$$\Leftrightarrow 2x + 5 + x + 3 = 10x - 20$$

$$\Leftrightarrow 7x = 28$$

$$\Leftrightarrow x = 4(t / m)$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 4$

Bài 75: Giải phương trình: $x^2 + 4x + 5 = 2\sqrt{2x + 3}$

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } 2x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{3}{2}$$

$$(1) \Leftrightarrow x^2 + 4x + 5 - 2\sqrt{2x + 3} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + 2x + 3 - 2\sqrt{2x + 3} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 + (\sqrt{2x + 3} - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ \sqrt{2x + 3} - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 2x + 3 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ thỏa mãn điều kiện}$$

Bài 76: Giải phương trình: $x^2 + 6x + 1 = (2x + 1)\sqrt{x^2 + 2x + 3}$

Lời giải

ĐKXD: $\mathbb{R}$.

Vì $x = -\frac{1}{2}$ không phải là nghiệm, nên phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$\frac{x^2 + 6x + 1}{2x + 1} = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 6x + 1}{2x + 1} - 2 = \sqrt{x^2 + 2x + 3} - 2$$

$$\frac{x^2 + 6x + 1 - 2(2x + 1)}{2x + 1} = \frac{(\sqrt{x^2 + 2x + 3} + 2)(\sqrt{x^2 + 2x + 3} - 2)}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + 2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x - 1}{2x + 1} = \frac{x^2 + 2x - 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + 2}$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2x - 1) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + 2} - \frac{1}{2x + 1} \right) = 0$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 1 = 0 & (1) \\ \sqrt{x^2 + 2x + 3} + 2 = 2x + 1 & (2) \end{cases}$$

PT (1) có hai nghiệm $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$

$$\text{PT (2)} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2x + 3} + 2 = 2x + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2x + 2} = 2x - 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x^2 + 2x + 3 = (2x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x_3 = \frac{3 + \sqrt{15}}{3}$$

Vậy phương đã cho có ba nghiệm: $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}; x_3 = \frac{3 + \sqrt{15}}{3}$

Bài 77: Giải phương trình : $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = \frac{x+3}{2}$

Lời giải

ĐKXD : $x \geq 1$

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = \frac{x+3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1 + 2\sqrt{x-1} + 1} + \sqrt{x-1 - 2\sqrt{x-1} + 1} = \frac{x+3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1} + 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1} - 1)^2} = \frac{x+3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} + 1 + |\sqrt{x-1} - 1| = \frac{x+3}{2} (*)$$

Nếu $x \geq 2$ phương trình (*)

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} + 1 + \sqrt{x-1} - 1 = \frac{x+3}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} = \frac{x+3}{2} \Leftrightarrow 4\sqrt{x-1} = x+3$$

$$\Leftrightarrow 16(x-1) = x^2 + 6x + 9 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 = 0 \Leftrightarrow (x-5)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \text{ (TM)}$$

Nếu $1 \leq x < 2$ phương trình (*) $\Leftrightarrow \sqrt{x-1} + 1 + 1 - \sqrt{x-1} = \frac{x+3}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{x+3}{2} \Leftrightarrow 4 = x+3 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (TM)}$

Vậy phương trình có nghiệm $x=1$ và $x=5$

Bài 78: Giải phương trình: $\sqrt{2x^2 + 5x + 12} + \sqrt{2x^2 + 3x + 2} = x + 5$.

Lời giải

Đặt $u = \sqrt{2x^2 + 5x + 12}, v = \sqrt{2x^2 + 3x + 2} \text{ (} u > 0, v > 0 \text{)}$

$$\Rightarrow u^2 = 2x^2 + 5x + 12, v^2 = 2x^2 + 3x + 2 \Rightarrow u^2 - v^2 = 2x + 10 = 2(x+5)$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow 2(u+v) = (u^2 - v^2) \Leftrightarrow (u+v)(u-v-2) = 0 \text{ (2)}$$

Vì $u > 0, v > 0$, từ (2) suy ra: $u - v - 2 = 0$. Vì vậy $\sqrt{2x^2 + 5x + 12} = \sqrt{2x^2 + 3x + 2} + 2 \text{ (3)}$

Bình phương 2 vế và thu gọn ta được phương trình $2\sqrt{2x^2 + 3x + 2} = x + 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 2\sqrt{2x^2+3x+2} = x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ 7x^2+6x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ (7x^2-7)+(6x+6)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ (x+1)(7x-1)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x=-1, x=\frac{1}{7} \end{cases} \Leftrightarrow x=-1, x=\frac{1}{7} (tm)$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = -1, x = \frac{1}{7}$

Bài 79: Giải phương trình $x^2 + \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2 = 0$.

Lời giải

Cách 1:

Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$.

Khi đó ta có: $x^2 + \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^2 = (2-x^2)^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{1-x^2} + 2 = (2-x^2)^2 \quad (1)$$

Đặt $t = \sqrt{1-x^2}, t \geq 0$. Phương trình (1) trở thành:

$$2t + 2 = (t^2 + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow t^4 + 2t^2 - 2t - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)[(t+1)(t^2+1) + 2t] = 0 \quad (2)$$

Vì $t \geq 0$ nên $(t+1)(t^2+1) + 2t > 0$.

Do đó phương trình (2) có nghiệm duy nhất là $t = 1$.

+ Với $t = 1 \Rightarrow x = 0$ (thỏa).

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất là $x = 0$.

Cách 2:

+ Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$.

$$x^2 + \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 2 - x^2 \quad (*)$$

$$+ \text{Đặt } t = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}, t \geq 0. \text{ Suy ra } t^2 = 2 + 2\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow \left(\frac{t^2-2}{2}\right)^2 + 1 = 2 - x^2$$

Khi đó phương trình (*) trở thành:

$$t^4 - 4t^2 - 4t + 8 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t^3 + 2t^2 - 4) = 0 \quad (*)$$

+ vì $t^2 = 2 + 2\sqrt{1-x^2} \geq 2$ và $t \geq 0$ nên $t \geq \sqrt{2}$.

Do đó $t^3 + 2t^2 - 4 \geq 2\sqrt{2} + 4 - 4 > 0$.

Suy ra phương trình (*) có nghiệm duy nhất là $t = 2$.

+ Với $t = 2 \Rightarrow x = 0$ (thỏa).

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất là $x = 0$.

Bài 80: Giải phương trình: $x^2 = \sqrt{x^3 - x^2} + \sqrt{x^2 - x}$

Lời giải

ĐK $x = 0$ hoặc $x \geq 1$

Với $x = 0$ thỏa mãn phương trình

Với $x \geq 1$ Ta có $\sqrt{x^3 - x^2} = \sqrt{x^2(x-1)} \leq \frac{1}{2}(x^2 + x - 1)$

$$\sqrt{x^2 - x} = \sqrt{1(x^2 - x)} \leq \frac{1}{2}(x^2 - x + 1)$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^3 - x^2} + \sqrt{x^2 - x} \leq x^2$$

$$\text{Dấu "=" Xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = x - 1 \\ x^2 - x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = x - 1 \\ x^2 = x + 1 \end{cases} \Rightarrow x + 1 = x - 1 \text{ Vô lý}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$

Bài 81: Tìm điều kiện xác định của các biểu thức sau:

$$M = \frac{2018}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}} \quad N = \frac{-2019}{\sqrt{x - \sqrt{2x + 3}}}$$

Lời giải

Điều kiện xác định của M là $x^2 - 2x - 3 > 0$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-3) > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x+1 < 0 \\ x-3 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < -1 \end{cases}$$

Điều kiện xác định của N là $\begin{cases} 2x+3 \geq 0 \\ x - \sqrt{2x+3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \sqrt{2x+3} \geq 0 \quad (*)$

$$\Leftrightarrow x^2 > 2x+3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < -1 \end{cases} \quad (**)$$

Từ (*) và (**) ta được $x > 3$ là điều kiện xác định của M

Bài 82: Giải phương trình: $2017\sqrt{2017x-2016} + \sqrt{2018x-2017} = 2018$.

Lời giải

$$\text{ĐKXD: } x \geq \frac{2017}{2018}.$$

$$\text{Xét } \frac{2017}{2018} \leq x < 1 \Rightarrow \begin{cases} 2017x - 2016 < 1 \\ 2018x - 2017 < 1 \end{cases} \Rightarrow 2017\sqrt{2017x-2016} + \sqrt{2018x-2017} < 2018.$$

$$\text{Xét } x > 1 \Rightarrow \begin{cases} 2017x - 2016 > 1 \\ 2018x - 2017 > 1 \end{cases} \Rightarrow 2017\sqrt{2017x-2016} + \sqrt{2018x-2017} > 2018.$$

Xét $x = 1$ thỏa mãn phương trình. Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$.

Bài 83: Giải phương trình: $\sqrt{2x-3} + \sqrt{5-2x} = 3x^2 - 12x + 14$

Lời giải

§K: $1,5 \leq x \leq 2,5$

+ Sử dụng bất đẳng thức cô si hoặc Bu nhi a đánh giá VT ≤ 2

+ Đánh giá VP ≥ 2

$$\text{Do đó: PT} \Leftrightarrow \begin{cases} VT = 2 \\ VP = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x-3} = \sqrt{5-2x} \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

Bài 84: Giải phương trình

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

1) Giải phương trình : $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \frac{x+3}{2}$

2) Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+5x+12} + \sqrt{2x^2+3x+2} = x+5$.

Lời giải

1) Giải phương trình : $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \frac{x+3}{2}$

ĐKXD : $x \geq 1$

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \frac{x+3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1+2\sqrt{x-1}+1} + \sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}+1} = \frac{x+3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} = \frac{x+3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+1+|\sqrt{x-1}-1| = \frac{x+3}{2} (*)$$

Nếu $x \geq 2$ phương trình (*)

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1 = \frac{x+3}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} = \frac{x+3}{2} \Leftrightarrow 4\sqrt{x-1} = x+3$$

$$\Leftrightarrow 16(x-1) = x^2 + 6x + 9 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 = 0 \Leftrightarrow (x-5)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \text{ (TM)}$$

Nếu $1 \leq x < 2$ phương trình (*) $\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+1+1-\sqrt{x-1} = \frac{x+3}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{x+3}{2} \Leftrightarrow 4 = x+3 \Leftrightarrow x = 1$ (

TM)

Vậy phương trình có nghiệm $x=1$ và $x=5$

2) Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+5x+12} + \sqrt{2x^2+3x+2} = x+5$.

Đặt $u = \sqrt{2x^2+5x+12}$, $v = \sqrt{2x^2+3x+2}$ ($u > 0, v > 0$)

$$\Rightarrow u^2 = 2x^2 + 5x + 12, v^2 = 2x^2 + 3x + 2 \Rightarrow u^2 - v^2 = 2x + 10 = 2(x+5)$$

Từ (1) $\Rightarrow 2(u+v) = (u^2 - v^2) \Leftrightarrow (u+v)(u-v-2) = 0$ (2)

Vì $u > 0, v > 0$, từ (2) suy ra: $u - v - 2 = 0$. Vì vậy $\sqrt{2x^2+5x+12} = \sqrt{2x^2+3x+2} + 2$ (3)

Bình phương 2 vế và thu gọn ta được phương trình $2\sqrt{2x^2+3x+2} = x+3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 2\sqrt{2x^2+3x+2} = x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ 7x^2+6x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ (7x^2-7)+(6x+6)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ (x+1)(7x-1)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x = -1, x = \frac{1}{7} \end{cases} \Leftrightarrow x = -1, x = \frac{1}{7} \text{ (tm)}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = -1, x = \frac{1}{7}$

Bài 85: Giải phương trình: $x^2 - 2x + 3 = 2\sqrt{2x^2 - 4x + 3}$

Lời giải

Ta có $2x^2 - 4x + 3 = 2(x-1)^2 + 1 \geq 1$ nên tập xác định của phương trình là R

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Phương trình đã cho tương đương với

$$2x^2 - 4x + 3 - 4\sqrt{2x^2 - 4x + 3} + 3 = 0$$

Đặt $y = \sqrt{2x^2 - 4x + 3} \geq 1$ thì phương trình đã cho trở thành

$$y^2 - 4y + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 3 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Với $y = 1$ ta có $\sqrt{2x^2 - 4x + 3} = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$

Với $y = 3$ ta có $\sqrt{2x^2 - 4x + 3} = 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 3 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm $x = 1, x = -1, x = 3$

Bài 86: Giải phương trình $x^2 - x - 4 = 2\sqrt{x-1}(1-x)$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 1$ (*).

$$x^2 - x - 4 = 2\sqrt{x-1}(1-x)$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x\sqrt{x-1} + x - 1 - 2(x + \sqrt{x-1}) - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + \sqrt{x-1})^2 - 2(x + \sqrt{x-1}) - 3 = 0$$

Đặt $x + \sqrt{x-1} = y$ (Điều kiện: $y \geq 1$ (**)), phương trình trở thành $y^2 - 2y - 3 = 0$.

$$y^2 - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow (y+1)(y-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = 3 \end{cases}$$

+ Với $y = -1$ không thỏa mãn điều kiện (**).

+ Với $y = 3$ ta có phương trình:

$$x + \sqrt{x-1} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 3 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ x - 1 = 9 - 6x + x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ \begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$.

Bài 87: Giải phương trình sau: $\sqrt{4x^2 + 20x + 25} + \sqrt{x^2 + 6x + 9} = 10x - 20$

Lời giải

Đkxd: $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{4x^2 + 20x + 25} + \sqrt{x^2 + 6x + 9} = 10x - 20$$

Vì $\sqrt{4x^2 + 20x + 25} + \sqrt{x^2 + 6x + 9} \geq 0$ với $\forall x$

$$\Rightarrow 10x - 20 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$$

Ta có:

$$\sqrt{4x^2 + 20x + 25} + \sqrt{x^2 + 6x + 9} = 10x - 20$$

$$\Leftrightarrow |2x + 5| + |x + 3| = 10x - 20$$

$$\Leftrightarrow 2x + 5 + x + 3 = 10x - 20$$

$$\Leftrightarrow 7x = 28$$

$$\Leftrightarrow x = 4(t / m)$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 4$

CÁC DẠNG BÀI TẬP THI HSG TOÁN 9 QUA CÁC ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI

V. Dạng 5: Hệ phương trình

1. Hệ phương trình bậc nhất

A. Bài toán

Bài 1: Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} ax - y = -b \\ x - by = -a \end{cases}$$

Tìm a và b biết hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (2; 3)$.

Bài 2: Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} (m-1)x + y = 2 \\ mx + y = m+1 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

- 1) Giải hệ phương trình khi $m = 2$
- 2) Chứng minh rằng với mọi m, hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn

$$2x + y \leq 3$$

Bài 3: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hệ phương trình
$$\begin{cases} x + 2y = 2m + 1 \\ 4x + 2y = 5m - 1 \end{cases}$$
 có nghiệm nguyên

Bài 4: Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 3m + 2 \\ 3x - 2y = 11 - m \end{cases} \quad (m \text{ là tham số}).$$
 Tìm m để hệ đã cho có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 - y^2$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 5: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3xy = 4(x + y) \\ 5yz = 6(y + z) \\ 7zx = 8(z + x) \end{cases}$$

Bài 6: Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} x + (m-1)y = 2 \\ (m+1)x - y = m+1 \end{cases}$$

Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y) thỏa mãn $x + 5y = 0$.

Bài 7: Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} mx - 2y = 2 \\ 2x + my = 5 \end{cases} \quad (\text{với } m \text{ là tham số}).$$

- a) Giải hệ phương trình trên khi $m = 10$.
- b) Tìm m để hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn hệ thức:

$$x + y - 2014 = \frac{-2015m^2 + 14m - 8056}{m^2 + 4}$$

Bài 8: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{12}{x-1} + \frac{7}{y+3} = 19 \\ \frac{2x+6}{x-1} + \frac{3y+14}{y+3} = 18 \end{cases}$$

Bài 9: An khởi hành từ Sài Gòn đi Biên Hòa. Sau đó 5 phút, Bình và Cường khởi hành từ Biên Hòa về Sài Gòn. Trên đường đi, An gặp Cường ở địa điểm C rồi gặp Bình ở địa điểm D. Tính vận tốc của mỗi người, biết rằng quãng đường Sài Gòn – Biên Hòa dài 39 km $CD = 6$ km ; Vận tốc của An bằng 1,5 lần vận tốc của Bình và bằng $\frac{3}{4}$ vận tốc của Cường

Bài 10: Quãng đường từ A đến B gồm đoạn lên dốc AC, đoạn nằm ngang CD, đoạn xuống dốc DB, tổng cộng dài 30 km. Một người đi từ A đến B rồi đi từ B về A hết tất cả 4 giờ 25 phút. Tính quãng đường nằm ngang, biết rằng vận tốc lên dốc (cả đi lẫn về) là 10 km/h ; vận tốc xuống dốc (cả đi lẫn về) là 20 km/h ; vận tốc trên đoạn đường nằm ngang 15 km/h.

Bài 11: An khởi hành từ Sài Gòn đi Biên Hòa. Sau đó 5 phút, Bình và Cường khởi hành từ Biên Hòa về Sài Gòn. Trên đường đi, An gặp Cường ở địa điểm C rồi gặp Bình ở địa điểm D. Tính vận tốc của mỗi người, biết rằng quãng đường Sài Gòn – Biên Hòa dài 39 km $CD = 6$ km ; Vận tốc của An bằng 1,5 lần vận tốc của Bình và bằng $\frac{3}{4}$ vận tốc của Cường

Bài 12: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{12}{x-1} + \frac{7}{y+3} = 19 \\ \frac{2x+6}{x-1} + \frac{3y+14}{y+3} = 18 \end{cases}$$

Bài 13:

Điểm số trung bình của một vận động viên bắn súng sau 100 lần bắn là 8,35 điểm. Kết quả cụ thể được ghi trong bảng sau, trong đó có ba ô bị mờ ở chữ số hàng đơn vị không đọc được (tại vị trí đánh dấu *).

Điểm số của mỗi lần bắn	10	9	8	7	6	5
Số lần bắn	2*	40	1*	1*	9	7

Em hãy tìm lại các chữ số hàng đơn vị trong ba ô đó.

Bài 14: An khởi hành từ Sài Gòn đi Biên Hòa. Sau đó 5 phút, Bình và Cường khởi hành từ Biên Hòa về Sài Gòn. Trên đường đi, An gặp Cường ở địa điểm C rồi gặp Bình ở địa điểm D. Tính vận tốc của mỗi người, biết rằng quãng đường Sài Gòn – Biên Hòa dài 39 km $CD = 6$ km ; Vận tốc của An bằng 1,5 lần vận tốc của Bình và bằng $\frac{3}{4}$ vận tốc của Cường

Bài 15: Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} (m-1)x + y = 2 \\ x + 2y = 2 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số và } x, y \text{ là ẩn số})$$

Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để hệ phương trình có nghiệm (x, y) trong đó x, y là các số nguyên.

Bài 16: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{3}{\sqrt{x}+y} + \frac{5}{\sqrt{x}-y} = 6 \\ \frac{3}{\sqrt{x}+y} - \frac{4}{\sqrt{x}-y} = -3 \end{cases}$$

B. Lời giải

Bài 1: Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} ax - y = -b \\ x - by = -a \end{cases}$$

Tìm a và b biết hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (2; 3)$.

Lời giải

Vì hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (2; 3)$

Nên ta có:

$$\begin{cases} 2a - 3 = -b \\ 2 - 3b = -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 3 \\ a - 3b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a + 3b = 9 \\ a - 3b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7a = 7 \\ 2a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

Vậy $a = 1; b = 1$

Bài 2: Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} (m-1)x + y = 2 \\ mx + y = m+1 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

- Giải hệ phương trình khi $m = 2$
- Chứng minh rằng với mọi m, hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn

$$2x + y \leq 3$$

Lời giải

- Với $m = 2$, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} (2-1)x + y = 2 \\ 2x + y = 2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình cho là: $(1; 1)$

$$\begin{aligned} 2) \quad \begin{cases} (m-1)x + y = 2 \\ mx + y = m+1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - (m-1)x \\ mx + 2 - (m-1)x = m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - (m-1)x \\ mx + 2 - mx + x = m+1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - (m-1)x \\ x = m-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - (m-1)^2 \\ x = m-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m-1 \\ y = -m^2 + 2m + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất với mọi m

$$\text{Ta có: } 2x + y - 3 = 2(m-1) - m^2 + 2m + 1 - 3 = -m^2 + 4m - 4 = -(m-2)^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow 2x + y \leq 3$$

$\Rightarrow$ ĐPCM

Bài 3: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hệ phương trình $\begin{cases} x+2y=2m+1 \\ 4x+2y=5m-1 \end{cases}$ có nghiệm nguyên

Lời giải

$$\begin{cases} x+2y=2m+1 \\ 4x+2y=5m-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\frac{x+2y-1}{2} \\ m=\frac{4x+2y+1}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x+2y-1}{2} = \frac{4x+2y+1}{5}$$

$$\Rightarrow 5(x+2y-1) = 2(4x+2y+1)$$

$$\Rightarrow 3x-6y+7=0$$

Giả sử hệ phương trình đã cho có nghiệm nguyên $(x_0; y_0)$ thì

$$3x_0-6y_0+7=0 \Leftrightarrow 6y_0-7=3x_0:3 \Rightarrow 7:3 \text{ (vô lí)}$$

Vậy hệ phương trình không có nghiệm nguyên với mọi m

Bài 4: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=3m+2 \\ 3x-2y=11-m \end{cases}$ (m là tham số). Tìm m để hệ đã cho có nghiệm

$(x; y)$ thỏa mãn $x^2 - y^2$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

$$\begin{cases} x+y=3m+2 \\ 3x-2y=11-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y=6m+4 \\ 3x-2y=11-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x=5m+15 \\ x+y=3m+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=m+3 \\ y=2m-1 \end{cases}$$

$$x^2 - y^2 = (m+3)^2 - (2m-1)^2 = -3m^2 + 10m + 8 = \frac{49}{3} - 3\left(m - \frac{5}{3}\right)^2 \leq \frac{49}{3}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } m = \frac{5}{3}$$

$$\text{Vậy } \text{Max}(x^2 - y^2) = \frac{49}{3} \Leftrightarrow m = \frac{5}{3}$$

Bài 5: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3xy = 4(x+y) \\ 5yz = 6(y+z) \\ 7zx = 8(z+x) \end{cases}$

Lời giải

Nhận xét: $x=y=z=0$ là 1 nghiệm của hệ

Nếu $x \neq 0$ thì y và $z \neq 0$, khi đó chia các vế của từng phương trình cho xy ; yz ; zx , ta được:

$$\begin{cases} 3xy = 4(x+y) \\ 5yz = 6(y+z) \\ 7zx = 8(z+x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \\ \frac{5}{6} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \\ \frac{7}{8} = \frac{1}{z} + \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \\ \frac{5}{6} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \\ \frac{59}{48} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{19}{48} = \frac{1}{x} \\ \frac{17}{48} = \frac{1}{y} \\ \frac{23}{48} = \frac{1}{z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{48}{19} \\ y = \frac{48}{17} \\ z = \frac{48}{23} \end{cases}$$

Bài 6: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + (m-1)y = 2 \\ (m+1)x - y = m+1 \end{cases}$

Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y) thỏa mãn $x + 5y = 0$.

Lời giải

$$\begin{cases} x + (m-1)y = 2 \\ (m+1)x - y = m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (m+1)x - (m+1) \\ x + (m-1)[(m+1)x - (m+1)] = m+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = (m+1)x - (m+1) \\ m^2x = m^2 + 1 \end{cases} \quad (*)$$

Để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thì phương trình (*) có nghiệm duy nhất $\Rightarrow m \neq 0$

Với m khác 0 hpt có nghiệm duy nhất $(x, y) = \left(\frac{m^2 + 1}{m^2}; \frac{m+1}{m^2} \right)$

Để $x + 5y = 0$ thì $m^2 + 1 + 5(m+1) = 0 \Rightarrow m = -2, m = -3$

Bài 7: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx - 2y = 2 \\ 2x + my = 5 \end{cases}$ (với m là tham số).

a) Giải hệ phương trình trên khi $m = 10$.

b) Tìm m để hệ phương trình đã cho có nghiệm (x, y) thỏa mãn hệ thức:

$$x + y - 2014 = \frac{-2015m^2 + 14m - 8056}{m^2 + 4}$$

Lời giải

a) (0,5 điểm) Giải hệ phương trình trên khi $m = 10$.

$$\text{Thay } m = 10 \text{ ta được hệ: } \begin{cases} 10x - 2y = 2 \\ 2x + 10y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - y = 1 \\ 2x + 10y = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 50x - 10y = 10 \\ 2x + 10y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 52x = 15 \\ 2x + 10y = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{15}{52} \\ y = \frac{5-2x}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{15}{52} \\ y = \frac{23}{52} \end{cases}$$

Kết luận: với $m=10$ thì hệ có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} x = \frac{15}{52} \\ y = \frac{23}{52} \end{cases}$

b) (1,0 điểm) Tìm m để hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn hệ thức:

$$x + y - 2014 = \frac{-2015m^2 + 14m - 8056}{m^2 + 4}$$

Dùng phương pháp thế, ta có:

$$\begin{aligned} \begin{cases} mx - 2y = 2 \\ 2x + my = 5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{mx-2}{2} \\ 2x + my = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{mx-2}{2} \\ 2x + m \frac{mx-2}{2} = 5 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{mx-2}{2} \\ (m^2+4)x = 2m+10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2m+10}{m^2+4} \\ y = \frac{5m-4}{m^2+4} \end{cases}, \forall m \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Nên hệ luôn có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} x = \frac{2m+10}{m^2+4} \\ y = \frac{5m-4}{m^2+4} \end{cases}, \forall m \in \mathbb{R}$

Thay vào hệ thức: $x + y - 2014 = \frac{-2015m^2 + 14m - 8056}{m^2 + 4}$

$$\text{Ta được: } \frac{-2014m^2 + 7m - 8050}{m^2 + 4} = \frac{-2015m^2 + 14m - 8056}{m^2 + 4}$$

$$\Leftrightarrow -2014m^2 + 7m - 8050 = -2015m^2 + 14m - 8056$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 7m + 6 = 0 \Leftrightarrow (m-1)(m-6) = 0. \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 6 \end{cases}$$

Kết luận: để hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn hệ thức:

$$x + y - 2014 = \frac{-2015m^2 + 14m - 8056}{m^2 + 4} \text{ thì } \begin{cases} m = 1 \\ m = 6 \end{cases}$$

Bài 8: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{12}{x-1} + \frac{7}{y+3} = 19 \\ \frac{2x+6}{x-1} + \frac{3y+14}{y+3} = 18 \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $x \neq 1; y \neq -3$, biến đổi phương trình thứ hai thành: $\frac{8}{x-1} + \frac{5}{y+3} = 13$

Đặt $X = \frac{1}{x-1}; Y = \frac{1}{y+3}$ ta có hệ phương trình $\begin{cases} 12X + 7Y = 19 \\ 8X + 5Y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 \\ Y = 1 \end{cases}$

Vậy $\begin{cases} \frac{1}{x-1} = 1 \\ \frac{1}{y+3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow$ hệ có 1 nghiệm $(2; -2)$

Bài 9: An khởi hành từ Sài Gòn đi Biên Hòa. Sau đó 5 phút, Bình và Cường khởi hành từ Biên Hòa về Sài Gòn. Trên đường đi, An gặp Cường ở địa điểm C rồi gặp Bình ở địa điểm D . Tính vận tốc của mỗi người, biết rằng quãng đường Sài Gòn – Biên Hòa dài 39 km $CD = 6 \text{ km}$; Vận tốc của An bằng 1,5 lần vận tốc của Bình và bằng $\frac{3}{4}$ vận tốc của Cường

Lời giải

Gọi x, y, z là vận tốc của An, Bình, Cường

Suy ra $y = \frac{2}{3}x$ và $z = \frac{4}{3}x$

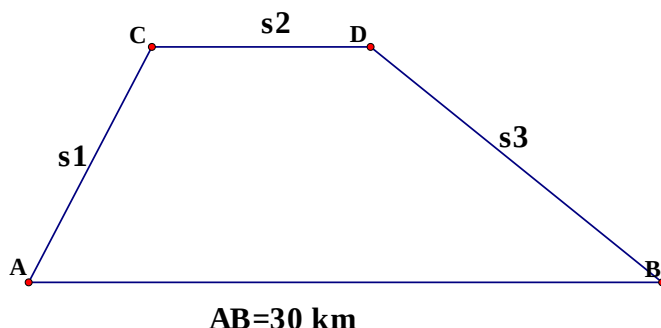
Gọi S là quãng đường mà An đi được cho tới khi gặp Cường. Kết hợp với $CD = 6 \text{ km}$ suy ra quãng đường mà An đã đi được cho tới khi gặp Bình là $39 - (S + 6) = 33 - S$. Theo đề bài ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{S}{x} - \frac{\frac{4}{3}x}{\frac{2}{3}x} = \frac{1}{12} \\ \frac{S+6}{x} - \frac{33-S}{\frac{2}{3}x} = \frac{1}{12} \end{cases} \quad \text{Giải hệ này cho ta } x = 48 \text{ vậy vận tốc của An là } 48 \text{ km/h} \text{ vận tốc của Bình là}$$

32 km/h vận tốc của Cường là 64 km/h

Bài 10: Quãng đường từ A đến B gồm đoạn lên dốc AC , đoạn nằm ngang CD , đoạn xuống dốc DB , tổng cộng dài 30 km . Một người đi từ A đến B rồi đi từ B về A hết tất cả 4 giờ 25 phút. Tính quãng đường nằm ngang, biết rằng vận tốc lên dốc (cả đi lẫn về) là 10 km/h ; vận tốc xuống dốc (cả đi lẫn về) là 20 km/h ; vận tốc trên đoạn đường nằm ngang 15 km/h .

Lời giải



Gọi $AC = s_1; CD = s_2; BD = s_3$ $s_1 > 0; s_2 > 0; s_3 > 0$

Ta có: $s_1 + s_2 + s_3 = 30 (\text{km})$.

Gọi vận tốc lên, vận tốc ngang, xuống lần lượt là $v_1; v_2; v_3$.

Thời gian đi và về là: $4h\ 25' = \frac{53}{12}h$.

Theo đề bài, ta có phương trình: $\frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} + \frac{s_3}{v_3} + \frac{s_1}{v_3} + \frac{s_2}{v_2} + \frac{s_3}{v_1} = \frac{53}{12}$

$$\Leftrightarrow s_1 \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_3} \right) + s_3 \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_3} \right) + \frac{2s_2}{v_2} = \frac{53}{12}$$

$$\Leftrightarrow s_1 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{20} \right) + s_3 \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{10} \right) + \frac{2s_2}{15} = \frac{53}{12}$$

$$\Leftrightarrow (s_1 + s_3) \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{20} \right) + \frac{2s_2}{15} = \frac{53}{12}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{20}(30 - s_2) \frac{2s_2}{15} = \frac{53}{12}$$

$$\Leftrightarrow s_2 = 5 \text{ (km)}$$

Vậy quãng đường ngang CD là 5 (km) .

Bài 11: An khởi hành từ Sài Gòn đi Biên Hòa .Sau đó 5 phút , Bình và Cường khởi hành từ Biên Hòa về Sài Gòn .Trên đường đi , An gặp Cường ở địa điểm C rồi gặp bình ở địa điểm D .Tính vận tốc của mỗi người , biết rằng quãng đường Sài Gòn –Biên Hòa dài 39 km $CD = 6 \text{ km}$; Vận tốc của An bằng 1,5 lần vận tốc của Bình và bằng $\frac{3}{4}$ vận tốc của Cường

Lời giải

Gọi x, y, z là vận tốc của An , Bình , Cường

Suy ra $y = \frac{2}{3}x$ và $z = \frac{4}{3}x$

Gọi S là quãng đường mà An đi được cho tới khi gặp cường .Kết hợp với $CD = 6 \text{ km}$ suy ra quãng đường mà An đã đi được cho tới khi gặp Bình là $39 - (S + 6) = 33 - S$ Theo đề bài ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{S}{x} - \frac{\frac{4}{3}x}{\frac{2}{3}x} = \frac{1}{12} \\ \frac{S+6}{x} - \frac{\frac{2}{3}x}{\frac{2}{3}x} = \frac{1}{12} \end{cases}$$

Giải hệ này cho ta $x = 48$ vậy vận tốc của An là 48 km/h vận tốc của Bình

là 32 km/h vận tốc của Cường là 64 km/h

Bài 12: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{12}{x-1} + \frac{7}{y+3} = 19 \\ \frac{2x+6}{x-1} + \frac{3y+14}{y+3} = 18 \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $x \neq 1; y \neq -3$, biến đổi phương trình thứ hai thành: $\frac{8}{x-1} + \frac{5}{y+3} = 13$

Đặt $X = \frac{1}{x-1}; Y = \frac{1}{y+3}$ ta có hệ phương trình $\begin{cases} 12X + 7Y = 19 \\ 8X + 5Y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 \\ Y = 1 \end{cases}$

Vậy $\begin{cases} \frac{1}{x-1} = 1 \\ \frac{1}{y+3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow$ hệ có 1 nghiệm $(2; -2)$

Bài 13:

Điểm số trung bình của một vận động viên bắn súng sau 100 lần bắn là 8,35 điểm. Kết quả cụ thể được ghi trong bảng sau, trong đó có ba ô bị mờ ở chữ số hàng đơn vị không đọc được (tại vị trí đánh dấu *).

Điểm số của mỗi lần bắn	10	9	8	7	6	5
Số lần bắn	2*	40	1*	1*	9	7

Em hãy tìm lại các chữ số hàng đơn vị trong ba ô đó.

Lời giải

Tổng các số tại các ô bị mờ số là $100 - (40 + 9 + 7) = 44$

Tổng số điểm trong 100 lần bắn là $8,35 \cdot 100 = 835$

Tổng số điểm tại các vị trí ô không bị mất số là $9 \cdot 40 + 6 \cdot 9 + 5 \cdot 3 = 449$

Suy ra tổng số điểm bắn được tại vị trí các ô bị mất là $835 - 449 = 386$, đây là số chẵn

Suy ra tại ô 7 điểm số lần bắn chỉ có thể là số chẵn, vì vậy chỉ có 3 khả năng là 10, 12, 14.

Gọi x, y lần lượt là số lần bắn được 10 điểm và 8 điểm

Điều kiện: $x, y \in \mathbb{N}; 20 \leq x < 30; 10 \leq y < 20$

Trường hợp 1: Ô 7 điểm nhận giá trị 10, khi đó theo đề bài ta có hệ phương trình.

$$\begin{cases} x + y = 34 \\ 449 + 10x + 8y + 70 = 835 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 34 \\ 10x + 8y = 316 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 22 \\ y = 12 \end{cases} \text{ thỏa điều kiện}$$

Trường hợp 2: Ô 7 điểm nhận giá trị 12, khi đó theo đề bài ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 32 \\ 449 + 10x + 8y + 84 = 835 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 32 \\ 10x + 8y = 316 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 23 \\ y = 9 \end{cases} \text{ loại}$$

Trường hợp 3: Ô 7 điểm nhận giá trị 14, khi đó $x = 20$ và $y = 10$ suy ra

Tổng số điểm bắn được là:

$$20 \cdot 10 + 9 \cdot 40 + 8 \cdot 10 + 7 \cdot 14 + 6 \cdot 9 + 5 \cdot 7 = 827 \text{ không phù hợp}$$

Vậy chữ số hàng đơn vị tại các ô 10 điểm, 8 điểm, 7 điểm lần lượt là 2, 2, 0

Bài 14: An khởi hành từ Sài Gòn đi Biên Hòa. Sau đó 5 phút, Bình và Cường khởi hành từ Biên Hòa về Sài Gòn. Trên đường đi, An gặp Cường ở địa điểm C rồi gặp Bình ở địa điểm D. Tính vận tốc của mỗi người, biết rằng quãng đường Sài Gòn – Biên Hòa dài 39 km $CD = 6$ km; Vận tốc của

An bằng 1,5 lần vận tốc của Bình và bằng $\frac{3}{4}$ vận tốc của Cường

Lời giải

Gọi x, y, z là vận tốc của An, Bình, Cường

$$\text{Suy ra } y = \frac{2}{3}x \text{ và } z = \frac{4}{3}x$$

Gọi S là quãng đường mà An đi được cho tới khi gặp Cường. Kết hợp với $CD = 6$ km suy ra quãng đường mà An đã đi được cho tới khi gặp Bình là $39 - (S + 6) = 33 - S$. Theo đề bài ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{S}{x} - \frac{39-S}{\frac{4}{3}x} = \frac{1}{12} \\ \frac{S+6}{x} - \frac{33-S}{\frac{2}{3}x} = \frac{1}{12} \end{cases}$$

Giải hệ này cho ta $x = 48$ vậy vận tốc của An là 48 km/h vận tốc của Bình

là 32 km/h vận tốc của Cường là 64 km/h

Bài 15: Cho hệ phương trình $\begin{cases} (m-1)x + y = 2 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$ (m là tham số và x, y là ẩn số)

Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để hệ phương trình có nghiệm (x, y) trong đó x, y là các số nguyên.

Lời giải

Từ phương trình thứ hai ta có: $x = 2 - 2y$ thế vào phương trình thứ nhất được:
 $(m-1)(2-2y) + y = 2$

$$\Leftrightarrow (2m-3)y = 2m-4 \quad (3)$$

Hệ có nghiệm x, y là các số nguyên $\Leftrightarrow (3)$ có nghiệm y là số nguyên.

$$\text{Với } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2m-3 \neq 0 \Rightarrow (3) \text{ có nghiệm } y = \frac{2m-4}{2m-3} = 1 - \frac{1}{2m-3}$$

$$y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-3=1 \\ 2m-3=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ m=1 \end{cases}. \text{ Vậy có 2 giá trị } m \text{ thỏa mãn là } 1; 2.$$

Bài 16: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{3}{\sqrt{x}+y} + \frac{5}{\sqrt{x}-y} = 6 \\ \frac{3}{\sqrt{x}+y} - \frac{4}{\sqrt{x}-y} = -3 \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện $x \geq 0; \sqrt{x} \neq \pm y$

$$\text{Đặt } a = \frac{1}{\sqrt{x}+y}; b = \frac{1}{\sqrt{x}-y}$$

$$\text{Hệ trở thành } \begin{cases} 3a + 5b = 6 \\ 3a - 4b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + y = 3 \\ \sqrt{x} - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \text{ (thỏa điều kiện)}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $(x; y) = (4; 1)$.

2. Hệ phương trình bậc hai hai ẩn:

2.1. Hệ đối xứng

A. Bài toán

Bài 1: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 4 \\ x^3 + y^3 = 4x^2 + 4y^2 - 12 \end{cases}$

Bài 2: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 - xy \\ x^4 + y^4 = 2 \end{cases}$$

Bài 3: Giải hệ PT:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y = (x+2)(y+2) \\ \left(\frac{x}{y+2}\right)^2 + \left(\frac{y}{x+2}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

Bài 4: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 = 2x + y \\ y^3 = 2y + x \end{cases}$$

Bài 5: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 = 2x + y \\ y^3 = 2y + x \end{cases}$$

Bài 6: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 + 1} = 2y + 1 & (1) \\ y + \sqrt{y^2 + 1} = 2x + 1 & (2) \end{cases}.$$

Bài 7: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x + y = x^2 \\ 2y + x = y^2 \end{cases}$$

Bài 8: Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 18 \\ x^2 y^2 + x^2 y + xy^2 + xy = 72 \end{cases}$$

Bài 9: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 = 2x + y \\ y^3 = 2y + x \end{cases}.$$

Bài 10: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x + y = x^2 \\ 2y + x = y^2 \end{cases}$$

Bài 11: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x+y)^2(8x^2 + 8y^2 + 4xy - 13) + 5 = 0 \\ 2x + \frac{1}{x+y} = 1 \end{cases}$$

Bài 12: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{2}{\sqrt{x}+1} - \frac{1-x-y}{x+y} = \frac{22}{15} \\ \frac{3}{\sqrt{x}+1} + \frac{5+x+y}{x+y} = 3 \end{cases}$$

B. Lời giải

Bài 1: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x^3 + y^3 = 4x^2 + 4y^2 - 12 \end{cases}$$

Lời giải

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x^3 + y^3 = 4x^2 + 4y^2 - 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ (x+y)(x^2 + y^2 - xy) = 4x^2 + 4y^2 - 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ 4(x^2+y^2-xy)=4x^2+4y^2-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ -4xy=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ xy=3 \end{cases}$$

$\Rightarrow x; y$ là nghiệm của phương trình: $t^2 - 4t + 3 = 0$

Giải phương trình ta được: $t = 1$ và $t = 3$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là: $(1;3)$ và $(3;1)$

Bài 2: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 - xy \\ x^4 + y^4 = 2 \end{cases}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 + y^2 = 3 - xy \\ x^4 + y^4 = 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 3 - xy \\ (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 3 - xy \\ (3 - xy)^2 - 2x^2y^2 = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 3 - xy \\ 9 - 6xy + x^2y^2 - 2x^2y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 3 + xy \\ x^2y^2 + 6xy - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 3 + xy \\ \begin{cases} xy = 1 \\ xy = -7 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 4 \\ xy = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} (x+y)^2 = -4 \\ xy = -7 \end{cases} \text{ (loại)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=-2 \\ xy=1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là: $(1;1)$ và $(-1;-1)$

Bài 3: Giải hệ PT:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y = (x+2)(y+2) \\ \left(\frac{x}{y+2}\right)^2 + \left(\frac{y}{x+2}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

Lời giải

ĐKXĐ: $x \neq -2, y \neq -2$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y = (x+2)(y+2) \\ \left(\frac{x}{y+2}\right)^2 + \left(\frac{y}{x+2}\right)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y+2} + \frac{y}{x+2} = 1 \\ \left(\frac{x}{y+2}\right)^2 + \left(\frac{y}{x+2}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

Đặt $a = \frac{x}{y+2}$; $b = \frac{y}{x+2}$, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a^2+b^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1-a \\ a^2+(1-a)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1-a \\ 2a^2-2a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases} \text{ (nhận) hoặc } \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} \text{ (nhận)}$$

$$\begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \text{ (nhận)}$$

$$\begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} \text{ (nhận)}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là: $(2;0)$ và $(0;2)$

Bài 4: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 = 2x + y \\ y^3 = 2y + x \end{cases}$$

Lời giải

Ta có:
$$\begin{cases} x^3 = 2x + y \\ y^3 = 2y + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y^3 = x - y \\ x^3 + y^3 = 3(x + y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x^2 + xy + y^2) = x - y \\ (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 3(x + y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x^2 + xy + y^2 - 1) = 0 \\ (x+y)(x^2 - xy + y^2 - 3) = 0. \end{cases}$$

TH1:
$$\begin{cases} x-y=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0. \end{cases}$$

TH2:
$$\begin{cases} x-y=0 \\ x^2 - xy + y^2 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x^2 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3}, y = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3}, y = -\sqrt{3} \end{cases}$$

TH3:
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 - 1 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, y = -1 \\ x = -1, y = 1 \end{cases}$$

TH4:
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 - 1 = 0 \\ x^2 - xy + y^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = x.y \end{cases}$ ($S^2 - 4P \geq 0$). Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} S^2 - P - 1 = 0 \\ S^2 - 3P - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = -1 \\ S = 0 \end{cases}$$

Khi đó
$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x.y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, y = -1 \\ x = -1, y = 1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm $(x; y)$ của hệ phương trình là: $(0;0); (\sqrt{3};\sqrt{3}); (-\sqrt{3};-\sqrt{3}); (1;-1); (-1;1)$.

Bài 5: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 = 2x + y \\ y^3 = 2y + x \end{cases}$$

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^3 = 2x + y \\ y^3 = 2y + x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y^3 = x - y \\ x^3 + y^3 = 3(x + y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x^2 + xy + y^2) = x - y \\ (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 3(x + y) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x^2 + xy + y^2 - 1) = 0 \\ (x+y)(x^2 - xy + y^2 - 3) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} x-y=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0. \end{cases}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} x-y=0 \\ x^2-xy+y^2-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x^2-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{3}, y=\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{3}, y=-\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{TH3: } \begin{cases} x^2+xy+y^2-1=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ x^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, y=-1 \\ x=-1, y=1 \end{cases}$$

$$\text{TH4: } \begin{cases} x^2+xy+y^2-1=0 \\ x^2-xy+y^2-3=0 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} S=x+y \\ P=x.y \end{cases}$ ($S^2-4P \geq 0$). Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} S^2-P-1=0 \\ S^2-3P-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=-1 \\ S=0 \end{cases}$$

Khi đó $\begin{cases} x+y=0 \\ x.y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, y=-1 \\ x=-1, y=1 \end{cases}$

Vậy nghiệm $(x; y)$ của hệ phương trình là: $(0;0); (\sqrt{3};\sqrt{3}); (-\sqrt{3};-\sqrt{3}); (1;-1); (-1;1)$.

Bài 6: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\sqrt{x^2+1}=2y+1 & (1) \\ y+\sqrt{y^2+1}=2x+1 & (2) \end{cases}$.

Lời giải

Trừ theo về các phương trình (1) và (2) ta được:

$$\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1}\right)+3(x-y)=0 \Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{x+y}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}+3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x-y=0 \text{ hoặc } \frac{x+y}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}+3=0 \quad (*)$$

Trường hợp 1: $x-y=0 \Leftrightarrow x=y$. Thay $y=x$ vào (1) ta được phương trình:

$$\sqrt{x^2+1}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1=(x+1)^2 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

Giải hệ ta được: $x=0 \Rightarrow x=y=0$.

Trường hợp 2: $\frac{x+y}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}+3=0$.

$$\text{Xét } A = \frac{x+y}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}+3 = \frac{(3\sqrt{x^2+1}+x)+(3\sqrt{y^2+1}+y)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}.$$

$$\text{Ta có: } 3\sqrt{x^2+1}+x > 3\sqrt{x^2}+x = 3|x|+x = 2|x|+(|x|+x) \geq 0.$$

$$\text{Tương tự: } 3\sqrt{y^2+1}+y > 0$$

Suy ra: $A > 0$. Trường hợp 2 không xảy ra.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất: $x=y=0$.

Cách 2 :

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 + 1} = 2y + 1 \\ y + \sqrt{y^2 + 1} = 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 1} = 2y - x + 1 \\ \sqrt{y^2 + 1} = 2x - y + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2y - x + 1 \geq 1 & (1) \\ 2x - y + 1 \geq 1 & (2) \\ x^2 + 1 = 4y^2 + 4y + 1 - 4xy - 2x + x^2 & (3) \\ y^2 + 1 = 4x^2 + 4x + 1 - 4xy - 2y + y^2 & (4) \end{cases}$$

Trừ theo về các phương trình (3) và (4) ta được phương trình :

$$(x - y)[4(x + y) + 6] = 0 \Leftrightarrow x = y \text{ hoặc } 4(x + y) + 6 = 0 :$$

Cộng theo về các bất phương trình (1) và (2) ta được : $x + y \geq 0$, suy ra trường hợp $4(x + y) + 6 = 0$ không xảy ra.

Trường hợp $x = y$, thay vào (3) ta được: $x = y = 0$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất: $x = y = 0$.

Bài 7: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x + y = x^2 \\ 2y + x = y^2 \end{cases}$$

Lời giải

$$\begin{cases} 2x + y = x^2 & (1) \\ 2y + x = y^2 & (2) \end{cases}$$

Trừ từng về 2 phương trình ta có: $x^2 - y^2 = x - y \Leftrightarrow (x - y)(x + y - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 1 - y \end{cases}$$

Ta có:

$$*) \begin{cases} x = y \\ x(x - 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 0 \end{cases} \text{ hoặc } x = 3$$

Vậy $(x; y) = (0; 0); (3; 3)$

$$*) \begin{cases} x = 1 - y \\ 2x + y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ 2 - 2y + y = (1 - y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ y^2 - y + 1 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Vì phương trình $y^2 - y + 1 = 0$ vô nghiệm nên hệ (*) vô nghiệm

Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm $(x; y) = (0; 0); (3; 3)$

Bài 8: Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 18 \\ x^2 y^2 + x^2 y + xy^2 + xy = 72 \end{cases}$$

Lời giải

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + x) + (y^2 + y) = 18 \\ (x^2 + x)(y^2 + y) = 72 \end{cases} \text{ . Đặt } \begin{cases} x^2 + x = a, a \geq -\frac{1}{4} \\ y^2 + y = b, b \geq -\frac{1}{4} \end{cases} \text{ ta được}$$

$$\begin{cases} a + b = 18 \\ ab = 72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6, b = 12 \\ a = 12, b = 6 \end{cases}$$

$$* \text{ TH 1: } \begin{cases} a = 6 \\ b = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x = 6 \\ y^2 + y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, x = -3 \\ y = 3, y = -4 \end{cases}$$

$$* \text{ TH 2: Đổi vai trò của } a \text{ và } b \text{ ta được } \begin{cases} x = 3, x = -4 \\ y = 2, y = -3 \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của hệ là:

$$S = \{(2; 3); (2; -4); (-3; 3); (-3; -4); (3; 2); (-4; 2); (3; -3); (-4; -3)\}$$

Bài 9: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 = 2x + y \\ y^3 = 2y + x \end{cases}$.

Lời giải

Từ hệ ta có $x^3(2y + x) = y^3(2x + y) \Leftrightarrow (x^2 - y^2)(2xy + x^2 + y^2) = 0$

$$\Leftrightarrow (x + y)^3(x - y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -y \end{cases}$$

* Với $x = y$ ta tìm được $(x; y) = (0; 0); (\sqrt{3}; \sqrt{3}); (-\sqrt{3}; -\sqrt{3})$

* Với $x = -y$ ta tìm được $(x; y) = (0; 0); (1; -1); (-1; 1)$

Vậy hệ phương trình có nghiệm

$$(x; y) = (0; 0); (\sqrt{3}; \sqrt{3}); (-\sqrt{3}; -\sqrt{3}); (-1; 1); (1; -1)$$

Bài 10: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x + y = x^2 \\ 2y + x = y^2 \end{cases}$

Lời giải

Trừ từng vế 2 phương trình ta có:

$$x^2 - y^2 = x - y \Leftrightarrow (x - y)(x + y - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 1 - y \end{cases}$$

Ta có:

$$*) \begin{cases} x = y \\ x(x - 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 0 \\ x = y \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ x = y = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x; y) = (0; 0); (3; 3)$$

$$*) \begin{cases} x = 1 - y \\ 2x + y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ 2 - 2y + y = (1 - y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ y^2 - y + 1 = 0 \end{cases} (*)$$

Vì phương trình $y^2 - y + 1 = 0$ vô nghiệm nên hệ (*) vô nghiệm

Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm $(x; y) = (0; 0); (3; 3)$

Bài 11: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x+y)^2(8x^2+8y^2+4xy-13)+5=0 \\ 2x+\frac{1}{x+y}=1 \end{cases}$$

Lời giải

ĐKXD: $x+y \neq 0$

Chia phương trình (1) cho $(x+y)^2$ ta được hệ
$$\begin{cases} 8(x^2+y^2)+4xy+\frac{5}{(x+y)^2}=13 \\ 2x+\frac{1}{x+y}=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5\left[(x+y)^2+\frac{1}{(x+y)^2}\right]+3(x-y)^2=13 \\ \left(x+y+\frac{1}{x+y}\right)+(x-y)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\left(x+y+\frac{1}{x+y}\right)^2+3(x-y)^2=23 \\ \left(x+y+\frac{1}{x+y}\right)+(x-y)=1 \end{cases}$$

Đặt $u = x + y + \frac{1}{x+y}$, $v = x - y$ (ĐK: $|u| \geq 2$), ta có hệ
$$\begin{cases} 5u^2 + 3v^2 = 23 & (3) \\ u + v = 1 & (4) \end{cases}$$

Từ (4) rút $u = 1 - v$, thế vào (3) ta được

$$5u^2 + 3(1-u)^2 = 23 \Leftrightarrow 4u^2 - 3u - 10 = 0 \Leftrightarrow u = 2 \text{ hoặc } u = -\frac{5}{4}.$$

Trường hợp $u = -\frac{5}{4}$ loại vì $|u| < 2$.

Với $u = 2 \Rightarrow v = -1$ (thỏa mãn). Khi đó ta có hệ
$$\begin{cases} x + y + \frac{1}{x+y} = 2 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

Giải hệ trên bằng cách thế $x = -1 + y$ vào phương trình đầu ta được

$$2y - 1 + \frac{1}{2y-1} = 2 \Leftrightarrow y = 1. \text{ Vậy hệ có nghiệm duy nhất } (x, y) = (0; 1).$$

Bài 12: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{2}{\sqrt{x}+1} - \frac{1-x-y}{x+y} = \frac{22}{15} \\ \frac{3}{\sqrt{x}+1} + \frac{5+x+y}{x+y} = 3 \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0; x \neq -y$

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{x}+1} - \frac{1-x-y}{x+y} = \frac{22}{15} \\ \frac{3}{\sqrt{x}+1} + \frac{5+x+y}{x+y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{x+y} + 1 = \frac{22}{15} \\ \frac{3}{\sqrt{x}+1} + \frac{5}{x+y} + 1 = 3 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{x+y} = \frac{7}{15} \\ \frac{3}{\sqrt{x}+1} + \frac{5}{x+y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{10}{\sqrt{x}+1} - \frac{5}{x+y} = \frac{7}{3} \\ \frac{3}{\sqrt{x}+1} + \frac{5}{x+y} = 2 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{13}{\sqrt{x}+1} = \frac{13}{3} \\ \frac{3}{\sqrt{x}+1} + \frac{5}{x+y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}+1=3 \\ \frac{5}{x+y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4(t/m) \\ y=1(t/m) \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = (4; 1)$

2.2. Hệ đẳng cấp

A. Bài toán

Bài 1: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + 6x^2y = 7 \\ 2y^3 + 3xy^2 = 5 \end{cases}$$

Bài 2: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = 2 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \end{cases}$$

Bài 3: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + 3y - 6x = 0 \\ 9x^2 - 6xy^2 + y^4 - 3y + 9 = 0 \end{cases}$$

Bài 4: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2 \\ \frac{2}{xy} - \frac{1}{z^2} = 4 \end{cases}$$

Bài 5: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2xy - z^2 = 4 \end{cases}$$

B. Lời giải

Bài 1: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + 6x^2y = 7 \\ 2y^3 + 3xy^2 = 5 \end{cases}$$

Lời giải

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} x^3 + 6x^2y = 7 \\ 2y^3 + 3xy^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 6x^2y = 7 \\ 2y^3 + 3xy^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^3 + 30x^2y = 35 \\ 14y^3 + 21xy^2 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow 5x^3 + 30x^2y = 14y^3 + 21xy^2 \\
& \Leftrightarrow 5x^3 - 5x^2y + 35x^2y - 35x^2y + 14xy^2 - 14y^3 = 0 \Leftrightarrow (x-y)(5x^2 + 35xy + 14y^2) = 0.
\end{aligned}$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Xét $x - y = 0 \Rightarrow x = y$ thay vào phương trình $x^3 + 6x^2y = 7$ ta được $7x^3 = 7 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1$.

Xét $5x^2 + 35xy + 14y^2 = 0$. Đặt $y = xt$, ta có: $5x^2 + 35x^2t + 14x^2t^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(14t^2 + 35t + 5) = 0$.

Vì $x = 0$ không phải là nghiệm nên $14t^2 + 35t + 5 = 0 \Rightarrow t = \frac{-35 \pm 3\sqrt{105}}{28}$.

Với $t = \frac{-35 - 3\sqrt{105}}{28} \Rightarrow y = x \left(\frac{-35 - 3\sqrt{105}}{28} \right)$ thay vào phương trình $x^3 + 6x^2y = 7$ ta được

$$x^3 = \frac{98}{-91 - 9\sqrt{105}} \Rightarrow x = -\sqrt[3]{\frac{98}{91 + 9\sqrt{105}}} \Rightarrow y = \frac{35 + 3\sqrt{105}}{28} \sqrt[3]{\frac{98}{91 + 9\sqrt{105}}}.$$

Với $t = \frac{-35 + 3\sqrt{105}}{28} \Rightarrow y = x \left(\frac{-35 + 3\sqrt{105}}{28} \right)$ thay vào phương trình $x^3 + 6x^2y = 7$ ta được

$$x^3 = \frac{98}{-91 + 9\sqrt{105}} \Rightarrow x = -\sqrt[3]{\frac{98}{91 - 9\sqrt{105}}} \Rightarrow y = \frac{35 - 3\sqrt{105}}{28} \sqrt[3]{\frac{98}{91 - 9\sqrt{105}}}.$$

Vậy hệ phương trình có 3 nghiệm: $(1;1)$, $\left(-\sqrt[3]{\frac{98}{91 + 9\sqrt{105}}}; \frac{35 + 3\sqrt{105}}{28} \sqrt[3]{\frac{98}{91 + 9\sqrt{105}}} \right)$,

$$\left(-\sqrt[3]{\frac{98}{91 - 9\sqrt{105}}}; \frac{35 - 3\sqrt{105}}{28} \sqrt[3]{\frac{98}{91 - 9\sqrt{105}}} \right).$$

Bài 2: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = 2 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \end{cases}$$

Lời giải

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = 2 & (1) \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 & (2) \end{cases} \quad (\text{ĐK: } x \geq 1; y \geq 1)$$

$$(2) \Leftrightarrow x + y = xy \quad (3)$$

Hai vế của (1) đều dương ta bình phương hai vế ta có:

$$\begin{aligned} x + y - 2 + 2\sqrt{(x-1)(y-1)} &= 4 \\ \Leftrightarrow x + y - 2 + 2\sqrt{xy - (x+y) + 1} &= 4 \end{aligned}$$

$$\text{Thay (3) vào ta có: } x + y = 4 \text{ kết hợp với (3) có hệ: } \begin{cases} x+y=4 \\ xy=4 \end{cases}$$

Áp dụng hệ thức Vi Ét ta có x, y là hai nghiệm của pt: $X^2 - 4x + 4 = 0$

$$\Rightarrow x = 2; y = 2$$

Bài 3: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + 3y - 6x = 0 \\ 9x^2 - 6xy^2 + y^4 - 3y + 9 = 0 \end{cases}$$

Lời giải

Cộng vế theo vế hai phương trình ta được

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$9x^2 - 6xy^2 + y^4 + x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (3x - y)^2 + (x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y^2 = 3x \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x; y) = (3; 3) \text{ hoặc } (x; y) = (3; -3)$$

Thử lại ta thấy nghiệm $(x; y) = (3; 3)$ thỏa mãn hệ phương trình.

Bài 4: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2 \\ \frac{2}{xy} - \frac{1}{z^2} = 4 \end{cases}$$

Lời giải

$$(I) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2 & (1) \\ \frac{2}{xy} - \frac{1}{z^2} = 4 & (2) \end{cases} \quad \text{ĐK } x; y; z \neq 0$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{xy} + \frac{2}{xz} + \frac{2}{yz} = 4$$

Thế vào (2) ta được:

$$\frac{2}{xy} - \frac{1}{z^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{xy} + \frac{2}{xz} + \frac{2}{yz}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{2}{z^2} + \frac{2}{xz} + \frac{2}{yz} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{xz} + \frac{1}{z^2} \right) + \left(\frac{1}{y^2} + \frac{2}{yz} + \frac{1}{z^2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z} \right)^2 + \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 0 \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow x = y = -z$$

$$\text{Thay vào hệ (I) ta được: } (x; y; z) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right) \quad (TM)$$

Bài 5: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2xy - z^2 = 4 \end{cases}$$

Lời giải

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2xy - z^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 - x - y \\ 2xy - z^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 - x - y \\ 2xy - (2 - x - y)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 - x - y \\ (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 0 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Từ phương trình 2 tìm được $x=2$ và $y=2$

Thay vào phương trình 1 tìm được $z = -2$

2.3. Hệ phương trình đưa về phương trình tích

A. Bài toán

Bài 1: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ (x + 2y)(2 + 3y^2 + 4xy) = 27 \end{cases}$$

Bài 2: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 + 4xy = 8 \\ (x + y)(x^2 + xy + 2) = 8 \end{cases}$$

Bài 3: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - y^3 - 15y - 14 = 3 \cdot (2y^2 - x) \\ 4x^3 + 6xy + 15x + 3 = 0 \end{cases}.$$

Bài 4: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y^2 - y(\sqrt{x-1} + 1) + \sqrt{x-1} = 0 & (1) \\ x^2 + y - \sqrt{7x^2 - 3} = 0 & (2) \end{cases}.$$

Bài 5: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y = 2(1 + xy) \\ xy - x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

Bài 6: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + 2y = 1 \\ y^3 + 2x = -1 \end{cases}$$

Bài 7: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 1 \\ x^3 + y^3 = x + 3y \end{cases}$$

Bài 8: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + 6x^2y = 7 \\ 2y^3 + 3xy^2 = 5 \end{cases}.$$

Bài 9: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x+1)^2 + y = xy + 4 \\ 4x^2 - 24x + 35 = 5(\sqrt{3y-11} + \sqrt{y}) \end{cases}.$$

Bài 10: Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} 4x^2 - 2y^2 = 2 \\ x^2 + xy = 2 \end{cases}$$

Bài 11: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 3(x - y) \\ x + y = -1 \end{cases}$$

Bài 12: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 - xy \\ x^2 + y^2 = 3xy + 11 \end{cases}$$

Bài 13: Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3y^2 - 2x^2y - x^2y^2 + 2xy + 3x - 3 = 0 \\ y^2 + x^{2017} = y + 3m \end{cases}.$$

Tìm các giá trị của m để hệ phương trình có hai nghiệm phân biệt $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$ thỏa mãn điều kiện $(x_1 + y_2)(x_2 + y_1) + 3 = 0$.

Bài 14: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 - 4xy + x + 8y - 4 = 0 \\ x^2 - y^2 + 2x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

Bài 15: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 4x^2 + 1 = y^2 - 4x \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

Bài 16: Tìm x ; y ; z thỏa mãn hệ sau:

$$\begin{cases} x^3 - 3x - 2 = 2 - y \\ y^3 - 3y - 2 = 4 - 2z \\ z^3 - 3z - 2 = 6 - 3x \end{cases}$$

Bài 17: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^2 + 2xy - 5x - y + 2 = 0 \\ 4x^2 + y^2 + 2x = 3 \end{cases}$$

Bài 18: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x-y} + 9 = 2y^2 - x \\ x^2 + y^2 - 4xy\left(\frac{2}{x-y} - 1\right) = 4(4 + xy) \end{cases}$$

Bài 19: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 1 \\ x + y - xy = 2y^2 - x^2 \end{cases}$$

Bài 20: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 8xy + 22y + 12x + 25 = \frac{1}{x^3} \\ y^3 + 3y = (x+5)\sqrt{x+2} \end{cases}$$

Bài 21: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x+1)(xy+1) = 6 \\ x^2(y^2+y+1) = 7 \end{cases}$$

Bài 22: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2\sqrt{x+y} + 2\sqrt{x-y} = 4 + \sqrt{x^2 - y^2} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \end{cases}$$

Bài 23: Giải hệ PT
$$\begin{cases} x^2 + y - 2xy + x = 0 \\ (x^2 + y)^2 - 6x^2y + 3x^2 = 0 \end{cases}$$

Bài 24: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 2012})(y + \sqrt{y^2 + 2012}) = 2012 \\ x^2 + z^2 - 4(y+z) + 8 = 0 \end{cases}$$

Bài 25: a. Giải phương trình: $\sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0$

b. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - 2x^2 + 2x + 2y + x^2y - 4 = 0 \\ x^2 - xy - 4x - 1 = \sqrt{3x - y + 7} \end{cases}$$

Bài 26: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + xy + y = 1 \\ \sqrt{x} - \sqrt[3]{y} + 4x = 5 \end{cases}$$

Bài 27: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 91 \\ x^2 + y^2 - xy = 13 \end{cases}$$

B. Lời giải

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Bài 1: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ (x+2y)(2+3y^2+4xy) = 27 \end{cases}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ (x+2y)(2+3y^2+4xy) = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ (x+2y)(x^2 + y^2 + 3y^2 + 4xy) = 27 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ (x+2y)(x^2 + 4xy + 4y^2) = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ (x+2y)^3 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x+2y = 3 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3-2y \\ (3-2y)^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3-2y \\ 5y^2 - 12y + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3-2y \\ \begin{cases} y = 1 \\ y = \frac{7}{5} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y = \frac{1}{5} \\ y = \frac{7}{5} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(1;1)$ và $\left(\frac{1}{5}; \frac{7}{5}\right)$

Bài 2: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 + 4xy = 8 \\ (x+y)(x^2 + xy + 2) = 8 \end{cases}$$

Lời giải

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 + 4xy = 8 \\ (x+y)(x^2 + xy + 2) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(3x+y) = 8 \\ (x+y)(x^2 + xy + 2) = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + xy + 2 = 3x + y \Leftrightarrow (x-1)(x+y-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 - y \end{cases}$$

$$x = 1 \Leftrightarrow 3 + y^2 + 4y = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -5 \end{cases}$$

$$x = 2 - y \Leftrightarrow (2 - y + y)[3(2 - y) + y] = 8 \Leftrightarrow 2(6 - 2y) = 8 \Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow x = 1$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(1;1)$ và $(1;-5)$

Bài 3: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - y^3 - 15y - 14 = 3 \cdot (2y^2 - x) \\ 4x^3 + 6xy + 15x + 3 = 0 \end{cases}$$

Lời giải

Ở phương trình (1) ta có:

$$\begin{aligned}
x^3 - y^3 - 15y - 14 &= 3 \cdot (2y^2 - x) \\
\Leftrightarrow x^3 + 3x &= y^3 + 15y + 6y^2 + 14 \\
\Leftrightarrow x^3 + 3x &= y^3 + 6y^2 + 12y + 8 + 3y + 6 \\
\Leftrightarrow x^3 + 3x &= (y+2)^3 + 3 \cdot (y+2) \\
\Leftrightarrow x &= y+2 \quad (*)
\end{aligned}$$

Từ (2) và (*) ta có hệ phương trình:

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x = y+2 \\ 4x^3 + 6xy + 15x + 3 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = y \\ 4x^3 + 6x \cdot (x-2) + 15x + 3 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = y \\ 4x^3 + 6x^2 + 3x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = y \\ 8x^3 + 12x^2 + 6x + 6 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} (2x+1)^3 = -5 \\ x-2 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1-\sqrt[3]{5}}{2} \\ y = \frac{-5-\sqrt[3]{5}}{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $\left(\frac{-1-\sqrt[3]{5}}{2}; \frac{-5-\sqrt[3]{5}}{2}\right)$

Bài 4: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y^2 - y(\sqrt{x-1}+1) + \sqrt{x-1} = 0 & (1) \\ x^2 + y - \sqrt{7x^2-3} = 0 & (2) \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện $x \geq 1, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
y^2 - y(\sqrt{x-1}+1) + \sqrt{x-1} &= 0 \Leftrightarrow y^2 - y - \sqrt{x-1}(y-1) = 0 \Leftrightarrow (y-1)(y-\sqrt{x-1}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = \sqrt{x-1} \end{cases}
\end{aligned}$$

Với $y = 1$, thay vào (2) ta được

$$\begin{aligned}
x^2 + 1 - \sqrt{7x^2-3} &= 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = \sqrt{7x^2-3} \Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 = 7x^2 - 3 \\
&\Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \quad (\text{do điều kiện của } x)
\end{aligned}$$

Với $y = \sqrt{x-1}$, thay vào (2) ta được $x^2 + \sqrt{x-1} - \sqrt{7x^2-3} = 0$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (x^2 - 4) + (\sqrt{x-1} - 1) - (\sqrt{7x^2-3} - 5) = 0 \\
&\Leftrightarrow (x-2)(x+2) + \frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1} - \frac{7(x-2)(x+2)}{\sqrt{7x^2-3}+5} = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x+2 + \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} - \frac{7(x+2)}{\sqrt{7x^2-3}+5} = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Với $x = 2$ suy ra $y = 1$.

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\begin{aligned} \text{Ta có } x+2+\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}-\frac{7(x+2)}{\sqrt{7x^2-3}+5} &= (x+2)\left(1-\frac{7}{\sqrt{7x^2-3}+5}\right)+\frac{1}{\sqrt{x-1}+1} \\ &= (x+2)\frac{\sqrt{7x^2-3}-2}{\sqrt{7x^2-3}+5}+\frac{1}{\sqrt{x-1}+1} \end{aligned}$$

$$\text{Với } x \geq 1 \text{ thì } \sqrt{7x^2-3}-2 \geq 0 \Rightarrow (x+2)\frac{\sqrt{7x^2-3}-2}{\sqrt{7x^2-3}+5} \geq 0$$

$$\text{Suy ra } (x+2)\frac{\sqrt{7x^2-3}-2}{\sqrt{7x^2-3}+5}+\frac{1}{\sqrt{x-1}+1} > 0$$

Vậy hệ phương trình có các nghiệm $(1;1), (2;1)$.

Bài 5: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x+y=2(1+xy) \\ xy-x+y-2=0 \end{cases}$$

Lời giải

a) Từ phương trình $xy-x+y-2=0 \Leftrightarrow 1+xy=x-y+3$

Thay vào phương trình thứ nhất ta được:

$$x+y=2(x-y+3) \Leftrightarrow x+y=2x-2y+6=0 \Leftrightarrow x=3y-6$$

$$\text{Thay vào phương trình thứ hai ta được } 3y^2-8y+4=0 \Leftrightarrow (3y-2).(y-2)=0$$

$$\text{Với } y=2 \Rightarrow x=0. \text{ Với } y=\frac{2}{3} \Rightarrow x=-4$$

$$\text{Vậy hệ có nghiệm } (x;y)=\left\{\left(0;2\right);\left(-4;\frac{2}{3}\right)\right\}$$

Bài 6: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3+2y=1 \\ y^3+2x=-1 \end{cases}$$

Lời giải

$$\begin{cases} x^3+2y=1 \\ y^3+2x=-1 \end{cases} \Rightarrow x^3+y^3+2x+2y=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x^2+y^2-xy+2)=0$$

$$\Leftrightarrow y=-x(1) \text{ hoặc } x^2+y^2-xy+2=0(2)$$

$$\text{Với } y=-x. \text{ Khi đó } x^3-2x-1=0 \Leftrightarrow (x+1).(x^2-x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \text{ hoặc } x^2-x-1=0(3)$$

$$\text{Khi } x=-1 \text{ thì } y=1$$

$$\text{Giải (3) ta được } x=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ hoặc } x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Với } x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Với } x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

$$(2) \Leftrightarrow \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 2 = 0 \text{ (vô nghiệm)}$$

Hệ đã cho có 3 nghiệm như trên

Bài 7: Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 1 \\ x^3 + y^3 = x + 3y \end{cases}$$

Lời giải

Ta có

$$x^3 + y^3 = (x + 3y) \cdot 1 \Leftrightarrow x^3 + y^3 = (x + 3y)(x^2 + y^2 + xy)$$

$$\Leftrightarrow 2y^3 + 4xy^2 + 4x^2y = 0 \Leftrightarrow 2y(y^2 + 2xy + 2x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 0 \\ y^2 + 2xy + x^2 + x^2 = 0 \end{cases}$$

- Với $y = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ suy ra hệ có nghiệm $(\pm 1; 0)$

- Với

$$(x + y)^2 + x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ thay vào không thỏa phương trình (1)}$$

Vậy hệ có hai nghiệm $(-1; 0); (1; 0)$

Bài 8: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + 6x^2y = 7 \\ 2y^3 + 3xy^2 = 5 \end{cases}$$

Lời giải

$$\text{a) } \begin{cases} x^3 + 6x^2y = 7 \\ 2y^3 + 3xy^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 6x^2y = 7 \\ 2y^3 + 3xy^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^3 + 30x^2y = 35 \\ 14y^3 + 21xy^2 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow 5x^3 + 30x^2y = 14y^3 + 21xy^2$$

$$\Leftrightarrow 5x^3 - 5x^2y + 35x^2y - 35x^2y + 14xy^2 - 14y^3 = 0 \Leftrightarrow (x - y)(5x^2 + 35xy + 14y^2) = 0.$$

Xét $x - y = 0 \Rightarrow x = y$ thay vào phương trình $x^3 + 6x^2y = 7$ ta được $7x^3 = 7 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1$.

Xét $5x^2 + 35xy + 14y^2 = 0$. Đặt $y = xt$, ta có: $5x^2 + 35x^2t + 14x^2t^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(14t^2 + 35t + 5) = 0$.

Vì $x = 0$ không phải là nghiệm nên $14t^2 + 35t + 5 = 0 \Rightarrow t = \frac{-35 \pm 3\sqrt{105}}{28}$.

Với $t = \frac{-35 - 3\sqrt{105}}{28} \Rightarrow y = x \left(\frac{-35 - 3\sqrt{105}}{28} \right)$ thay vào phương trình $x^3 + 6x^2y = 7$ ta được

$$x^3 = \frac{98}{-91 - 9\sqrt{105}} \Rightarrow x = -\sqrt[3]{\frac{98}{91 + 9\sqrt{105}}} \Rightarrow y = \frac{35 + 3\sqrt{105}}{28} \sqrt[3]{\frac{98}{91 + 9\sqrt{105}}}.$$

Với $t = \frac{-35 + 3\sqrt{105}}{28} \Rightarrow y = x \left(\frac{-35 + 3\sqrt{105}}{28} \right)$ thay vào phương trình $x^3 + 6x^2y = 7$ ta được

$$x^3 = \frac{98}{-91+9\sqrt{105}} \Rightarrow x = -\sqrt[3]{\frac{98}{91-9\sqrt{105}}} \Rightarrow y = \frac{35-3\sqrt{105}}{28} \sqrt[3]{\frac{98}{91-9\sqrt{105}}}.$$

Vậy hệ phương trình có 3 nghiệm: $(1;1), \left(-\sqrt[3]{\frac{98}{91+9\sqrt{105}}}; \frac{35+3\sqrt{105}}{28} \sqrt[3]{\frac{98}{91+9\sqrt{105}}}\right),$
 $\left(-\sqrt[3]{\frac{98}{91-9\sqrt{105}}}; \frac{35-3\sqrt{105}}{28} \sqrt[3]{\frac{98}{91-9\sqrt{105}}}\right).$

Bài 9: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x+1)^2 + y = xy + 4 \\ 4x^2 - 24x + 35 = 5(\sqrt{3y-11} + \sqrt{y}) \end{cases}.$$

Lời giải

$$\begin{cases} (x+1)^2 + y = xy + 4 & (1) \\ 4x^2 - 24x + 35 = 5(\sqrt{3y-11} + \sqrt{y}) & (2) \end{cases}$$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow (x+1)^2 + y - xy - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 - xy + y = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+3) - y(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3-y) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = x + 3 \end{cases}$

+) Thay $x = 1$ vào phương trình (2) ta được: $4.1^2 - 24.1 + 35 = 5(\sqrt{3y-11} + \sqrt{y})$

$\Leftrightarrow \sqrt{3y-11} + \sqrt{y} = 3 \Leftrightarrow (\sqrt{3y-11} + \sqrt{y})^2 = 9$

$\Leftrightarrow \sqrt{3y^2-11y} = 10-2y \Leftrightarrow 3y^2-11y = (10-2y)^2 \Leftrightarrow y^2-29y+100=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 25 \\ y = 4 \end{cases}$

+) Thay $y = x + 3$ vào phương trình (2) ta được $4x^2 - 24x + 35 = 5(\sqrt{3(x+3)-11} + \sqrt{x+3})$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 24x + 35 = 5\sqrt{3x-2} + 5\sqrt{x+3} \Leftrightarrow 4x^2 - 24x + 35 - 5\sqrt{3x-2} - 5\sqrt{x+3} = 0$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 28x + 24 + (3x+2-5\sqrt{3x-2}) + (x+9-5\sqrt{x+3}) = 0$

$\Leftrightarrow 4(x-1)(x-6) + \frac{9(x-1)(x-6)}{3x+2+5\sqrt{3x-2}} + \frac{(x-1)(x-6)}{x+9+5\sqrt{x+3}} = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-6) \left(4 + \frac{9}{3x+2+5\sqrt{3x-2}} + \frac{1}{x+9+5\sqrt{x+3}} \right) = 0$

Vì $\left(4 + \frac{9}{3x+2+5\sqrt{3x-2}} + \frac{1}{x+9+5\sqrt{x+3}} \right) > 0, \forall x \geq \frac{2}{3}$

$\Rightarrow (x-1)(x-6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 4 \\ x = 6 \Rightarrow y = 9 \end{cases}$

Vậy nghiệm $(x; y)$ của hệ là: $(1;4), (1;25), (6;9)$

Bài 10: Giải hệ phương trình sau :
$$\begin{cases} 4x^2 - 2y^2 = 2 \\ x^2 + xy = 2 \end{cases}$$

Lời giải

Từ (gt) ta có : $3x^2 - xy - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-y)(3x+2y)=0 \Leftrightarrow x=y$ hoặc $x = -\frac{2}{3}y$

- Nếu $x = y$ thay vào (1) ta được $x = 1$; $x = -1$

- Nếu $x = -\frac{2}{3}y$ Thay vào hệ ta được hệ vô nghiệm

KL : Hệ phương trình có 2 nghiệm $(x ; y) = (1 ; 1) ; (-1 ; -1)$.

Bài 11: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 3(x - y) \\ x + y = -1 \end{cases}$$

Lời giải

Hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 3(x - y) \\ x + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 3) = 0 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

Hệ này tương đương với tuyển của hai hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = -1 \end{cases} \text{ (I) và } \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + xy + y^2 - 3 = 0 \\ x + y = -1 \end{cases} \text{ (II)}$$

* Giải hệ (I) có nghiệm $(x, y) = (-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$

* Xét hệ (II) từ $x+y = -1$ ta có $y = -x-1$ thay vào phương trình đầu của hệ (II) ta được $x^2 + x - 2 = 0$

Phương trình này có hai nghiệm: $x = -1$ và $x = -2$

Từ đó ta thấy hệ (II) có hai nghiệm: $(1; -2); (2; -1)$

Kết luận: Hệ đã cho có nghiệm $(x; y)$ là: $(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}); (1; -2); (2; -1)$

Bài 12: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 - xy \\ x^2 + y^2 = 3xy + 11 \end{cases}$$

Lời giải

Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 11(x^2 + xy - y^2) = 11 \\ x^2 - 3xy + y^2 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 1 \\ 11(x^2 + xy - y^2) = x^2 - 3xy + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 1 \\ (x + 2y)(5x - 3y) = 0 \end{cases} (*)$$

Từ hệ (*) ta suy ra

$$\begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 1 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \text{ (I) hoặc } \begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 1 \\ (x + 2y) \cdot (5x - 3y) = 0 \end{cases} \text{ (II)}$$

Giải hệ (I) ta tìm được $(x; y) = (2; -1); (-2; 1)$

Hệ II vô nghiệm

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (2; -1); (-2; 1)$

Bài 13: Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3y^2 - 2x^2y - x^2y^2 + 2xy + 3x - 3 = 0 \\ y^2 + x^{2017} = y + 3m \end{cases}$$

Tìm các giá trị của m để hệ phương trình có hai nghiệm phân biệt $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$ thỏa mãn điều kiện $(x_1 + y_2)(x_2 + y_1) + 3 = 0$.

Lời giải

$$\begin{cases} x^3y^2 - 2x^2y - x^2y^2 + 2xy + 3x - 3 = 0 & (1) \\ y^2 + x^{2017} = y + 3m & (2) \end{cases}$$

Ta có (1) $\Leftrightarrow x^3y^2 - x^2y^2 - 2x^2y + 2xy + 3x - 3 = 0$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2y^2 - 2xy + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ (xy-1)^2 + 2 = 0 \text{ (Vô lý)} \end{cases}$$

Thay $x = 1$ vào phương trình (2) ta được $y^2 - y - 3m + 1 = 0$ (3)

Để phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt thì: $\Delta = 1 + 4(3m - 1) > 0 \Leftrightarrow 12m - 3 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}$

Theo đề bài: $(x_1 + y_2)(x_2 + y_1) + 3 = 0 \Leftrightarrow 4 + y_1 + y_2 + y_1y_2 = 0$ (4)

do $x_1 = x_2 = 1$.

Với $m > \frac{1}{4}$ theo hệ thức Vi-ét cho phương trình (3) ta có :

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 1 \\ y_1y_2 = 1 - 3m \end{cases} \text{ thay vào (4) ta có: } 5 + 1 - 3m = 0 \Leftrightarrow m = 2 \text{ (thỏa mãn)}$$

Kết luận: $m = 2$.

Bài 14: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 - 4xy + x + 8y - 4 = 0 \\ x^2 - y^2 + 2x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

Lời giải

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 - 4xy + x + 8y - 4 = 0 \\ x^2 - y^2 + 2x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2y^2 - 4xy + x + 8y - 4 = 0(1) \\ 2x^2 - 2y^2 + 4x + 2y - 6 = 0(2) \end{cases}$$

lấy pt(1) trừ pt(2) ta được

$$(x - 2y)^2 - 3(x - 2y) + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2y - 1)(x - 2y - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 1 \\ x = 2y + 2 \end{cases}$$

thay vào phương trình $x^2 - y^2 + 2x + y - 3 = 0$ hệ có 4 nghiệm

$$(x; y) \in \left\{ (1; 0); (-5; -3); \left(\frac{-7 + \sqrt{109}}{3}; \frac{-13 + \sqrt{109}}{6} \right); \left(\frac{-7 - \sqrt{109}}{3}; \frac{-13 - \sqrt{109}}{6} \right) \right\}$$

Bài 15: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 4x^2 + 1 = y^2 - 4x \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

Lời giải

$$\text{Hệ phương trình} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+1)^2 = y^2 \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm(2x+1) \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{Xét hệ: } \begin{cases} y = 2x+1 \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x+1 \\ x^2 + x(2x+1) + (2x+1)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 \\ 7x^2 + 5x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{5}{7} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -\frac{5}{7} \\ y = -\frac{3}{7} \end{cases}$$

Xét hệ: $\begin{cases} y = -2x - 1 \\ x^2 + xy + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x - 1 \\ x^2 - x(2x + 1) + (2x + 1)^2 = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x - 1 \\ 3x^2 + 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x - 1 \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y)$ là: $(0; 1), \left(-\frac{5}{7}; -\frac{3}{7}\right), (0; -1), (-1; 1)$

Bài 16: Tìm $x; y; z$ thỏa mãn hệ sau:

$$\begin{cases} x^3 - 3x - 2 = 2 - y \\ y^3 - 3y - 2 = 4 - 2z \\ z^3 - 3z - 2 = 6 - 3x \end{cases}$$

Lời giải

Biến đổi tương đương hệ ta có:

$$\begin{cases} (x - 2)(x + 1)^2 = 2 - y \\ (y - 2)(y + 1)^2 = 2(2 - z) \\ (z - 2)(z + 1)^2 = 3(2 - x) \end{cases}$$

Nhân các vế của 3 phương trình với nhau ta được:

$$\begin{aligned} (x - 2)(y - 2)(z - 2)(x + 1)^2(y + 1)^2(z + 1)^2 &= -6(x - 2)(y - 2)(z - 2) \\ \Leftrightarrow (x - 2)(y - 2)(z - 2)[(x + 1)^2(y + 1)^2(z + 1)^2 + 6] &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 2)(y - 2)(z - 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 2 \text{ hoặc } y = 2 \text{ hoặc } z = 2 \end{aligned}$$

Với $x = 2$ hoặc $y = 2$ hoặc $z = 2$ thay vào hệ ta đều có $x = y = z = 2$.

Vậy với $x = y = z = 2$ thỏa mãn hệ đã cho.

Bài 17: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^2 + 2xy - 5x - y + 2 = 0 \\ 4x^2 + y^2 + 2x = 3 \end{cases}$$

Lời giải

Từ phương trình: $2x^2 + 2xy - 5x - y + 2 = 0 \Leftrightarrow (2x^2 - 5x + 2) + (2xy - y) = 0$

$$\Leftrightarrow (2x - 1)(x - 2) + y(2x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - 1)(x + y - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ $\begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ 4x^2 + y^2 + 2x = 3 \end{cases}$ ta được $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; 1\right), \left(\frac{1}{2}; -1\right)$

Giải hệ $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 4x^2 + y^2 + 2x = 3 \end{cases}$ suy ra hệ vô nghiệm

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là: $S = \left\{ \left(\frac{1}{2}; 1 \right), \left(\frac{1}{2}; -1 \right) \right\}$

Bài 18: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x-y} + 9 = 2y^2 - x(1) \\ x^2 + y^2 - 4xy \left(\frac{2}{x-y} - 1 \right) = 4(4+xy)(2) \end{cases}$$

Lời giải

* ĐK: $x-y > 0 \Leftrightarrow x > y$

$$(2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{8xy}{x-y} = 16$$

$$\Rightarrow (x^2 + y^2)(x-y) - 8xy = 16(x-y)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)(x-y-4) + 4(x-y)^2 = 16(x-y)$$

$$\Leftrightarrow (x-y-4) \underbrace{(x^2 + y^2 + 4(x-y))}_{>0} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y + 4$$

Thay $x = y + 4$ vào (1), ta có:

$$\sqrt{y+4-y} + 9 = 2y^2 - y - 4$$

$$\Leftrightarrow 2y^2 - y - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \Rightarrow x = 7 \\ y = \frac{-5}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2} \end{cases} (TM)$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(7; 3), \left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{2} \right)$

Bài 19: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 1 \\ x + y - xy = 2y^2 - x^2 \end{cases}$$

Lời giải

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 1 & (1) \\ x + y - xy = 2y^2 - x^2 & (2) \end{cases}$$

$$PT (2) \Leftrightarrow (x+y) - (xy+y^2) + (x^2-y^2) = 0 \Leftrightarrow (x+y)(1-2y+x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ 1-2y+x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ x=2y-1 \end{cases}$$

$$\text{Với } x = -y, \text{ từ PT (1)} \Rightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-1 \\ y=1 \end{cases}$$

$$\text{Với } x = 2y - 1, \text{ từ PT (1)} \Rightarrow (2y-1)^2 + y^2 + (2y-1)y = 1$$

$$\Leftrightarrow 7y^2 - 5y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=\frac{5}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=\frac{3}{7} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có các nghiệm: $(x; y) = (1; -1); (-1; 1); (-1; 0); \left(\frac{3}{7}; \frac{5}{7} \right)$

Bài 20: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 8xy + 22y + 12x + 25 = \frac{1}{x^3} \\ y^3 + 3y = (x+5)\sqrt{x+2} \end{cases}$$

Lời giải

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 8xy + 22y + 12x + 25 = \frac{1}{x^3} & (1) \\ y^3 + 3y = (x+5)\sqrt{x+2} & (2) \end{cases}$$

Điều kiện: $x \geq -2$; $x \neq 0 \Rightarrow y \geq 0$

$$(2) \Leftrightarrow y^3 + 3y = \sqrt{x+2}^3 + 3\sqrt{x+2} \Leftrightarrow$$

$$(y - \sqrt{x+2})(y^2 + y\sqrt{x+2} + x+5) = 0$$

Do $x \geq -2$ và $y \geq 0$ nên $y^2 + y\sqrt{x+2} + x+5 > 0 \Rightarrow (2) \Leftrightarrow y = \sqrt{x+2}$

Thay vào (1): $8x\sqrt{x+2} + 22\sqrt{x+2} + 12x + 25 = \frac{1}{x^2}$

$$\Leftrightarrow 8(x+2)\sqrt{x+2} + 3.4(x+2) + 3.2\sqrt{x+2} + 1 = \frac{1}{x^3}$$

$$\Leftrightarrow (2\sqrt{x+2} + 1)^3 = \frac{1}{x^3}$$

$$\Leftrightarrow x(2\sqrt{x+2} + 1) = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 - 2x\sqrt{x+2} + x + 2$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 = (x - \sqrt{x+2})^2$$

$$\Leftrightarrow x+1 = x - \sqrt{x+2} \text{ (vô nghiệm) } \text{ hoặc } x+1 = \sqrt{x+2} - x \quad (3)$$

$$(3) \Leftrightarrow 2x+1 = \sqrt{x+2} \text{ . Với điều kiện } x \geq -\frac{1}{2} \text{ thì}$$

$$(3) \Leftrightarrow 4x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ (loại) hoặc } x = \frac{1}{4} \text{ (thỏa).}$$

Kết luận : $(x; y) = \left(\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right)$

Bài 21: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x+1)(xy+1) = 6 \\ x^2(y^2+y+1) = 7 \end{cases}$$

Lời giải

Hệ phương trình (1)
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2y + xy + x = 5 \\ x^2y + x^2y^2 + x^2 = 7 \end{cases}$$

Đặt $xy = a$, $x = b$. Ta có:

Hệ phương trình trở thành $\begin{cases} ab + a + b = 5 \\ ab + a^2 + b^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab + a + b = 5 \\ (a+b)^2 - ab = 7 \end{cases}$

$$\Rightarrow (a+b)^2 + a + b - 5 = 7 \Leftrightarrow (a+b)^2 + (a+b) - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b-3)(a+b+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ a+b=-4 \end{cases}$$

TH1: $a+b=3$ suy ra $ab=2$

$$\Rightarrow a, b \text{ là nghiệm của phương trình } X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X=1 \\ X=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a; b) = (1; 2); (2; 1)$$

$$\Rightarrow (x; y) = \left(2; \frac{1}{2}\right); (1; 2)$$

TH2: $a+b=-4$ suy ra $ab=9$

$\Rightarrow a, b$ là nghiệm của phương trình: $X^2 + 4X + 9 = 0$ (phương trình vô nghiệm)

Bài 22: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2\sqrt{x+y} + 2\sqrt{x-y} = 4 + \sqrt{x^2 - y^2} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \end{cases}$$

Lời giải

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\sqrt{x+y} + 2\sqrt{x-y} = 4 + \sqrt{x^2 - y^2} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \end{cases}$

ĐKXD: $x \geq y \geq 0$. Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x+y} \\ b = \sqrt{x-y} \end{cases}$ ($a \geq b \geq 0$). Ta có: $2a + 2b = 4 + ab$

$$\Leftrightarrow (ab - 2a) - (2b - 4) = 0 \Leftrightarrow a(b - 2) - 2(b - 2) = 0 \Leftrightarrow (a - 2)(b - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+y} = 2 \Leftrightarrow x+y = 4 \\ b - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-y} = 2 \Leftrightarrow x-y = 4 \end{cases}$$

• TH1: $\begin{cases} x+y=4 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ x+y+2\sqrt{xy}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ \sqrt{xy}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases}$
(do $x \geq y \geq 0$)

• TH2: $\begin{cases} x-y=4 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+4 \\ x+y+2\sqrt{xy}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+4 \\ y+\sqrt{xy}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases}$
(do $x \geq y \geq 0$)

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases}$

Bài 23: Giải hệ PT
$$\begin{cases} x^2 + y - 2xy + x = 0 & (1) \\ (x^2 + y)^2 - 6x^2y + 3x^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Lời giải

Nhận thấy $x = 0, y = 0$ là một nghiệm của hệ phương trình.

Với $x \neq 0$. Từ hệ PT, ta có:

$$\begin{cases} 3x(x^2 + y) - 6x^2y + 3x^2 = 0 \\ (x^2 + y)^2 - 6x^2y + 3x^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x^2 + y)^2 - 3x(x^2 + y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y)(x^2 + y - 3x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y = 0 \\ x^2 + y - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x^2 \\ y = -x^2 + 3x \end{cases}$$

Với $y = -x^2$. Từ pT (1) $\Rightarrow 2x^3 + x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Với $y = -x^2 + 3x$. Từ Pt (1) $\Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

Khi $x = 1 \Rightarrow y = 2$; Khi $x = 2 \Rightarrow y = 2$

Vậy nghiệm của hệ PT là $(x, y) = \{(0, 0); (1, 2); (2, 2)\}$

Bài 24: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 2012})(y + \sqrt{y^2 + 2012}) = 2012 \\ x^2 + z^2 - 4(y + z) + 8 = 0 \end{cases}$$

Lời giải

$$\begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 2012})(y + \sqrt{y^2 + 2012}) = 2012 & (1) \\ x^2 + z^2 - 4(y + z) + 8 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow (x + \sqrt{x^2 + 2012})(y + \sqrt{y^2 + 2012})(\sqrt{y^2 + 2012} - y) = 2012(\sqrt{y^2 + 2012} - y)$$

(Do $\sqrt{y^2 + 2012} - y \neq 0 \forall y$)

$$\Leftrightarrow (x + \sqrt{x^2 + 2012})2012 = 2012(\sqrt{y^2 + 2012} - y) \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 2012} = \sqrt{y^2 + 2012} - y$$

$$\Leftrightarrow x + y = \sqrt{y^2 + 2012} - \sqrt{x^2 + 2012}$$

$$\Leftrightarrow x + y = \frac{(\sqrt{y^2 + 2012} - \sqrt{x^2 + 2012})(\sqrt{y^2 + 2012} + \sqrt{x^2 + 2012})}{\sqrt{y^2 + 2012} + \sqrt{x^2 + 2012}}$$

$$\Leftrightarrow x + y = \frac{y^2 - x^2}{\sqrt{y^2 + 2012} + \sqrt{x^2 + 2012}} \Leftrightarrow (x + y) \frac{\sqrt{y^2 + 2012} - y + \sqrt{x^2 + 2012} + x}{\sqrt{y^2 + 2012} + \sqrt{x^2 + 2012}} = 0$$

Do $\begin{cases} \sqrt{y^2 + 2012} > |y| \geq y \forall y \\ \sqrt{x^2 + 2012} > |x| \geq -x \forall x \end{cases} \Rightarrow \sqrt{y^2 + 2012} - y + \sqrt{x^2 + 2012} + x > 0 \Rightarrow y = -x$

Thay $y = -x$ vào (2) $\Rightarrow x^2 + z^2 + 4x - 4z + 8 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (z - 2)^2 = 0$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)^2 = 0 \\ (z-2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow y = -x = 2 \text{ Vậy hệ có nghiệm } (x;y;z) = (-2;2;2).$$

Bài 25: a. Giải phương trình: $\sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0$

b. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - 2x^2 + 2x + 2y + x^2y - 4 = 0 \\ x^2 - xy - 4x - 1 = \sqrt{3x - y + 7} \end{cases}$$

Lời giải

a) Giải phương trình $\sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0$

Điều kiện xác định: $-\frac{1}{3} \leq x \leq 6$ (*)

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow (\sqrt{3x+1} - 4) - (\sqrt{6-x} - 1) + 3x^2 - 14x - 5 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-15}{\sqrt{3x+1}+4} - \frac{5-x}{\sqrt{6-x}+1} + (x-5)(3x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5) \left[\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{\sqrt{6-x}+1} + (3x+1) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \text{ (t/m (*))} \\ \frac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{\sqrt{6-x}+1} + (3x+1) = 0 \text{ (1)} \end{cases}$$

Vế trái của phương trình (1) luôn lớn hơn 0 với mọi giá trị của x thỏa mãn điều kiện (*) nên phương trình (1) vô nghiệm. Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{5\}$

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - 2x^2 + 2x + 2y + x^2y - 4 = 0 \text{ (1)} \\ x^2 - xy - 4x - 1 = \sqrt{3x - y + 7} \text{ (2)} \end{cases}$$

* Điều kiện xác định $3x - y + 7 \geq 0$

$$(1) \Leftrightarrow (x^2 + 2)(x + y - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2 - x \text{ (do } x^2 + 2 > 0 \forall x)$$

Thay $y = 2 - x$ vào (2), ta được

$$x^2 - x(2-x) - 4x - 1 = \sqrt{3x - (2-x) + 7} \Leftrightarrow \sqrt{4x+5} = 2x^2 - 6x - 1$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{4x+5} = 4x^2 - 12x - 2 \Leftrightarrow (2x-3)^2 = 2\sqrt{4x+5} + 11$$

$$\text{Đặt } \sqrt{4x+5} = 2t-3$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} (2t-3)^2 = 4x+5 \\ (2x-3)^2 = 4t+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2t-3)^2 = 4x+5 \\ (t-x)(t+x-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2t-3)^2 = 4x+5 \\ t = x \\ t = 2-x \end{cases}$$

$$\text{Trường hợp 1: } t = x \Leftrightarrow \sqrt{4x+5} = 2x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 1 = 0 \\ 2x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow y = -\sqrt{3}$$

thỏa mãn điều kiện xác định

Hệ có nghiệm $(x;y) = (2 + \sqrt{3}; -\sqrt{3})$

Trường hợp 2: $t = 4 - x \Leftrightarrow \sqrt{4x+5} = 1 - 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 1 = 0 \\ 1 - 2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{2}$

$\Rightarrow y = 1 + \sqrt{2}$ thỏa mãn điều kiện xác định.

Hệ có nghiệm $(x; y) = (1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2})$ Vậy hệ có nghiệm

$(x; y) = (2 + \sqrt{3}; -\sqrt{3}); (x; y) = (1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2})$

Bài 26: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + xy + y = 1 \\ \sqrt{x} - \sqrt[3]{y} + 4x = 5 \end{cases}$

Lời giải

PT (1) $\Leftrightarrow x^2 + xy + y - 1 = 0$ (3)

PT (3) là phương trình bậc hai ẩn x có $\Delta = y^2 - 4y + 4 = (y - 2)^2 \geq 0$

Do đó PT (3) có hai nghiệm $x = -1$ (loại vì $x \geq 0$), $x = -\frac{c}{a} = 1 - y$ (điều kiện $y \leq 1$ vì $x \geq 0$)

$\Rightarrow y = -x + 1$. Thay $y = -x + 1$ vào PT (2) ta có

$\sqrt{x} - \sqrt[3]{-x+1} + 4x = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 + \sqrt[3]{x-1} + 4x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} + \sqrt[3]{x-1} + 4(x-1) = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-1} \left[\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{\sqrt{x}+1} + 1 + 4\sqrt[3]{(x-1)^2} \right] = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x-1} = 0 \\ \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{\sqrt{x}+1} + 1 + 4\sqrt[3]{(x-1)^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \text{ (TMĐK) suy ra } y = 0 \text{ (TMĐK)}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ là $(1; 0)$

Bài 27: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + y^3 = 91 \\ x^2 + y^2 - xy = 13 \end{cases}$.

Lời giải

$\begin{cases} x^3 + y^3 = 91 \\ x^2 + y^2 - xy = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x^2 + y^2 - xy) = 91 \\ x^2 + y^2 - xy = 13 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=7 \\ (x+y)^2 - 3xy = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=12 \\ x+y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \{(3; 4); (4; 3)\}$.

2.4. Hệ phương trình giải bằng phương pháp đánh giá

A. Bài toán

Bài 1: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2x-y-1} + \sqrt{3y+1} = \sqrt{x} + \sqrt{x+2y} \\ x^3 - 3x + 2 = 2y^3 - y^2 \end{cases}$

Bài 2: Giải hệ phương trình $(x, y, z \text{ là ẩn}) \begin{cases} (x^2 + 1)y = 2x^2 \\ (y^2 + 1)z = 2y^2 \\ (z^2 + 1)x = 2z^2 \end{cases}$

Bài 3: Giải hệ phương trình : $6\left(x - \frac{1}{y}\right) = 3\left(y - \frac{1}{z}\right) = 2\left(z - \frac{1}{x}\right) = xyz - \frac{1}{xyz}$

Bài 4: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^4 + y^4 + z^4 = xyz \end{cases}$.

B. Lời giải

Bài 1: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2x - y - 1} + \sqrt{3y + 1} = \sqrt{x} + \sqrt{x + 2y} \\ x^3 - 3x + 2 = 2y^3 - y^2 \end{cases}$

Lời giải

$$\begin{cases} \sqrt{2x - y - 1} + \sqrt{3y + 1} = \sqrt{x} + \sqrt{x + 2y} \\ x^3 - 3x + 2 = 2y^3 - y^2 (*) \end{cases}$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 2x - y \geq 0 \\ x + 2y \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq \frac{-1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Nhận xét: } \sqrt{2x - y} + \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \text{ không thỏa mãn ĐK}$$

$$\sqrt{3y + 1} + \sqrt{x + 2y} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{-1}{3} \end{cases} \text{ không thỏa mãn phương trình (*)}$$

$$\text{Do đó ta có: } \sqrt{2x - y - 1} + \sqrt{3y + 1} = \sqrt{x} + \sqrt{x + 2y}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x - y - 1} - \sqrt{x} + \sqrt{3y + 1} - \sqrt{x + 2y} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x - y - 1}{\sqrt{2x - y - 1} + \sqrt{x}} - \frac{x - y - 1}{\sqrt{3y + 1} + \sqrt{x + 2y}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y - 1) \left(\frac{1}{\sqrt{2x - y - 1} + \sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{3y + 1} + \sqrt{x + 2y}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2x - y - 1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{3y + 1} + \sqrt{x + 2y}} \end{cases}$$

Với $y = x - 1$ thay vào (*) ta có:

$$(x - 1)^2 (x + 2) = 2(x - 1)^3 - (x - 1)^2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 (x - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 0; x = 5 \Rightarrow y = 4$$

$$\text{Với } \frac{1}{\sqrt{2x - y - 1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{3y + 1} + \sqrt{x + 2y}} \text{ ta có:}$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\begin{cases} \sqrt{2x-y-1} + \sqrt{3y+1} = \sqrt{x} + \sqrt{x+2y} \\ \sqrt{2x-y-1} + \sqrt{x} = \sqrt{3y+1} + \sqrt{x+2y} \end{cases}$$

Cộng vế với vế 2 PT ta được $\sqrt{x} = \sqrt{3y+1} \Leftrightarrow y = \frac{x-1}{3}$

Thay vào (*) ta được

$$(x-1)^2(x+2) = \frac{2}{27}(x-1)^3 - \frac{1}{3}(x-1)^2 \Leftrightarrow (x-1)^2(25x+59) = 0 \Leftrightarrow x=1 \text{ do } x \geq 0$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (1; 0); (5; 4)$

Bài 2: Giải hệ phương trình $(x, y, z \text{ là ẩn})$
$$\begin{cases} (x^2+1)y = 2x^2 \\ (y^2+1)z = 2y^2 \\ (z^2+1)x = 2z^2 \end{cases}$$

Lời giải

* Nếu một trong 3 số x, y, z bằng 0 thì hai số còn lại bằng 0.

Ta thấy $x = y = z = 0$ là một nghiệm của hệ.

* Xét trường hợp cả ba số x, y, z khác 0

$$\text{Hệ đã cho} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+1}{x^2} = \frac{2}{y} \\ \frac{y^2+1}{y^2} = \frac{2}{z} \\ \frac{z^2+1}{z^2} = \frac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{y} = 0 \\ 1 + \frac{1}{y^2} - \frac{2}{z} = 0 \\ 1 + \frac{1}{z^2} - \frac{2}{x} = 0 \end{cases}$$

* Cộng vế với vế của 3 PT ta được:

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{y}\right) + \left(1 + \frac{1}{y^2} - \frac{2}{z}\right) + \left(1 + \frac{1}{z^2} - \frac{2}{x}\right) = 0 \\ & \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{y} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{z} - 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} - 1 = 0 \\ \frac{1}{y} - 1 = 0 \\ \frac{1}{z} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \text{ (thỏa mãn hệ đã cho)} \end{aligned}$$

* KL: Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm $x = y = z = 0$ và $x = y = z = 1$.

Bài 3: Giải hệ phương trình : $6\left(x - \frac{1}{y}\right) = 3\left(y - \frac{1}{z}\right) = 2\left(z - \frac{1}{x}\right) = xyz - \frac{1}{xyz}$

Lời giải

ĐKXĐ của hệ phương trình $x, y, z \neq 0$

$$\text{Đặt } 6\left(x - \frac{1}{y}\right) = 3\left(y - \frac{1}{z}\right) = 2\left(z - \frac{1}{x}\right) = xyz - \frac{1}{xyz} = a$$

$$\Rightarrow x - \frac{1}{y} = \frac{a}{6}; y - \frac{1}{z} = \frac{a}{3}; z - \frac{1}{x} = \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{a^3}{36} = xyz - \frac{1}{xyz} - x + \frac{1}{y} - y + \frac{1}{z} - z + \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{36} = a - \frac{a}{6} - \frac{a}{3} - \frac{a}{2} = \frac{6a - a - 2a - 3a}{6} = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$\Rightarrow xy = yz = zx = 1 \Leftrightarrow (xyz)^2 = 1 \Rightarrow xyz \in \{-1; 1\}$$

Nếu $xyz = 1$ thì $x = y = z = 1$ (thỏa mãn)

Nếu $xyz = -1$ thì $x = y = z = -1$ (thỏa mãn)

Vậy nghiệm của hệ phương trình $(x; y; z)$ là: $(1; 1; 1), (-1; -1; -1)$.

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Bài 4: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^4 + y^4 + z^4 = xyz \end{cases}$.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 + z^4 &= \frac{x^4 + y^4}{2} + \frac{y^4 + z^4}{2} + \frac{z^4 + x^4}{2} \geq x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2 = \\ &= \frac{x^2 y^2 + y^2 z^2}{2} + \frac{y^2 z^2 + z^2 x^2}{2} + \frac{z^2 x^2 + x^2 y^2}{2} \geq xyz + yzx + zxy = \\ &= xyz (x + y + z) = xyz \quad (\text{vì } x + y + z = 1). \end{aligned}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $\left(x = \frac{1}{3}; y = \frac{1}{3}; z = \frac{1}{3} \right)$

3. Hệ phương trình bậc cao

A. Bài toán

Bài 1: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 4y = y^3 + 16x \\ 1 + y^2 = 5(1 + x^2) \end{cases}$

Bài 2: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 6x^2 y = 7 \\ 2y^3 + 2xy^2 = 5 \end{cases}$

Bài 3: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + xy^2 - 10y = 0 \\ x^2 + 6y^2 = 10 \end{cases}$

Bài 4: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + x + \frac{1}{y} \left(1 + \frac{1}{y} \right) = 4 \\ x^3 + \frac{x}{y^2} + \frac{x^2}{y} + \frac{1}{y^3} = 4. \end{cases}$

Bài 5: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3(x - y) + x^2 y^2 = 1 \\ x^2(xy + 3) - 3xy = 3 \end{cases}$.

Bài 6: Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy^2 + 2x - 4y = -1 \\ x^2 y^3 + 2xy^2 - 4x + 3y = 2 \end{cases}$

B. Lời giải

Bài 1: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 4y = y^3 + 16x \\ 1 + y^2 = 5(1 + x^2) \end{cases}$

Lời giải

$$\begin{cases} x^3 + 4y = y^3 + 16x \\ 1 + y^2 = 5(1 + x^2) \end{cases} \quad (I)$$

– Xét $x = 0$, (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} 4y = y^3 \\ y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow y = \pm 2$

– Xét $x \neq 0$, đặt $\frac{y}{x} = t \Leftrightarrow y = xt$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 4xt = x^3 t^3 + 16x \\ 1 + x^2 t^2 = 5(1 + x^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3(t^3 - 1) = 4xt - 16x \\ x^2(t^2 - 5) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3(t^3 - 1) = 4x(t - 4) \\ 4 = x^2(t^2 - 5) \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4x^3(t^3 - 1) = 4x^3(t - 4)(t^2 - 5)$$

$$\Rightarrow t^3 - 1 = t^3 - 4t^2 - 5t + 20$$

$$\Rightarrow 4t^2 + 5t - 21 = 0$$

Giải phương trình ta được: $t = -3$; $t = \frac{7}{4}$

$$t = -3 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \Leftrightarrow y = \mp 3$$

$$t = \frac{7}{4} \Leftrightarrow x^2 = -\frac{64}{31} \text{ (phương trình vô nghiệm)}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(0; 2)$; $(0; -2)$; $(1; -3)$; $(-1; 3)$

Bài 2: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 6x^2y = 7 \\ 2y^3 + 2xy^2 = 5 \end{cases}$

Lời giải

$$\begin{cases} x^3 + 6x^2y = 7 & (1) \\ 2y^3 + 2xy^2 = 5 & (2) \end{cases}$$

Nếu $x = 0$, thì (1) $\Leftrightarrow 0y = 7$ (phương trình vô nghiệm)

$$\Rightarrow x \neq 0$$

Đặt $y = xt$, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 + 6x^3t = 7 \\ 2x^3t^3 + 3x^3t = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x^3 + 6x^3t}{2x^3t^3 + 3x^3t} = \frac{7}{5} \Leftrightarrow \frac{1 + 6t}{2t^3 + 3t} = \frac{7}{5} \Leftrightarrow 14t^3 - 9t - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t - 1)(14t^2 + 14t + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t - 1 = 0 \\ 14t^2 + 14t + 5 = 0 \end{cases}$$

$$t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow y = x$$

$$(1) \Leftrightarrow 7x^3 = 7 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1$$

$$14t^2 + 14t + 5 = 0 \text{ (phương trình vô nghiệm)}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: (1;1)

Bài 3: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + xy^2 - 10y = 0 \\ x^2 + 6y^2 = 10 \end{cases}$$

Lời giải

$$\begin{cases} x^3 + xy^2 - 10y = 0 \\ x^2 + 6y^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + xy^2 - (x^2 + 6y^2)y = 0 & (1) \\ x^2 + 6y^2 = 10 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow x^3 + xy^2 - x^2y - 6y^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2y + x^2y - 2xy^2 + 3xy^2 - 6y^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2y)(x^2 + xy + 3y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x^2 + xy + 3y^2 = 0 \end{cases}$$

$$x = 2y, (2) \Leftrightarrow 4y^2 + 8y^2 = 12 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$y = 1 \Rightarrow x = 2 \text{ (nhận)}$$

$$y = -1 \Rightarrow x = -2 \text{ (nhận)}$$

$$x^2 + xy + 3y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{11y^2}{4} = 0 \Rightarrow x = y = 0 \text{ (loại)}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: (2;1); (-2;-1)

Bài 4: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + x + \frac{1}{y}\left(1 + \frac{1}{y}\right) = 4 \\ x^3 + \frac{x}{y^2} + \frac{x^2}{y} + \frac{1}{y^3} = 4. \end{cases}$$

Lời giải

Đk: $y \neq 0$. Hệ tương đương với
$$\begin{cases} x^2 + \frac{1}{y^2} + x + \frac{1}{y} = 4 \\ x^3 + \frac{1}{y^3} + \frac{x}{y}\left(x + \frac{1}{y}\right) = 4. \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x + \frac{1}{y} \\ v = \frac{x}{y} \end{cases} \text{ ta được hệ } \begin{cases} u^2 + u - 2v = 4 \\ u^3 - 2uv = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - 4u + 4 = 0 \\ u^2 + u - 4 = 2v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 1. \end{cases}$$

$$\text{Với } \begin{cases} u = 2 \\ v = 1, \end{cases} \text{ ta được } \begin{cases} x + \frac{1}{y} = 2 \\ \frac{x}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Bài 5: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3(x-y) + x^2y^2 = 1 \\ x^2(xy+3) - 3xy = 3 \end{cases}$$

Lời giải

$$\text{Viết lại hệ } \begin{cases} x^4 - 2x^3y + x^2y^2 + x^3y = 1 \\ x^3y + 3(x^2 - xy) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - xy)^2 + x^3y = 1 \\ x^3y + 3(x^2 - xy) = 3 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x^2 - xy \\ v = x^3y \end{cases}, \text{ ta có hệ } \begin{cases} u^2 + v = 1 \quad (1) \\ v + 3u = 3 \quad (2) \end{cases}$$

(2) ta có $v = 3 - 3u$. Thay vào (1) ta được $u^2 - 3u + 2 = 0 \Leftrightarrow u = 1, u = 2$.

TH1: Với $u = 1$ thì $v = 0$. Ta có $\begin{cases} x^2 - xy = 1 \\ x^3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases}$.

Hệ có hai nghiệm $(x; y) = (1; 0), (-1; 0)$.

TH2: Với $u = 2$ thì $v = -3$. Ta có $\begin{cases} x^2 - xy = 2 \\ x^3y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{3}{x^2} = 2 \\ x^2y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 2x^2 + 3 = 0 \\ x^2y = -3 \end{cases}$.

Hệ này vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $(x; y) = (1; 0), (-1; 0)$.

Bài 6: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} xy^2 + 2x - 4y = -1 \\ x^2y^3 + 2xy^2 - 4x + 3y = 2 \end{cases}$$

Lời giải

Cách 1:

$$\begin{cases} xy^2 + 2x - 4y = -1 \\ x^2y^3 + 2xy^2 - 4x + 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy^2 + (2x+1) = 4y \\ (x^2y^2 + 2xy + 1)y - 2(2x+1) = -2y \end{cases} \quad (*)$$

- Xét $y = 0$ thay vào hệ (*) ta được: $\begin{cases} 2x+1 = 0 \\ -2(2x+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

Suy ra $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}$ là một nghiệm của hệ.

- Xét $y \neq 0$, hệ phương trình (*) tương đương với hệ:

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\begin{cases} xy + \frac{2x+1}{y} = 4 \\ x^2y^2 + 2xy + 1 - 2\left(\frac{2x+1}{y}\right) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (xy+1) + \frac{2x+1}{y} = 5 \\ (xy+1)^2 - 2\left(\frac{2x+1}{y}\right) = -2 \end{cases} \quad (**)$$

Đặt $a = xy+1, b = \frac{2x+1}{y}$; khi đó hệ phương trình (**) trở thành: $\begin{cases} a+b=5 \\ a^2-2b=-2 \end{cases} \quad (***)$

+ Giải hệ (**) tìm được: $\begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}, \begin{cases} a=-4 \\ b=9 \end{cases}$.

* Với $\begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$ ta có $\begin{cases} xy+1=2 \\ \frac{2x+1}{y}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(\frac{2x+1}{3}\right)=1 \\ y=\frac{2x+1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-\frac{3}{2} \\ y=-\frac{2}{3} \end{cases}$

* Với $\begin{cases} a=-4 \\ b=9 \end{cases}$ ta có $\begin{cases} xy+1=-4 \\ \frac{2x+1}{y}=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(\frac{2x+1}{9}\right)=-5 \\ y=\frac{2x+1}{9} \end{cases} \quad (\text{vô nghiệm})$

Vậy hệ phương trình đã cho có ba nghiệm: $\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}, \begin{cases} x=-\frac{3}{2} \\ y=-\frac{2}{3} \end{cases}$.

Cách 2:

$$\begin{cases} xy^2 + 2x - 4y = -1 \\ x^2y^3 + 2xy^2 - 4x + 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy^2 + (2x+1) = 4y \\ x^2y^3 + 2xy^2 - (4x+2) = -3y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2xy^2 + (4x+2) = 8y \\ x^2y^3 + 2xy^2 - (4x+2) = -3y \end{cases} \Rightarrow x^2y^3 + xy^2 - 5y = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ xy=1 \\ xy=-5 \end{cases}$$

+ Với $y=0$. Suy ra được $(x; y) = (-\frac{1}{2}; 0)$.

+ Với $xy=1$. Suy ra được $(x; y) = (1; 1)$ hoặc $(x; y) = (-\frac{3}{2}; -\frac{2}{3})$.

+ Với $xy=-5$. Trường hợp này không tồn tại cặp $(x; y)$.

Vậy hệ phương trình đã cho có ba nghiệm: $\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}, \begin{cases} x=-\frac{3}{2} \\ y=-\frac{2}{3} \end{cases}$.

4. Hệ phương trình vô tỉ

A. Bài toán

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Bài 1: Không dùng máy tính cầm tay, giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 4\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 4 \\ 2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \end{cases}$$

Bài 2: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3\sqrt{x+2y} = 4 - x - 2y \\ \sqrt[3]{2x+6} + \sqrt{2y} = 2 \end{cases}$$

Bài 3: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 + xy - 5x + y + 2 = \sqrt{y-2x+1} - \sqrt{3-3x} \\ x^2 - y - 1 = \sqrt{4x+y+5} - \sqrt{x+2y-2} \end{cases}$$

Bài 4: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + xy + y = 1 \\ \sqrt{x} - \sqrt[3]{y} + 4x = 5 \end{cases}$$

Bài 5: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + y\sqrt{y} = 9 \\ x^2 + 2y = x + 4\sqrt{y} \end{cases}$$

Bài 6: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{7x+y} + \sqrt{2x+y} = 5 \\ \sqrt{2x+y} + x - y = 2 \end{cases}$$

Bài 7: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y^2\sqrt{2x-1} + \sqrt{3} = 5y^2 - \sqrt{6x-3} \\ 2y^4(5x^2 - 17x + 6) = 6 - 15x \end{cases}$$

Bài 8: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x+1)^2 + y = xy + 4 \\ 4x^2 - 24x + 35 = 5(\sqrt{3y-11} + \sqrt{y}) \end{cases}$$

Bài 9: Tìm tất cả (x, y, z) thỏa mãn
$$\begin{cases} x^2 - 2x = y \\ y^2 + 2y = z \\ x + y + z + 1 + \sqrt{x-1} = 0 \end{cases}$$

Bài 10: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + x + 2 = y^3 - 3y^2 + 4y \\ 2\sqrt{x+2} = y + 2 \end{cases}$$

B. Lời giải

Bài 1: Không dùng máy tính cầm tay, giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 4\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 4 \\ 2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \end{cases}$$

Lời giải

$$\begin{cases} 4\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 4 \\ 2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 4 \\ 4\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\sqrt{y} = 0 \\ 2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y} = 0 \\ \sqrt{x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(1; 0)$

Bài 2: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3\sqrt{x+2y} = 4 - x - 2y \\ \sqrt[3]{2x+6} + \sqrt{2y} = 2 \end{cases}$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Lời giải

$$\begin{cases} 3\sqrt{x+2y} = 4-x-2y \\ \sqrt[3]{2x+6} + \sqrt{2y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{x+2y} = 4-(x+2y) & (1) \\ \sqrt[3]{2x+6} + \sqrt{2y} = 2 & (2) \end{cases} \quad \left(DK: \begin{cases} x+2y \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \right)$$

Đặt $\sqrt{x+2y} = t$ ($t \geq 0$), ta có:

$$(1) \Leftrightarrow 3t = 4 - t^2 \Leftrightarrow t^2 + 3t - 4 = 0$$

Giải phương trình ta được: $t = 1$ (nhận); $t = -4$ (loại)

$$t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+2y} = 1 \Leftrightarrow x+2y = 1 \Leftrightarrow x = 1-2y$$

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt[3]{2(1-2y)+6} + \sqrt{2y} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{-4y+8} + \sqrt{2y} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{-4y+8} = 2 - \sqrt{2y}$$

$$\Leftrightarrow -4y+8 = 8 - 12\sqrt{2y} + 12y - 2y\sqrt{2y}$$

$$\Leftrightarrow 16y - 12\sqrt{2y} - 2y\sqrt{2y} = 0$$

$$\Leftrightarrow 8y - 6\sqrt{2y} - y\sqrt{y} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y}(-\sqrt{2y} + 8\sqrt{y} - 6\sqrt{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y}(\sqrt{y} - \sqrt{2})(\sqrt{2}\sqrt{y} - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y} = 0 \\ \sqrt{y} = \sqrt{2} \\ \sqrt{y} = \frac{6}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 2 \\ y = 18 \end{cases}$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ (nhận)}$$

$$y = 2 \Rightarrow x = -3 \text{ (nhận)}$$

$$y = 18 \Rightarrow x = -35 \text{ (nhận)}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(1;0)$; $(-3;2)$; $(-35;18)$

Bài 3: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 + xy - 5x + y + 2 = \sqrt{y-2x+1} - \sqrt{3-3x} \\ x^2 - y - 1 = \sqrt{4x+y+5} - \sqrt{x+2y-2} \end{cases}$$

Lời giải

$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 + xy - 5x + y + 2 = \sqrt{y-2x+1} - \sqrt{3-3x} \\ x^2 - y - 1 = \sqrt{4x+y+5} - \sqrt{x+2y-2} \end{cases}$$

$$\text{ĐK: } y - 2x + 1 \geq 0; 4x + y + 5 \geq 0; x + 2y - 2 \geq 0; x \leq 1$$

$$\text{TH 1: } \begin{cases} y - 2x + 1 = 0 \\ 3 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\text{Thay } x = 1; y = 1 \text{ vào hệ phương trình đã cho, ta có: } \begin{cases} 0 = 0 \\ -1 = \sqrt{10} - 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

TH 2: $x \neq 1; y \neq 1$, ta có:

$$2x^2 - y^2 + xy - 5x + y + 2 = \sqrt{y - 2x + 1} - \sqrt{3 - 3x}$$

$$\Leftrightarrow (x + y - 2)(2x - y - 1) = \frac{x + y - 2}{\sqrt{y - 2x + 1} + \sqrt{3 - 3x}}$$

$$\Leftrightarrow (x + y - 2) \left[\frac{1}{\sqrt{y - 2x + 1} + \sqrt{3 - 3x}} + y - 2x + 1 \right] = 0$$

$$\text{Do } y - 2x + 1 \geq 0, \text{ nên } \frac{1}{\sqrt{y - 2x + 1} + \sqrt{3 - 3x}} + y - 2x + 1 > 0$$

$$\Rightarrow x + y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2 - x$$

$$x^2 - y - 1 = \sqrt{4x + y + 5} - \sqrt{x + 2y - 2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 3 = \sqrt{3x + 7} - \sqrt{2 - x}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = \sqrt{3x + 7} - 1 + 2 - \sqrt{2 - x}$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)(x - 1) = \frac{3x + 6}{\sqrt{3x + 7} + 1} + \frac{2 + x}{2 + \sqrt{2 - x}}$$

$$\Leftrightarrow (x + 2) \left[\frac{3}{\sqrt{3x + 7} + 1} + \frac{1}{2 + \sqrt{2 - x}} + 1 - x \right] = 0$$

$$\text{Do } x \leq 1 \text{ nên } \frac{3}{\sqrt{3x + 7} + 1} + \frac{1}{2 + \sqrt{2 - x}} + 1 - x > 0$$

$$\Rightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

$$\Rightarrow y = 4 \text{ (TMĐK)}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(-2; 4)$

$$\text{Bài 4: Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^2 + xy + y = 1 \\ \sqrt{x} - \sqrt[3]{y} + 4x = 5 \end{cases}$$

Lời giải

$$\begin{cases} x^2 + xy + y = 1 & (1) \\ \sqrt{x} - \sqrt[3]{y} + 4x = 5 & (2) \end{cases} \text{ . Điều kiện } x \geq 0$$

$$\text{PT (1)} \Leftrightarrow x^2 + xy + y - 1 = 0 \quad (3)$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

PT (3) là phương trình bậc hai ẩn x có $\Delta = y^2 - 4y + 4 = (y - 2)^2 \geq 0$

Do đó PT (3) có hai nghiệm $x = -1$ (loại vì $x \geq 0$), $x = -\frac{c}{a} = 1 - y$ (điều kiện $y \leq 1$ vì $x \geq 0$)

$\Rightarrow y = -x + 1$. Thay $y = -x + 1$ vào PT (2) ta có

$$\sqrt{x} - \sqrt[3]{-x+1} + 4x = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 + \sqrt[3]{x-1} + 4x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} + \sqrt[3]{x-1} + 4(x-1) = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-1} \left[\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{\sqrt{x}+1} + 1 + 4\sqrt[3]{(x-1)^2} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x-1} = 0 \\ \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{\sqrt{x}+1} + 1 + 4\sqrt[3]{(x-1)^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow x=1 \text{ (TMĐK) suy ra } y=0 \text{ (TMĐK)}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ là $(1; 0)$

Bài 5: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + y\sqrt{y} = 9 \\ x^2 + 2y = x + 4\sqrt{y} \end{cases}$.

Lời giải

ĐKXD: $y \geq 0$. Lấy phương trình thứ nhất trừ đi ba lần phương trình thứ hai:

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 9 - 12\sqrt{y} + 6y - y\sqrt{y} \Leftrightarrow (x-1)^3 = (2-\sqrt{y})^3 \Leftrightarrow x-1 = 2-\sqrt{y}.$$

$$\text{Thế } \sqrt{y} = 3-x \text{ vào phương trình thứ nhất: } x^3 + (3-x)^3 = 9 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(1; 4), (2; 1)$ (TMĐKXD)

Bài 6: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{7x+y} + \sqrt{2x+y} = 5 \\ \sqrt{2x+y} + x - y = 2 \end{cases}$.

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 7x+y \geq 0 \\ 2x+y \geq 0 \end{cases} \quad (*)$$

Đặt $u = \sqrt{7x+y}$, $v = \sqrt{2x+y}$ (với $u, v > 0$)

Hệ phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases} u+v=5 & (1) \\ v+x-y=2 & (2) \end{cases}$$

Ta thấy: $u^2 - v^2 = 5x$. Kết hợp với (1) suy ra: $v = \frac{5-x}{2}$ thay vào (2) ta được

$$x = 2y - 1 \quad (3)$$

Thay (3) vào (2) ta có $\sqrt{5y-2} = 3-y$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 3 \\ 5y - 2 = (3 - y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 3 \\ y^2 - 11y + 11 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 3 \\ \left[\begin{array}{l} y = \frac{11 - \sqrt{77}}{2} \\ y = \frac{11 + \sqrt{77}}{2} \end{array} \right] \Leftrightarrow y = \frac{11 - \sqrt{77}}{2} \Rightarrow x = 10 - \sqrt{77} \text{ (thỏa (*))}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là: $\left(10 - \sqrt{77}; \frac{11 - \sqrt{77}}{2} \right)$

Bài 7: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y^2 \sqrt{2x-1} + \sqrt{3} = 5y^2 - \sqrt{6x-3} \\ 2y^4 (5x^2 - 17x + 6) = 6 - 15x \end{cases}$$

Lời giải

* ĐKXĐ: $x \geq \frac{1}{2}$

Biến đổi phương trình thứ hai ta được:

$$2y^4 (5x - 2)(x - 3) = 3(2 - 5x) \text{ suy ra } x = \frac{2}{5} \text{ (loại) hoặc } 2xy^4 + 3 = 6y^4$$

Ta đưa về hệ phương trình
$$\begin{cases} y^2 \sqrt{2x-1} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{2x-1} = 5y^2 - \sqrt{3} \\ 2xy^4 + 3 = 6y^4 \end{cases}$$

Nhận thấy $y = 0$ không là nghiệm của hệ phương trình nên chia 2 vế của phương trình thứ nhất cho y^2 và phương trình thứ hai cho y^4 có:

$$\begin{cases} \sqrt{2x-1} + \frac{\sqrt{3}}{y^2} \sqrt{2x-1} = 5 - \frac{\sqrt{3}}{y^2} \\ 2x - 1 + \frac{3}{y^4} = 5 \end{cases}$$

Đặt $a = \sqrt{2x-1}$; $b = \frac{\sqrt{3}}{y^2}$ với $a \geq 0; b \geq 0$

Ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} a + ab + b = 5 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases}$$

Ta được $a = \frac{5-b}{1+b}$ thay vào phương trình (2) ta có:

$$\left(\frac{5-b}{1+b} \right)^2 + b^2 = 5 \Leftrightarrow b^4 + 2b^3 - 3b^2 - 20b + 20 = 0 \Leftrightarrow (b-1)(b-2)(b^2 + 5b + 10) = 0$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$$

$$+ \text{Với } \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \text{ thì } \begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ y=\pm\sqrt[4]{3} \end{cases} \quad +) \text{ Với } \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \text{ thì } \begin{cases} x=1 \\ y=\pm\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\text{Kết luận } (x;y) \in \left\{ \left(\frac{5}{2}; \pm\sqrt[4]{3} \right); \left(1; \pm\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

Bài 8: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x+1)^2 + y = xy + 4 \\ 4x^2 - 24x + 35 = 5(\sqrt{3y-11} + \sqrt{y}) \end{cases}$$

Lời giải

$$\begin{cases} (x+1)^2 + y = xy + 4 & (1) \\ 4x^2 - 24x + 35 = 5(\sqrt{3y-11} + \sqrt{y}) & (2) \end{cases}$$

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow (x+1)^2 + y - xy - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 - xy + y = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+3) - y(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3-y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=x+3 \end{cases}$$

$$+) \text{ Thay } x=1 \text{ vào phương trình (2) ta được: } 4.1^2 - 24.1 + 35 = 5(\sqrt{3y-11} + \sqrt{y})$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3y-11} + \sqrt{y} = 3 \Leftrightarrow (\sqrt{3y-11} + \sqrt{y})^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3y^2-11y} = 10-2y \Leftrightarrow 3y^2-11 = (10-2y)^2 \Leftrightarrow y^2-29y+100=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=25 \\ y=4 \end{cases}$$

$$+) \text{ Thay } y=x+3 \text{ vào phương trình (2) ta được}$$

$$4x^2 - 24x + 35 = 5(\sqrt{3(x+3)-11} + \sqrt{x+3})$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 24x + 35 = 5\sqrt{3x-2} + 5\sqrt{x+3} \Leftrightarrow 4x^2 - 24x + 35 - 5\sqrt{3x-2} - 5\sqrt{x+3} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 28x + 24 + (3x+2-5\sqrt{3x-2}) + (x+9-5\sqrt{x+3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(x-1)(x-6) + \frac{9(x-1)(x-6)}{3x+2+5\sqrt{3x-2}} + \frac{(x-1)(x-6)}{x+9+5\sqrt{x+3}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-6) \left(4 + \frac{9}{3x+2+5\sqrt{3x-2}} + \frac{1}{x+9+5\sqrt{x+3}} \right) = 0$$

$$\text{Vì } \left(4 + \frac{9}{3x+2+5\sqrt{3x-2}} + \frac{1}{x+9+5\sqrt{x+3}} \right) > 0, \forall x \geq \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y=4 \\ x=6 \Rightarrow y=9 \end{cases}$$

Vậy nghiệm $(x; y)$ của hệ là: $(1; 4)$, $(1; 25)$, $(6; 9)$

Bài 9: Tìm tất cả (x, y, z) thỏa mãn
$$\begin{cases} x^2 - 2x = y \\ y^2 + 2y = z \\ x + y + z + 1 + \sqrt{x-1} = 0 \end{cases}$$

Lời giải

$$\begin{cases} x^2 - 2x = y(1) \\ y^2 + 2y = z(2) \\ x + y + z + 1 + \sqrt{x-1} = 0(3) \end{cases} \quad (I)$$

Thay (1) và (2) vào (3) ta có:

$$\begin{aligned} x + x^2 - 2x + y^2 + 2y + 1 + \sqrt{x-1} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 + (x-1) + \sqrt{x-1} &= 0 \end{aligned}$$

Vế trái ≥ 0 ; Vế phải $= 0$ nên dấu bằng xảy ra khi:

$$\begin{cases} x-1=0 \\ y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$$

Suy ra $z = -1$

Vậy $(x, y, z) = (1, -1, -1)$

Bài 10: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + x + 2 = y^3 - 3y^2 + 4y \\ 2\sqrt{x+2} = y + 2 \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq -2$. Từ phương trình thứ hai, ta suy ra $y \geq -2$. Phương trình thứ nhất của hệ có thể được viết lại thành: $2\sqrt{y+1} = y + 2$ hay $(\sqrt{y+1} - 1)^2 = 0$.

Giải phương trình này, ta được $y = 0$. Một cách tương ứng, ta có $x = -1$. Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm (x, y) duy nhất là $(-1; 0)$.

5. Một số hệ phương trình khác

A. Bài toán

Bài 1: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x + \frac{3}{y} = 3 \\ x - \frac{2}{y} = 5 \end{cases}$$

Bài 2: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2xy - z^2 = 4 \end{cases}$$

Bài 3: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x(x+y) + y^2 - 4y + 1 = 0 \\ y(x+y)^2 - 2x^2 - 7y = 2 \end{cases}$$

Bài 4: Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ xy + yz + zx = 11 \\ xyz = 6 \end{cases}$$

Bài 5: Giải hệ phương trình sau :
$$\begin{cases} x^2 + x + \frac{1}{y} \left(1 + \frac{1}{y} \right) = 4 \\ x^3 + \frac{x}{y^2} + \frac{x^2}{y} + \frac{1}{y^3} = 4 \end{cases}$$

Bài 6: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-3)^2 = 1 \\ (x-1)(y-3) + 3 = x + y. \end{cases}$$

Bài 7: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{x^2}{y} + x = 2 \\ \frac{y^2}{x} + y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Bài 8: Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^2 y^2 + 1 = 10y^2 \\ xy + x + 1 = 7y \end{cases}$$

Bài 9: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 8x^3 y^3 + 27 = 18y^3 \\ 4x^2 y + 6x = y^2 \end{cases}$$

Bài 10: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + \frac{1}{y} = 3 \\ y + \frac{1}{z} = 3 \\ z + \frac{1}{x} = 3 \end{cases}$$

Bài 11: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 17x + 2y = 2011|xy| \\ x - 2y = 3xy. \end{cases}$$

Bài 12: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1} = \frac{(x-y)^2}{2} & (1) \\ (3x+2y)(y+1) = 4-x^2 & (2) \end{cases}$$

Bài 13: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{9}{2} \\ xy + \frac{1}{xy} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 5 \end{cases}$$

Bài 14: giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 3 + x^2 y^2 \\ \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + 3 = x^3 y^3 \end{cases}.$$

Bài 15: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + x + \frac{1}{y} \left(1 + \frac{1}{y}\right) = 4 \\ x^3 + \frac{x}{y^2} + \frac{x^2}{y} + \frac{1}{y^3} = 4 \end{cases}$$

Bài 16: Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 1 = 4y \\ (x^2 + 1)(x + y - 2) = y \end{cases}.$$

Bài 17: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x + y) \left(1 + \frac{1}{xy}\right) = 5 \\ (x^2 + y^2) \left(1 + \frac{1}{x^2 y^2}\right) = 49 \end{cases}$$

Bài 18: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4y = 1 \\ 3x + xy + y = 3 \end{cases}.$$

Bài 19: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4y = 1 \\ 3x + xy + y = 3 \end{cases}.$$

B. Lời giải

Bài 1: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x + \frac{3}{y} = 3 \\ x - \frac{2}{y} = 5 \end{cases}$$

Lời giải

ĐK: $y \neq 0$.

Đặt $\frac{1}{y} = t$; ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + 3t = 3 \\ x - 2t = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3t = 3 \\ 2x - 4t = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7t = 7 \\ x - 2t = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ t = -1 \end{cases}$$

Với $t = -1 \Rightarrow \frac{1}{y} = -1 \Rightarrow y = -1$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(1; -1)$

Bài 2: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2xy - z^2 = 4 \end{cases}$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases} \text{ . Khi đó từ hệ phương trình đã cho ta có: } \begin{cases} S = 2 - z \\ P = \frac{1}{2}(z^2 + 4) \end{cases}$$

Theo cách đặt ta có x, y là nghiệm của phương trình: $X^2 - SX + P = 0$

$$\Leftrightarrow X^2 - (2 - z)X + \frac{1}{2}(z^2 + 4) = 0 \quad (1)$$

$$\Delta = [-(2 - z)]^2 - 4 \cdot \frac{1}{2}(z^2 + 4) = -(z + 2)^2$$

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta \geq 0$

$$\Leftrightarrow (z + 2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow z = -2$$

Thay $z = -2$ vào phương trình (1) ta được: $X^2 - 4X + 4 = 0$ (2)

Giải phương trình (2) được nghiệm $X_1 = X_2 = 2 \Rightarrow x = y = 2$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm: $x = 2, y = 2, z = -2$

$$\text{Bài 3: Giải hệ phương trình: } \begin{cases} x(x + y) + y^2 - 4y + 1 = 0 \\ y(x + y)^2 - 2x^2 - 7y = 2 \end{cases}$$

Lời giải

Dễ thấy $y \neq 0$, ta có:

$$\begin{cases} x(x + y) + y^2 - 4y + 1 = 0 \\ y(x + y)^2 - 2x^2 - 7y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 + y(y + x) = 4y \\ y(x + y)^2 - 2(x^2 + 1) = 7y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{y} + x + y = 4 \\ (x + y)^2 - 2\frac{x^2 + 1}{y} = 7 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } u = \frac{x^2 + 1}{y}, v = x + y \text{ ta có hệ: } \begin{cases} u + v = 4 \\ v^2 - 2u = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 4 - v \\ v^2 + 2v - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3, u = 1 \\ v = -5, u = 9 \end{cases}$$

$$\text{+) Với } v = 3, u = 1 \text{ ta có hệ: } \begin{cases} x^2 + 1 = y \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ y = 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, y = 2 \\ x = -2, y = 5 \end{cases}$$

$$\text{+) Với } v = -5, u = 9 \text{ ta có hệ: } \begin{cases} x^2 + 1 = 9y \\ x + y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 9y \\ y = -5 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 9x + 46 = 0 \\ y = -5 - x \end{cases} \text{ VN.}$$

KL: Vậy hệ đã cho có hai nghiệm: $(1; 2)$ và $(-2; 5)$

$$\text{Bài 4: Giải hệ phương trình sau: } \begin{cases} x + y + z = 6 \\ xy + yz + zx = 11 \\ xyz = 6 \end{cases}$$

Lời giải

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ xy+yz+zx=11 \\ xyz=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=6-z \\ xy+yz+zx=11 \Rightarrow \frac{6}{z}+z(6-z)=11 \\ xy=\frac{6}{z} \text{ (vì } z \neq 0) \end{cases}$$

Giải ra ta có hệ phương trình có 6 nghiệm là hoán vị của (1;2;3)

Bài 5: Giải các phương trình; hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} x^2 + x + \frac{1}{y} \left(1 + \frac{1}{y}\right) = 4 \\ x^3 + \frac{x}{y^2} + \frac{x^2}{y} + \frac{1}{y^3} = 4 \end{cases}$$

Lời giải

Kết luận : $x=0$; $x=-5$ là các nghiệm của phương trình

Đặt $a=x$; $b=\frac{1}{y}$ ($b \neq 0$) hệ trở thành :

$$\begin{aligned} \begin{cases} a^2 + b^2 + a + b = 4 \\ a^3 + b^3 + a^2b + ab^2 = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + a + b = 4 \\ (a^2 + b^2)(a + b) = 4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)[4-(a+b)] = 4 \\ a^2 + b^2 + a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 - 4(a+b) + 4 = 0 \\ a^2 + b^2 + a + b = 4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ (a+b)^2 - 2ab = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ ab=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ a(2-a)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \end{aligned}$$

Kết luận : $(x; y) = (1; 1)$ là nghiệm của hệ

Bài 6: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-3)^2 = 1 \\ (x-1)(y-3) + 3 = x + y. \end{cases}$$

Lời giải

Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-3)^2 = 1 \\ (x-1)(y-3) = (x-1) + (y-3) + 1 \end{cases}$$

Đặt $a = x-1$; $b = y-3$. Ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ ab = a + b + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 - 2ab = 1 \\ ab = a + b + 1 \end{cases}$$

Đặt $S = a + b$; $P = ab$, điều kiện $S^2 \geq 4P$. Hệ trên trở thành

$$\begin{cases} S^2 - 2P = 1 \\ P = S + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = -1 \\ P = 0 \end{cases} \text{ (thỏa mãn) hoặc } \begin{cases} S = 3 \\ P = 4 \end{cases} \text{ (loại)}$$

$$\begin{cases} S = -1 \\ P = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ ab = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ a = 0 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$+) \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = -1 \\ y-3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$+) \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 0 \\ y-3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là $(0;3)$, $(1;2)$

Bài 7: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{x^2}{y} + x = 2 \\ \frac{y^2}{x} + y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Lời giải

Nhân vế của hai PT được: $(x+y)^2 = 1 \Leftrightarrow x+y = \pm 1$ (1)

Chia vế của hai PT được: $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2y$ (2)

Từ 4 PT trên giải được $(x;y) = (1/3;2/3); (2;-1); (-2/3;-1/3); (-2;1)$

Thử lại: Chỉ có hai nghiệm thỏa mãn HPT là: $(-2;1)$ và $(1/3;2/3)$

Bài 8: Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^2 y^2 + 1 = 10y^2 \\ xy + x + 1 = 7y \end{cases}$$

Lời giải

Ta thấy $y=0$ không thỏa mãn hệ (I) với $y \neq 0$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{1}{y^2} = 10 \\ x + \frac{x}{y} + \frac{1}{y} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \frac{1}{y}\right)^2 - 2\frac{x}{y} = 10 \\ x + \frac{x}{y} + \frac{1}{y} = 7 \end{cases}$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

đặt

$$\begin{cases} S = x + \frac{1}{y} \\ P = \frac{x}{y} \end{cases} \text{ thay vào (II) ta được } \begin{cases} S^2 - 2P = 10 \\ S + P = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 7 - S \\ S^2 + 2S - 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = -6 \\ P = 13 \end{cases} \vee \begin{cases} S = 4 \\ P = 3 \end{cases}$$

Với $\begin{cases} S = 4 \\ P = 3 \end{cases} \Rightarrow x \text{ và } \frac{1}{y}$ là 2 nghiệm của phương trình $t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \end{cases}$

$$* \begin{cases} x = 1 \\ \frac{1}{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$* \begin{cases} x = 3 \\ \frac{1}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

$\begin{cases} S = -6 \\ P = 13 \end{cases}$ suy ra x và $\frac{1}{y}$ là 2 nghiệm của phương trình

$$t^2 + 6t + 13 = 0 \Leftrightarrow (t+3)^2 + 4 = 0 \text{ Vô nghiệm}$$

$$(x; y) \in \left\{ \left(1; \frac{1}{3} \right); (3; 1) \right\}$$

Bài 9: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 8x^3y^3 + 27 = 18y^3 \\ 4x^2y + 6x = y^2 \end{cases}$$

Lời giải

$y=0$ không là nghiệm của hệ chia 2 vế PT(1) cho y^3 PT(2) cho y^2 Ta có hệ
$$\begin{cases} 8x^3 + \frac{27}{y^3} = 18 \\ 4\frac{x^2}{y} + 6\frac{x}{y^2} = 1 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} 2x = a \\ \frac{3}{y} = b \end{cases}$ ta có hệ
$$\begin{cases} a^3 + b^3 = 18 \\ a^2b + ab^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ ab = 1 \end{cases}$$

Hệ có 2 nghiệm $(x, y) \in \left\{ \left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}; \frac{6}{3+\sqrt{5}} \right); \left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}; \frac{6}{3-\sqrt{5}} \right) \right\}$

Bài 10: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + \frac{1}{y} = 3 \\ y + \frac{1}{z} = 3 \\ z + \frac{1}{x} = 3 \end{cases}$$

Lời giải

$$\begin{cases} x + \frac{1}{y} = 3(1) \\ y + \frac{1}{z} = 3(2) \\ z + \frac{1}{x} = 3(3) \end{cases}$$

Từ (3) $\Rightarrow z = \frac{3x-1}{x}$ thay vào (2) $\Rightarrow 3xy+3 = 8x+y$ (4) Từ (1) $\Rightarrow xy+1 = 3y \Leftrightarrow 3xy+3 = 9y$ (5)

Từ (4) và (5) $\Rightarrow 8x+y = 9y \Rightarrow x = y$ Chứng minh tương tự : $y = z$

Từ đó $\Rightarrow x = y = z$ Thay vào (1) $\Rightarrow x + \frac{1}{x} = 3 \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow$ hệ có 2 nghiệm $x = y = z = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

Bài 11: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 17x + 2y = 2011 |xy| \\ x - 2y = 3xy. \end{cases}$$

Lời giải

Nếu $xy > 0$ thì (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{17}{y} + \frac{2}{x} = 2011 \\ \frac{1}{y} - \frac{2}{x} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{y} = \frac{1007}{9} \\ \frac{1}{x} = \frac{490}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{490} \\ y = \frac{9}{1007} \end{cases}$ (phù hợp)

Nếu $xy < 0$ thì (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{17}{y} + \frac{2}{x} = -2011 \\ \frac{1}{y} - \frac{2}{x} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{y} = \frac{-1004}{9} \\ \frac{1}{x} = -\frac{1031}{18} \end{cases} \Rightarrow xy > 0$ (loại)

Nếu $xy = 0$ thì (1) $\Leftrightarrow x = y = 0$ (nhận).

KL: Hệ có đúng 2 nghiệm là $(0;0)$ và $\left(\frac{9}{490}; \frac{9}{1007}\right)$

Bài 12: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1} = \frac{(x-y)^2}{2} & (1) \\ (3x+2y)(y+1) = 4-x^2 & (2) \end{cases}$$

Lời giải

ĐKXD: $x, y \geq -\frac{1}{2}$. Từ $(3x+2y)(y+1) = 4-x^2$

$$\Leftrightarrow (x+2y+4)(x+y-1) = 0. \text{ Vì } x, y \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow x+2y-4 > 0, \text{ do đó: } x+y-1=0 \Leftrightarrow y=1-x$$

Thay vào phương trình (1) ta được: $\sqrt{2x+1} + \sqrt{3-2x} = \frac{4x^2-4x+1}{2} \quad (2); \left(-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\right)$

$$\text{Đặt } \sqrt{2x+1} + \sqrt{3-2x} = t, (2) \Leftrightarrow t = -\frac{t^4-8t^2}{8} \Leftrightarrow t(t-2)(t^2+2t-4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = \sqrt{5}-1 \end{cases} \quad (\text{Vì } t > 0).$$

$$\text{TH1: } t = 2 \Rightarrow \sqrt{(2x+1)(3-2x)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}; y = \frac{3}{2} \\ x = \frac{3}{2}; y = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn điều kiện xác định})$$

$$\text{TH2: } t = \sqrt{5}-1 \Rightarrow \sqrt{(2x+1)(3-2x)} = 1-\sqrt{5} < 0 \quad (\text{vô lý}).$$

$$\text{Vậy phương trình có nghiệm: } (x; y) \in \left\{ \left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right) \right\}.$$

Bài 13: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{9}{2} \\ xy + \frac{1}{xy} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 5 \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $x \neq 0; y \neq 0$

$$\text{Hệ đã cho} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{9}{2} \\ x\left(y + \frac{1}{y}\right) + \frac{1}{x}\left(\frac{1}{y} + y\right) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} = \frac{9}{2} \\ \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) = 5 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } u = x + \frac{1}{x}, v = y + \frac{1}{y} \text{ lúc này (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = \frac{9}{2} \\ u \cdot v = 5 \end{cases}$$

Vậy u, v là 2 nghiệm của phương trình $x^2 - \frac{9}{2}x + 5 = 0$, Phương trình này có hai nghiệm

$$X_1 = 2, X_2 = \frac{5}{2}$$

Trường hợp 1: $u = 2, v = \frac{5}{2}$ cho ta hệ:
$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} = 2 \\ y + \frac{1}{y} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ 2y^2 - 5y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Hay $(1; 2), (1; \frac{1}{2})$ là các nghiệm của hệ đã cho.

Trường hợp 2: $u = \frac{5}{2}, v = 2$ ta có hệ
$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \\ y + \frac{1}{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 = 0 \\ y^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}$$

hay $(2; 1), (\frac{1}{2}; 1)$ là các nghiệm của hệ đã cho.

Kết luận: Hệ đã cho có 4 nghiệm $(x; y)$ là $(1; 2), (1; \frac{1}{2}), (2; 1), (\frac{1}{2}; 1)$.

Bài 14: giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 3 + x^2 y^2 \\ \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + 3 = x^3 y^3 \end{cases}.$$

Lời giải

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 3 + x^2 y^2 & (1) \\ \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + 3 = x^3 y^3 & (2) \end{cases}$$

+ Điều kiện xác định: $x \neq 0$ và $y \neq 0$.

+ Ta có $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + 3 = x^3 y^3 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{y}\right)^3 + (-xy)^3 = 3 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \cdot (-xy)$

Sử dụng hằng đẳng thức

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{a+b+c}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \text{ ta thu được } (2) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{y} = -xy \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - xy = 0 \end{cases}.$$

+ **Trường hợp 1:** $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} = -xy \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 1 = -x^2 y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}.$

Thử vào (1) thấy không thỏa mãn.

+ Trường hợp 2: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - xy = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = xy \Leftrightarrow x + y = (xy)^2$.

Có (1) $\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 3x^2y^2 + x^4y^4 \Leftrightarrow (x + y)^2 - 2xy = 3x^2y^2 + x^4y^4$ hay có
 $x^4y^4 - 2xy = 3x^2y^2 + x^4y^4 \Leftrightarrow xy(3xy + 2) = 0 \Leftrightarrow xy = -\frac{2}{3}$ (do có điều kiện $xy \neq 0$).

Vậy $\begin{cases} x + y = (xy)^2 \\ xy = -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \frac{4}{9} \\ xy = -\frac{2}{3} \end{cases}$, dẫn đến x, y là các nghiệm của phương trình

$t^2 - \frac{4}{9}t - \frac{2}{3} = 0$ hay phải có $(x; y)$ là $\left(\frac{2 + \sqrt{58}}{9}; \frac{2 - \sqrt{58}}{9}\right)$ hoặc
 $\left(\frac{2 - \sqrt{58}}{9}; \frac{2 + \sqrt{58}}{9}\right)$.

+ Kết luận: Hệ đã cho có đúng hai nghiệm $(x; y)$ là $\left(\frac{2 + \sqrt{58}}{9}; \frac{2 - \sqrt{58}}{9}\right)$,
 $\left(\frac{2 - \sqrt{58}}{9}; \frac{2 + \sqrt{58}}{9}\right)$.

Bài 15: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + x + \frac{1}{y}\left(1 + \frac{1}{y}\right) = 4 \\ x^3 + \frac{x}{y^2} + \frac{x^2}{y} + \frac{1}{y^3} = 4 \end{cases}$

Lời giải

Đk: $y \neq 0$. Hệ tương đương với $\begin{cases} x^2 + \frac{1}{y^2} + x + \frac{1}{y} = 4 \\ x^3 + \frac{1}{y^3} + \frac{x}{y} \left(x + \frac{1}{y}\right) = 4. \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} u = x + \frac{1}{y} \\ v = \frac{x}{y} \end{cases}$ ta được hệ $\begin{cases} u^2 + u - 2v = 4 \\ u^3 - 2uv = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - 4u + 4 = 0 \\ u^2 + u - 4 = 2v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 1. \end{cases}$

Với $\begin{cases} u = 2 \\ v = 1, \end{cases}$ ta được $\begin{cases} x + \frac{1}{y} = 2 \\ \frac{x}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (1; 1)$.

Bài 16: Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 1 = 4y \\ (x^2 + 1)(x + y - 2) = y \end{cases}$$

Lời giải

$$\begin{cases} x^2 + 1 + y(x + y) = 4y \\ (x^2 + 1)(x + y - 2) = y \end{cases}$$

+ Với $y = 0$ Hpt trở thành:
$$\begin{cases} x^2 + 1 = 0 \\ (x^2 + 1)(x - 2) = 0 \end{cases} \quad (\text{vô nghiệm})$$

+ Với $y \neq 0$. Hệ trở thành
$$\begin{cases} \frac{x^2 + 1}{y} + (x + y) = 4 \\ \left(\frac{x^2 + 1}{y}\right)(x + y - 2) = 1 \end{cases} \quad (1)$$

+ Đặt $a = \frac{x^2 + 1}{y}, b = x + y$ thay vào hpt(1) ta được
$$\begin{cases} a + b = 4 \\ a(b - 2) = 1 \end{cases}$$

+ Giải được: $a = 1, b = 3$

+ Với $a = 1, b = 3 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{y} = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$

Giải được nghiệm của hệ: $(x; y) = (1; 2)$ và $(x; y) = (-2; 5)$

Bài 17: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x + y)\left(1 + \frac{1}{xy}\right) = 5 \\ (x^2 + y^2)\left(1 + \frac{1}{x^2 y^2}\right) = 49 \end{cases}$$

Lời giải

a) Hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x + y)\left(1 + \frac{1}{xy}\right) = 5 \\ (x^2 + y^2)\left(1 + \frac{1}{x^2 y^2}\right) = 49 \end{cases} \quad dk : x, y \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} = 5 \\ \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 = 53 \end{cases}$$

Đặt $x + \frac{1}{x} = a; y + \frac{1}{y} = b$ ta được:

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ a^2 + b^2 = 53 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 - b \\ 2b^2 - 10b - 28 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 7; a = -2 \\ b = -2; a = 7 \end{cases}$$

$$\bullet \quad \begin{cases} a = -2 \\ b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{x} = -2 \\ y + \frac{1}{y} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 7 \\ b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{x} = 7 \\ y + \frac{1}{y} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2} \\ y = -1 \end{cases}$$

Bài 18: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + 4y = 1 \\ 3x + xy + y = 3 \end{cases}$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} x^2 + y^2 + 4y = 1 \\ 3x + xy + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 4y = 1 & (1) \\ 6x + 2xy + 2y = 6 & (2) \end{cases}$. Cộng vế với vế hai phương trình

$$(1), (2) \text{ ta được } (x + y)^2 + 6(x + y) - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = -7 \end{cases}.$$

$$+\text{Trường hợp 1: } x + y = 1 \Leftrightarrow x = 1 - y, \text{ thế vào (1) được: } 2y^2 + 2y \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = -1 \end{cases}.$$

$y = 0 \Rightarrow x = 1; y = -1 \Rightarrow x = 2$. Thử lại thấy $(1; 0), (2; -1)$ là nghiệm của hệ.

+ Trường hợp 2: $x + y = -7 \Leftrightarrow x = -7 - y$, thế vào (1) được:

$$2y^2 + 18y + 48 = 0 \Leftrightarrow y^2 + 9y + 24 = 0 \text{ (Phương trình vô nghiệm)}$$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm phân biệt: $(1; 0), (2; -1)$.

Bài 19: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + 4y = 1 \\ 3x + xy + y = 3 \end{cases}$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} x^2 + y^2 + 4y = 1 \\ 3x + xy + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 4y = 1 & (1) \\ 6x + 2xy + 2y = 6 & (2) \end{cases}$. Cộng vế với vế hai phương trình

$$(1), (2) \text{ ta được } (x + y)^2 + 6(x + y) - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = -7 \end{cases}.$$

$$+\text{Trường hợp 1: } x + y = 1 \Leftrightarrow x = 1 - y, \text{ thế vào (1) được: } 2y^2 + 2y \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = -1 \end{cases}.$$

$y = 0 \Rightarrow x = 1; y = -1 \Rightarrow x = 2$. Thử lại thấy $(1; 0), (2; -1)$ là nghiệm của hệ.

+ Trường hợp 2: $x + y = -7 \Leftrightarrow x = -7 - y$, thế vào (1) được:

$$2y^2 + 18y + 48 = 0 \Leftrightarrow y^2 + 9y + 24 = 0 \text{ (Phương trình vô nghiệm)}$$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm phân biệt: $(1; 0), (2; -1)$.

(MẪU THẦY CÔ DÙNG TÁCH DẠNG)
CÁC DẠNG BÀI TẬP THI HSG TOÁN 9
QUA CÁC ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI

- Tổ 1

Dạng 6: Bất đẳng thức, cực trị đại số

A. Bài toán (giữ nguyên màu)

Bài 1: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{5a^2 + 2ab + 2b^2}} + \frac{1}{\sqrt{5b^2 + 2bc + 2c^2}} + \frac{1}{\sqrt{5c^2 + 2ca + 2a^2}} \leq \frac{2}{3}.$$

Bài 2: Cho x, y, z, t là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+t} + \frac{z}{t+x} + \frac{t}{x+y} \geq 2.$$

Bài 3: Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c \leq 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{362}{ab + bc + ca} \geq 121.$$

Bài 4: Cho x, y, z là 3 số thực dương thỏa mãn $x(x-z) + y(y-z) = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

biểu thức $P = \frac{x^3}{x^2 + z^2} + \frac{y^3}{y^2 + z^2} + \frac{x^2 + y^2 + 4}{x + y}.$

Bài 5:

a) Cho a, b, c là các số thực bất kỳ và x, y, z là các số thực dương. Chứng minh:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a^3+8}{a^3(b+c)} + \frac{b^3+8}{b^3(c+a)} + \frac{c^3+8}{c^3(a+b)}$, với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$.

Bài 6: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+6\sqrt{x-9}} + \sqrt{x-6\sqrt{x-9}}}{\sqrt{\frac{81}{x^2} - \frac{18}{x}} + 1}$, với $x > 9$.

Bài 7: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = a + b + c + 2$. Tìm giá trị lớn nhất của

biểu thức $P = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2}} + \frac{1}{\sqrt{c^2 + a^2}}.$

Bài 8: Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a} + 3\sqrt{b}} + \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{b} + 3\sqrt{c}} + \frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{c} + 3\sqrt{a}}.$$

Bài 9: Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 2$. Chứng minh

$$\frac{x}{2x^2 + y^2 + 5} + \frac{2y}{6y^2 + z^2 + 6} + \frac{4z}{3z^2 + 4x^2 + 16} \leq \frac{1}{2}.$$

Bài 10:

Cho các thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$.

Tìm $\min S = (a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2)$

Bài 11: Giả sử ba số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $a > 0, b = 3a^2, a + b + c = abc$. Chứng

minh rằng: $a \geq \sqrt{\frac{1+2\sqrt{3}}{3}}$.

Bài 12: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $(a^4 + b^4)(b^4 + c^4)(c^4 + a^4) = 8$. Chứng minh rằng

$$(a^2 - ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2) \geq 1.$$

Bài 13: Cho các số dương x, y, z thỏa mãn: $\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{y^2 + z^2} + \sqrt{z^2 + x^2} = 2014$. Tìm giá trị

nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}$.

Bài 14: Với x, y là các số thực thay đổi thỏa mãn $1 \leq y \leq 2$ và $xy + 2 \geq 2y$. Tìm giá trị nhỏ nhất

của biểu thức: $M = \frac{x^2 + 4}{y^2 + 1}$

Bài 15: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy + yz + xz = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} \geq \frac{2}{3} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \right)^3$$

Bài 16: Với x, y là các số thực dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $4x^2 + 4y^2 + 17xy + 5x + 5y \geq 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 17x^2 + 17y^2 + 16xy$.

Bài 17: Cho a, b, c là ba số thực thỏa điều kiện $a + b + c = 10$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$M = a^2 + b^2 + c^2.$$

Bài 18: Cho ba số thực x, y, z . Tìm giá trị lớn nhất biểu thức $S = \frac{xyz(x + y + z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{(x^2 + y^2 + z^2)(xy + yz + zx)}$.

Bài 19: Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn: $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \frac{x}{1+y^2} + \frac{y}{1+z^2} + \frac{z}{1+x^2}$$

Bài 20: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \frac{2}{1-x} + \frac{1}{x}$ với $0 < x < 1$.

Bài 21: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} + \frac{1}{2}(ab + bc + ca) \geq 3$$

Bài 22: Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\frac{350}{xy + yz + zx} + \frac{386}{x^2 + y^2 + z^2} > 2015$$

Bài 23: Chứng minh rằng: $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2014}{2^{2013}} + \frac{2015}{2^{2014}} < 4$

Bài 24: Cho x, y là hai số dương thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2} + \frac{(x+y)^2}{xy}$$

Bài 25: Cho a, b là các số dương thỏa mãn điều kiện $(a+b)^3 + 4ab \leq 12$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + 2015ab \leq 2016.$$

Bài 26: Cho 3 số thực dương x, y, z thỏa mãn: $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{y^2 z^2}{x(y^2 + z^2)} + \frac{z^2 x^2}{y(z^2 + x^2)} + \frac{x^2 y^2}{z(x^2 + y^2)}$$

Bài 27: Cho a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} \geq \frac{4a}{a+c}$.

Bài 28: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng:

$$a\sqrt{b^2+1} + b\sqrt{c^2+1} + c\sqrt{a^2+1} \geq 2. \text{ Dấu "=" xảy ra khi nào?}$$

Bài 29: Cho ba số $a, b, c \geq 1$ thỏa mãn $32abc = 18(a+b+c) + 27$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{\sqrt{a^2-1}}{a} + \frac{\sqrt{b^2-1}}{b} + \frac{\sqrt{c^2-1}}{c}$$

Bài 30: Tìm GTNN của $A = \frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x}$ biết $x, y, z > 0$, $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 1$.

Bài 31: a) Cho ba số dương a, b, c . Chứng minh rằng $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$

b) Cho 3 số dương x, y, z thỏa điều kiện $x+y+z=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1}$$

Bài 32: So sánh 2 số: $\sqrt{2011} - \sqrt{2010}$ và $\sqrt{2010} - \sqrt{2009}$

Bài 33: Chứng minh bất đẳng thức: $\sqrt{ab} \geq \sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)}$ (với $a > c, b > c, c > 0$)

Bài 34: Cho a, b, c là ba số dương. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$$

Bài 35: Cho x, y, z là ba số dương thỏa mãn $x+y+z=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{x+\sqrt{3x+yz}} + \frac{y}{y+\sqrt{3y+zx}} + \frac{z}{z+\sqrt{3z+xy}} \leq 1$$

Bài 36: Cho $x; y$ thỏa mãn $\begin{cases} x; y \in \mathbb{R} \\ 0 \leq x; y \leq \frac{1}{2} \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{x}}{1+y} + \frac{\sqrt{y}}{1+x} \leq \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Bài 37: a) Cho bốn số thực bất kì a, b, c, d . Chứng minh: $|ab+cd| \leq \sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)}$
Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

b) Với giá trị nào của góc nhọn α thì biểu thức $P = 3\sin \alpha + \sqrt{3}\cos \alpha$ có giá trị lớn nhất?
Cho biết giá trị lớn nhất đó.

Bài 38: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx = 2xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x}{z(z+x)} + \frac{y}{x(x+y)} + \frac{z}{y(y+z)}$

Bài 39: Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng $a^5 + b^5 + c^5 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 6$.

Bài 40: Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có ba góc nhọn. Chứng minh rằng với mọi số thực x, y, z ta luôn có: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} > \frac{2x^2 + 2y^2 + 2z^2}{a^2 + b^2 + c^2}$

Bài 41: Cho biểu thức $B = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$. Tìm giá trị lớn nhất của B và giá trị x tương ứng.

Bài 42: Cho x, y là 2 số dương thỏa mãn $x + y = 1$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (1 - \frac{1}{x^2})(1 - \frac{1}{y^2})$.

Bài 43: Cho ba số thực $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 2013$.

Chứng minh $\frac{a}{a + \sqrt{2013a + bc}} + \frac{b}{b + \sqrt{2013b + ca}} + \frac{c}{c + \sqrt{2013c + ab}} \leq 1$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài 44: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $2ab + 6bc + 2ac = 7abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = \frac{4ab}{a+2b} + \frac{9ac}{a+4c} + \frac{4bc}{b+c}$.

Bài 45: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=3$

Chứng minh rằng $\frac{2x^2 + y^2 + z^2}{4-yz} + \frac{2y^2 + x^2 + z^2}{4-xz} + \frac{2z^2 + y^2 + x^2}{4-yx} \geq 4xyz$

Bài 46: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $x + y = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = \frac{1}{x^3 + y^3} + \frac{1}{xy}$.

Bài 47: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của M bằng $\frac{5}{2}$ khi và chỉ khi $x = y$.

Bài 48: Cho $x; y$ thỏa mãn $\begin{cases} x; y \in \mathbb{R} \\ 0 \leq x; y \leq \frac{1}{2} \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{x}}{1+y} + \frac{\sqrt{y}}{1+x} \leq \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Bài 49: Cho x, y là 2 số thực thỏa mãn: $x^2 + 2y^2 + 2xy + 7x + 7y + 10 = 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = x + y + 1$.

Bài 50: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}}$$

Bài 51: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{4x+3}{x^2+1}$

Bài 52: Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng: $\frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} \geq 3$

Bài 53: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $Q = \frac{2016x^2 + 2x + 2016}{x^2 + 1}$

Bài 54: Cho các số dương a, b, c . Chứng minh rằng: $1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$

Bài 55: Tìm GTNN của biểu thức: $A = \frac{3-4\sqrt{x}}{x+1}$

Bài 56: Cho x, y, z là các số không âm và $x + y + z = 1$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} \leq \sqrt{6}$

Bài 57: Cho tam giác ABC có chu vi $2p = a + b + c$ (a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác).

Bài 58: Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\frac{8}{(a+b)^2 + 4abc} + \frac{8}{(b+c)^2 + 4abc} + \frac{8}{(a+c)^2 + 4abc} + a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{8}{a+3} + \frac{8}{b+3} + \frac{8}{c+3}$$

.

Bài 59: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$

Bài 60: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa $ab + bc + ca = 3abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

thức $A = \frac{a^3}{c+a^2} + \frac{b^3}{a+b^2} + \frac{c^3}{b+c^2}$.

Bài 61: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng $abc + 2(1 + a + b + c + ab + ac + bc) \geq 0$.

Bài 62: Chứng minh rằng với mọi $x > 1$ ta luôn có. $3(x^2 - \frac{1}{x^2}) < 2(x^3 - \frac{1}{x^3})$

Bài 63: Với a, b là các số thực thỏa mãn đẳng thức $(1+a)(1+b) = \frac{9}{4}$.

Hãy tìm GTNN của $P = \sqrt{1+a^4} + \sqrt{1+b^4}$

Bài 64: Cho a, b, c là ba số thực dương, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc} + \frac{a^2 + b^2}{c^2 + ab} + \frac{b^2 + c^2}{a^2 + bc} + \frac{c^2 + a^2}{b^2 + ca}.$$

Bài 65: Cho ba số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \sqrt{2x^2 + 3xy + 2y^2} + \sqrt{2y^2 + 3yz + 2z^2} + \sqrt{2z^2 + 3zx + 2x^2}$$

Bài 66: Cho c, c sẽ thục d-ng a, b, c tho¶ m·n $a + b + c = 6$. Chứng minh rằng:

$$\frac{b+c+5}{1+a} + \frac{c+a+4}{2+b} + \frac{a+b+3}{3+c} \geq 6. \text{ D\`eu } \textcircled{1} \text{ng th\`oc x\`y ra khi n\`o}$$

Bài 67: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + ac + bc = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

thức
$$T = \frac{19a+3}{1+b^2} + \frac{19b+3}{1+c^2} + \frac{19c+3}{1+a^2}.$$

Bài 68: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a}{9a^3 + 3b^2 + c} + \frac{b}{9b^3 + 3c^2 + a} + \frac{c}{9c^3 + 3a^2 + b}$$

Bài 69: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = xyz$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x} + \frac{1 + \sqrt{1 + y^2}}{y} + \frac{1 + \sqrt{1 + z^2}}{z} \leq xyz$$

Bài 70: Chứng minh với mọi số nguyên dương n lớn hơn 1 ta có $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\cdots\sqrt{(n-1)}\sqrt{n}}}} < 3$.

Bài 71: Cho ba số không âm x, y, z thỏa mãn $\frac{1}{1+2x} + \frac{1}{1+2y} + \frac{1}{1+2z} = 2$.

Chứng minh rằng $xyz \leq \frac{1}{64}$.

Bài 72: Chứng minh $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{b+a}} > 2$, với $a, b, c > 0$

Bài 73: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $3y^2 + x^2 + 2xy + 2x + 6y + 2017$

Bài 74: Cho a, b, c là 3 cạnh một tam giác. Chứng minh:

$$\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Bài 75: Chứng minh rằng $\frac{a^4 + b^4}{2} \geq ab^3 + a^3b - a^2b^2$

Bài 76:

a/ Cho hai số dương x, y thỏa mãn $x + y = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = \left(x^2 + \frac{1}{y^2}\right)\left(y^2 + \frac{1}{x^2}\right)$

b/ Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} = 6$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{3x+3y+2z} + \frac{1}{3x+2y+3z} + \frac{1}{2x+3y+3z} \leq \frac{3}{2}$.

Bài 77: Cho tam giác ABC có chu vi bằng 2. Ký hiệu a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Tìm

giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{a}{b+c-a} + \frac{9b}{c+a-b} + \frac{16c}{a+b-c}$

Bài 78: Cho ba số dương a, b và c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} + \frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} + \frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3} \leq \frac{1}{2}.$$

Bài 79:

1. Cho $a, b > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

2. Chia 10 số: 2; 3; 4; 5; 7; 8; 9; 10; 12; 14 làm thành hai nhóm rồi lấy tích các số trong mỗi nhóm. Gọi M là tổng của hai tích số đó. Tìm giá trị nhỏ nhất của M và chỉ ra ít nhất 4 cách chia sao cho M nhỏ nhất.

Bài 80: Các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x + y + z = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$F = \frac{x^4}{(x^2 + y^2)(x + y)} + \frac{y^4}{(y^2 + z^2)(y + z)} + \frac{z^4}{(z^2 + x^2)(z + x)}$$

Bài 81: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \frac{2b}{a} \geq \frac{c}{a} + 4 \end{cases}$.

Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm.

Bài 82:

Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x + y + z = 2$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}$

Bài 83: (2,5 điểm)

1) Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x + y + z = 3$ và $xy + yz + zx \neq 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{x+1}{y+1} + \frac{y+1}{z+1} + \frac{z+1}{x+1} \leq \frac{25}{3\sqrt[3]{4xy + yz + zx}}}.$$

Bài 84:

1) Cho ba số a, b, c không âm thỏa mãn điều kiện: $a^2 + b^2 + c^2 \leq 2(ab + bc + ca)$ và p, q, r là ba số thỏa mãn: $p + q + r = 0$. Chứng minh rằng: $apq + bqr + crp \leq 0$.

2) Cho các số dương a, b thỏa mãn $a.b = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M = (a+b+1)(a^2 + b^2) + \frac{4}{a+b}$$

1) Cho ba số a, b, c không âm thỏa mãn điều kiện: $a^2 + b^2 + c^2 \leq 2(ab + bc + ca)$ và p, q, r là ba số thỏa mãn: $p + q + r = 0$. Chứng minh rằng: $apq + bqr + crp \leq 0$.

2) Cho các số dương a, b thỏa mãn $a.b = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$M = (a+b+1)(a^2+b^2) + \frac{4}{a+b}$$

Bài 85:

a) Chứng minh với mọi số a, b, c, d ta luôn có: $(a^2 + c^2)(b^2 + d^2) \geq (ab + cd)^2$

b) Cho $a, b > 0$ chứng minh rằng: $\frac{a^2 + b^2}{(4a + 3b)(3a + 4b)} \geq \frac{1}{25}$

Bài 86: (2 điểm)

Với x, y là hai số thực thỏa mãn $y^3 + 3y^2 + 5y + 3 = 11\sqrt{9 - x^2} - \sqrt{9x^4 - x^6}$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x - y + 2018$.

Bài 87: Cho a, b, c là ba số không âm có tổng bằng 1. Chứng minh:

a) $3(ab + bc + ac) \leq 1$

b) $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4(ab + bc + ac) - 1$

Bài 88:

Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa mãn $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{y^3 + 16} + \frac{y}{z^3 + 16} + \frac{z}{x^3 + 16}$$

Bài 89: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{b^2 + c^2}{a} + \frac{c^2 + a^2}{b} + \frac{a^2 + b^2}{c} \geq 2(a + b + c).$$

Bài 90: Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 3 thì $3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 4abc \geq 13$.

Bài 91: Cho các số thực dương a, b, c, d thỏa mãn $a > 1, b > 1, c > 1, d > 1$. Chứng minh bất

đẳng thức $\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{c-1} + \frac{c^2}{d-1} + \frac{d^2}{a-1} \geq 16$.

Bài 92: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $(a + c)(b + c) = 4c^2$. Tìm giá trị lớn nhất,

nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a}{b + 3c} + \frac{b}{a + 3c} + \frac{ab}{bc + ca}$.

Bài 93: Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 3$

Chứng minh rằng $a\sqrt{b^3 + 1} + b\sqrt{c^3 + 1} + c\sqrt{a^3 + 1} \leq 5$

Bài 94:

a) Cho x, y, z là các số thực dương nhỏ hơn 4. Chứng minh rằng trong các số

$\frac{1}{x} + \frac{1}{4-y}, \frac{1}{y} + \frac{1}{4-z}, \frac{1}{z} + \frac{1}{4-x}$ luôn tồn tại ít nhất một số lớn hơn hoặc bằng 1.

b) Với các số thực dương a, b, c thay đổi thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = ab + bc + ca - abc$.

Bài 95:

Cho a, b, c là các số thực sao cho $a + b = c - 2$ và $ab = 2c^2 - 3c + 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2$

Bài 96: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $B = \frac{3x+4}{x^2+1}$.

Bài 97: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$.

Chứng minh $\frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} \geq \frac{3}{4}$.

Bài 98: Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} (*) \text{ với } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ và } x, y, z > 0.$$

Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $xy + yz + zx = 673$.

Bài 99: Chứng minh rằng: $\frac{x}{x^2 - yz + 2019} + \frac{y}{y^2 - zx + 2019} + \frac{z}{z^2 - xy + 2019} \geq \frac{1}{x + y + z}$

Bài 100: Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \left(\frac{a}{a+b} \right)^4 + \left(\frac{b}{b+c} \right)^4 + \left(\frac{c}{c+a} \right)^4.$$

Bài 101: Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z + 2 = xyz$. Chứng minh rằng

$$x + y + z + 6 \geq 2(\sqrt{yz} + \sqrt{zx} + \sqrt{xy}).$$

Bài 102: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y - z + 1 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất

của biểu thức : $P = \frac{x^3 y^3}{(x + yz)(y + xz)(z + xy)^2}$

Bài 103: Cho $a > 0, b > 0$. Chứng minh $\sqrt{a} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - 1 \right) \geq \sqrt{b} \left(1 - \sqrt{\frac{b}{a}} \right)$. Dấu “=” xảy ra khi nào?

Bài 104: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn: $xyz = 1$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = \frac{1}{x^3 + y^3 + 1} + \frac{1}{y^3 + z^3 + 1} + \frac{1}{z^3 + x^3 + 1}$

Bài 105: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

a) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$

b) $\frac{1}{a+b}; \frac{1}{b+c}; \frac{1}{c+a}$ là độ dài 3 cạnh của một tam giác.

Bài 106: Chứng minh rằng: với mọi số thực x, y dương, ta luôn có: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$

Bài 107: Cho x, y, z là ba số dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x^2 + yz} + \frac{1}{y^2 + xz} + \frac{1}{z^2 + xy} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right)$$

Bài 108: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x \geq z$. Chứng minh rằng

$$\frac{xz}{y^2 + yz} + \frac{y^2}{xz + yz} + \frac{x + 2z}{x + z} \geq \frac{5}{2}.$$

Bài 109: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 \leq 12$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = 4(a^3 + b^3 + c^3) - (a^4 + b^4 + c^4)$

Bài 110: Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2. \text{ Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?}$$

Bài 111: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 28$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$\text{biểu thức: } P = \frac{5a + 5b + 2c}{\sqrt{12(a^2 + 28)} + \sqrt{12(b^2 + 28)} + \sqrt{c^2 + 28}}.$$

Bài 112: Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x + y + z = 3$ và $xy + yz + zx \neq 0$.

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{x+1}{y+1} + \frac{y+1}{z+1} + \frac{z+1}{x+1} \leq \frac{25}{3\sqrt[3]{4xy + yz + zx}}.$$

Bài 113: Cho a, b và $ab = 6$. Chứng minh: $\frac{a^2 + b^2}{|a - b|} \geq 4\sqrt{3}$

$$\text{Bài 114: Cho } A = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1}$$

Đặt $B = A + x - 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức B

Bài 115: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$.

Bài 116: Cho $x, y, z > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$T = \frac{x}{3\sqrt{x+2y-1}-4} + \frac{y}{3\sqrt{y+2z-1}-4} + \frac{z}{3\sqrt{z+2x-1}-4}$$

Bài 117:

Cho các số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $xy + yz + zx = 670$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{x^2 - yz + 2010} + \frac{y}{y^2 - zx + 2010} + \frac{z}{z^2 - xy + 2010} \geq \frac{1}{x + y + z}$$

Bài 118: Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$.

$$\text{Chứng minh } \frac{1}{\sqrt{ab+a+2}} + \frac{1}{\sqrt{bc+b+2}} + \frac{1}{\sqrt{ca+c+2}} \leq \frac{3}{2}$$

Bài 119: Cho x, y là 2 số thực thỏa mãn: $x^2 + 2y^2 + 2xy + 7x + 7y + 10 = 0$.
Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = x + y + 1$.

Bài 120: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}}$$

Bài 121: Cho ba số thực a, b, c dương. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}} + \sqrt[3]{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}} \geq 1.$$

Bài 122: Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn: $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} = \sqrt{2011}$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2011}{2}}$.

Bài 123: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=xyz$.

Chứng minh rằng: $\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} + \frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y} + \frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z} \leq xyz$

Bài 124: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $A = \frac{x^2-4x+1}{x^2}$

Bài 125: Cho 3 số a, b, c thỏa mãn $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$B = (a+b+c+3) \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \right).$$

Bài 126: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn: $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 2$. Chứng minh rằng:

$$5x^2 + y - 4xy + y^2 \geq 3$$

Bài 127: Cho $x > 1; y > 0$, chứng minh: $\frac{1}{(x-1)^3} + \left(\frac{x-1}{y} \right)^3 + \frac{1}{y^3} \geq 3 \left(\frac{3-2x}{x-1} + \frac{x}{y} \right)$

Bài 128: Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c \leq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = 21(a^2+b^2+c^2) + 12(a+b+c)^2 + 2017 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Bài 129: Cho a, b, c là các số thực dương. CMR: $\frac{ab}{a+3b+2c} + \frac{bc}{b+3c+2a} + \frac{ca}{c+3a+2b} \leq \frac{a+b+c}{6}$

Bài 130: a) Cho $x > 0, y > 0, z > 0$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq 1$

b) Cho $x > 0, y > 0, z > 0$ thỏa mãn $x^{2011} + y^{2011} + z^{2011} = 3$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $M = x^2 + y^2 + z^2$

Bài 131: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{4x+3}{x^2+1}$

Bài 132: Cho a, b, c là các số thuộc đoạn $[-1; 2]$ thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 = 6$ hãy chứng minh rằng: $a + b + c \geq 0$

Bài 133: Chứng minh rằng: Với mọi số nguyên dương n , ta

có: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{4\sqrt[3]{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n}} < 3$.

Bài 134: Cho hai số thực x và y thỏa mãn $x^2 + xy + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = x^3y + xy^3$.

Bài 135: Chứng minh rằng $(a+b+c) \left[\frac{3a-b}{a^2+ab} + \frac{3b-c}{b^2+bc} + \frac{3c-a}{c^2+ca} \right] \leq 9$ với a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Bài 136: Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $2\sqrt{y} + \sqrt{z} = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Chứng minh rằng $\frac{3yz}{x} + \frac{4zx}{y} + \frac{5xy}{z} \geq 4$

B. Lời giải (giữ nguyên màu)

Bài 1: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}} + \frac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+2c^2}} + \frac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}} \leq \frac{2}{3}.$$

Lời giải

$$\text{Với } \forall x, y, z > 0 \text{ ta có: } x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}$$

$$\Rightarrow (x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{x + y + z} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \text{ Đẳng thức xảy ra}$$

khi $x = y = z$

$$\text{Ta có: } 5a^2 + 2ab + 2b^2 = (2a + b)^2 + (a - b)^2 \geq (2a + b)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}} \leq \frac{1}{2a+b} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right). \text{ Đẳng thức xảy ra khi } a = b$$

$$\text{Tương tự: } \frac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+2c^2}} \leq \frac{1}{2b+c} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \text{ Đẳng thức xảy ra khi } b = c$$

$$\frac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}} \leq \frac{1}{2c+a} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) \text{ Đẳng thức xảy ra khi } c = a$$

Do đó:

$$\frac{1}{\sqrt{5a^2 + 2ab + 2b^2}} + \frac{1}{\sqrt{5b^2 + 2bc + 2c^2}} + \frac{1}{\sqrt{5c^2 + 2ca + 2a^2}} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{3}{a} + \frac{3}{b} + \frac{3}{c} \right) \\ \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \leq \frac{2}{3}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{3}{2}$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 2: Cho x, y, z, t là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+t} + \frac{z}{t+x} + \frac{t}{x+y} \geq 2.$$

lời giải.

Đặt:

$$A = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+t} + \frac{z}{t+x} + \frac{t}{x+y}$$

$$M = \frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+t} + \frac{t}{t+x}$$

$$N = \frac{y}{x+y} + \frac{z}{y+z} + \frac{t}{z+t} + \frac{x}{t+x}$$

$$\Rightarrow M + N = \frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+t} + \frac{t}{t+x} + \frac{y}{x+y} + \frac{z}{y+z} + \frac{t}{z+t} + \frac{x}{t+x} = 4.$$

Ta có:

$$N + A = \frac{y+t}{x+y} + \frac{x+z}{y+z} + \frac{y+t}{z+t} + \frac{x+z}{t+x}$$

$$= (y+t) \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{z+t} \right) + (x+z) \left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{t+x} \right) \geq \frac{4(y+t)}{x+y+z+t} + \frac{4(x+z)}{x+y+z+t} = 4.$$

Chứng minh tương tự ta cũng có: $A + M \geq 4$.

$$\Rightarrow A + M + A + N \geq 8 \Rightarrow A \geq 2.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = t > 0$.

Bài 3: Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c \leq 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{362}{ab + bc + ca} \geq 121.$$

lời giải.

Với 3 số thực dương a, b, c ta có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$

Thật vậy: Ta có

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + 3$$

$$\stackrel{\text{cô-si}}{\geq} 2+2+2+3=9$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} (*)$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c$

* Với ba số thực a, b, c ta có

$$3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2$$

Thật vậy:

$$3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2$$

$$\Leftrightarrow 3ab+3bc+3ca \leq a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] \geq 0$$

Luôn đúng với mọi a, b, c

$$\text{Vậy } ab+bc+ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} (**)$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c$

Áp dụng (*) (**) và giả thiết $a+b+c \leq 3$ ta có

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{362}{ab+bc+ca} \\ &= \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{360}{ab+bc+ca} \\ &\geq \frac{9}{(a+b+c)^2} + \frac{360}{\frac{(a+b+c)^2}{3}} \geq \frac{9}{9} + \frac{360.3}{9} = 121 \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Bài 4: Cho x, y, z là 3 số thực dương thỏa mãn $x(x-z) + y(y-z) = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$\text{biểu thức } P = \frac{x^3}{x^2+z^2} + \frac{y^3}{y^2+z^2} + \frac{x^2+y^2+4}{x+y}.$$

Lời giải

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Côsi } \frac{x^3}{x^2+z^2} = x - \frac{xz^2}{x^2+z^2} \geq x - \frac{xz^2}{2xz} = x - \frac{z}{2}.$$

$$\text{Tương tự } \frac{y^3}{y^2+z^2} \geq y - \frac{z}{2}. \text{ Suy ra } P \geq x + y - z + \frac{x^2+y^2+4}{x+y}.$$

$$\text{Theo gt } z = \frac{x^2+y^2}{x+y} \Rightarrow P \geq x + y + \frac{4}{x+y} \geq 4.$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = 4 \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Bài 5:

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

a) Cho a, b, c là các số thực bất kỳ và x, y, z là các số thực dương. Chứng minh:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a^3+8}{a^3(b+c)} + \frac{b^3+8}{b^3(c+a)} + \frac{c^3+8}{c^3(a+b)}$, với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$.

Lời giải

a)

Ta có: $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \right) (x+y+z) \geq (a+b+c)^2 \quad (\text{vì } x, y, z > 0)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + \frac{a^2y}{x} + \frac{a^2z}{x} + \frac{b^2x}{y} + b^2 + \frac{b^2z}{y} + \frac{c^2x}{z} + \frac{c^2y}{z} + c^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a^2y}{x} - 2ab + \frac{b^2x}{y} \right) + \left(\frac{a^2z}{x} - 2ca + \frac{c^2x}{z} \right) + \left(\frac{b^2z}{y} - 2bc + \frac{c^2y}{z} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(a\sqrt{\frac{y}{x}} - b\sqrt{\frac{x}{y}} \right)^2 + \left(a\sqrt{\frac{z}{x}} - c\sqrt{\frac{x}{z}} \right)^2 + \left(b\sqrt{\frac{z}{y}} - c\sqrt{\frac{y}{z}} \right)^2 \geq 0 \quad (\text{luôn đúng với}$$

$x, y, z > 0$)

Dấu “=” xảy ra khi:
$$\begin{cases} a\sqrt{\frac{y}{x}} = b\sqrt{\frac{x}{y}} \\ a\sqrt{\frac{z}{x}} = c\sqrt{\frac{x}{z}} \\ b\sqrt{\frac{z}{y}} = c\sqrt{\frac{y}{z}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ay = bx \\ az = cx \\ bz = cy \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

Vậy: $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$

b) $P = \frac{a^3+8}{a^3(b+c)} + \frac{b^3+8}{b^3(c+a)} + \frac{c^3+8}{c^3(a+b)}$

$$P = \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} + \frac{8}{a^3(b+c)} + \frac{8}{b^3(c+a)} + \frac{8}{c^3(a+b)}$$

$$P = \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}} + \frac{1}{\frac{1}{c} + \frac{1}{a}} + \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} + \frac{8}{a^2\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} + \frac{8}{b^2\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right)} + \frac{8}{c^2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} \quad (\text{vì } abc = 1)$$

Đặt $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c} \Rightarrow x, y, z > 0$ và $xyz = 1$

$$P = \left(\frac{yz}{y+z} + \frac{zx}{z+x} + \frac{xy}{x+y} \right) + 8 \left[\frac{x^2}{(y+z)} + \frac{y^2}{(z+x)} + \frac{z^2}{(x+y)} \right]$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\frac{yz}{y+z} + \frac{y+z}{4} \geq 2\sqrt{\frac{yz}{y+z} \cdot \frac{y+z}{4}} = \sqrt{yz}$$

$$\frac{zx}{z+x} + \frac{z+x}{4} \geq 2\sqrt{\frac{zx}{z+x} \cdot \frac{z+x}{4}} = \sqrt{zx}$$

$$\frac{xy}{x+y} + \frac{x+y}{4} \geq 2\sqrt{\frac{xy}{x+y} \cdot \frac{x+y}{4}} = \sqrt{xy}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{yz}{y+z} + \frac{zx}{z+x} + \frac{xy}{x+y} + \frac{x+y+z}{2} \geq \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} \geq 3\sqrt[3]{\sqrt{x^2y^2z^2}} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{yz}{y+z} + \frac{zx}{z+x} + \frac{xy}{x+y} \geq 3 - \frac{x+y+z}{2} \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức ở câu a, ta có:

$$\frac{x^2}{(y+z)} + \frac{y^2}{(z+x)} + \frac{z^2}{(x+y)} \geq \frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)} = \frac{x+y+z}{2}$$

$$\text{Suy ra: } 8 \left[\frac{x^2}{(y+z)} + \frac{y^2}{(z+x)} + \frac{z^2}{(x+y)} \right] \geq 4(x+y+z) \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) theo vế ta được:

$$\frac{yz}{y+z} + \frac{zx}{z+x} + \frac{xy}{x+y} + 8 \left[\frac{x^2}{(y+z)} + \frac{y^2}{(z+x)} + \frac{z^2}{(x+y)} \right] \geq 3 + \frac{7(x+y+z)}{2}$$

$$\text{Suy ra: } P \geq 3 + \frac{7(x+y+z)}{2} \geq 3 + \frac{7}{2} \cdot 3\sqrt[3]{xyz} = 3 + \frac{21}{2} = \frac{27}{2}$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = y = z = 1$ suy ra $a = b = c = 1$

$$\text{Vậy Min}P = \frac{27}{2} \text{ khi } a = b = c = 1$$

Bài 6: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+6\sqrt{x-9}} + \sqrt{x-6\sqrt{x-9}}}{\sqrt{\frac{81}{x^2} - \frac{18}{x}} + 1}$, với $x > 9$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \sqrt{x+6\sqrt{x-9}} = \sqrt{x-9} + 3; \sqrt{x-6\sqrt{x-9}} = |\sqrt{x-9} - 3|$$

$$\text{Và } \sqrt{\frac{81}{x^2} - \frac{18}{x}} + 1 = \left| \frac{9}{x} - 1 \right| = \frac{x-9}{x} \Rightarrow A = x \cdot \frac{\sqrt{x-9} + 3 + |\sqrt{x-9} - 3|}{x-9}$$

$$\text{Khi } x \geq 18 \text{ thì } A = \frac{2x}{\sqrt{x-9}} = 2\sqrt{x-9} + \frac{18}{\sqrt{x-9}} \geq 12, \text{ dấu bằng xảy ra khi } x = 18 \quad (1).$$

$$\text{Khi } 9 < x < 18 \text{ thì } A = \frac{6x}{x-9} = 6 + \frac{54}{x-9} > 6 + \frac{54}{9} = 12 \quad (2)$$

$$\text{Suy ra } A_{\min} = 12.$$

Bài 7: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = a + b + c + 2$. Tìm giá trị lớn nhất của

biểu thức $P = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2}} + \frac{1}{\sqrt{c^2 + a^2}}$.

Lời giải

Từ đẳng thức $abc = a + b + c + 2 \Leftrightarrow \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{2}{abc} = 1$

Đặt $\frac{1}{a} = \frac{x}{y+z}; \frac{1}{b} = \frac{y}{z+x}; \frac{1}{c} = \frac{z}{x+y}$ ($x, y, z > 0$)

Ta có: $P = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2}} + \frac{1}{\sqrt{c^2 + a^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2ab}} + \frac{1}{\sqrt{2bc}} + \frac{1}{\sqrt{2ca}}$

Mặt khác: $\frac{1}{\sqrt{2ab}} = \sqrt{\frac{xy}{(x+z)(y+z)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x+z} + \frac{y}{y+z} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

Tương tự thì ta cũng có:

$$\frac{1}{\sqrt{2bc}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{y}{y+x} + \frac{z}{z+x} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2ca}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{z}{y+z} + \frac{x}{y+x} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Cộng vế theo vế ta có: $P \leq \frac{3}{2\sqrt{2}}$ Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 1$. Hay là

$$a = b = c = 2$$

Bài 8: Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a} + 3\sqrt{b}} + \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{b} + 3\sqrt{c}} + \frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{c} + 3\sqrt{a}}$$

Lời giải

Ta có: $P = \frac{a^2}{a + 3\sqrt{ab}} + \frac{b^2}{b + 3\sqrt{bc}} + \frac{c^2}{c + 3\sqrt{ca}}$

Theo bất đẳng thức Bunhiacôpxki (dạng phân thức). Ta có:

$$P = \frac{a^2}{a + 3\sqrt{ab}} + \frac{b^2}{b + 3\sqrt{bc}} + \frac{c^2}{c + 3\sqrt{ca}} \geq \frac{(a + b + c)^2}{a + b + c + 3(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca})}$$

$$P = \frac{a^2}{a + 3\sqrt{ab}} + \frac{b^2}{b + 3\sqrt{bc}} + \frac{c^2}{c + 3\sqrt{ca}} \geq \frac{16}{4 + 3(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca})}$$

(do $a + b + c = 4$)

Theo bất đẳng thức Cô-si. Ta có:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}; \quad b + c \geq 2\sqrt{bc}; \quad c + a \geq 2\sqrt{ca}$$

$$\Rightarrow 2a + 2b + 2c \geq 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{bc} + 2\sqrt{ca}$$

$$\Rightarrow \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \leq a + b + c = 4 \Rightarrow P \geq \frac{16}{4 + 3 \cdot 4} = 1$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a; b; c > 0 \\ a + b + c = 4 \Leftrightarrow a = b = c = \frac{4}{3} \\ a = b = c \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 1 khi $a = b = c = \frac{4}{3}$

Bài 9: Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 2$. Chứng minh

$$\frac{x}{2x^2 + y^2 + 5} + \frac{2y}{6y^2 + z^2 + 6} + \frac{4z}{3z^2 + 4x^2 + 16} \leq \frac{1}{2}.$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm, ta có

$$2x^2 + y^2 + 5 = (x^2 + y^2) + (x^2 + 1) + 4 \geq 2xy + 2x + 4 = 2(xy + x + 2),$$

$$6y^2 + z^2 + 6 = (4y^2 + z^2) + 2(y^2 + 1) + 4 \geq 4yz + 4y + 4 = 4(yz + y + 1),$$

$$3z^2 + 4x^2 + 16 = (z^2 + 4x^2) + 2(z^2 + 4) + 8 \geq 4zx + 8z + 8 = 4(zx + 2z + 2).$$

$$\text{Suy ra} \quad \frac{x}{2x^2 + y^2 + 5} \leq \frac{x}{2(xy + x + 2)}, \quad \frac{2y}{6y^2 + z^2 + 6} \leq \frac{y}{2(yz + y + 1)},$$

$$\frac{4z}{3z^2 + 4x^2 + 16} \leq \frac{z}{zx + 2z + 2}.$$

Cộng các bất đẳng thức theo vế, ta được

$$\begin{aligned} P &\leq \frac{x}{2(xy + x + 2)} + \frac{y}{2(yz + y + 1)} + \frac{z}{zx + 2z + 2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x}{xy + x + 2} + \frac{y}{yz + y + 1} + \frac{2z}{zx + 2z + 2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x}{xy + x + 2} + \frac{xy}{xyz + xy + x} + \frac{2z}{zx + 2z + xyz} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x}{xy + x + 2} + \frac{xy}{xy + x + 2} + \frac{2}{x + xy + 2} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Bài 10:

Cho các thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$.

Tìm $\min S = (a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2)$

Lời giải

Áp dụng Bất đẳng thức Bunhiacopsky ta có :

$$(a.1 + b.1 + c.1)^2 \leq (a^2 + 1^2 + 1^2)(b^2 + 1^2 + 1^2) = (a^2 + 2)(1 + b^2 + c^2) \quad (1)$$

Do vai trò của a, b, c là như nhau theo nguyên lý Dirichlet thì trong 3 số $a^2 - 1, b^2 - 1, c^2 - 1$ luôn tồn tại 2 số cùng dấu, giả sử $b^2 - 1; c^2 - 1$

$$\Rightarrow (b^2 - 1)(c^2 - 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow b^2 c^2 - b^2 - c^2 + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow b^2 c^2 + 2b^2 + 2c^2 + 4 \geq 3 + 3b^2 + 3c^2$$

$$\Leftrightarrow (b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 3(1 + b^2 + c^2)$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 3(a^2 + 2)(1 + b^2 + c^2) \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra:

$$S = (a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 3(a + b + c)^2 = 3 \cdot 9 = 27$$

Vậy GTNN của $S = 27$ khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Bài 11: Giả sử ba số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $a > 0, b = 3a^2, a + b + c = abc$. Chứng

minh rằng: $a \geq \sqrt{\frac{1 + 2\sqrt{3}}{3}}$.

Lời giải

$$\text{Ta thấy } 3a^2 = bc \Rightarrow 3a^3 = abc \Rightarrow a^3 = \frac{abc}{3}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si:

$$3a^2 = bc \leq \left(\frac{b+c}{2} \right)^2 = \left(\frac{3a^3 - a}{2} \right)^2$$

$$\Rightarrow 3a^2 \leq \frac{(3a^3 - a)^2}{4}$$

$$\Rightarrow 12a^2 \leq (3a^3 - a)^2$$

$$\Rightarrow a^2(3a^2 - 1)^2 \geq 12a^2$$

$$\Rightarrow (3a^2 - 1)^2 - (2\sqrt{3})^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow (3a^2 - 1 + 2\sqrt{3})(3a^2 - 1 - 2\sqrt{3}) \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a^2 - 1 - 2\sqrt{3} \geq 0 \\ 3a^2 - 1 + 2\sqrt{3} \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 \geq \frac{1 - 2\sqrt{3}}{3} \\ a^2 \geq \frac{1 + 2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 \geq \frac{1 + 2\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow a \geq \sqrt{\frac{1+2\sqrt{3}}{3}} \text{ (Do } a > 0 \text{)}.$$

Bài 12: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $(a^4 + b^4)(b^4 + c^4)(c^4 + a^4) = 8$. Chứng minh rằng

$$(a^2 - ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2) \geq 1.$$

Lời giải

+ Ta chứng minh kết quả $2(a^2 - ab + b^2)^2 \geq a^4 + b^4$ (1).

Thật vậy, (1) $\Leftrightarrow 2(a^4 + b^4 + a^2b^2 + 2a^2b^2 - 2ab(a^2 + b^2)) \geq a^4 + b^4$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 - 2ab)^2 \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^4 \geq 0, \text{ bất đẳng thức đúng, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } a = b$$

+ Tương tự có (2): $2(b^2 - bc + c^2)^2 \geq b^4 + c^4$, (3): $2(c^2 - ca + a^2)^2 \geq c^4 + a^4$.

+ Thấy các vế của (1), (2), (3) đều không âm, nhân theo vế các bất đẳng thức này ta được

$$8(a^2 - ab + b^2)^2(b^2 - bc + c^2)^2(c^2 - ca + a^2)^2 \geq (a^4 + b^4)(b^4 + c^4)(c^4 + a^4) = 8$$

Hay $(a^2 - ab + b^2)^2(b^2 - bc + c^2)^2(c^2 - ca + a^2)^2 \geq 1$ (*).

Do $a^2 - ab + b^2, b^2 - bc + c^2, c^2 - ca + a^2 \geq 0$ nên từ (*) suy ra

$$(a^2 - ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2) \geq 1, \text{ có đpcm.}$$

Bài 13: Cho các số dương x, y, z thỏa mãn: $\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{y^2 + z^2} + \sqrt{z^2 + x^2} = 2014$. Tìm giá trị

nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}$.

Lời giải

$$\text{Đặt } a = \sqrt{x^2 + y^2}; b = \sqrt{y^2 + z^2}; c = \sqrt{z^2 + x^2} \text{ (} a, b, c > 0 \text{)}$$

$$\Rightarrow a + b + c = 2014$$

$$a = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow a^2 = x^2 + y^2$$

$$b = \sqrt{y^2 + z^2} \Rightarrow b^2 = y^2 + z^2$$

$$c = \sqrt{z^2 + x^2} \Rightarrow c^2 = z^2 + x^2$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2}; y^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}; z^2 = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô – sy, ta có:

$$y + z \leq \sqrt{2(y^2 + z^2)} = b\sqrt{2} \Rightarrow \frac{x^2}{y+z} \geq \frac{x^2}{b\sqrt{2}}$$

$$z + x \leq \sqrt{2(z^2 + x^2)} = c\sqrt{2} \Rightarrow \frac{y^2}{z+x} \geq \frac{y^2}{c\sqrt{2}}$$

$$x + y \leq \sqrt{2(x^2 + y^2)} = a\sqrt{2} \Rightarrow \frac{z^2}{x + y} \geq \frac{z^2}{a\sqrt{2}}$$

$$T = \frac{x^2}{y + z} + \frac{y^2}{z + x} + \frac{z^2}{x + y} \geq \frac{x^2}{b\sqrt{2}} + \frac{y^2}{c\sqrt{2}} + \frac{z^2}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x^2}{b} + \frac{y^2}{c} + \frac{z^2}{a} \right)$$

$$T \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{b} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{c} + \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{a} \right)$$

$$T \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{a^2}{b} + \frac{c^2}{b} + \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{a} - a - b - c \right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô – sy, ta có:

$$\frac{a^2}{b} + b \geq 2a; \quad \frac{b^2}{a} + a \geq 2b; \quad \frac{c^2}{a} + a \geq 2c$$

$$\frac{a^2}{c} + c \geq 2a; \quad \frac{b^2}{c} + c \geq 2b; \quad \frac{c^2}{b} + b \geq 2c$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b} + \frac{c^2}{b} + \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{a} \geq 4(a + b + c) - 2(a + b + c) = 2(a + b + c) = 2 \cdot 2014 = 4028$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b} + \frac{c^2}{b} + \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{a} - a - b - c \geq 2(a + b + c) - (a + b + c) = a + b + c = 2014$$

$$\Rightarrow T \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 2014 = \frac{1007}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } a = b = c = \frac{2014}{3}$$

$$\text{Vậy } \min T = \frac{1007}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{2014}{3\sqrt{2}}$$

Bài 14: Với x, y là các số thực thay đổi thỏa mãn $1 \leq y \leq 2$ và. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M = \frac{x^2 + 4}{y^2 + 1}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } xy + 2 \geq 2y \Rightarrow 4xy + 8 \geq 8y$$

$$\text{Mà } 4x^2 + y^2 \geq 4xy \Rightarrow 4x^2 + y^2 + 8 \geq 4xy + 8 \geq 8y$$

$$\Rightarrow 4(x^2 + 4) \geq 8y + 8 - y^2$$

$$\Rightarrow 4(x^2 + 4) \geq 4(y^2 + 1) + (5y + 2)(2 - y) \geq 4(y^2 + 1)$$

$$\Rightarrow M = \frac{x^2 + 4}{y^2 + 1} \geq 1$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } x = 1 \text{ và } y = 2$$

$$\text{Vậy } \min M = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Bài 15: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy + yz + xz = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} \geq \frac{2}{3} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \right)^3$$

Lời giải

$$1+x^2 = xy + yz + xz + x^2 = (x+y)(x+z)$$

$$1+y^2 = xy + yz + xz + y^2 = (x+y)(y+z)$$

$$1+z^2 = xy + yz + xz + z^2 = (z+y)(x+z)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} = \frac{2(x+y+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \right)^2 &\leq (x+y+z) \left(\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \right) \\ &= (x+y+z) \left[\frac{x}{(x+y)(x+z)} + \frac{y}{(x+y)(y+z)} + \frac{z}{(z+y)(x+z)} \right] \\ &= \frac{2(x+y+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} \geq \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \right)^2$$

Do đó:

$$\frac{2}{3} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \right)^3 = \frac{4(x+y+z)}{3(x+y)(y+z)(z+x)} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \right)$$

Bất đẳng thức trở thành

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{3}{2}$$

Ta có:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x+y} + \frac{x}{x+z} \right)$$

$$\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{(x+y)(y+z)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x+y} + \frac{y}{y+z} \right)$$

$$\frac{z}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{z}{\sqrt{(x+z)(y+z)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{z}{x+z} + \frac{z}{y+z} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{3}{2}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Bài 16: Với x, y là các số thực dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $4x^2 + 4y^2 + 17xy + 5x + 5y \geq 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 17x^2 + 17y^2 + 16xy$.

Lời giải

Đặt $a = x + y$. Áp dụng bất đẳng thức Cô – sy, ta có:

$$xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{a^2}{4} \text{ hay } \left(\frac{5}{2}a + 1 \right)^2 \geq 2$$

Từ đó, ta có $a \geq \frac{2}{5}(\sqrt{2} - 1)$. Suy ra

$$P = 17x^2 + 17y^2 + 16xy = 17a^2 - 18xy \geq 17a^2 - \frac{9}{2}a^2 \geq 2(\sqrt{2} - 1)^2 = 6 - 4\sqrt{2}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \frac{\sqrt{2} - 1}{5}$.

Bài 17: Cho a, b, c là ba số thực thỏa điều kiện $a + b + c = 10$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$M = a^2 + b^2 + c^2.$$

Lời giải

$$M = a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 100 - 2(ab + bc + ca)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô – sy, ta có:

$$ab \leq \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4}; \quad bc \leq \frac{b^2 + 2bc + c^2}{4}; \quad ca \leq \frac{c^2 + 2ca + a^2}{4}$$

$$\Rightarrow ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$$

$$\Rightarrow M \geq ab + bc + ca$$

$$\Rightarrow M \geq \frac{100 - M}{2}$$

$$\Rightarrow M \geq \frac{100}{3}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ a + b + c = 10 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{10}{3}$$

$$\text{Vậy } \min M = \frac{100}{3} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{10}{3}$$

Bài 18: Cho ba số thực x, y, z . Tìm giá trị lớn nhất biểu thức $S = \frac{xyz(x+y+z+\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)}$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có:

$$(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2) \Rightarrow x+y+z \leq \sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\Rightarrow S \leq \frac{xyz(\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2+z^2} + \sqrt{x^2+y^2+z^2})}{(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)} = \frac{xyz(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}(xy+yz+zx)}$$

$$\Rightarrow S \leq \frac{xyz(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}\sqrt{x^2y^2z^2}\sqrt{3}\sqrt{x^2y^2z^2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{3\sqrt{3}}$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = y = z$

$$\text{Vậy } \max M = \frac{\sqrt{3}+1}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = y = z$$

Bài 19: Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn: $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \frac{x}{1+y^2} + \frac{y}{1+z^2} + \frac{z}{1+x^2}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{x}{1+y^2} + \frac{xy^2}{1+y^2} = x; \quad \frac{y}{1+z^2} + \frac{yz^2}{1+z^2} = y; \quad \frac{z}{1+x^2} + \frac{zx^2}{1+x^2} = z$$

$$\Rightarrow S = \frac{x}{1+y^2} + \frac{y}{1+z^2} + \frac{z}{1+x^2} = (x+y+z) - \left(\frac{xy^2}{1+y^2} + \frac{yz^2}{1+z^2} + \frac{zx^2}{1+x^2} \right)$$

$$\Rightarrow S = 3 - \left(\frac{xy^2}{1+y^2} + \frac{yz^2}{1+z^2} + \frac{zx^2}{1+x^2} \right)$$

$$\text{Ta có: } \frac{xy^2}{1+y^2} \leq \frac{xy^2}{2y} = \frac{xy}{2}; \quad \frac{yz^2}{1+z^2} \leq \frac{yz^2}{2z} = \frac{yz}{2}; \quad \frac{zx^2}{1+x^2} \leq \frac{zx^2}{2x} = \frac{zx}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{xy^2}{1+y^2} + \frac{yz^2}{1+z^2} + \frac{zx^2}{1+x^2} \leq \frac{xy+yz+zx}{2}$$

$$\Rightarrow S \geq 3 - \frac{xy+yz+zx}{2}$$

$$\text{Do } (x+y+z)^2 \geq 2(xy+yz+zx) \Rightarrow xy+yz+zx \leq 3$$

$$\Rightarrow S \geq 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Vậy } \min S = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = y = z = 1$$

Bài 20: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \frac{2}{1-x} + \frac{1}{x}$ với $0 < x < 1$.

Lời giải

$$y = \frac{2}{1-x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{1-x} - 2 + \frac{1}{x} - 1 + 3 = \frac{2x}{1-x} + \frac{1-x}{x} + 3$$

$$\text{Vì } 0 < x < 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{2x}{1-x} > 0 \\ \frac{1-x}{x} > 0 \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô – sy, ta có:

$$\frac{2x}{1-x} + \frac{1-x}{x} \geq 2\sqrt{\frac{2x}{1-x} \cdot \frac{1-x}{x}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow y \geq 2\sqrt{2} + 3$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi: } \frac{2x}{1-x} = \frac{1-x}{x} \Leftrightarrow 2x^2 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 + \sqrt{2} \text{ (nhận) hoặc } x = -1 - \sqrt{2} \text{ (loại)}$$

$$\text{Vậy } \min y = 2\sqrt{2} + 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} - 1$$

Bài 21: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} + \frac{1}{2}(ab+bc+ca) \geq 3$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô – sy cho 2 số dương, ta có:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2; \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2; \frac{c}{a} + \frac{a}{c} \geq 2$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} \geq 6$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + 3 \geq 6 + 3$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c}\right) + \left(\frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1\right) \geq 9$$

$$\Rightarrow a\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(a+b+c) \geq 9$$

$$\Rightarrow \frac{9}{a+b+c} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3$$

$$\Rightarrow a+b+c \geq 3$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô – sy cho 2 số dương, ta có:

$$1+b^2 \geq 2b \Rightarrow \frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2}$$

$$\text{Tương tự, ta có: } \frac{b}{1+c^2} \geq b - \frac{bc}{2}; \frac{c}{1+a^2} \geq c - \frac{ca}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq a+b+c - \frac{1}{2}(ab+bc+ca)$$

$$\Rightarrow \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} + \frac{1}{2}(ab+bc+ca) \geq a+b+c \geq 3$$

Dấu “=” xảy ra khi $a=b=c$

Bài 22: Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x+y+z=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{350}{xy+yz+zx} + \frac{386}{x^2+y^2+z^2} > 2015$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô – sy cho 2 số dương, ta có:

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}} = 4 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$$

$$(x^2+y^2) + (y^2+z^2) + (z^2+x^2) \geq 2xy + 2yz + 2zx$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \geq 3(xy + yz + zx)$$

$$\Rightarrow xy + yz + zx \leq \frac{(x+y+z)^2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P = \frac{350}{xy+yz+zx} + \frac{386}{x^2+y^2+z^2} = 386\left(\frac{1}{2xy+2yz+2zx} + \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right) + \frac{157}{xy+yz+zx}$$

$$\geq 386 \cdot \frac{4}{2xy+2yz+2zx+x^2+y^2+z^2} + \frac{157}{xy+yz+zx}$$

$$= \frac{1544}{(x+y+z)^2} + \frac{157}{xy+yz+zx} = 1544 + \frac{157}{xy+yz+zx} \geq 1544 + \frac{157}{\frac{1}{3}} = 2015$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} x = y = z \\ x + y + z = 1 \\ 2xy + 2yz + 2zx = x^2 + y^2 + z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z = \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{cases} \text{ (không}$$

xảy ra)

Vậy $P > 2015$

Bài 23: Chứng minh rằng: $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2014}{2^{2013}} + \frac{2015}{2^{2014}} < 4$

Lời giải

Đặt $S = \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2014}{2^{2013}} + \frac{2015}{2^{2014}}$, ta có:

$$2S = \frac{3}{2} + \frac{4}{2^2} + \dots + \frac{2014}{2^{2012}} + \frac{2015}{2^{2013}}$$

$$\Rightarrow 2S - S = \frac{3}{2} + \frac{4-3}{2^2} + \frac{5-4}{2^3} + \dots + \frac{2015-2014}{2^{2013}} - \frac{2015}{2^{2014}}$$

$$\Rightarrow S = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2013}}\right) - \frac{2015}{2^{2014}}$$

$$\text{Mà } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2013}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2014}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{2013}}$$

$$\text{Do đó: } S = 2 - \frac{1}{2^{2013}} - \frac{2015}{2^{2014}} < 2$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2014}{2^{2013}} + \frac{2015}{2^{2014}} < 4$$

Bài 24: Cho x, y là hai số dương thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

Lời giải

Ta có:

$$S = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} + \frac{(x+y)^2}{xy} = 1 + \frac{2xy}{x^2+y^2} + \frac{x^2+y^2}{xy} + 2 = 3 + \left(\frac{2xy}{x^2+y^2} + \frac{x^2+y^2}{2xy}\right) + \frac{x^2+y^2}{2xy}$$

Do x, y là các số dương nên ta có:

$$\frac{2xy}{x^2+y^2} + \frac{x^2+y^2}{2xy} \geq 2\sqrt{\frac{2xy}{x^2+y^2} \cdot \frac{x^2+y^2}{2xy}} = 2$$

$$(x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{2xy} \geq 1$$

$$\Rightarrow S = 3 + \left(\frac{2xy}{x^2 + y^2} + \frac{x^2 + y^2}{2xy} \right) + \frac{x^2 + y^2}{2xy} \geq 3 + 2 + 1 = 6$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2}{2xy} \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow x = y$$

Vậy $\min S = 6 \Leftrightarrow x = y$

Bài 25: Cho a, b là các số dương thỏa mãn điều kiện $(a+b)^3 + 4ab \leq 12$. Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + 2015ab \leq 2016$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 12 \geq (a+b)^3 + 4ab \geq (2\sqrt{ab})^3 + 4ab$$

Đặt $t = \sqrt{ab}$ ($t > 0$), ta có:

$$12 \geq 8t^3 + 4t^2 \Leftrightarrow 2t^3 + t^2 - 3 \leq 0 \Leftrightarrow (t-1)(2t^2 + 3t + 3) \leq 0$$

Do $2t^2 + 3t + 3 > 0$ với mọi t

$$\text{Nên } t - 1 \leq 0 \Leftrightarrow t \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 < ab \leq 1$$

Chứng minh được: $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \leq \frac{2}{1+\sqrt{ab}}, \forall a, b > 0$ thỏa mãn $ab \leq 1$

$$\text{Thật vậy, BĐT } \frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+\sqrt{ab}} + \frac{1}{1+b} - \frac{1}{1+\sqrt{ab}} \leq 0$$

$$\frac{\sqrt{ab} - a}{(1+a)(1+\sqrt{ab})} + \frac{\sqrt{ab} - b}{(1+b)(1+\sqrt{ab})} \leq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{1+\sqrt{ab}} \right) \left(\frac{\sqrt{a}}{1+a} - \frac{\sqrt{b}}{1+b} \right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2 (\sqrt{ab} - 1)}{(1+\sqrt{ab})(1+a)(1+b)} \leq 0. \text{ Do } 0 < ab \leq 1 \text{ nên BĐT này đúng}$$

Tiếp theo ta sẽ CM $\frac{2}{1+\sqrt{ab}} + 2015ab \leq 2016, \forall a, b > 0$ thỏa mãn $ab \leq 1$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{ab}, 0 < t \leq 1 \text{ ta được } \frac{2}{1+t} + 2015t^2 \leq 2016$$

$$2015t^3 + 2015t^2 - 2016t - 2014 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(2015t^2 + 4030t + 2014) \leq 0. \text{ BĐT này đúng } \forall t: 0 < t \leq 1$$

Vậy $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + 2015ab \leq 2016$. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$

Bài 26: Cho 3 số thực dương x, y, z thỏa mãn: $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

$$\text{thức: } P = \frac{y^2 z^2}{x(y^2 + z^2)} + \frac{z^2 x^2}{y(z^2 + x^2)} + \frac{x^2 y^2}{z(x^2 + y^2)}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } P = \frac{1}{x\left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{y^2}\right)} + \frac{1}{y\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{z^2}\right)} + \frac{1}{z\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)}$$

$$\text{Đặt } \frac{1}{x} = a; \frac{1}{y} = b; \frac{1}{z} = c \Rightarrow a, b, c > 0 \text{ và } a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

$$P = \frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{c^2 + a^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} = \frac{a^2}{a(1-a^2)} + \frac{b^2}{b(1-b^2)} + \frac{c^2}{c(1-c^2)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương ta có:

$$a^2(1-a^2)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2a^2(1-a^2)(1-a^2) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2a^2 + 1 - a^2 + 1 - a^2}{3} \right) = \frac{4}{27}$$

$$\Rightarrow a(1-a^2) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{a^2}{a(1-a^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 \quad (1)$$

$$\text{Tương tự: } \frac{b^2}{b(1-b^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} b^2 \quad (2); \quad \frac{c^2}{c(1-c^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} c^2 \quad (3)$$

$$\text{Từ (1); (2); (3)} \Rightarrow P \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} (a^2 + b^2 + c^2) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ hay } x = y = z = \sqrt{3}$$

$$\text{Vậy } \min P = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Bài 27: Cho a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng.

Lời giải

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} \geq \frac{4a}{a+c} \Leftrightarrow (ac + b^2)(a+c) \geq 4abc$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$$ac + b^2 \geq 2\sqrt{ab^2c} > 0$$

$$a + c \geq 2\sqrt{ac} > 0$$

$$\Rightarrow (ac + b^2)(a+c) \geq 4abc$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{c} \geq \frac{4a}{a+c}$$

Bài 28: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng:

$$a\sqrt{b^2+1} + b\sqrt{c^2+1} + c\sqrt{a^2+1} \geq 2. \text{ Dấu "}" xảy ra khi nào?}$$

Lời giải

$$a\sqrt{b^2+1} + b\sqrt{c^2+1} + c\sqrt{a^2+1} \geq 2$$

$$\Leftrightarrow a(b^2+1) + b(c^2+1) + c(a^2+1) + 2ab\sqrt{(b^2+1)(c^2+1)} + 2bc\sqrt{(c^2+1)(a^2+1)} + 2ca\sqrt{(b^2+1)(a^2+1)} \geq 4$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)} = \sqrt{a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1} \geq \sqrt{a^2b^2 + 2ab + 1} = ab + 1$$

Đặt

$$S = a(b^2+1) + b(c^2+1) + c(a^2+1) + 2ab\sqrt{(b^2+1)(c^2+1)} + 2bc\sqrt{(c^2+1)(a^2+1)} + 2ca\sqrt{(b^2+1)(a^2+1)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S &\geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + a^2 + b^2 + c^2 + 2ab(bc+1) + 2bc(ca+1) + 2ca(ab+1) \\ &= (ab+bc+ca)^2 + (a+b+c)^2 \\ &\geq (ab+bc+ca)^2 + 3(ab+bc+ca) = 4 \end{aligned}$$

$$\text{Dấu "}" xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} a=b=c>0 \\ ab+1=bc+1=ca+1 \Leftrightarrow a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3} \\ ab+bc+ca=1 \end{cases}$$

Bài 29: Cho ba số $a, b, c \geq 1$ thỏa mãn $32abc = 18(a+b+c) + 27$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{\sqrt{a^2-1}}{a} + \frac{\sqrt{b^2-1}}{b} + \frac{\sqrt{c^2-1}}{c}$$

Lời giải

Sử dụng bất đẳng thức : Với $x, y, z \geq 0$, ta luôn có $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{3(x+y+z)}$

Từ bất đẳng thức đã cho ta có:

$$P = \sqrt{1-\frac{1}{a^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{b^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{c^2}} \leq \sqrt{3\left[3-\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\right]} = \sqrt{9-3\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)}$$

$$\text{Suy ra } P \leq \sqrt{9-\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}$$

Từ giả thiết $32abc = 18(a+b+c) + 27 \Leftrightarrow 18\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) + \frac{27}{abc} = 32$ (*)

Ta có $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \leq \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2$ và $\frac{1}{abc} \leq \frac{1}{27} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^3$

Đặt $t = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Từ (*) ta có

$$18\left(\frac{t^2}{3}\right) + 27 \cdot \left(\frac{t^3}{27}\right) \geq 32 \Leftrightarrow t^3 + 6t^2 - 32 \geq 0 \Leftrightarrow (t-2)(t+4)^2 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 2$$

Suy ra $P \leq \sqrt{9 - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2} \leq \sqrt{9 - 2^2} = \sqrt{5}$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{3}{2}$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\sqrt{5}$

Bài 30: Tìm GTNN của $A = \frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x}$ biết $x, y, z > 0$, $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 1$.

Lời giải

$$\frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x} \geq \frac{x+y+z}{2}.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy :

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}; \frac{y+z}{2} \geq \sqrt{yz}; \frac{z+x}{2} \geq \sqrt{zx} \text{ nên } \frac{x+y+z}{2} \geq \frac{\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Min } A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}.$$

Bài 31: a) Cho ba số dương a, b, c . Chứng minh rằng $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$

b) Cho 3 số dương x, y, z thỏa điều kiện $x+y+z=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1}$$

Lời giải

a) Ta có:

$$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \quad (1)$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a \cdot b \cdot c}} \quad (2)$$

(1) nhân (2) vế theo vế, ta được $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$

$$b) \quad P = \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1}$$

$$P = 1 - \frac{1}{x+1} + 1 - \frac{1}{y+1} + 1 - \frac{1}{z+1} = 3 - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1}\right)$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Ta có : $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq \frac{9}{a+b+c}$ (theo câu a)

Nên $\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1}\right) \geq \frac{9}{x+1+y+1+z+1} = \frac{9}{4}$

$$P \leq 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

Vậy GTLN của P là $\frac{3}{4}$ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$

Bài 32: So sánh 2 số: $\sqrt{2011} - \sqrt{2010}$ và $\sqrt{2010} - \sqrt{2009}$

Lời giải

Ta có: $\sqrt{2011} - \sqrt{2010} = \frac{(\sqrt{2011} - \sqrt{2010})(\sqrt{2011} + \sqrt{2010})}{\sqrt{2011} + \sqrt{2010}} = \frac{1}{\sqrt{2011} + \sqrt{2010}}$

$$\sqrt{2010} - \sqrt{2009} = \frac{(\sqrt{2010} - \sqrt{2009})(\sqrt{2010} + \sqrt{2009})}{\sqrt{2010} + \sqrt{2009}} = \frac{1}{\sqrt{2010} + \sqrt{2009}}$$

Ta thấy $\sqrt{2011} + \sqrt{2010} > \sqrt{2010} + \sqrt{2009} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2011} + \sqrt{2010}} < \frac{1}{\sqrt{2010} + \sqrt{2009}}$

Vậy $\sqrt{2011} - \sqrt{2010} < \sqrt{2010} - \sqrt{2009}$

Bài 33: Chứng minh bất đẳng thức: $\sqrt{ab} \geq \sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)}$ (với $a > c, b > c, c > 0$)

Lời giải

Ta có $\sqrt{ab} \geq \sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)}$ (với $a > c, b > c, c > 0$)

$$\Leftrightarrow ab \geq c(a-c) + 2\sqrt{c(a-c)c(b-c)} + c(b-c)$$

$$\Leftrightarrow ab \geq ac - c^2 + 2\sqrt{c(a-c)c(b-c)} + bc - c^2$$

$$\Leftrightarrow c^2 - 2c\sqrt{(a-c)(b-c)} + (ab - bc) - (ac - c^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow c^2 - 2c\sqrt{(a-c)(b-c)} + b(a-c) - c(a-c) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow c^2 - 2c\sqrt{(a-c)(b-c)} + (a-c)(b-c) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(c - \sqrt{(a-c)(b-c)}\right)^2 \geq 0 \quad (\text{luôn đúng với mọi } a > c, b > c, c > 0)$$

Vậy $\sqrt{ab} \geq \sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)}$ (với $a > c, b > c, c > 0$)

Bài 34: Cho a, b, c là ba số dương. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$$

Lời giải

Áp dụng Côsi: $\sqrt{\frac{b+c}{a}} \cdot 1 \leq \frac{1}{2} \left(\frac{b+c}{a} + 1\right) = \frac{a+b+c}{2a}$

Suy ra: $\sqrt{\frac{a}{b+c}} \geq \frac{2a}{a+b+c}$ (dấu "=" khi $a = b + c$)

Tương tự: $\sqrt{\frac{b}{a+c}} \geq \frac{2b}{a+b+c}$ (dấu "=" khi $b = c + a$)

$$\sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{2c}{a+b+c} \quad (\text{dấu "=" khi } c = a + b)$$

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức trên, ta được: $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2$

Dấu "=" không xảy ra $\Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$

Bài 35: Cho x, y, z là ba số dương thỏa mãn $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{x + \sqrt{3x + yz}} + \frac{y}{y + \sqrt{3y + zx}} + \frac{z}{z + \sqrt{3z + xy}} \leq 1$$

Lời giải

Từ $(x - \sqrt{yz})^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + yz \geq 2x\sqrt{yz}$ (*) Dấu "=" $\Leftrightarrow x^2 = yz$

Chỉ ra: $3x + yz = (x + y + z)x + yz = x^2 + yz + x(y + z) \geq 2x\sqrt{yz} + x(y + z)$

Suy ra: $\sqrt{3x + yz} \geq \sqrt{2x\sqrt{yz} + x(y + z)} = \sqrt{x}(\sqrt{y} + \sqrt{z})$ (Áp dụng (*))

$$x + \sqrt{3x + yz} \geq \sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) \Rightarrow \frac{x}{x + \sqrt{3x + yz}} \leq \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự: } \frac{y}{y + \sqrt{3y + zx}} \leq \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}} \quad (2); \quad \frac{z}{z + \sqrt{3z + xy}} \leq \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3)} \Rightarrow \frac{x}{x + \sqrt{3x + yz}} + \frac{y}{y + \sqrt{3y + zx}} + \frac{z}{z + \sqrt{3z + xy}} \leq 1$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = 1$.

Bài 36: Cho x, y thỏa mãn $\begin{cases} x, y \in \mathbb{R} \\ 0 \leq x, y \leq \frac{1}{2} \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{x}}{1+y} + \frac{\sqrt{y}}{1+x} \leq \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Từ giả thiết suy ra:

$$+) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{x} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{y} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\sqrt{xy} \quad (1)$$

$$+) x\sqrt{x} \leq x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad y\sqrt{y} \leq y \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x\sqrt{x} + y\sqrt{y} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \quad (2)$$

Lại có:

$$\begin{cases} \sqrt{xy} \leq xy + \frac{1}{4} \\ \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{xy} \leq \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(xy + \frac{1}{4}\right) \\ \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{xy} \leq \frac{\sqrt{2}}{6}(x+y) \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{xy} \leq \frac{\sqrt{2}}{6}(x+y) \end{cases} \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3) và (4) ta có:

$$\begin{aligned} x\sqrt{x} + y\sqrt{y} + \sqrt{x} + \sqrt{y} &\leq \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(xy + \frac{1}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{6}(x + y) \\ &\leq \frac{2\sqrt{2}}{3}(1 + x + y + xy) \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: VT} = \frac{\sqrt{x}}{1+y} + \frac{\sqrt{y}}{1+x} = \frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y} + \sqrt{x} + \sqrt{y}}{1 + x + y + xy} \leq \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad (\text{đpcm})$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi: $x = y = \frac{1}{2}$

Bài 37: a) Cho bốn số thực bất kì a, b, c, d . Chứng minh: $|ab + cd| \leq \sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 + d^2)}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

b) Với giá trị nào của góc nhọn α thì biểu thức $P = 3\sin \alpha + \sqrt{3}\cos \alpha$ có giá trị lớn nhất? Cho biết giá trị lớn nhất đó.

Lời giải

a) Ta có:

$$0 \leq |ab + cd| \leq \sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 + d^2)} \Leftrightarrow (ab + cd)^2 \leq (a^2 + c^2)(b^2 + d^2)$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2 + c^2d^2 + 2abcd \leq a^2b^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + c^2d^2$$

$$\Leftrightarrow (ad)^2 + (bc)^2 - 2(ad)(bc) \geq 0 \Leftrightarrow (ad - bc)^2 \geq 0: \text{đúng với 4 số thực } a, b, c, d \text{ bất kì.}$$

$$\text{Vậy: } 0 \leq |ab + cd| \leq \sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 + d^2)}, \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $ad - bc = 0$ hay $\frac{c}{a} = \frac{d}{b} (a \neq 0, b \neq 0)$

b) Áp dụng kết quả trên, ta có:

$$P = 3\sin \alpha + \sqrt{3}\cos \alpha > 0 \text{ nên } P = 3\sin \alpha + \sqrt{3}\cos \alpha \leq \sqrt{(3^2 + (\sqrt{3})^2)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)} = 2\sqrt{3}$$

$$P_{\max} = 2\sqrt{3} \text{ khi } 3\cos \alpha - \sqrt{3}\sin \alpha = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \tan \alpha = \sqrt{3} \Leftrightarrow \alpha = 60^\circ.$$

Bài 38: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx = 2xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

$$\text{thức: } P = \frac{x}{z(z+x)} + \frac{y}{x(x+y)} + \frac{z}{y(y+z)}$$

Lời giải

Áp dụng BĐT Cô-si cho hai số dương, ta có:

$$\frac{2x^2y}{z+x} + \frac{y(z+x)}{2} \geq 2\sqrt{\frac{2x^2y}{z+x} \cdot \frac{y(z+x)}{2}} = 2xy(1)$$

Tương tự ta có:

$$\frac{2y^2z}{x+y} + \frac{z(x+y)}{2} \geq 2yz(2)$$

$$\frac{2z^2x}{y+z} + \frac{x(y+z)}{2} \geq 2zx(3)$$

Cộng từng vế của (1), (2) và (3), ta có:

$$\frac{2x^2y}{z+x} + \frac{2y^2z}{x+y} + \frac{2z^2x}{y+z} + xy + yz + zx \geq 2(xy + yz + zx)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2y}{z+x} + \frac{2y^2z}{x+y} + \frac{2z^2x}{y+z} \geq xy + yz + zx$$

Chia cả hai vế của BĐT cho $2xyz$, ta có:

$$P = \frac{x}{z(z+x)} + \frac{y}{x(x+y)} + \frac{z}{y(y+z)} \geq \frac{xy + yz + zx}{2xyz} = 1$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = \frac{3}{2}$

Vậy GTNN của P là 1 khi $x = y = z = \frac{3}{2}$.

Bài 39: Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng $a^5 + b^5 + c^5 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 6$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có:

$$a^5 + \frac{1}{a} \geq 2a^2$$

$$b^5 + \frac{1}{b} \geq 2b^2$$

$$c^5 + \frac{1}{c} \geq 2c^2$$

$$\text{Suy ra } a^5 + b^5 + c^5 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

Mặt khác $a^2 + 1 \geq 2a$; $b^2 + 1 \geq 2b$; $c^2 + 1 \geq 2c$

$$\text{Suy ra } a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a + 2b + 2c - 3 = 3$$

$$\text{Vậy } a^5 + b^5 + c^5 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 6 \text{ (đpcm).}$$

Bài 40: Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có ba góc nhọn. Chứng minh rằng với mọi số

$$\text{thực } x, y, z \text{ ta luôn có: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} > \frac{2x^2 + 2y^2 + 2z^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Lời giải

Vì $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ ta có:

$$\begin{aligned} & (a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) \\ &= x^2 \left(2 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{a^2} \right) + y^2 \left(2 + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{b^2} \right) + z^2 \left(2 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{c^2} \right) \\ &= 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + x^2 \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{a^2} \right) + y^2 \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{b^2} \right) + z^2 \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{c^2} \right) \quad (*) \end{aligned}$$

Giả sử $a \leq b \leq c$ thì $c^2 - a^2 \geq 0$; $c^2 - b^2 \geq 0$. Với cạnh c lớn nhất, $\angle ACB$ nhọn (gt) do vậy kẻ đường cao BH ta có $c^2 = BH^2 + HA^2 \leq BC^2 + CA^2 = a^2 + b^2$ từ đó suy ra biểu thức (*) là không âm suy ra điều phải chứng minh.

Bài 41: Cho biểu thức $B = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$. Tìm giá trị lớn nhất của B và giá trị x tương ứng.

Lời giải

Với điều kiện xác định: $2 \leq x \leq 4$. Ta có $B \geq 0$

$$B^2 = 2 + 2\sqrt{(x-2)(4-x)}$$

$$\text{Ta có: } (\sqrt{x+2} - \sqrt{4-x})^2 \geq 0 \Rightarrow x-2+4-x \geq 2\sqrt{(x-2)(4-x)}$$

$$\text{Do đó: } B^2 = 2 + 2\sqrt{(x-2)(4-x)} \leq 2+2$$

$$\Rightarrow B^2 \leq 4$$

$$\Rightarrow B \leq 2$$

Vậy B lớn nhất là bằng 2 khi $x-2 = 4-x \Rightarrow x = 3$.

Bài 42: Cho x, y là 2 số dương thỏa mãn $x + y = 1$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\left(1 - \frac{1}{y^2}\right).$$

Giải :ĐK: $xy \neq 0$; Từ giả thiết $\Rightarrow x^2 + y^2 = 1 - 2xy$

$$\text{Ta có } P = \frac{(x^2 - 1)(y^2 - 1)}{x^2 y^2} = \frac{x^2 y^2 - (x^2 + y^2) + 1}{x^2 y^2} = \frac{x^2 y^2 - 1 + 2xy + 1}{x^2 y^2} = \frac{x^2 y^2 + 2xy}{x^2 y^2} = 1 + \frac{2}{xy}.$$

$$\text{Mặt khác ta có } (x - y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow (x + y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow 1 \geq 4xy \\ \Rightarrow \frac{1}{4} \geq xy \Leftrightarrow \frac{1}{xy} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{2}{xy} \geq 8 \Rightarrow P \geq 1 + 8 = 9$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \frac{1}{2}$. Thỏa ĐK

$$\text{Vậy } \min P = 9 \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}.$$

Bài 43: Cho ba số thực $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 2013$.

$$\text{Chứng minh } \frac{a}{a + \sqrt{2013a + bc}} + \frac{b}{b + \sqrt{2013b + ca}} + \frac{c}{c + \sqrt{2013c + ab}} \leq 1.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Giải:

$$\text{Ta có } 2013a + bc = (a + b + c)a + bc = a^2 + ab + ac + bc = a^2 + bc + a(b + c)$$

Theo BĐT Cô-Si cho hai số dương ta có $a^2 + bc \geq 2a\sqrt{bc}$. Từ đó

$$a^2 + bc + a(b + c) \geq 2a\sqrt{bc} + a(b + c) = a(b + c + 2\sqrt{bc}) = a(\sqrt{b} + \sqrt{c})^2$$

$$\text{Vậy } \frac{a}{a + \sqrt{2013a + bc}} \leq \frac{a}{a + \sqrt{a(\sqrt{b} + \sqrt{c})^2}} = \frac{a}{\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} \quad (1)$$

Chứng minh tương tự được

$$\frac{b}{b + \sqrt{2013b + ca}} \leq \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} \quad (2) \text{ và } \frac{c}{c + \sqrt{2013c + ab}} \leq \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} \quad (3)$$

Cộng từng vế của (1); (2); (3) ta được

$$\frac{a}{a + \sqrt{2013a + bc}} + \frac{b}{b + \sqrt{2013b + ca}} + \frac{c}{c + \sqrt{2013c + ab}} \leq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} = 1$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = bc \\ b^2 = ca \\ c^2 = ab \\ a + b + c = 2013 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 671$$

Bài 44: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $2ab + 6bc + 2ac = 7abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = \frac{4ab}{a + 2b} + \frac{9ac}{a + 4c} + \frac{4bc}{b + c}$.

Giải:

Từ gt : $2ab + 6bc + 2ac = 7abc$ và $a, b, c > 0$

$$\text{Chia cả hai vế cho } abc > 0 \Rightarrow \frac{2}{c} + \frac{6}{a} + \frac{2}{b} = 7$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\text{đặt } x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c} \Rightarrow \begin{cases} x, y, z > 0 \\ 2z + 6x + 2y = 7 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } C = \frac{4ab}{a+2b} + \frac{9ac}{a+4c} + \frac{4bc}{b+c} = \frac{4}{2x+y} + \frac{9}{4x+z} + \frac{4}{y+z}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow C &= \frac{4}{2x+y} + 2x + y + \frac{9}{4x+z} + 4x + z + \frac{4}{y+z} + y + z - (2x + y + 4x + z + y + z) \\ &= \left(\frac{2}{\sqrt{x+2y}} - \sqrt{x+2y} \right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{4x+z}} - \sqrt{4x+z} \right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{y+z}} - \sqrt{y+z} \right)^2 + 17 \geq 17 \end{aligned}$$

$$\text{Khi } x = \frac{1}{2}, y = z = 1 \text{ thì } C = 7$$

Vậy GTNN của C là 7 khi $a=2; b=1; c=1$

Bài 45: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=3$

$$\text{Chứng minh rằng } \frac{2x^2 + y^2 + z^2}{4 - yz} + \frac{2y^2 + x^2 + z^2}{4 - xz} + \frac{2z^2 + y^2 + x^2}{4 - yx} \geq 4xyz$$

Giải:

$$\frac{2x^2 + y^2 + z^2}{4 - yz} + \frac{2y^2 + x^2 + z^2}{4 - xz} + \frac{2z^2 + y^2 + x^2}{4 - yx} \geq 4xyz$$

$$\Leftrightarrow M = \frac{x^2 + y^2 + x^2 + z^2}{xyz(4 - yz)} + \frac{x^2 + y^2 + y^2 + z^2}{xyz(4 - xz)} + \frac{z^2 + y^2 + x^2 + z^2}{xyz(4 - yx)} \geq 4(*)$$

$$\Leftrightarrow M \geq \frac{2xy + 2xz}{xyz(4 - yz)} + \frac{2xy + 2yz}{xyz(4 - xz)} + \frac{2xz + 2yz}{xyz(4 - yx)} = N$$

$$N = 2 \left(\frac{y+z}{yz(4 - yz)} + \frac{x+z}{xz(4 - xz)} + \frac{x+z}{yx(4 - yx)} \right)$$

$$N = 2 \left(\frac{1}{z(4 - yz)} + \frac{1}{x(4 - yz)} + \frac{1}{y(4 - yx)} \right) + 2 \left(\frac{1}{y(4 - yz)} + \frac{1}{zx(4 - yz)} + \frac{1}{x(4 - yx)} \right)$$

$$N \geq \frac{6}{\sqrt[3]{xyz(4 - yz)(4 - xz)(4 - xy)}} + \frac{6}{\sqrt[3]{xyz(4 - yz)(4 - xz)(4 - xy)}} = \frac{12\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3xyz(4 - yz)(4 - xz)(4 - xy)}}$$

Mặt khác

$$3xyz(4 - xz)(4 - yz)(4 - xy) \leq \left(\frac{3xyz + 4 - xz + 4 - xy + 4 - yz}{4} \right)^4 = \left(\frac{3xyz + 12 - xz - xy - yz}{4} \right)^4$$

$$\text{Mà } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z} = 3 \Leftrightarrow \frac{xy + yz + xz}{xyz} \geq 3 \Leftrightarrow 3xyz - xy - xz - yz \leq 0$$

$$3xyz(4 - xz)(4 - yz)(4 - xy) \leq \left(\frac{3xyz + 12 - xz - xy - yz}{4} \right)^4 = 81 \Leftrightarrow \sqrt[3]{3xyz(4 - xy)(4 - xz)(4 - yz)} \leq 3\sqrt[3]{3}$$

$$\text{Nên } M \geq N \geq \frac{12\sqrt[3]{3}}{3\sqrt[3]{3}} = 4 \text{ BĐT (*) được cm dấu "=" xảy ra khi } x=y=z=1$$

Bài 46: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $x + y = 1$.

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B = \frac{1}{x^3 + y^3} + \frac{1}{xy}$.

Giải:

$$\text{Ta có: } B = \frac{1}{(x+y)^3 - 3xy(x+y)} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{1-3xy} + \frac{1}{xy} = \frac{1-2xy}{xy(1-3xy)}.$$

$$\text{Theo Côsi: } xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Gọi } B_0 \text{ là một giá trị của } B, \text{ khi đó, tồn tại } x, y \text{ để: } B_0 = \frac{1-2xy}{xy(1-3xy)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3B_0(xy)^2 - (2+B_0)xy + 1 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Để tồn tại } x, y \text{ thì (1) phải có nghiệm } xy \Leftrightarrow \Delta = B_0^2 - 8B_0 + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} B_0 \geq 4+2\sqrt{3} \\ B_0 \leq 4-2\sqrt{3} \end{cases}$$

Đề ý rằng với giả thiết bài toán thì $B > 0$. Do đó ta có: $B_0 \geq 4+2\sqrt{3}$.

$$\text{Với } B_0 = 4+2\sqrt{3} \Rightarrow xy = \frac{2+B_0}{6B_0} = \frac{3+\sqrt{3}}{6(2+\sqrt{3})} \Rightarrow x(1-x) = \frac{3+\sqrt{3}}{6(2+\sqrt{3})} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + \frac{3+\sqrt{3}}{6(2+\sqrt{3})} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2}, x = \frac{1-\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2}.$$

$$\text{Vậy, } B_{\min} = 4+2\sqrt{3}, \text{ đạt được khi } x = \frac{1+\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2}, y = \frac{1-\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2} \text{ hoặc}$$

$$x = \frac{1-\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2}, y = \frac{1+\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}-1}}{2}.$$

Bài 47: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

Giải:

$$\text{Đặt } a = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, \text{ ta có } M = a + \frac{1}{a} = \frac{3a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{1}{a}$$

$$\text{Vì } a = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \text{ nên } \frac{3a}{4} \geq \frac{3}{2};$$

$$\text{Ta có } \frac{a}{4} + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{4} \cdot \frac{1}{a}} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\text{Do đó } M = a + \frac{1}{a} = \frac{3a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{1}{a} \geq \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}; M = \frac{5}{2} \Leftrightarrow a = 2 \Leftrightarrow x = y$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M bằng $\frac{5}{2}$ khi và chỉ khi $x = y$.

Bài 48: Cho x, y thỏa mãn $\begin{cases} x, y \in \mathbb{R} \\ 0 \leq x, y \leq \frac{1}{2} \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{x}}{1+y} + \frac{\sqrt{y}}{1+x} \leq \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Giải:

Từ giả thiết suy ra:

$$+) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{x} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{y} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\sqrt{xy} \quad (1)$$

$$+) x\sqrt{x} \leq x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad y\sqrt{y} \leq y \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x\sqrt{x} + y\sqrt{y} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \quad (2)$$

Lại có:

$$\begin{cases} \sqrt{xy} \leq xy + \frac{1}{4} \\ \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{xy} \leq \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(xy + \frac{1}{4}\right) \\ \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{xy} \leq \frac{\sqrt{2}}{6}(x+y) \end{cases} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) và (4) ta có:

$$\begin{aligned} x\sqrt{x} + y\sqrt{y} + \sqrt{x} + \sqrt{y} &\leq \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(xy + \frac{1}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{6}(x+y) \\ &\leq \frac{2\sqrt{2}}{3}(1+x+y+xy) \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } VT = \frac{\sqrt{x}}{1+y} + \frac{\sqrt{y}}{1+x} = \frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y} + \sqrt{x} + \sqrt{y}}{1+x+y+xy} \leq \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad (\text{đpcm})$$

Bài 49: Cho x, y là 2 số thực thỏa mãn: $x^2 + 2y^2 + 2xy + 7x + 7y + 10 = 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = x + y + 1$.

Giải:

$$x^2 + 2y^2 + 2xy + 7x + 7y + 10 = 0.$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 + 7(x+y) + 10 = -y^2$$

$$\Leftrightarrow (x+y+2)(x+y+5) = -y^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -4 \leq x+y+1 \leq -1$$

$$* x+y+1 = -4 \text{ khi } x = -5; y = 0$$

$$* x+y+1 = -1 \text{ khi } x = -2; y = 0$$

$$\text{Vậy } A_{\min} = -4 \text{ khi } x = -5; y = 0$$

$$A_{\max} = -1 \text{ khi } x = -2; y = 0$$

Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

Bài 50: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}}$$

Giải:

Vì $a, b, c > 0$ nên $\frac{a}{a+b} < 1 \Rightarrow \frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c}$.

Tương tự: $\frac{b}{b+c} < \frac{b+a}{a+b+c}; \quad \frac{c}{c+a} < \frac{c+b}{a+b+c}$

$$\Rightarrow \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2 \quad (1)$$

* Ta có: $\sqrt{\frac{a}{b+c}} = \frac{a}{\sqrt{a(b+c)}}$

Vì $a, b, c > 0$ nên theo bất đẳng thức Cô- si ta có:

$$\frac{a + (b+c)}{2} \geq \sqrt{a(b+c)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{a+b+c} \leq \frac{1}{\sqrt{a(b+c)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a}{a+b+c} \leq \frac{a}{\sqrt{a(b+c)}} \Leftrightarrow \frac{2a}{a+b+c} \leq \sqrt{\frac{a}{b+c}}$$

Tương tự: $\frac{2b}{a+b+c} \leq \sqrt{\frac{b}{c+a}}; \quad \frac{2c}{a+b+c} \leq \sqrt{\frac{c}{b+a}}$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2$$

Dấu '=' xảy ra khi $a = b + c; b = c + a; c = a + b$

tức là $a = b = c$ (vô lý).

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2 \quad (2)$$

Từ (1) (2) ta có đpcm.

Bài 51: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{4x+3}{x^2+1}$

Giải:

Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{4x+3}{x^2+1}$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Ta có: $A = \frac{4x+3}{x^2+1} = -1 + \frac{x^2+4x+4}{x^2+1}$

$$A = -1 + \frac{(x+2)^2}{x^2+1} \geq -1$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$

Vậy $A_{\min} = -1$ khi $x = -2$

Bài 52: Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng: $\frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} \geq 3$

Giải:

Sử dụng bất đẳng thức Cô si

Ta có: $\frac{a+1}{b^2+1} = a+1 - \frac{b^2(a+1)}{b^2+1} \geq a+1 - \frac{b^2(a+1)}{2b} = a+1 - \frac{b+ab}{2}$ (1)

Tương tự: $\frac{b+1}{c^2+1} \geq b+1 - \frac{c+bc}{2}$ (1)

và $\frac{c+1}{a^2+1} \geq c+1 - \frac{a+ca}{2}$ (3)

Từ (1); (2) và (3) suy ra:

$$\frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} \geq \frac{a+b+c}{2} + 3 - \frac{ab+bc+ca}{2}$$

Mặt khác $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$

hay $3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2 = 9$

Do đó: $\frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} \geq \frac{a+b+c}{2} + 3 - \frac{ab+bc+ca}{2}$

$$= \frac{3}{2} + 3 - \frac{9}{6} = 3$$

Vậy $\frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{a^2+1} \geq 3$. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$

Bài 53: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $Q = \frac{2016x^2 + 2x + 2016}{x^2 + 1}$

Giải:

Ta có:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{2016x^2 + 2x + 2016}{x^2 + 1} = \frac{(2017x^2 + 2017) - (x^2 - 2x + 1)}{x^2 + 1} \\ &= \frac{2017(x^2 + 1) - (x-1)^2}{x^2 + 1} = 2017 - \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1} \quad (*) \end{aligned}$$

Vì $\frac{(x-1)^2}{x^2+1} \geq 0$ nên từ (*) $\Rightarrow Q \leq 2017$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

Vậy $\max Q = 2017 \Leftrightarrow x=1$

Bài 54: Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng : $1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$

Giải:

Vì a, b, c là các số dương (gt) nên ta có:

$$\frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c} \quad (1)$$

$$\frac{b}{a+b+c} < \frac{b}{b+c} < \frac{b+a}{b+c+a} \quad (2)$$

$$\frac{c}{a+b+c} < \frac{c}{c+a} < \frac{c+b}{c+a+b} \quad (3)$$

Cộng từng vế (1), (2) và (3), ta có: $1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$

Bài 55: Tìm GTNN của biểu thức: $A = \frac{3-4\sqrt{x}}{x+1}$

Giải:

. ĐK: $x \geq 0$

$$A = \frac{3-4\sqrt{x}}{x+1} = \frac{(x-4\sqrt{x}-4)-(x+1)}{x+1} = \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{x+1} - 1 \geq -1 \quad (\text{vì } x \geq 0)$$

Chỉ ra được: Min $A = -1$ khi $x = 4$ (tmdk)

Bài 56: Cho x, y, z là các số không âm và $x + y + z = 1$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} \leq \sqrt{6}$

Giải:

Áp dụng BĐT Bunhiakopski có

$$\begin{aligned} A^2 &= \left(1 \cdot \sqrt{x+y} + 1 \cdot \sqrt{y+z} + 1 \cdot \sqrt{z+x}\right)^2 \\ &\leq (1^2 + 1^2 + 1^2) \left((\sqrt{x+y})^2 + (\sqrt{y+z})^2 + (\sqrt{z+x})^2 \right) \\ &= 3.2(x+y+z) = 6.1 = 6 \quad (\text{vì } x+y+z=1) \end{aligned}$$

Suy được $A \leq \sqrt{6}$ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$

Bài 57: Cho tam giác ABC có chu vi $2p = a + b + c$ (a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác).

Chứng minh rằng : $\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$.

Giải:

Chỉ ra được: $p-a = \frac{b+c-a}{2} > 0; p-b > 0; p-c > 0$

Áp dụng BĐT Cô si ta có :

$$[(p-a) + (p-b)] \left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} \right) \geq 2\sqrt{(p-a)(p-b)} \cdot \frac{2}{\sqrt{(p-a)(p-b)}} = 4$$

$$\text{Suy được: } \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} \geq \frac{4}{p-a+p-b} = \frac{4}{c}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq \frac{4}{a}; \frac{1}{p-c} + \frac{1}{p-a} \geq \frac{4}{b}$$

$$\text{Suy được: } 2 \cdot \left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \right) \geq 4 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Suy được đpcm và

Dấu “=” xảy ra khi $a=b=c$.

Bài 58: Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\frac{8}{(a+b)^2 + 4abc} + \frac{8}{(b+c)^2 + 4abc} + \frac{8}{(a+c)^2 + 4abc} + a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{8}{a+3} + \frac{8}{b+3} + \frac{8}{c+3}$$

. Giải:

Ta có

$$\frac{8}{(a+b)^2 + 4abc} \geq \frac{8}{(a+b)^2 + c(a+b)^2} = \frac{8}{(c+1)(a+b)^2}; a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} \text{ nên}$$

$$\frac{8}{(a+b)^2 + 4abc} + \frac{a^2 + b^2}{2} \geq \frac{8}{(c+1)(a+b)^2} + \frac{(a+b)^2}{4} \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{c+1}}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{c+1}} = \frac{8}{2\sqrt{2(c+1)}} \geq \frac{8}{c+3}$$

$$\text{Do đó, } \frac{8}{(a+b)^2 + 4abc} + \frac{a^2 + b^2}{2} \geq \frac{8}{c+3}$$

$$\text{Tương tự } \frac{8}{(b+c)^2 + 4abc} + \frac{b^2 + c^2}{2} \geq \frac{8}{a+3}, \frac{8}{(a+c)^2 + 4abc} + \frac{a^2 + c^2}{2} \geq \frac{8}{b+3}.$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 59: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$

Giải:

$$\text{Áp dụng BĐT Cauchy ta có } a+b+c \geq 2\sqrt{a(b+c)} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} \geq \frac{2a}{a+b+c}$$

Chứng minh tương tự ta được

$$\sqrt{\frac{b}{c+a}} \geq \frac{2b}{a+b+c}; \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{2c}{a+b+c}$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+c \\ b=c+a \\ c=a+b \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=0 \text{ (Trái với giả thiết)}$$

Vậy dấu = không xảy ra suy ra đpcm.

Bài 60: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa $ab+bc+ca=3abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

$$\text{thức } A = \frac{a^3}{c+a^2} + \frac{b^3}{a+b^2} + \frac{c^3}{b+c^2}.$$

Giải:

Cách 1: Theo đề : $ab+bc+ca=3abc \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$

$$\frac{a^3}{c+a^2} = \frac{(a^3+ac)-ac}{c+a^2} = a - \frac{ac}{c+a^2}$$

$$c+a^2 \geq 2a\sqrt{c} \Rightarrow \frac{ac}{c+a^2} \leq \frac{1}{2}\sqrt{c} \leq \frac{c+1}{4}$$

$$\text{Suy ra } \frac{a^3}{c+a^2} \geq a - \frac{c+1}{4}.$$

$$\text{Tương tự : } \frac{b^3}{a+b^2} \geq b - \frac{a+1}{4}, \quad \frac{c^3}{b+c^2} \geq c - \frac{b+1}{4}.$$

$$\text{Suy ra } A \geq \frac{3}{4}(a+b+c) - \frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{Dùng BĐT Cô Si chứng minh được: } (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) &\geq 9 \\ \Rightarrow (a+b+c)3 &\geq 9 \Rightarrow a+b+c \geq 3 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } A \geq \frac{3}{2}, \text{ dấu bằng xảy ra khi } a=b=c=1.$$

$$\text{Vậy min } A = \frac{3}{2} \text{ khi } a=b=c=1.$$

Cách 2 : Ta có: $ab+bc+ca=3abc \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$

$$\text{Đặt } x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}, \text{ khi đó: } \begin{cases} x, y, z > 0 \\ x+y+z = 3 \end{cases}.$$

$$\text{Biểu thức } A \text{ được viết lại: } A = \frac{x}{y(x+y^2)} + \frac{y}{z(y+z^2)} + \frac{z}{x(z+x^2)}$$

$$\text{Ta có : } \frac{x}{y(x+y^2)} = \frac{(x+y^2)-y^2}{y(x+y^2)} = \frac{1}{y} - \frac{y}{x+y^2};$$

$$\text{mà } x + y^2 \geq 2y\sqrt{x} \Rightarrow \frac{y}{x + y^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ nên } \frac{x}{y(x + y^2)} \geq \frac{1}{y} - \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$\text{mà } \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{4} \cdot 2\sqrt{\frac{1}{x}} \leq \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \text{ nên } \frac{x}{y(x + y^2)} \geq \frac{1}{y} - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

(dấu bằng xảy ra khi $x = y = 1$)

$$\text{Tương tự: } \frac{y}{z(y + z^2)} \geq \frac{1}{z} - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{y}\right), \frac{z}{x(z + x^2)} \geq \frac{1}{x} - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{z}\right)$$

$$\text{Suy ra } A = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \frac{3}{4}.$$

$$\text{Dùng BĐT Cô Si chứng minh được: } (x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9.$$

$$\Leftrightarrow 3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3 \text{ (vì } x + y + z = 3).$$

$$\text{Do đó } A \geq \frac{3}{2}, \text{ dấu bằng xảy ra khi } x = y = z = 1 \text{ hay } a = b = c = 1.$$

$$\text{Vậy } \min A = \frac{3}{2} \text{ khi } a = b = c = 1.$$

Bài 61: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng $abc + 2(1 + a + b + c + ab + ac + bc) \geq 0$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } a^2 + b^2 + c^2 = 1 \Rightarrow a^2 = 1 - b^2 - c^2 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq a \leq 1 \Rightarrow 1 + a \geq 0$$

$$\text{Tương tự: } 1 + b \geq 0; 1 + c \geq 0$$

$$\Rightarrow (1 + a)(1 + b)(1 + c) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + a + b + c + ab + ac + bc + abc \geq 0 \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: } (1 + a + b + c)^2 = (1 + a)^2 + (b + c)^2 + 2(1 + a)(b + c)$$

$$= 1 + a^2 + b^2 + c^2 + 2a + 2b + 2c + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2) + (a^2 + b^2 + c^2) + 2a + 2b + 2c + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$= 2(a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c + ab + ac + bc)$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c + ab + ac + bc = \frac{1}{2}(1 + a + b + c)^2 \geq 0 \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) về theo vế ta được:

$$abc + a^2 + b^2 + c^2 + 1 + 2a + 2b + 2c + 2ab + 2ac + 2bc \geq 0$$

$$\Leftrightarrow abc + 2(1 + a + b + c + ab + ac + bc) \geq 0$$

Bài 62:

Lời giải

$$3\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) < 2\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) < 2\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x + \frac{1}{x}\right) < 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 1\right) \quad (1)$$

$$\left(\text{Vì } x > 1 \text{ nên } x - \frac{1}{x} > 0 \right)$$

$$\text{Đặt } x + \frac{1}{x} = t \text{ thì } x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$$

$$\text{Ta có (1)} \Leftrightarrow 2t^2 - 3t - 2 > 0$$

$$\Leftrightarrow (t - 2)(2t + 1) > 0 \quad (2)$$

$$\text{Vì } x > 1 \text{ nên } (x - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 > 2x \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} > 2 \text{ hay } t > 2$$

$\Rightarrow$ (2) đúng. Suy ra điều phải chứng minh

Bài 63:

Lời giải

Áp dụng Bunhiacopski cho hai dãy $a^2; 1$ và $1; 4$ ta có

$$(1^2 + 4^2)(a^4 + 1) \geq (a^2 + 4)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + a^4} \geq \frac{a^2 + 4}{\sqrt{17}} \quad (1)$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

Áp dụng Bunhiacopski cho $b^2; 1$ và $1; 4$ ta có

$$17(b^4 + 1) \geq (b^2 + 4)^2 \Rightarrow \sqrt{b^4 + 1} \geq \frac{b^2 + 4}{\sqrt{17}} \quad (2)$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra} \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow P \geq \frac{a^2 + b^2 + 8}{\sqrt{17}} \quad (*)$$

$$\text{Mặt khác theo giả thiết } (1 + a)(1 + b) = \frac{9}{4} \Leftrightarrow a + b + ab = \frac{5}{4}$$

Áp dụng Côsi ta có:

$$a \leq a^2 + \frac{1}{4}$$

$$b \leq b^2 + \frac{1}{4}$$

$$ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức ta được

$$\frac{3}{2}(a^2 + b^2) + \frac{1}{2} \geq a + b + ab = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 \geq \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\right): \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \text{ Thay vào (*)}$$

$$P \geq \frac{\frac{1}{2} + 8}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{\sqrt{17}}{2}$ khi $a = b = \frac{1}{2}$

Bài 64: Cho a, b, c là ba số thực dương, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc} + \frac{a^2 + b^2}{c^2 + ab} + \frac{b^2 + c^2}{a^2 + bc} + \frac{c^2 + a^2}{b^2 + ca}.$$

Lời giải

$$P = \frac{a^2}{2bc} + \frac{b^2}{2ca} + \frac{c^2}{2ab} + \frac{2ab}{c^2 + ab} + \frac{2bc}{a^2 + bc} + \frac{2ac}{b^2 + ca}$$

$$\text{Mà } \frac{a^2}{2bc} = \frac{a^2 + bc}{2bc} - \frac{1}{2}; \frac{b^2}{2ac} = \frac{b^2 + ac}{2ac} - \frac{1}{2}; \frac{c^2}{2ab} = \frac{c^2 + ab}{2ab} - \frac{1}{2} \text{ nên}$$

Với các số dương x, y ta có $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$ luôn đúng, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$x = y$.

Áp dụng ta có:

$$P = \left(\frac{c^2 + ab}{2ab} + \frac{2ab}{c^2 + ab} \right) + \left(\frac{a^2 + bc}{2bc} + \frac{2bc}{a^2 + bc} \right) + \left(\frac{b^2 + ac}{2ac} + \frac{2ac}{b^2 + ac} \right) - \frac{3}{2} \geq 2 + 2 + 2 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Kết luận : giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc} + \frac{a^2 + b^2}{c^2 + ab} + \frac{b^2 + c^2}{a^2 + bc} + \frac{c^2 + a^2}{b^2 + ca}$ bằng $\frac{9}{2}$ khi $a = b = c$

Bài 65:

Lời giải

$$A = \sqrt{2(x+y)^2 - xy} + \sqrt{2(y+z)^2 - yz} + \sqrt{2(z+x)^2 - zx}$$

$$\text{Ta có: } 2(x+y)^2 - xy \geq 2(x+y)^2 - \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{7}{4}(x+y)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{2x^2 + 3xy + 2y^2} \geq \frac{\sqrt{7}}{2}(x+y) \text{ dấu "=" xảy ra khi } x = y$$

Tương tự: $\sqrt{2y^2 + 3yz + 2z^2} \geq \frac{\sqrt{7}}{2} (y + z)$ dấu "=" xảy ra khi $y = z$

$\sqrt{2z^2 + 3zx + 2x^2} \geq \frac{\sqrt{7}}{2} (z + x)$ dấu "=" xảy ra khi $z = x$

$$A = \sqrt{2x^2 + 3xy + 2y^2} + \sqrt{2y^2 + 3yz + 2z^2} + \sqrt{2z^2 + 3zx + 2x^2} \\ \geq \sqrt{7} (x + y + z) = 3\sqrt{7}$$

Vậy $\min A = 3\sqrt{7}$ khi $x = y = z = 1$

Bài 66: Cho a, b, c là các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 6$. Chứng minh rằng:

$$\frac{b+c+5}{1+a} + \frac{c+a+4}{2+b} + \frac{a+b+3}{3+c} \geq 6. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } a=3, b=2, c=1$$

Lời giải

Đặt $x = a + 1; y = b + 2; z = c + 3$. ($x, y, z > 0$)

$$VT = \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \\ \geq 2\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y}} + 2\sqrt{\frac{z}{x} \cdot \frac{x}{z}} + 2\sqrt{\frac{y}{z} \cdot \frac{z}{y}} = 6$$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z$, suy ra $a=3, b=2, c=1$

Bài 67: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + ac + bc = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

thức $T = \frac{19a+3}{1+b^2} + \frac{19b+3}{1+c^2} + \frac{19c+3}{1+a^2}.$

Lời giải

Áp dụng Bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$ab + ac + bc \leq \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2) \cdot (b^2 + a^2 + c^2)}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot (ab + ac + bc) \geq 3 + 2 \cdot 3$$

$$\Rightarrow (a + b + c)^2 \geq 9$$

$$\Rightarrow a + b + c \geq 3$$

$$T = \frac{19a+3}{1+b^2} + \frac{19b+3}{1+c^2} + \frac{19c+3}{1+a^2} = 16 \cdot \left(\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \right) + 3 \left(\frac{a+1}{1+b^2} + \frac{b+1}{1+c^2} + \frac{c+1}{1+a^2} \right)$$

$$\text{Đặt } A = \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \text{ và } B = \frac{a+1}{1+b^2} + \frac{b+1}{1+c^2} + \frac{c+1}{1+a^2}$$

Ta lại có:

$$a) \quad a + b + c - A = a + b + c - \left(\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \right) = \frac{ab^2}{1+b^2} + \frac{bc^2}{1+c^2} + \frac{ca^2}{1+a^2} \leq \frac{ab}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{ac}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow A \geq a + b + c - \frac{3}{2} \quad (*)$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } a+b+c+3-B &= a+b+c+3-\left(\frac{a+1}{1+b^2}+\frac{b+1}{1+c^2}+\frac{c+1}{1+a^2}\right) \\
&= \frac{a+ab^2-a-1+1+b^2}{1+b^2} + \frac{b+bc^2-b-1+1+c^2}{1+c^2} + \frac{c+a^2c-c-1+1+a^2}{1+a^2} \\
&= \frac{ab^2+b^2}{1+b^2} + \frac{bc^2+c^2}{1+c^2} + \frac{a^2c+a^2}{1+a^2} \leq \frac{3}{2} + \frac{a+b+c}{2} \\
\Rightarrow B &\geq a+b+c+3-\frac{3}{2}-\frac{a+b+c}{2} \\
\Leftrightarrow B &\geq \frac{a+b+c}{2} + \frac{3}{2} \quad (**)
\end{aligned}$$

Từ (*) và (**) ta có:

$$\begin{aligned}
16A+3B &\geq 16\cdot\left(a+b+c-\frac{3}{2}\right)+3\cdot\left(\frac{a+b+c}{2}+\frac{3}{2}\right) \\
\Rightarrow T &\geq \frac{35}{2}\cdot(a+b+c)-\frac{39}{2} \geq 33
\end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 33.

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$.

Bài 68: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a}{9a^3+3b^2+c} + \frac{b}{9b^3+3c^2+a} + \frac{c}{9c^3+3a^2+b}$$

Lời giải

Chứng minh:

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (ax+by+cz)^2, \forall a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Thật vậy: $(1) \Leftrightarrow (a^2y^2-2abxy+b^2x^2) + (a^2z^2-2acxz+c^2z^2) + (b^2y^2-2bcyz+c^2z^2) \geq 0$

$$\Leftrightarrow (ay-bx)^2 + (az-cx)^2 + (by-cz)^2 \geq 0 \quad (\text{đúng})$$

$$\text{Dấu "="} \Leftrightarrow \begin{cases} ay = bx \\ az = cx \\ by = cz \end{cases}$$

Áp dụng BĐT (1) ta có: $(9a^3+3b^2+c)\left(\frac{1}{9a}+\frac{1}{3}+c\right) \geq (a+b+c)^2=1$

$$\text{Dấu "="} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}.$$

$$\Rightarrow 9a^3+3b^2+c \geq \frac{1}{\frac{1}{9a}+\frac{1}{3}+c} \Rightarrow \frac{a}{9a^3+3b^2+c} \leq a\left(\frac{1}{9a}+\frac{1}{3}+c\right)$$

$$\text{Tương tự có: } \frac{b}{9b^3+3c^2+a} \leq b\left(\frac{1}{9b}+\frac{1}{3}+a\right); \frac{c}{9c^3+3a^2+b} \leq c\left(\frac{1}{9c}+\frac{1}{3}+b\right)$$

$$\Rightarrow P \leq 3\cdot\frac{1}{9} + \frac{a+b+c}{3} + (ab+bc+ca)$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{(a+b+c)^2}{3} = 1. \text{ Do } ab+bc+ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3}$$

$$\text{Vậy } P_{\max} = 1 \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}.$$

Bài 69: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = xyz$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} + \frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y} + \frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z} \leq xyz$$

Lời giải

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = xyz$.

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} + \frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y} + \frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z} \leq xyz$$

$$\text{Từ Gt suy ra: } \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 1.$$

$$\text{Nên ta có: } \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}} = \sqrt{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right); "=" \Leftrightarrow y = z$$

$$\text{Vậy } \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right).$$

$$\text{Tương tự ta có } \frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{1}{z}\right); \frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{4}{z}\right)$$

$$\text{Vậy ta có } \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} + \frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y} + \frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z} \leq 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right); "=" \Leftrightarrow x = y = z$$

$$\text{Ta có } (x+y+z)^2 - 3(xy+yz+zx) = \dots = \frac{1}{2}[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2] \geq 0$$

$$\text{Nên } (x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$$

$$\Rightarrow (xyz)^2 \geq 3(xy+yz+zx) \Rightarrow 3 \frac{xy+yz+zx}{xyz} \leq xyz \Rightarrow 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \leq xyz$$

$$\text{Vậy } \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} + \frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y} + \frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z} \leq xyz; "=" \Leftrightarrow x = y = z$$

Bài 70: Chứng minh với mọi số nguyên dương n lớn hơn 1 ta có $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{\dots\sqrt{(n-1)}\sqrt{n}}}}} < 3$.

Lời giải

$$\text{Với mỗi số nguyên dương } k \text{ ta có } k = \sqrt{k^2} = \sqrt{1+(k^2-1)} = \sqrt{1+(k-1)(k+1)}.$$

Sử dụng đẳng thức trên liên tiếp với $k = 3, 4, \dots, n$ ta được

$$3 = \sqrt{1+2.4} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3.5}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4.6}}} = \dots$$

$$= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\dots\sqrt{1+(n-1)(n+1)}}}}$$

$$= \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\dots\sqrt{1+(n-1)\sqrt{(n+1)^2}}}}} > \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\dots\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}}}$$

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 71: Cho ba số không âm x, y, z thỏa mãn $\frac{1}{1+2x} + \frac{1}{1+2y} + \frac{1}{1+2z} = 2$.

Chứng minh rằng $xyz \leq \frac{1}{64}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{1}{1+2x} = 1 - \frac{1}{1+2y} + 1 - \frac{1}{1+2z} = \frac{2y}{1+2y} + \frac{2z}{1+2z} \geq 2\sqrt{\frac{4yz}{(1+2y)(1+2z)}}$$

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{1}{1+2y} \geq 2\sqrt{\frac{4xz}{(1+2x)(1+2z)}}, \frac{1}{1+2z} \geq 2\sqrt{\frac{4xy}{(1+2x)(1+2y)}}$$

$$\frac{1}{1+2x} \cdot \frac{1}{1+2y} \cdot \frac{1}{1+2z} \geq 8 \cdot \sqrt{\frac{64x^2y^2z^2}{(1+2x)^2(1+2y)^2(1+2z)^2}}$$

$$\text{Khi đó: } \Leftrightarrow \frac{1}{(1+2x)(1+2y)(1+2z)} \geq 8 \cdot \frac{8xyz}{(1+2x)(1+2y)(1+2z)}$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq 64xyz$$

$$\Leftrightarrow xyz \leq \frac{1}{64}$$

Bài 72: Chứng minh $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{b+a}} > 2$, với $a, b, c > 0$

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{b+c+a}{2} \geq \sqrt{(b+c)a} \Leftrightarrow \frac{b+c+a}{2a} \geq \frac{\sqrt{(b+c)a}}{a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b+c+a}{2a} \geq \sqrt{\frac{b+c}{a}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} \geq \frac{2a}{a+b+c}$$

$$\text{Tương tự: } \sqrt{\frac{b}{a+c}} \geq \frac{2b}{a+b+c}, \sqrt{\frac{c}{b+a}} \geq \frac{2c}{a+b+c}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{b+a}} \geq \frac{2(a+b+c)}{(a+b+c)} = 2$$

Dấu bằng xảy ra khi $b+c=a, c+a=b, a+b=c$ (Điều này không có)

$$\text{Vậy } \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{b+a}} > 2$$

Bài 73: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $3y^2+x^2+2xy+2x+6y+2017$

Lời giải

$$A = 3y^2+x^2+2xy+2x+6y+2017 \\ = (y+x+1)^2+2(1+y)^2+2014$$

Vậy $\min A = 2014$ khi $y = -1$ và $x = 0$

Bài 74: Cho a, b, c là 3 cạnh một tam giác. Chứng minh:

$$\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Lời giải

Với $x > 0, y > 0$ ta có $(x+y)^2 \geq 4xy \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \quad (I)$$

a, b, c là 3 cạnh của một tam giác nên $a+b-c > 0, a+c-b > 0, c+b-a > 0$,
 Áp dụng bất(I) với các số $x = a+b-c, y = a+c-b$ dương ta có:

$$\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{a+c-b} \geq \frac{4}{a+b-c+a+c-b} = \frac{2}{a}$$

Tương tự: $\frac{1}{b+a-c} + \frac{1}{b+c-a} \geq \frac{4}{c+b-a+a+b-c} = \frac{2}{b}$

$$\frac{1}{c+b-a} + \frac{1}{c+a-b} \geq \frac{4}{c+b-a+c+a-b} = \frac{2}{c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad (\text{đpcm})$$

Bài 75: Chứng minh rằng $\frac{a^4 + b^4}{2} \geq ab^3 + a^3b - a^2b^2$

Lời giải

$$\frac{a^4 + b^4}{2} \geq ab^3 + a^3b - a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow a^4 + b^4 \geq 2ab^3 + 2a^3b - 2a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow a^4 + b^4 - 2ab^3 - 2a^3b + 2a^2b^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^4 - 2a^3b + a^2b^2) + (b^4 - 2ab^3 + a^2b^2)$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - ab)^2 + (b^2 - ab)^2 \geq 0$$

Bài 76:

a/ Cho hai số dương x, y thỏa mãn $x + y = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = \left(x^2 + \frac{1}{y^2} \right) \left(y^2 + \frac{1}{x^2} \right)$

b/ Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} = 6$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{3x+3y+2z} + \frac{1}{3x+2y+3z} + \frac{1}{2x+3y+3z} \leq \frac{3}{2}$.

Lời giải

a) $M = \left(x^2 + \frac{1}{y^2} \right) \left(y^2 + \frac{1}{x^2} \right) = x^2y^2 + 1 + 1 + \frac{1}{x^2y^2} = \frac{x^4y^4 + 2x^2y^2 + 1}{x^2y^2}$

$$= \frac{(x^2y^2+1)^2}{x^2y^2} = \left(\frac{x^2y^2+1}{xy}\right)^2 = \left(xy + \frac{1}{xy}\right)^2$$

Ta có: $xy + \frac{1}{xy} = \left(xy + \frac{1}{16xy}\right) + \frac{15}{16xy}$

* Ta có: $xy + \frac{1}{16xy} \geq 2\sqrt{xy \cdot \frac{1}{16xy}} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ (1)

* $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow xy \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{xy} \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{16xy} \geq \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{15}{16xy} \geq \frac{15}{4}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \left(xy + \frac{1}{xy}\right) = \left(xy + \frac{1}{16xy}\right) + \frac{15}{16xy} \geq \frac{1}{2} + \frac{15}{4} = \frac{17}{4}$

Vậy $M = \left(xy + \frac{1}{xy}\right)^2 \geq \left(\frac{17}{4}\right)^2 = \frac{289}{16}$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} xy = \frac{1}{16xy} \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = \frac{1}{4} \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2} \quad (\forall x, y > 0)$

Vậy min $M = \frac{289}{16}$ tại $x = y = \frac{1}{2}$

b) Áp dụng BĐT $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ (với $a, b > 0$)

$$\Rightarrow \frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3x+3y+2z} &= \frac{1}{(2x+y+z)+(x+2y+z)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} \right) \\ &\leq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(x+y)+(x+z)} + \frac{1}{(x+y)+(y+z)} \right] \leq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} \right) \right] \\ &\leq \frac{1}{16} \left(\frac{2}{x+y} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{y+z} \right) \end{aligned}$$

Tương tự: $\frac{1}{3x+2y+3z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{2}{x+z} + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} \right)$

$$\frac{1}{2x+3y+3z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{2}{y+z} + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} \right)$$

cộng vế theo vế, ta có:

$$\frac{1}{3x+3y+2z} + \frac{1}{3x+2y+3z} + \frac{1}{2x+3y+3z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{4}{x+y} + \frac{4}{x+z} + \frac{4}{y+z} \right)$$

$$\leq \frac{4}{16} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{y+z} \right) = \frac{1}{4} \cdot 6 = \frac{3}{2}$$

Bài 77: Cho tam giác ABC có chu vi bằng 2. Ký hiệu a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Tìm

giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{a}{b+c-a} + \frac{9b}{c+a-b} + \frac{16c}{a+b-c}$

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} b+c-a=x \\ c+a-b=y \\ a+b-c=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a=y+z \\ 2b=z+x \\ 2c=x+y \end{cases}$$

Ta có

$$S = \frac{y+z}{2x} + \frac{9(z+x)}{2y} + \frac{16(x+y)}{2z} = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x} + \frac{9x}{y} + \frac{z}{x} + \frac{16x}{z} + \frac{9z}{y} + \frac{16y}{z} \right) \geq \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4) = 19$$

Giá trị nhỏ nhất của S là 19. Đạt được khi và chỉ khi $a = \frac{7}{8}; b = \frac{5}{8}; c = \frac{1}{2}$

Bài 78: Cho ba số dương a, b và c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+2b^2+3} + \frac{1}{b^2+2c^2+3} + \frac{1}{c^2+2a^2+3} \leq \frac{1}{2}.$$

Giải:

$$\text{Ta có: } a^2 + 2b^2 + 3 = (a^2 + b^2) + (b^2 + 1) + 2 \geq 2ab + 2b + 2$$

$$\text{Tương tự: } b^2 + 2c^2 + 3 \geq 2bc + 2c + 2, \quad c^2 + 2a^2 + 3 \geq 2ac + 2a + 2$$

$$\frac{1}{a^2+2b^2+3} + \frac{1}{b^2+2c^2+3} + \frac{1}{c^2+2a^2+3} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{ab+b+1} + \frac{1}{bc+c+1} + \frac{1}{ac+a+1} \right)$$

$$\text{Suy ra: } = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{ab+b+1} + \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{ab} + 1} + \frac{1}{\frac{1}{b} + a + 1} \right) = \frac{1}{2}.$$

Bài 79:

1. Cho $a, b > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

2. Chia 10 số: 2; 3; 4; 5; 7; 8; 9; 10; 12; 14 làm thành hai nhóm rồi lấy tích các số trong mỗi nhóm. Gọi M là tổng của hai tích số đó. Tìm giá trị nhỏ nhất của M và chỉ ra ít nhất 4 cách chia sao cho M nhỏ nhất.

Giải:

$$1. a, b > 0, \text{ ta có: } (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

2. Gọi a và b là các tích số trong từng nhóm thì:

$$ab = 2.3.4.5.7.8.9.10.12.14 = 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$M = a + b \geq 2\sqrt{ab} = 2 \cdot 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 20160$$

$$\text{Min}_M = 20160 \Leftrightarrow a = b = 10080$$

Và có ít nhất 4 cách chia như sau:

Nhóm 1	Nhóm 2
2; 7; 8; 9; 10	3; 4; 5; 12; 14
8; 9; 10; 14	2; 3; 4; 5; 7; 12
2; 4; 9; 10; 14	3; 5; 7; 8; 12
2; 3; 10; 12; 14	4; 5; 7; 8; 9

Bài 80: Các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x + y + z = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$F = \frac{x^4}{(x^2 + y^2)(x + y)} + \frac{y^4}{(y^2 + z^2)(y + z)} + \frac{z^4}{(z^2 + x^2)(z + x)}$$

Giải:

$$\text{Ta có } (a - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{2} \geq (a + b)^2 \text{ (dấu “=” xảy ra khi } a = b)$$

$$\text{Ta có: } \frac{x^4}{(x^2 + y^2)(x + y)} - \frac{y^4}{(x^2 + y^2)(x + y)} = x - y;$$

$$\text{Tương tự: } \frac{y^4}{(y^2 + z^2)(y + z)} - \frac{z^4}{(y^2 + z^2)(y + z)} = y - z; \frac{z^4}{(z^2 + x^2)(z + x)} - \frac{x^4}{(z^2 + x^2)(z + x)} = z - x$$

$$\text{Do đó } F = \frac{x^4}{(x^2 + y^2)(x + y)} + \frac{y^4}{(y^2 + z^2)(y + z)} + \frac{z^4}{(z^2 + x^2)(z + x)}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{x^4 + y^4}{(x^2 + y^2)(x + y)} + \frac{y^4 + z^4}{(y^2 + z^2)(y + z)} + \frac{z^4 + x^4}{(z^2 + x^2)(z + x)} \right)$$

$$\geq \frac{1}{4} \left(\frac{(x^2 + y^2)^2}{(x^2 + y^2)(x + y)} + \frac{(y^2 + z^2)^2}{(y^2 + z^2)(y + z)} + \frac{(z^2 + x^2)^2}{(z^2 + x^2)(z + x)} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{(x^2 + y^2)}{(x + y)} + \frac{(y^2 + z^2)}{(y + z)} + \frac{(z^2 + x^2)}{(z + x)} \right)$$

$$\geq \frac{1}{8} \left(\frac{(x + y)^2}{(x + y)} + \frac{(y + z)^2}{(y + z)} + \frac{(z + x)^2}{(z + x)} \right) = \frac{1}{4} (x + y + z) = \frac{1}{4}$$

$$\text{Do đó } F \text{ đạt giá trị nhỏ nhất bằng } \frac{1}{4} \text{ khi } x = y = z = \frac{1}{3}$$

Bài 81: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \frac{2b}{a} \geq \frac{c}{a} + 4 \end{cases}$.

Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm.

Giải:

+) Nếu $ac \leq 0 \Rightarrow$ phương trình có nghiệm.

+) Nếu $ac > 0 \Rightarrow a$ và c cùng dấu, từ $\frac{2b}{a} \geq \frac{c}{a} + 4 > 0 \Rightarrow b$ và a cùng dấu
 $\Rightarrow a, b, c$ cùng dấu. Vì thế ta chỉ cần xét a, b và c cùng dương là đủ
 Với a, b, c cùng dương ta có :

$$\frac{2b}{a} \geq \frac{c}{a} + 4 \Leftrightarrow b \geq \frac{c+4a}{2} \Leftrightarrow b^2 \geq \frac{c^2+8ac+16a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow b^2 - 4ac \geq \frac{c^2-8ac+16a^2}{4} = \frac{(c-4a)^2}{4} \geq 0 \Rightarrow \text{đpcm}$$

Bài 82:

Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x + y + z = 2$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}$

Giải:

Vì $x, y, z > 0$ ta có:

Áp dụng BĐT Côsi đối với 2 số dương $\frac{x^2}{y+z}$ và $\frac{y+z}{4}$ ta được:

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y+z}{4} \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{y+z} \cdot \frac{y+z}{4}} = 2 \cdot \frac{x}{2} = x \quad (1) \text{ . Tương tự ta có:}$$

$$\frac{y^2}{x+z} + \frac{x+z}{4} \geq y \quad (2)$$

$$\frac{z^2}{x+y} + \frac{x+y}{4} \geq z \quad (3)$$

Cộng (1) + (2) + (3) ta được:

$$P \geq \left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \right) + \frac{x+y+z}{2}$$

$$\Rightarrow P \geq (x+y+z) - \frac{x+y+z}{2} = 1$$

$$\text{Dấu "}" xảy ra} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{2}{3}$$

$$\text{Vậy min } P = 1 \Leftrightarrow x = y = z = \frac{2}{3}$$

Bài 83: (2,5 điểm)

1) Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x + y + z = 3$ và $xy + yz + zx \neq 0$.
 Chứng minh rằng

$$\frac{x+1}{y+1} + \frac{y+1}{z+1} + \frac{z+1}{x+1} \leq \frac{25}{3\sqrt[3]{4xy+yz+zx}}.$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM:

$$\begin{aligned} VT &= \frac{25}{3\sqrt[3]{2.2(xy+yz+zx)}} \geq \frac{25}{xy+yz+zx+4} = \frac{25}{xy+yz+zx+x+y+z+1} \\ &\geq \frac{25}{(x+1)(y+1)(z+1)} \end{aligned}$$

Cần chứng minh $\sum (x+1)^2 (y+1) \leq 25$

Sau khi rút gọn, BĐT trở thành $x^2y + y^2z + z^2x \leq 4$

Giả sử y nằm giữa x và z , suy ra $(y-x)(y-z) \leq 0$ hay $y^2 + zx \leq xy + yz$

Do đó $y^2z + z^2x \leq xyz + yz^2$

$$x^2y + y^2z + z^2x \leq x^2y + xyz + yz^2 \leq y(z+x)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2y(z+x)(z+x) \leq \frac{1}{54}$$

$$(2y+z+x+z+x)^3 = 4.$$

Bài 84:

- 1) Cho ba số a, b, c không âm thỏa mãn điều kiện: $a^2 + b^2 + c^2 \leq 2(ab + bc + ca)$ và p, q, r là ba số thỏa mãn: $p + q + r = 0$. Chứng minh rằng: $apq + bqr + crp \leq 0$.
- 2) Cho các số dương a, b thỏa mãn $a.b = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M = (a+b+1)(a^2+b^2) + \frac{4}{a+b}$$

Giải: 1) Từ gt: $a^2 + b^2 + c^2 \leq 2(ab + bc + ca) \Leftrightarrow (a-b-c)^2 \leq 4bc \Leftrightarrow |a-b-c| \leq 2\sqrt{bc}$

Lại

$$\text{có: } p+q+r=0 \Leftrightarrow r=-p-q$$

$$\Rightarrow apq + bqr + crp = apq + bq(-p-q) + cp(-p-q) = apq - bpq - bq^2 - cpq - cp^2 = pq(a-b-c) -$$

$$\text{Ta có: } bq^2 + cp^2 \geq |pq| \cdot 2\sqrt{bc} \geq |pq| \cdot |a-b-c| \geq pq(a-b-c)$$

$$\Rightarrow pq(a-b-c) - (bq^2 + cp^2) \leq 0 \Rightarrow apq + bqr + crp \leq 0 \text{ (đpcm).}$$

2) Sử dụng BĐT AM – GM, ta có: $a^2 + b^2 \geq 2ab = 2$

$$\Rightarrow M = (a+b+1)(a^2+b^2) + \frac{4}{a+b} \geq (a+b+1) \cdot 2 + \frac{4}{a+b} = \left(a+b + \frac{4}{a+b}\right) + a+b+2$$

$$\geq 2\sqrt{(a+b) \cdot \frac{4}{a+b}} + 2\sqrt{ab} + 2 = 2.2 + 2 + 2 = 8. \text{ Dấu “=” xảy ra khi } a=b=1.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 8 khi $a=b=1$.

Bài 85:

- a) Chứng minh với mọi số a, b, c, d ta luôn có: $(a^2 + c^2)(b^2 + d^2) \geq (ab + cd)^2$

b) Cho $a, b > 0$ chứng minh rằng: $\frac{a^2 + b^2}{(4a + 3b)(3a + 4b)} \geq \frac{1}{25}$

Giải:

a) Ta có:

$$\begin{aligned}(a^2 + c^2)(b^2 + d^2) &\geq (ab + cd)^2 \\ \Leftrightarrow a^2b^2 + a^2d^2 + c^2b^2 + c^2d^2 &\geq a^2b^2 + c^2d^2 + 2abcd \\ \Leftrightarrow a^2d^2 + c^2b^2 - 2abcd &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (ad - cb)^2 &\geq 0 \quad \text{luôn đúng.}\end{aligned}$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned}\frac{a^2 + b^2}{(4a + 3b)(3a + 4b)} &\geq \frac{1}{25} \Leftrightarrow 25a^2 + 25b^2 \geq (4a + 3b)(3a + 4b) \\ \Leftrightarrow 13(a^2 + b^2) &\geq 25ab \Leftrightarrow 13(a - b)^2 + ab \geq 0\end{aligned}$$

Dấu “=” không xảy ra, vậy: $\frac{a^2 + b^2}{(4a + 3b)(3a + 4b)} > \frac{1}{25}$

Bài 86: (2 điểm)

Với x, y là hai số thực thỏa mãn $y^3 + 3y^2 + 5y + 3 = 11\sqrt{9 - x^2} - \sqrt{9x^4 - x^6}$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x - y + 2018$.

Giải:

Điều kiện $-3 \leq x \leq 3$.

$$y^3 + 3y^2 + 5y + 3 = 11\sqrt{9 - x^2} - \sqrt{9x^4 - x^6} \Leftrightarrow (y + 1)^3 + 2(y + 1) = (\sqrt{9 - x^2})^3 + 2\sqrt{9 - x^2}$$

$$\Leftrightarrow a^3 + 2a = b^3 + 2b, \left(a = y + 1; b = \sqrt{9 - x^2} \right)$$

$$\Leftrightarrow (a^3 - b^3) + 2(a - b) = 0 \Leftrightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2 + 2) = 0$$

$$\text{Do } a^2 + ab + b^2 + 2 = \left(a + \frac{1}{2}b \right)^2 + \frac{3}{4}b^2 + 2 > 0.$$

Suy ra

$$a - b = 0 \Leftrightarrow y + 1 - \sqrt{9 - x^2} = 0 \Leftrightarrow y = \sqrt{9 - x^2} - 1 \Leftrightarrow x - y = x - \sqrt{9 - x^2} + 1 = 4 - (3 - x + \sqrt{9 - x^2}) \leq$$

Đẳng thức xảy ra khi $\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x = 0 \\ 9 - x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y = -1$. Vậy giá trị lớn nhất của T là

2022 tại $x = 3; y = -1$.

Ta lại có

$$x - y \geq 1 - 3\sqrt{2} \Leftrightarrow x - \sqrt{9 - x^2} + 1 \geq 1 - 3\sqrt{2} \Leftrightarrow x + 3\sqrt{2} \geq \sqrt{9 - x^2} \Leftrightarrow x^2 + 6\sqrt{2}x + 18 \geq 9 - x^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 6\sqrt{2}x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2}x + 3)^2 \geq 0 \text{ (Đúng)}.$$

$$\text{Suy ra } T = x - y + 2018 \geq 1 - 3\sqrt{2} + 2018 = 2019 - 3\sqrt{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi chỉ khi $\sqrt{2}x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (thỏa mãn). Suy ra

$$y = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - (1 - 3\sqrt{2}) = \frac{3\sqrt{2} - 2}{2}.$$

$$\text{Vậy GTNN } T \text{ là } 2019 - 3\sqrt{2} \text{ tại } x = \frac{-3\sqrt{2}}{2}; y = \frac{3\sqrt{2} - 2}{2}.$$

Bài 87: Cho a, b, c là ba số không âm có tổng bằng 1. Chứng minh:

$$\text{a) } 3(ab + bc + ac) \leq 1$$

$$\text{b) } a^2 + b^2 + c^2 \geq 4(ab + bc + ac) - 1$$

Giải:

a) Ta có, a, b, c là ba số không âm có tổng bằng 1

$$3(ab + bc + ac) \leq (a + b + c)^2 \leq 1$$

$$\text{b) } a^2 + b^2 + c^2 \geq 4(ab + bc + ac) - 1$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 1 \geq 4(ab + bc + ca)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca + 1 - 3(ab + bc + ca) \geq 0$$

Theo câu a, $3(ab + bc + ac) \leq 1$ ta sẽ chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0$

Thật vậy,

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$$

Đẳng thức luôn đúng

Bài 88:

Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa mãn $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{y^3+16} + \frac{y}{z^3+16} + \frac{z}{x^3+16}$$

Giải:

a) Ta sẽ chứng minh $P \geq \frac{1}{6}$ với dấu bằng đạt được tại $(x, y, z) = (0, 1, 2)$ (và các hoán vị

vòng quanh của bộ này). Bất đẳng thức $P \geq \frac{1}{6}$ tương đương với

$$\frac{16x}{y^3+16} + \frac{16y}{z^3+16} + \frac{16z}{x^3+16} \geq \frac{8}{3}$$

hay

$$\left(x - \frac{16x}{y^3+16}\right) + \left(y - \frac{16y}{z^3+16}\right) + \left(z - \frac{16z}{x^3+16}\right) \leq x + y + z - \frac{8}{3}$$

Một cách tương đương, ta phải chứng minh

$$\frac{xy^3}{y^3+16} + \frac{yz^3}{z^3+16} + \frac{zx^3}{x^3+16} \leq \frac{1}{3} \quad (1)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử y nằm giữa x và z . Ta có:

$$y^3 + 16 = (y+4)(y-2)^2 + 12y \geq 12y$$

$$\text{nên } \frac{y}{y^3+16} \leq \frac{xy^2}{12}.$$

Đánh giá tương tự, ta cũng có

$$\frac{yz^3}{z^3+16} \leq \frac{yz^2}{12}; \quad \frac{zx^3}{x^3+16} \leq \frac{zx^2}{12}$$

Suy ra

$$\frac{xy^3}{y^3+16} + \frac{yz^3}{z^3+16} + \frac{zx^3}{x^3+16} \leq \frac{xy^2 + yz^2 + zx^2}{12} \quad (2)$$

Do y nằm giữa x và z nên ta có $(y-z)(y-z) \leq 0$, suy ra $y^2 + zx \leq xy + yz$ và

$xy^2 + zx^2 \leq xy^2 + xyz$. Từ đó, ta có đánh giá

$$xy^2 + yz^2 + zx^2 \leq y(x^2 + xz + z^2) \leq y(x+z)^2 = y(3-y)^2 = 4 - (4-y)(y-1)^2 \leq 4 \quad (3)$$

Từ (2) và (3), ta thu được (1). Vậy $\min P = \frac{1}{6}$.

Bài 89: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{b^2+c^2}{a} + \frac{c^2+a^2}{b} + \frac{a^2+b^2}{c} \geq 2(a+b+c).$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\frac{b^2+c^2}{a} + \frac{c^2+a^2}{b} + \frac{a^2+b^2}{c} \geq 2\left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c}\right)$

$$= \left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}\right) + \left(\frac{ca}{b} + \frac{ab}{c}\right) + \left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a}\right) \geq 2(a+b+c).$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$.

Bài 90: Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 3 thì $3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 4abc \geq 13$.

Lời giải

Đặt $T = 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 4abc$. Do vai trò của a, b, c bình đẳng nên không giảm tổng quát, ta có thể giả sử $0 < a \leq b \leq c$.

Từ $a + b + c = 3$ và $a + b > c$ suy ra $1 \leq c < \frac{3}{2}$

$$T = 3(a^2 + b^2) + 3c^2 + 4abc = 3[(a+b)^2 - 2ab] + 3c^2 + 4abc$$

$$= 3(3-c)^2 + 3c^2 - 2ab(3-2c)$$

Do $3-2c > 0$ và $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{3-c}{2}\right)^2$, suy ra

$$T \geq 3(3-c)^2 + 3c^2 - \frac{1}{2}(a+b)^2(3-2c)$$

$$= 3(c^2 - 6c + 9) + 3c^2 - \frac{1}{2}(3-c)^2(3-2c)$$

$$= c^2 - \frac{3}{2}c^2 + \frac{27}{2} = c(c-1)^2 + \frac{1}{2}(c-1)^2 + 13 \geq 13$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Bài 91: Cho các số thực dương a, b, c, d thỏa mãn $a > 1, b > 1, c > 1, d > 1$. Chứng minh bất

đẳng thức $\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{c-1} + \frac{c^2}{d-1} + \frac{d^2}{a-1} \geq 16$.

Lời giải

Vì $a > 1, b > 1, c > 1, d > 1$ nên $a-1 > 0; b-1 > 0; c-1 > 0; d-1 > 0$.

Áp dụng BĐT ta có

$$\frac{a^2}{b-1} + 4(b-1) \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b-1} \cdot 4(b-1)} = 4a \quad (1)$$

$$\frac{b^2}{c-1} + 4(c-1) \geq 2\sqrt{\frac{b^2}{c-1} \cdot 4(c-1)} = 4b \quad (2)$$

$$\frac{c^2}{d-1} + 4(d-1) \geq 2\sqrt{\frac{c^2}{d-1} \cdot 4(d-1)} = 4c \quad (3)$$

$$\frac{d^2}{a-1} + 4(a-1) \geq 2\sqrt{\frac{d^2}{a-1} \cdot 4(a-1)} = 4d \quad (4)$$

Từ (1); (2); (3); (4) ta có

$$\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{c-1} + \frac{c^2}{d-1} + \frac{d^2}{a-1} + 4(a+b+c+d) - 16 \geq 4(a+b+c+d)$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{c-1} + \frac{c^2}{d-1} + \frac{d^2}{a-1} \geq 16. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } a=b=c=d=2$$

Bài 92: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $(a+c)(b+c) = 4c^2$. Tìm giá trị lớn nhất,

nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a}{b+3c} + \frac{b}{a+3c} + \frac{ab}{bc+ca}$.

Lời giải

Đặt $a = xc; b = yc$ ($x, y > 0$). Từ điều kiện suy ra: $(x+1)(y+1) = 4$

$$\text{Khi đó } P = \frac{x}{y+3} + \frac{y}{x+3} + \frac{xy}{x+y} = \frac{x^2 + y^2 + 3(x+y)}{xy + 3(x+y) + 9} + \frac{xy}{x+y}$$

$$= \frac{(x+y)^2 + 3(x+y) - 2xy}{xy + 3(x+y) + 9} + \frac{xy}{x+y}$$

$$\text{Do } (x+1)(y+1) = 4 \Rightarrow xy = 3 - (x+y)$$

$$\text{Đặt } t = x+y \text{ (} 0 < t < 3 \text{)} \Rightarrow xy = 3 - t$$

$$\text{Và } 3 - t = xy \leq \left(\frac{x+y}{2} \right)^2 = \frac{t^2}{4} \Leftrightarrow t^2 + 4t - 12 \geq 0 \Rightarrow t \geq 2 \text{ (do } t > 0 \text{)}$$

$$\text{Khi đó } P = \frac{t^2 + 3t - 2(3-t)}{3-t+3t+9} + \frac{3-t}{t} = \frac{t}{2} + \frac{3}{t} - \frac{3}{2} \text{ với } 2 \leq t < 3$$

$$\text{Ta có: } P \geq 2\sqrt{\frac{t}{2} \cdot \frac{3}{t}} - \frac{3}{2} = \sqrt{6} - \frac{3}{2}$$

$$\text{Do đó } P_{\min} = \sqrt{6} - \frac{3}{2} \text{ khi } t = \sqrt{6} \text{ hay } (x; y) \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} x+y = \sqrt{6} \\ xy = 3 - \sqrt{6} \end{cases}$$

$$\text{Ta lại có } P = \frac{t^2 - 3t + 6}{2t} = \frac{t^2 - 5t + 6 + 2t}{2t} = \frac{(t-2)(t-3)}{2t} + 1 \leq 1 \text{ (do } 2 \leq t < 3 \text{)}$$

$$\text{Do đó } P_{\max} = 1 \text{ khi } t = 2 \text{ hay } (x; y) \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} x+y = 2 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$$

Bài 93: Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=3$

Chứng minh rằng $a\sqrt{b^3+1} + b\sqrt{c^3+1} + c\sqrt{a^3+1} \leq 5$

Lời giải

Đặt $P = a\sqrt{b^3+1} + b\sqrt{c^3+1} + c\sqrt{a^3+1}$ suy ra

$$2P = 2a\sqrt{b^3+1} + 2b\sqrt{c^3+1} + 2c\sqrt{a^3+1} =$$

$$2a\sqrt{(b+1)(b^2-b+1)} + 2b\sqrt{(c+1)(c^2-c+1)} + 2c\sqrt{(a+1)(a^2-a+1)}$$

$$\leq a(b^2+2) + b(c^2+2) + c(a^2+2) = ab^2 + bc^2 + ca^2 + 6 = Q + 6$$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $b \leq c \leq a$ ta có

$$b(a-c)(c-b) \geq 0 \Leftrightarrow abc + b^2c \geq ab^2 + bc^2 \Leftrightarrow ab^2 + bc^2 + ca^2 \leq abc + b^2c + ca^2$$

$$\text{Do đó } Q \leq abc + b^2c + ca^2 \leq 2abc + b^2c + ca^2 = c(a+b)^2 = 4c \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b}{2}$$

$$\leq \frac{4}{27} \left(c + \frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{2} \right)^3 = \frac{4(a+b+c)^2}{27} = \frac{4 \cdot 3^3}{27} = 4$$

Do đó $2P \leq 10 \Leftrightarrow P \leq 5$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a+b+c=3, b \leq c \leq a, 2c=a+b, abc=2abc$
 $\Leftrightarrow b=0, c=1, a=2$.

Bài 94:

a) Cho x, y, z là các số thực dương nhỏ hơn 4. Chứng minh rằng trong các số $\frac{1}{x} + \frac{1}{4-y}, \frac{1}{y} + \frac{1}{4-z}, \frac{1}{z} + \frac{1}{4-x}$ luôn tồn tại ít nhất một số lớn hơn hoặc bằng 1.

b) Với các số thực dương a, b, c thay đổi thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = ab + bc + ca - abc$.

Lời giải

a) Không mất tính tổng quát, ta giả sử $x = \min\{x, y, z\}$. Khi đó ta có:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{4-y} \geq \frac{1}{y} + \frac{1}{4-y} = \frac{(y-2)^2}{y(4-y)} + 1 \geq 1.$$

Ta có điều phải chứng minh.

b) Trong ba số a, b, c , tồn tại hai số cùng $\geq \frac{1}{2}$ hoặc cùng $\leq \frac{1}{2}$. Không mất tính tổng quát, ta giả sử hai số đó là a, b .

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM với hai số dương a^2, b^2 ta có: $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Từ đó suy ra $1 - c^2 = a^2 + b^2 + 2abc \geq 2ab + 2abc = 2ab(1+c)$ hay $1 - c \geq 2ab$ (1)

$$\text{Suy ra } 1 \geq c + 2ab \geq 2\sqrt{2abc} \text{ suy ra } abc \leq \frac{1}{8} \quad (2)$$

$$\text{Mặt khác ta có } c(2a-1)(2b-1) \geq 0 \text{ nên } 4abc + c \geq 2ac + 2bc \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra:

$$2P = 2ab + 2ac + 2bc - 2abc \leq 2ab + c + 2abc \leq 1 + 2abc \leq 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\text{Hay } P \leq \frac{5}{8}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{2}$

$$\text{Vậy } \max P = \frac{5}{8}$$

Bài 95:

Cho a, b, c là các số thực sao cho $a + b = c - 2$ và $ab = 2c^2 - 3c + 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab \\ &= (c - 2)^2 - 2(2c^2 - 3c + 1) \\ &= -3c^2 + 2c + 2 = -3\left(c - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{7}{3} \leq \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Vậy Giá trị lớn nhất của P là $\frac{7}{3}$ xảy ra khi $c = \frac{1}{3}$ và $(a, b) = \left(\frac{-5 + \sqrt{17}}{6}; \frac{-5 - \sqrt{17}}{6}\right)$ và hoán vị của a, b

Bài 96: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $B = \frac{3x + 4}{x^2 + 1}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } B = \frac{3x + 4}{x^2 + 1} = \frac{6x + 8}{2x^2 + 2} = \frac{-9x^2 + 6x - 1 + 9x^2 + 9}{2x^2 + 2} = \frac{9}{2} - \frac{(3x - 1)^2}{2(x^2 + 1)} \leq \frac{9}{2}.$$

Vậy GTLN của B là $\frac{9}{2}$, Dấu "=" xảy ra khi $x = -\frac{1}{3}$.

Lại có:

$$B = \frac{6x + 8}{2x^2 + 2} = \frac{x^2 + 6x + 9 - x^2 - 1}{2x^2 + 2} = \frac{(x + 3)^2}{(2x^2 + 2)} - \frac{1}{2} \geq \frac{-1}{2}.$$

Vậy GTNN của B là $-\frac{1}{2}$; Dấu "=" xảy ra khi $x = -3$.

Bài 97: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$.

$$\text{Chứng minh } \frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} \geq \frac{3}{4}.$$

Lời giải

Dự đoán: với điều kiện ràng buộc của các số thực dương a, b, c có $abc = 1$, ta có thể dự đoán đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Từ đó ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với: $\frac{a(c+1) + b(a+1) + c(b+1)}{(a+1)(b+1)(c+1)} \geq \frac{3}{4} \quad (1)$

Nhận thấy rằng:

$$\begin{aligned} (a+1)(b+1)(c+1) &= (ab + b + c + 1)(c+1) \\ &= abc + ab + ac + a + bc + b + c + 1 = 2 + (ab + bc + ac) + (a + b + c) \end{aligned}$$

$$\text{Và: } a(c+1) + b(a+1) + c(b+1) = (ac + bc + ab) + (a + b + c)$$

$$\text{Vậy } (1) \Leftrightarrow \frac{(ab + bc + ac) + (a + b + c)}{2 + (ab + bc + ac) + (a + b + c)} \geq \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4[(ab + bc + ac) + (a + b + c)] \geq 6 + 3[(ab + bc + ac) + (a + b + c)]$$

$$\Leftrightarrow (ab + bc + ac) + (a + b + c) \geq 6 \quad (*)$$

$$\text{Lại có: } a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 3$$

Nên (*) luôn đúng.

$$\text{Vậy } \frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} \geq \frac{3}{4}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 98: Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} (*) \text{ với } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ và } x, y, z > 0.$$

Lời giải

Với $a, b \in \mathbb{R}$ và $x, y > 0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} (**)$$

$$\Leftrightarrow (a^2y + b^2x)(x+y) \geq xy(a+b)^2 \Leftrightarrow (bx - ay)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}.$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức (**), ta có: } \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}.$$

$$\text{Vì: } xy + yz + zx = 673 \text{ nên } x(x^2 - yz + 2019) = x(x^2 + xy + zx + 1346) > 0.$$

$$\text{Tương tự: } y(y^2 - zx + 2019) > 0 \text{ và } z(z^2 - xy + 2019) > 0.$$

Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{x}{x^2 - yz + 2019} + \frac{y}{y^2 - zx + 2019} + \frac{z}{z^2 - xy + 2019} \\ &= \frac{x^2}{x(x^2 - yz + 2019)} + \frac{y^2}{y(y^2 - zx + 2019)} + \frac{z^2}{z(z^2 - xy + 2019)} \\ &\geq \frac{(x+y+z)^2}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + 2019(x+y+z)} \end{aligned} \quad (1)$$

Biến đổi:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) + z^3 - 3xyz \\ &= (x+y+z) \left[(x+y)^2 - (x+y)z + z^2 \right] - 3xy(x+y+z) \\ &= (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \end{aligned}$$

Từ đó suy ra:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + 2019(x+y+z) &= (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx + 3.673) \\ &= (x+y+z) \left[x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx + 3(xy + yz + zx) \right] \\ &= (x+y+z)(x+y+z)^2 = (x+y+z)^3 \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{x}{x^2 - yz + 2019} + \frac{y}{y^2 - zx + 2019} + \frac{z}{z^2 - xy + 2019} \geq \frac{(x+y+z)^2}{(x+y+z)^3} = \frac{1}{x+y+z} \quad (\text{đpcm}).$$

Bài 99: Chứng minh rằng: $\frac{x}{x^2 - yz + 2019} + \frac{y}{y^2 - zx + 2019} + \frac{z}{z^2 - xy + 2019} \geq \frac{1}{x + y + z}$

Lời giải

) Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} (*) \text{ với } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ và } x, y, z > 0.$$

Với $a, b \in \mathbb{R}$ và $x, y > 0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \quad (**)$$

$$\Leftrightarrow (a^2y + b^2x)(x+y) \geq xy(a+b)^2 \Leftrightarrow (bx - ay)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng).}$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức (**), ta có: } \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}.$$

$$\text{Vì: } xy + yz + zx = 673 \text{ nên } x(x^2 - yz + 2019) = x(x^2 + xy + yz + zx + 1346) > 0.$$

$$\text{Tương tự: } y(y^2 - zx + 2019) > 0 \text{ và } z(z^2 - xy + 2019) > 0.$$

Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{x}{x^2 - yz + 2019} + \frac{y}{y^2 - zx + 2019} + \frac{z}{z^2 - xy + 2019} \\ &= \frac{x^2}{x(x^2 - yz + 2019)} + \frac{y^2}{y(y^2 - zx + 2019)} + \frac{z^2}{z(z^2 - xy + 2019)} \\ &\geq \frac{(x+y+z)^2}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + 2019(x+y+z)} \end{aligned} \quad (1)$$

Biến đổi:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) + z^3 - 3xyz \\ &= (x+y+z) \left[(x+y)^2 - (x+y)z + z^2 \right] - 3xy(x+y+z) \\ &= (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \end{aligned}$$

Từ đó suy ra:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + 2019(x+y+z) &= (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx + 3.673) \\ &= (x+y+z) \left[x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx + 3(xy + yz + zx) \right] \\ &= (x+y+z)(x+y+z)^2 = (x+y+z)^3 \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{x}{x^2 - yz + 2019} + \frac{y}{y^2 - zx + 2019} + \frac{z}{z^2 - xy + 2019} \geq \frac{(x+y+z)^2}{(x+y+z)^3} = \frac{1}{x+y+z} \quad (\text{đpcm}).$$

Bài 100: Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \left(\frac{a}{a+b} \right)^4 + \left(\frac{b}{b+c} \right)^4 + \left(\frac{c}{c+a} \right)^4.$$

Lời giải

Ta có:
$$P = \frac{1}{\left(1 + \frac{b}{a}\right)^4} + \frac{1}{\left(1 + \frac{c}{b}\right)^4} + \frac{1}{\left(1 + \frac{a}{c}\right)^4}$$

Đặt: $x = \frac{b}{a}, y = \frac{c}{b}, z = \frac{a}{c} \Rightarrow x, y, z > 0, xyz = 1.$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{(1+x)^4} + \frac{1}{(1+y)^4} + \frac{1}{(1+z)^4}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki, ta có:

$$P \geq \frac{1}{3} \left[\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} \right]^2$$

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki, ta có:

$$\left[1 + (\sqrt{xy})^2 \right] \left[1 + \left(\sqrt{\frac{x}{y}} \right)^2 \right] \geq (1+x)^2 \Rightarrow \frac{1}{(1+x)^2} \geq \frac{y}{(1+xy)(x+y)}$$

Tương tự:
$$\frac{1}{(1+y)^2} \geq \frac{x}{(1+xy)(x+y)}$$

Từ 2 BĐT trên ta có:

$$\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \geq \frac{1}{1+xy}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$

Tương tự:
$$\frac{1}{(1+z)^2} + \frac{1}{(1+1)^2} \geq \frac{1}{1+z} \Rightarrow \frac{1}{(1+z)^2} \geq \frac{1}{1+z} - \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} \geq \frac{1}{1+xy} + \frac{1}{1+z} - \frac{1}{4} = \frac{z}{1+z} + \frac{1}{1+z} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Ta có: $P \geq \frac{3}{16}, P = \frac{3}{16} \Leftrightarrow x = y = z = 1 \Leftrightarrow a = b = c$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là: $\frac{3}{16}.$

Bài 101: Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z + 2 = xyz$. Chứng minh rằng

$$x + y + z + 6 \geq 2(\sqrt{yz} + \sqrt{zx} + \sqrt{xy}).$$

Lời giải

Đặt $a = \frac{1}{1+x}, b = \frac{1}{1+y}, c = \frac{1}{1+z}$ khi đó $x + y + z + 2 = xyz \Leftrightarrow a + b + c = 1$

và $x = \frac{1}{a} - 1 = \frac{1-a}{a} = \frac{b+c}{a}, y = \frac{c+a}{b}, z = \frac{a+b}{c}.$

Vậy $x + y + z + 6 = \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} + 6 = \sum_{cyc} \left(\frac{c+a}{c} + \frac{a+b}{b} \right)$

$$\geq 2 \sum_{cyc} \sqrt{\frac{(c+a)(a+b)}{bc}} = 2(\sqrt{yz} + \sqrt{zx} + \sqrt{xy}).$$

Bài 102: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y - z + 1 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất

của biểu thức :
$$P = \frac{x^3 y^3}{(x + yz)(y + xz)(z + xy)^2}$$

Lời giải

Vậy $\text{Max}P = \frac{4}{729}$, đạt được tại $\begin{cases} x = y = 2 \\ z = 5 \end{cases}$.

Cách 1 : Ta có $x + y + 1 = z \Leftrightarrow z + xy = x + y + 1 + xy = (x + 1)(y + 1)$
 $x + yz = x + y(x + y + 1) = x + xy + y^2 + y = (x + y)(y + 1)$
 $y + xz = y + x(x + y + 1) = (x + y)(x + 1)$

$$\Rightarrow P = \frac{x^3 y^3}{(x + y)^2 (x + 1)^3 (y + 1)^3}.$$

Vì $\begin{cases} (x + y)^2 \geq 4xy \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow P \leq \frac{x^3 y^3}{4xy(x + 1)^3 (y + 1)^3} = \frac{x^2 y^2}{4(x + 1)^3 (y + 1)^3}.$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho ba số thực dương, ta có:

$$x + 1 = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + 1 \geq 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{4}} \Leftrightarrow (x + 1)^3 \geq \frac{27x^2}{4} \Leftrightarrow 0 < \frac{x^2}{(x + 1)^3} \leq \frac{4}{27}.$$

Tương tự: $0 < \frac{y^2}{(y + 1)^3} \leq \frac{4}{27}.$

$$P = \frac{x^2 y^2}{4(x + 1)^3 (y + 1)^3} \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{27} \cdot \frac{4}{27} = \frac{4}{729}. \text{ Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = 1 \\ z = x + y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 2 \\ z = 5 \end{cases}$$

Vậy $\text{Max}P = \frac{4}{729}$, đạt được tại $\begin{cases} x = y = 2 \\ z = 5 \end{cases}$.

Cách 2 :

$$\frac{1}{P} = \frac{(x + yz)(y + xz)(z + xy)^2}{x^3 y^3} = \frac{x + yz}{y} \cdot \frac{y + xz}{x} \cdot \frac{(z + xy)^2}{x^2 y^2} = \left(\frac{x}{y} + z\right) \left(\frac{y}{x} + z\right) \left(\frac{z}{xy} + 1\right)^2$$

$$\frac{1}{P} = \left(1 + \frac{zy}{x} + \frac{zx}{y} + z^2\right) \left(\frac{z}{xy} + 1\right)^2 = \left[1 + \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right)z + z^2\right] \left(\frac{z}{xy} + 1\right)^2$$

Vì $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \geq 2$; $\frac{1}{xy} \geq \frac{4}{(x + y)^2}$; $x + y = z - 1$ nên:

$$\frac{1}{P} \geq (1 + 2z + z^2) \left(\frac{4z}{(x + y)^2} + 1\right)^2 = (1 + z)^2 \left(\frac{4z}{(z - 1)^2} + 1\right)^2 = \left(\frac{4z(z + 1)}{(z - 1)^2} + z + 1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{P} \geq \left(\frac{4z(z + 1)}{(z - 1)^2} + z + 1\right)^2 = \left[6 + \frac{12}{z - 1} + \frac{8}{(z - 1)^2} + (z - 1)\right]^2$$

Đặt $t = z - 1$,

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{P} &\geq \left(6 + \frac{12}{t} + \frac{8}{t^2} + t\right)^2 = \left[6 + \left(\frac{12}{t} + \frac{3t}{4}\right) + \left(\frac{8}{t^2} + \frac{t}{8} + \frac{t}{8}\right)\right]^2 \\ &\geq \left(6 + 2\sqrt{\frac{12}{t} \cdot \frac{3t}{4}} + 3\sqrt{\frac{8}{t^2} \cdot \frac{t}{8} \cdot \frac{t}{8}}\right)^2 = \frac{729}{4} \Leftrightarrow P \leq \frac{4}{729} \end{aligned}$$

Cách 2 :

$$\frac{1}{P} = \frac{(x+yz)(y+xz)(z+xy)^2}{x^3y^3} = \frac{x+yz}{y} \cdot \frac{y+xz}{x} \cdot \frac{(z+xy)^2}{x^2y^2} = \left(\frac{x}{y} + z\right) \left(\frac{y}{x} + z\right) \left(\frac{z}{xy} + 1\right)^2$$

$$\frac{1}{P} = \left(1 + \frac{zy}{x} + \frac{zx}{y} + z^2\right) \left(\frac{z}{xy} + 1\right)^2 = \left[1 + \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right)z + z^2\right] \left(\frac{z}{xy} + 1\right)^2$$

Vì $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \geq 2$; $\frac{1}{xy} \geq \frac{4}{(x+y)^2}$; $x+y = z-1$ nên:

$$\frac{1}{P} \geq (1+2z+z^2) \left(\frac{4z}{(x+y)^2} + 1\right)^2 = (1+z)^2 \left(\frac{4z}{(z-1)^2} + 1\right)^2 = \left(\frac{4z(z+1)}{(z-1)^2} + z+1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{P} \geq \left(\frac{4z(z+1)}{(z-1)^2} + z+1\right)^2 = \left[6 + \frac{12}{z-1} + \frac{8}{(z-1)^2} + (z-1)\right]^2$$

Đặt $t = z-1$,

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{P} &\geq \left(6 + \frac{12}{t} + \frac{8}{t^2} + t\right)^2 = \left[6 + \left(\frac{12}{t} + \frac{3t}{4}\right) + \left(\frac{8}{t^2} + \frac{t}{8} + \frac{t}{8}\right)\right]^2 \\ &\geq \left(6 + 2\sqrt{\frac{12}{t} \cdot \frac{3t}{4}} + 3\sqrt{\frac{8}{t^2} \cdot \frac{t}{8} \cdot \frac{t}{8}}\right)^2 = \frac{729}{4} \Leftrightarrow P \leq \frac{4}{729} \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow t = 4, x = y \Leftrightarrow x = y = 2, z = 5$.

Vậy $\text{Max}P = \frac{4}{729}$, đạt được tại $\begin{cases} x = y = 2 \\ z = 5 \end{cases}$.

Bài 103: Cho $a > 0, b > 0$. Chứng minh $\sqrt{a} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - 1\right) \geq \sqrt{b} \left(1 - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)$. Dấu “=” xảy ra khi nào?

Lời giải

Với $a > 0; b > 0$ ta có:

Phương trình (1) tương đương: $\sqrt{\frac{a}{b}} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - 1\right) \geq \left(1 - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)$ (2)

Đặt $\sqrt{\frac{a}{b}} = X$ ($X > 0$). Thay vào phương trình (2) ta có: $X(X-1) \geq \left(1 - \frac{1}{X}\right)$

$$\Leftrightarrow X(X-1) \geq \frac{X-1}{X} \Leftrightarrow \frac{X^2(X-1) - (X-1)}{X} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(X-1)(X^2-1)}{X} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(X-1)(X-1)(X+1)}{X} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(X-1)^2(X+1)}{X} \geq 0$$

Do $X > 0$ nên $X+1 > 0$ mà $(X-1)^2 \geq 0$.

Suy ra với $a > 0, b > 0$ thì $\sqrt{a}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - 1\right) \geq \sqrt{b}\left(1 - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)$.

Vậy dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow X = 1 \Leftrightarrow a = b$.

Bài 104: Cho $x; y; z$ là các số thực dương thoả mãn: $xyz = 1$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = \frac{1}{x^3 + y^3 + 1} + \frac{1}{y^3 + z^3 + 1} + \frac{1}{z^3 + x^3 + 1}$

Giải:

Ta có $(x - y)^2 \geq 0 \quad \forall x; y$

$$\Leftrightarrow x^2 - xy + y^2 \geq xy$$

Mà $x; y > 0 \Rightarrow x + y > 0$

Ta có: $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 \geq (x + y)xy$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 + 1 = x^3 + y^3 + xyz \geq (x + y)xy + xyz$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 + 1 \geq xy(x + y + z) > 0$$

$$\text{Tương tự: } y^3 + z^3 + 1 \geq yz(x + y + z) > 0$$

$$z^3 + x^3 + 1 \geq zx(x + y + z) > 0$$

$$\Rightarrow A \leq \frac{1}{xy(x + y + z)} + \frac{1}{yz(x + y + z)} + \frac{1}{zx(x + y + z)}$$

$$\Rightarrow A \leq \frac{x + y + z}{xyz(x + y + z)}$$

$$\Rightarrow A \leq \frac{1}{xyz} = 1$$

Vậy giá trị lớn nhất của A là $1 \Leftrightarrow x = y = z = 1$

Bài 105: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

$$\text{a. } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$$

$$\text{b. } \frac{1}{a+b}; \frac{1}{b+c}; \frac{1}{c+a} \text{ là độ dài 3 cạnh của một tam giác.}$$

Giải:

a. Vì a, b, c là ba cạnh của một tam giác nên $b + c > a$

$$\Leftrightarrow a(b+c) > a^2 \Leftrightarrow a(b+c) + ab + ac > a^2 + ab + ac$$

$$\Leftrightarrow 2a(b+c) > a(a+b+c) \Leftrightarrow \frac{a}{b+c} < \frac{2a}{a+b+c}$$

$$\text{Tương tự ta cũng có: } \frac{b}{c+a} < \frac{2b}{a+b+c}; \quad \frac{c}{b+a} < \frac{2c}{a+b+c}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{b+c+a} + \frac{2c}{a+b+c} = 2 \text{ (dpcm)}$$

b. Ta có $a + b > c$

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} > \frac{1}{b+c+a} + \frac{1}{c+a+b} = \frac{2}{a+b+c} > \frac{2}{(a+b)+(a+b)} = \frac{1}{a+b}$$

Chứng minh tương tự ta có $\frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} > \frac{1}{b+c}$; $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} > \frac{1}{c+a}$

Vậy $\frac{1}{a+b}$; $\frac{1}{b+c}$; $\frac{1}{c+a}$ là độ dài 3 cạnh của một tam giác (Đpcm)

Bài 106: Chứng minh rằng: với mọi số thực x, y dương, ta luôn có: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$

Giải:

Ta có $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \Leftrightarrow \frac{x+y}{xy} \geq \frac{4}{x+y} \Leftrightarrow (x+y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$ (đúng)

Bài 107: Cho x, y, z là ba số dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x^2+yz} + \frac{1}{y^2+xz} + \frac{1}{z^2+xy} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right)$$

Giải:

Áp dụng BĐT Cô si cho các số dương x^2 và yz , ta có:

$$x^2 + yz \geq 2\sqrt{x^2 yz} = 2x\sqrt{yz} \Rightarrow \frac{1}{x^2 + yz} \leq \frac{1}{2x\sqrt{yz}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x\sqrt{yz}}$$

Tương tự, ta có: $\frac{1}{y^2 + xz} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y\sqrt{xz}}$ và $\frac{1}{z^2 + xy} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z\sqrt{xy}}$

$$\text{Suy ra: } \frac{1}{x^2+yz} + \frac{1}{y^2+xz} + \frac{1}{z^2+xy} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x\sqrt{yz}} + \frac{1}{y\sqrt{xz}} + \frac{1}{z\sqrt{xy}} \right) \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{x\sqrt{yz}} + \frac{1}{y\sqrt{xz}} + \frac{1}{z\sqrt{xy}} = \frac{\sqrt{yz} + \sqrt{xz} + \sqrt{xy}}{xyz} \quad (2)$$

$$\text{Ta có: } \sqrt{yz} + \sqrt{xz} + \sqrt{xy} \leq x + y + z \quad (3)$$

$$\text{Thật vậy: } (*) \Leftrightarrow 2\sqrt{yz} + 2\sqrt{xz} + 2\sqrt{xy} \leq 2x + 2y + 2z$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + (\sqrt{z} - \sqrt{x})^2 + (\sqrt{y} - \sqrt{x})^2 \geq 0 \quad (\text{BĐT đúng})$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = y = z$

$$\text{Từ (2) và (3) suy ra: } \frac{1}{x\sqrt{yz}} + \frac{1}{y\sqrt{xz}} + \frac{1}{z\sqrt{xy}} \leq \frac{x+y+z}{xyz} = \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} \quad (4)$$

$$\text{Từ (1) và (4) suy ra: } \frac{1}{x^2+yz} + \frac{1}{y^2+xz} + \frac{1}{z^2+xy} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right)$$

Bài 108: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x \geq z$. Chứng minh rằng

$$\frac{xz}{y^2+yz} + \frac{y^2}{xz+yz} + \frac{x+2z}{x+z} \geq \frac{5}{2}.$$

Giải:

$$\text{Ta có } P = \frac{xz}{y^2+yz} + \frac{y^2}{xz+yz} + \frac{x+2z}{x+z} = \frac{\frac{xz}{yz}}{\frac{y^2}{yz}+1} + \frac{\frac{y^2}{yz}}{\frac{xz}{yz}+1} + \frac{1+\frac{2z}{x}}{1+\frac{z}{x}}$$

$$= \frac{\frac{x}{y}}{\frac{y}{z}+1} + \frac{\frac{y}{z}}{\frac{x}{y}+1} + \frac{1+\frac{2z}{x}}{1+\frac{z}{x}} = \frac{a^2}{b^2+1} + \frac{b^2}{a^2+1} + \frac{1+2c^2}{1+c^2},$$

trong đó $a^2 = \frac{x}{y}$, $b^2 = \frac{y}{z}$, $c^2 = \frac{z}{x}$ ($a, b, c > 0$)

Nhận xét rằng $a^2 \cdot b^2 = \frac{x}{z} = \frac{1}{c^2} \geq 1$ (do $x \geq z$).

$$\begin{aligned} \text{Xét } \frac{a^2}{b^2+1} + \frac{b^2}{a^2+1} - \frac{2ab}{ab+1} &= \frac{a^2(a^2+1)(ab+1) + b^2(b^2+1)(ab+1) - 2aba^2(a^2+1)(b^2+1)}{(a^2+1)(b^2+1)(ab+1)} \\ &= \frac{ab(a^2-b^2)^2 + (a-b)(a^3-b^3) + (a-b)^2}{(a^2+1)(b^2+1)(ab+1)} \geq 0 \end{aligned}$$

Do đó $\frac{a^2}{b^2+1} + \frac{b^2}{a^2+1} \geq \frac{2ab}{ab+1} = \frac{\frac{2}{c}}{\frac{1}{c}+1} = \frac{2}{1+c}$ (1). Đẳng thức xảy ra khi $a = b$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \frac{2}{1+c} + \frac{1+2c^2}{c^2+1} - \frac{5}{2} &= \frac{2(2(1+c^2) + (1+c)(1+2c^2)) - 5(1+c)(1+c^2)}{2(1+c)(1+c^2)} \\ &= \frac{1-3c+3c^2-c^3}{2(1+c)(1+c^2)} = \frac{(1-c)^3}{2(1+c)(1+c^2)} \geq 0 \quad (\text{do } c \leq 1) \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b$, $c = 1 \Leftrightarrow x = y = z$.

Bài 109: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 \leq 12$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = 4(a^3 + b^3 + c^3) - (a^4 + b^4 + c^4)$

Giải:

Ta có

$$S = 4(a^3 + b^3 + c^3) - (a^4 + b^4 + c^4) = (4a^3 - a^4) + (4b^3 - b^4) + (4c^3 - c^4)$$

Ta chứng minh : $(4a^3 - a^4) \leq 4a^2$ thật vậy

$$(4a^3 - a^4) \leq 4a^2 \Leftrightarrow a^4 - 4a^3 + 4a^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2(a-2)^2 \geq 0$$

Tương tự ta có $(4b^3 - b^4) \leq 4b^2$; $(4c^3 - c^4) \leq 4c^2$

Vậy ta có :

$$\begin{aligned} S &= 4(a^3 + b^3 + c^3) - (a^4 + b^4 + c^4) \\ &= (4a^3 - a^4) + (4b^3 - b^4) + (4c^3 - c^4) \leq 4(a^2 + b^2 + c^2) \leq 48 \end{aligned}$$

Vậy giá trị lớn nhất bằng 48 xảy ra khi $(a, b, c) = (2, 2, 2)$

Bài 110: Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2. \text{ Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?}$$

Giải:

Trường hợp 1: Nếu tồn tại một trong ba số a, b, c thuộc nửa khoảng $\left(0; \frac{1}{3}\right]$ thì ta có

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq 9 = (a+b+c)^2 > a^2 + b^2 + c^2. \text{ Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh đúng.}$$

Trường hợp 2: $a > \frac{1}{3}; b > \frac{1}{3}; c > \frac{1}{3}$ ta có $a+b+c = 3 > a + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \Rightarrow a < \frac{7}{3}$ tương tự $b < \frac{7}{3}; c < \frac{7}{3}$. Vậy $a, b, c \in \left(\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right)$.

Ta chứng minh $\frac{1}{x^2} - x^2 \geq -4x + 4 \quad \forall x \in \left(\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right)$. (*).

Thật vậy

$$(*) \Leftrightarrow 1 - x^4 \geq -4x^3 + 4x^2 \Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 (x^2 - 2x - 1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 ((x-1)^2 - 2) \leq 0 \text{ luôn đúng với } \forall x \in \left(\frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right).$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{a^2} - a^2 \geq -4a + 4; \frac{1}{b^2} - b^2 \geq -4b + 4; \frac{1}{c^2} - c^2 \geq -4c + 4.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - a^2 - b^2 - c^2 \geq -4(a+b+c) + 12 = 0 \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2$$

(đpcm). Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 111: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 28$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$\text{biểu thức: } P = \frac{5a + 5b + 2c}{\sqrt{12(a^2 + 28)} + \sqrt{12(b^2 + 28)} + \sqrt{c^2 + 28}}.$$

Giải:

$$\text{Ta có: } \sqrt{12(a^2 + 28)} = \sqrt{12(a^2 + ab + bc + ca)} = \sqrt{6(a+b).2(a+c)}.$$

$$\text{Áp dụng BĐT CauChy được } \sqrt{6(a+b).2(a+c)} \leq \frac{6(a+b) + 2(a+c)}{2} = 4a + 3b + c.$$

$$\Rightarrow \sqrt{12(a^2 + 28)} \leq 4a + 3b + c \quad (1). \text{ Tương tự } \sqrt{12(b^2 + 28)} \leq 4b + 3a + c \quad (2) \text{ và}$$

$$\sqrt{c^2 + 28} \leq \frac{a+b}{2} + c \quad (3).$$

Cộng theo vế (1), (2) và (3) được:

$$\sqrt{12(a^2 + 28)} + \sqrt{12(b^2 + 28)} + \sqrt{c^2 + 28} \leq \frac{15a + 15b + 6c}{2}.$$

$$\text{Do đó: } P \geq \frac{2(5a + 5b + 2c)}{15a + 15b + 6c} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Vậy GTNN của } P \text{ là } \frac{2}{3}. \text{ Đạt được khi và chỉ khi } a = b = \sqrt{\frac{28}{11}}, c = 5\sqrt{\frac{28}{11}}.$$

Bài 112: Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x + y + z = 3$ và $xy + yz + zx \neq 0$.

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{x+1}{y+1} + \frac{y+1}{z+1} + \frac{z+1}{x+1} \leq \frac{25}{3\sqrt[3]{4xy + yz + zx}}.$$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM:

$$VT = \frac{25}{3\sqrt[3]{2.2(xy+yz+zx)}} \geq \frac{25}{xy+yz+zx+4}$$

$$= \frac{25}{xy+yz+zx+x+y+z+1} \geq \frac{25}{(x+1)(y+1)(z+1)}$$

Cần chứng minh $\sum (x+1)^2 (y+1) \leq 25$

Sau khi rút gọn, BĐT trở thành $x^2y + y^2z + z^2x \leq 4$

Giả sử y nằm giữa x và z , suy ra $(y-x)(y-z) \leq 0$ hay $y^2 + zx \leq xy + yz$

Do đó $y^2z + z^2x \leq xyz + yz^2$

$$x^2y + y^2z + z^2x \leq x^2y + xyz + yz^2 \leq y(z+x)^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2y(z+x)(z+x) \leq \frac{1}{54} (2y+z+x+z+x)^3 = 4.$$

Bài 113: Cho a, b và $ab = 6$. Chứng minh: $\frac{a^2 + b^2}{|a-b|} \geq 4\sqrt{3}$

Giải:

Ta có: $\frac{a^2 + b^2}{|a-b|} = \frac{(a-b)^2 - 2ab}{|a-b|} = |a-b| + \frac{12}{|a-b|}$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi: $|a-b| + \frac{12}{|a-b|} \geq 2\sqrt{|a-b| \cdot \frac{12}{|a-b|}} = 4\sqrt{3}$

Bài 114: Cho $A = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1}$

Đặt $B = A + x - 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức B

Giải:

ĐKXĐ: $x \geq 0$

$$A = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{x^2 + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x^3} - 1)}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x^3} + 1)}{x - \sqrt{x} + 1}$$

$$= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)}{x - \sqrt{x} + 1}$$

$$= \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) - \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) = x - \sqrt{x} - x - \sqrt{x} = -2\sqrt{x}$$

$$B = A + x - 1 = -2\sqrt{x} + x - 1 = x - 2\sqrt{x} - 1 = (\sqrt{x} - 1)^2 - 2 \geq -2$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (TM ĐKXĐ)

Vậy GTNN của biểu thức $B = -2$ khi $x = 1$

Bài 115: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$.

Giải:

Chứng minh rằng $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$.

Áp dụng BĐT Cauchy ta có $a+b+c \geq 2\sqrt{a(b+c)} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} \geq \frac{2a}{a+b+c}$

Chứng minh tương tự ta được

$$\sqrt{\frac{b}{c+a}} \geq \frac{2b}{a+b+c}; \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{2c}{a+b+c}$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+c \\ b=c+a \\ c=a+b \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=0 \text{ (Trái với giả thiết)}$$

Vậy dấu = không xảy ra suy ra đpcm.

Bài 116: Cho $x, y, z > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$T = \frac{x}{3\sqrt{x+2y-1}-4} + \frac{y}{3\sqrt{y+2z-1}-4} + \frac{z}{3\sqrt{z+2x-1}-4}$$

Giải:

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$ (*) với $x, y, z > 0, a, b, c$ bất kì.

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

$$\text{Chứng minh: Trước hết ta chứng minh } \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y},$$

Thật vậy quy đồng hai vế lên ta được bất đẳng thức tương đương $(ay-bx)^2 \geq 0$, luôn đúng.

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow ay = bx \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$$

$$\text{Áp dụng ta được } \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{x} = \frac{b}{y} \\ \frac{a+b}{x+y} = \frac{c}{z} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} \text{ (đpcm)}$$

Bất đẳng thức (*) được chứng minh.

Áp dụng bất đẳng thức cô- si cho hai số không âm 3 và $\sqrt{x+2y-1}$ ta có:

$$3\sqrt{x+2y-1} \leq \frac{9+x+2y-1}{2} = \frac{x}{2} + y + 4$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{x+2y-1} - 4 \leq \frac{x}{2} + y$$

$$\text{Suy ra } \frac{x}{3\sqrt{x+2y-1}-4} \geq \frac{x}{\frac{x}{2}+y} = \frac{2x}{x+2y} = \frac{2x^2}{x^2+2xy}$$

$$\text{Tương tự } \frac{y}{3\sqrt{y+2z-1}-4} \geq \frac{2y^2}{y^2+2yz}; \frac{z}{3\sqrt{z+2x-1}-4} \geq \frac{2z^2}{z^2+2zx}$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Cộng về với về tương ứng của các bất đẳng thức trên ta được

$$T \geq \frac{2x^2}{x^2 + 2xy} + \frac{2y^2}{y^2 + 2yz} + \frac{2z^2}{z^2 + 2zx}$$

Lại áp dụng bất đẳng thức (*) ta có

$$\frac{2x^2}{x^2 + 2xy} + \frac{2y^2}{y^2 + 2yz} + \frac{2z^2}{z^2 + 2zx} \geq 2 \left(\frac{(x+y+z)^2}{x^2 + 2xy + y^2 + 2yz + z^2 + 2zx} \right) = 2$$

Do đó $T \geq 2$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-1=9 \\ y+2z-1=9 \\ z+2x-1=9 \\ \frac{x}{x^2+2xy} = \frac{y}{y^2+2yz} = \frac{z}{z^2+2zx} \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=\frac{10}{3} \text{ (TMĐK)}$$

Vậy Min $T = 2$ khi $x=y=z=\frac{10}{3}$

Bài 117:

Cho các số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $xy + yz + zx = 670$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{x^2 - yz + 2010} + \frac{y}{y^2 - zx + 2010} + \frac{z}{z^2 - xy + 2010} \geq \frac{1}{x+y+z}$$

Giải:

Trước tiên ta chứng minh bất đẳng thức : Với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $x, y, z > 0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \quad (*)$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

Thật vậy, với $a, b \in \mathbb{R}$ và $x, y > 0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \quad (**)$$

$$\Leftrightarrow (a^2y + b^2x)(x+y) \geq xy(a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow (bx - ay)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}. \text{ Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$$

Áp dụng bất đẳng thức (**) ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có:

$$VT = \frac{x}{x^2 - yz + 2010} + \frac{y}{y^2 - zx + 2010} + \frac{z}{z^2 - xy + 2010}$$

$$= \frac{x^2}{x(x^2 - yz + 2010)} + \frac{y^2}{y(y^2 - zx + 2010)} + \frac{z^2}{z(z^2 - xy + 2010)} \geq \frac{(x + y + z)^2}{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + 2010(x + y + z)} \quad (1)$$

Chú ý: $x(x^2 - yz + 2010) = x(x^2 + xy + zx + 1340) > 0$; $y(y^2 - zx + 2010) > 0$ và $z(z^2 - xy + 2010) > 0$

Chứng minh:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

$$= (x + y + z) \left[(x + y + z)^2 - 3(xy + yz + zx) \right] \quad (2)$$

Do đó:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + 2010(x + y + z) = (x + y + z) \left[(x + y + z)^2 - 3(xy + yz + zx) + 2010 \right] = (x + y + z)^3 \quad (3)$$

Từ (1) và (3) ta suy ra $VT \geq \frac{(x + y + z)^2}{(x + y + z)^3} = \frac{1}{x + y + z}$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{\sqrt{2010}}{3}$

Bài 118: Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$.

Chứng minh $\frac{1}{\sqrt{ab + a + 2}} + \frac{1}{\sqrt{bc + b + 2}} + \frac{1}{\sqrt{ca + c + 2}} \leq \frac{3}{2}$

Giải:

Ta có $3(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^2 = \dots = (x - y)^2 + (y - z)^2 + (x - z)^2 \geq 0$

$\Rightarrow (x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$ nên với $x, y, z > 0$ ta có

$x + y + z \leq \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)}$, áp dụng ta có

$$\frac{1}{\sqrt{ab + a + 2}} + \frac{1}{\sqrt{bc + b + 2}} + \frac{1}{\sqrt{ca + c + 2}} \leq \sqrt{3 \left(\frac{1}{ab + a + 2} + \frac{1}{bc + b + 2} + \frac{1}{ca + c + 2} \right)}$$

-Với $x, y > 0$ ta có $x + y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow (x + y)^2 \geq 4xy \Rightarrow \frac{1}{x + y} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$

áp dụng ta có

$$\frac{1}{ab + a + 2} = \frac{1}{ab + 1 + a + 1} = \frac{1}{ab + abc + a + 1} = \frac{1}{ab(c + 1) + (a + 1)}$$

$$\leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{ab(c + 1)} + \frac{1}{a + 1} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{abc}{ab(c + 1)} + \frac{1}{a + 1} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{c}{c + 1} + \frac{1}{a + 1} \right)$$

Vậy ta có $\frac{1}{ab + a + 2} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{c}{c + 1} + \frac{1}{a + 1} \right)$

Tương tự ta có $\frac{1}{bc + b + 2} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{a}{a + 1} + \frac{1}{b + 1} \right)$; $\frac{1}{ca + c + 2} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{b}{b + 1} + \frac{1}{c + 1} \right)$ nên

$$\sqrt{3\left(\frac{1}{ab+a+2} + \frac{1}{bc+b+2} + \frac{1}{ca+c+2}\right)}$$

$$\leq \sqrt{3 \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{c}{c+1} + \frac{1}{a+1} + \frac{a}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{1}{c+1}\right)} = \frac{3}{2}$$

Vậy $\frac{1}{\sqrt{ab+a+2}} + \frac{1}{\sqrt{bc+b+2}} + \frac{1}{\sqrt{ca+c+2}} \leq \frac{3}{2}$ dấu “=” có khi $a=b=c=1$

Bài 119: Cho x, y là 2 số thực thỏa mãn: $x^2 + 2y^2 + 2xy + 7x + 7y + 10 = 0$.
 Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = x + y + 1$.

Giải:

$$x^2 + 2y^2 + 2xy + 7x + 7y + 10 = 0.$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 + 7(x+y) + 10 = -y^2$$

$$\Leftrightarrow (x+y+2)(x+y+5) = -y^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -4 \leq x+y+1 \leq -1$$

$$* x+y+1 = -4 \text{ khi } x = -5; y = 0$$

$$* x+y+1 = -1 \text{ khi } x = -2; y = 0$$

$$\text{Vậy } A_{\min} = -4 \text{ khi } x = -5; y = 0$$

$$A_{\max} = -1 \text{ khi } x = -2; y = 0$$

Bài 120: Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}}$$

Giải:

$$* \text{ Vì } a, b, c > 0 \text{ nên } \frac{a}{a+b} < 1 \Rightarrow \frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c}.$$

$$\text{Tương tự: } \frac{b}{b+c} < \frac{b+a}{a+b+c}; \quad \frac{c}{c+a} < \frac{c+b}{a+b+c}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2 \quad (1)$$

$$* \text{ Ta có: } \sqrt{\frac{a}{b+c}} = \frac{a}{\sqrt{a(b+c)}}$$

Vì $a, b, c > 0$ nên theo bất đẳng thức Cô- si ta có:

$$\frac{a+(b+c)}{2} \geq \sqrt{a(b+c)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{a+b+c} \leq \frac{1}{\sqrt{a(b+c)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a}{a+b+c} \leq \frac{a}{\sqrt{a(b+c)}} \Leftrightarrow \frac{2a}{a+b+c} \leq \sqrt{\frac{a}{b+c}}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{2b}{a+b+c} \leq \sqrt{\frac{b}{a+c}}; \quad \frac{2c}{a+b+c} \leq \sqrt{\frac{c}{b+a}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b + c$; $b = c + a$; $c = a + b$
tức là $a = b = c$ (vô lý).

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2 \quad (2)$$

Từ (1) (2) ta có đpcm.

Bài 121: Cho ba số thực a, b, c dương. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}} \geq 1.$$

Giải:

Với x là số dương, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\sqrt{x^3+1} = \sqrt{(x+1)(x^2-x+1)} \leq \frac{x+1+x^2-x+1}{2} = \frac{x^2+2}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{x^3+1}} \geq \frac{2}{x^2+2} \quad (*)$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = 2$

Áp dụng bất đẳng thức (*) ta được:

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} = \sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{b+c}{a}\right)^3}} \geq \frac{2}{\left(\frac{b+c}{a}\right)^2+2} = \frac{2a^2}{(b+c)^2+2a^2}$$

$$\text{Suy ra: } \sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} \geq \frac{2a^2}{2(b^2+c^2)+2a^2} = \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2} \quad (1)$$

Tương tự ta có:

$$\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(a+c)^3}} \geq \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2} \quad (2)$$

$$\sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}} \geq \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2} \quad (3)$$

Cộng vế với vế của ba bất đẳng thức (1), (2) và (3) ta được:

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3+(a+c)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}} \geq 1$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c$.

Bài 122: Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn: $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} = \sqrt{2011}$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2011}{2}}$.

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Lời giải

Ta có $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$.

$$\text{Suy ra } \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a^2}{\sqrt{2(b^2+c^2)}} + \frac{b^2}{\sqrt{2(c^2+a^2)}} + \frac{c^2}{\sqrt{2(c^2+a^2)}}$$

$$\text{Đặt } x = \sqrt{b^2 + c^2}, y = \sqrt{c^2 + a^2}, z = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\begin{aligned} \text{suy ra } VT &\geq \frac{y^2 + z^2 - x^2}{2\sqrt{2}x} + \frac{z^2 + x^2 - y^2}{2\sqrt{2}y} + \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2\sqrt{2}z} \\ &\geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\left(\frac{(y+z)^2}{2x} - x \right) + \left(\frac{(z+x)^2}{2y} - y \right) + \left(\frac{(x+y)^2}{2z} - z \right) \right] \\ &\geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\left(\frac{(y+z)^2}{2x} + 2x - 3x \right) + \left(\frac{(z+x)^2}{2y} + 2y - 3y \right) + \left(\frac{(x+y)^2}{2z} + 2z - 3z \right) \right] \\ &\geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[(2(y+z) - 3x) + (2(z+x) - 3y) + (2(x+y) - 3z) \right] \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } VT \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}(x + y + z) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2011}{2}}$$

Bài 123: Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = xyz$.

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x} + \frac{1 + \sqrt{1 + y^2}}{y} + \frac{1 + \sqrt{1 + z^2}}{z} \leq xyz$$

Lời giải

$$\text{Từ Gt suy ra: } \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 1.$$

$$\text{Nên ta có: } \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}} = \sqrt{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right); "=" \Leftrightarrow y = z$$

$$\text{Vậy } \frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right).$$

$$\text{Tương tự ta có } \frac{1 + \sqrt{1 + y^2}}{y} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{1}{z}\right); \frac{1 + \sqrt{1 + z^2}}{z} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{4}{z}\right)$$

$$\text{Vậy ta có } \frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x} + \frac{1 + \sqrt{1 + y^2}}{y} + \frac{1 + \sqrt{1 + z^2}}{z} \leq 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right); "=" \Leftrightarrow x = y = z$$

$$\text{Ta có } (x + y + z)^2 - 3(xy + yz + zx) = \dots = \frac{1}{2}[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (x - z)^2] \geq 0$$

$$\text{Nên } (x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$$

$$\Rightarrow (xyz)^2 \geq 3(xy+yz+zx) \Rightarrow 3 \frac{xy+yz+zx}{xyz} \leq xyz \Rightarrow 3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \leq xyz$$

$$\text{Vậy } \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} + \frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y} + \frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z} \leq xyz ; "=" \Leftrightarrow x=y=z$$

Bài 124: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $A = \frac{x^2 - 4x + 1}{x^2}$

Lời giải

$$A = \frac{x^2 - 4x + 1}{x^2} = 1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} = -3 + \left(4 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = -3 + \left(2 - \frac{1}{x} \right)^2 \geq -3$$

$$\text{Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi } \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Bài 125: Cho 3 số a, b, c thỏa mãn $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$B = (a+b+c+3) \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \right).$$

Lời giải

$$\text{Đặt } x=1+c, y=1+b, z=1+a \text{ do } 0 \leq a \leq b \leq c \leq 1 \Rightarrow 1 \leq z \leq y \leq x \leq 2$$

Khi đó A=

$$(x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 3 + 3 + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y}$$

$$\left(1 - \frac{x}{y} \right) \left(1 - \frac{y}{z} \right) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{x}{y} - \frac{y}{z} + \frac{x \cdot y}{y \cdot z} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{z} \leq \frac{x}{z} + 1$$

$$\left(1 - \frac{z}{y} \right) \left(1 - \frac{y}{x} \right) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{z}{y} - \frac{y}{x} + \frac{z \cdot y}{y \cdot x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{z}{y} + \frac{y}{x} \leq \frac{z}{x} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} \leq \frac{x}{z} + \frac{z}{x} + 2 \Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} \leq 2 \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + 2$$

$$\text{Đặt } \frac{x}{z} = t \Rightarrow 1 \leq t \leq 2$$

$$\frac{x}{z} + \frac{z}{x} = t + \frac{1}{t} = \frac{t^2 + 1}{t} = \frac{2t^2 - 5t + 2}{2t} + \frac{5}{2} = \frac{(2t-1)(t-2)}{2t} + \frac{5}{2}$$

$$\text{Do } 1 \leq t \leq 2 \Rightarrow \frac{(2t-1)(t-2)}{2t} \leq 0 \Rightarrow \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \leq \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow A \leq 3 + 2 \cdot \frac{5}{2} + 2 = 10 \text{ Ta thấy khi } a=b=0 \text{ và } c=1 \text{ thì } A=10 \text{ nên giá trị lớn nhất của } A \text{ là } 10$$

Bài 126: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn : $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 2$. Chứng minh rằng :

$$5x^2 + y - 4xy + y^2 \geq 3$$

Lời giải

* Ta có:

$$\begin{aligned} & 5x^2 + y - 4xy + y^2 \geq 3 \\ \Leftrightarrow & 4x^2 - 4xy + y^2 + x^2 + y - 3 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (2x - y)^2 + x^2 + y - 3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$* \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{y} = 2 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{2}{y} = \frac{2x-1}{x} \Leftrightarrow y = \frac{2x}{2x-1}$$

$$\text{Vì : } y > 0 ; x > 0 \Rightarrow 2x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1/2 \text{ Thay } y = \frac{2x}{2x-1} \text{ vào } x^2 + y - 3 \geq 0$$

$$\text{Ta có: } x^2 + y - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{2x}{2x-1} - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3 - x^2 + 2x - 6x + 3}{2x-1} \geq 0 \quad (1)$$

$$\text{Vì } 2x - 1 > 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 2x^3 - x^2 + 2x - 6x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow 2x^3 - x^2 - 4x + 3 \geq 0$$

Mà

$$2x^3 - x^2 - 4x + 3 = 2x^3 - 2x^2 + x^2 - x - 3x + 3 = (x-1)(2x^2 + x - 3) = (x-1)^2(2x+3) \geq 0 \quad \forall x > 0$$

$$\text{Vậy } (2x - y)^2 + x^2 + y - 3 \geq 0 \quad \forall x > 0; y > 0$$

Bài 127: Cho $x > 1; y > 0$, chứng minh: $\frac{1}{(x-1)^3} + \left(\frac{x-1}{y}\right)^3 + \frac{1}{y^3} \geq 3\left(\frac{3-2x}{x-1} + \frac{x}{y}\right)$

Lời giải

$$x > 1; y > 0 \Leftrightarrow x-1 > 0; y > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)^3} > 0; \frac{x-1}{y} > 0; \frac{1}{y^3} > 0$$

Áp dụng BĐT Côsi cho 3 số dương:

$$\frac{1}{(x-1)^3} + 1 + 1 \geq 3 \sqrt[3]{\frac{1}{(x-1)^3} \cdot 1 \cdot 1} \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)^3} \geq \frac{3}{x-1} - 2 \quad (1)$$

$$\left(\frac{x-1}{y}\right)^3 + 1 + 1 \geq 3 \sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{y}\right)^3 \cdot 1 \cdot 1} \Leftrightarrow \left(\frac{x-1}{y}\right)^3 \geq \frac{3(x-1)}{y} - 2 \quad (2)$$

$$\frac{1}{y^3} + 1 + 1 \geq 3 \sqrt[3]{\frac{1}{y^3} \cdot 1 \cdot 1} \Leftrightarrow \frac{1}{y^3} \geq \frac{3}{y} - 2 \quad (3)$$

Từ (1); (2); (3):

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-1)^3} + \left(\frac{x-1}{y}\right)^3 + \frac{1}{y^3} &\geq \frac{3}{x-1} - 6 + \frac{3(x-1)}{y} + \frac{3}{y} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{(x-1)^3} + \left(\frac{x-1}{y}\right)^3 + \frac{1}{y^3} &\geq \frac{3-6x+6}{x-1} + \frac{3x}{y} = 3\left(\frac{3-2x}{x-1} + \frac{x}{y}\right) \end{aligned}$$

Bài 128: Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c \leq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = 21(a^2 + b^2 + c^2) + 12(a + b + c)^2 + 2017\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

Lời giải

Ta có Theo BĐT Bunhiacôpky ta có $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$;

Mặt khác $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a + b + c}$ Nên

$$P \geq 19(a + b + c)^2 + \frac{18153}{a + b + c} = 19\left[(a + b + c)^2 + \frac{8}{a + b + c} + \frac{8}{a + b + c}\right] + \frac{17849}{a + b + c} = Q$$

$$\text{Min}(P) = \frac{18305}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c > 0 \\ a + b + c = 2 \\ (a + b + c)^2 = \frac{8}{a + b + c} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{2}{3}$$

Bài 129: Cho a, b, c là các số thực dương. CMR: $\frac{ab}{a + 3b + 2c} + \frac{bc}{b + 3c + 2a} + \frac{ca}{c + 3a + 2b} \leq \frac{a + b + c}{6}$

Lời giải

Dự đoán $a = b = c$ tách mẫu để $a + c = b + c = 2b$

Tacó áp dụng BĐT $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9 \Leftrightarrow \frac{1}{x+y+z} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$

$$\frac{ab}{a+3b+2c} = \frac{ab}{(a+c)+(b+c)+2b} \leq \frac{ab}{9}\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{2b}\right) = \frac{1}{9}\left(\frac{ab}{a+c}+\frac{ab}{b+c}+\frac{a}{2}\right) \quad (1) \text{ Tương tự}$$

$$\frac{bc}{2a+b+3c} = \frac{bc}{(a+b)+(a+c)+2c} \leq \frac{bc}{9}\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{2b}\right) = \frac{1}{9}\left(\frac{bc}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{b}{2}\right) \quad (2)$$

$$\frac{ac}{3a+2b+c} = \frac{ac}{(a+b)+(b+c)+2a} \leq \frac{ac}{9}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{2a}\right) = \frac{1}{9}\left(\frac{ac}{a+b}+\frac{ac}{b+c}+\frac{c}{2}\right) \quad (2)$$

Từ (1) (2) (3) suy ra $P \leq \frac{1}{9}\left(\frac{ac+bc}{a+b}+\frac{ab+ac}{b+c}+\frac{bc+ab}{a+c}+\frac{a+b+c}{2}\right) = \frac{a+b+c}{6}$

Dấu “=” xảy ra khi $a=b=c$

Bài 130: a) Cho $x > 0, y > 0, z > 0$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$.

Chúng minh rằng: $\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq 1$

b) Cho $x > 0, y > 0, z > 0$ thỏa mãn $x^{2011} + y^{2011} + z^{2011} = 3$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $M = x^2 + y^2 + z^2$

Lời giải

a) Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ (với $x, y > 0$)

Ta có: $\frac{1}{2x+y+z} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{y+z}\right)$; $\frac{1}{y+z} \leq \frac{1}{4y} + \frac{1}{4z}$ Suy ra:

$$\frac{1}{2x+y+z} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{4z}\right) \quad (1)$$

Tương tự: $\frac{1}{x+2y+z} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{4z}\right) \quad (2)$

$$\frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{2z}\right) \quad (3)$$

Từ (1),(2),(3) $\Rightarrow \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq 1$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{3}{4}$$

b) Áp dụng bất đẳng thức CôSi cho x^{2011}, x^{2011} và 2009 số 1 ta có:

$$x^{2011} + x^{2011} + 1 + 1 + \dots + 1 \geq 2011 \sqrt[2011]{(x^2)^{2011}}$$

$$\Rightarrow 2x^{2011} + 2009 \geq 2011x^2 \quad (1)$$

$$\text{Tương tự: } 2y^{2011} + 2009 \geq 2011y^2 \quad (2)$$

$$2z^{2011} + 2009 \geq 2011z^2 \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3)} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{2(x^{2011} + y^{2011} + z^{2011}) + 3 \cdot 2009}{2011}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$$

Giá trị lớn nhất của M là 3 khi và chỉ khi $x = y = z = 1$

Bài 131: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{4x+3}{x^2+1}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \frac{4x+3}{x^2+1} = -1 + \frac{x^2+4x+4}{x^2+1}$$

$$A = -1 + \frac{(x+2)^2}{x^2+1} \geq -1$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$$

$$\text{Vậy } A_{\min} = -1 \text{ khi } x = -2$$

Bài 132: Cho $a; b; c$ là các số thuộc đoạn $[-1; 2]$ thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 = 6$ hãy chứng minh rằng: $a + b + c \geq 0$

Lời giải

$$\text{Do } a; b; c \text{ thuộc đoạn } [-1; 2] \text{ nên } a+1 \geq 0; a-2 \leq 0 \text{ nên } (a+1)(a-2) \leq 0$$

$$\text{Hay: } a^2 - a - 2 \leq 0 \Rightarrow a^2 \leq a + 2$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Tương tự: $b^2 \leq b + 2$; $c^2 \leq c + 2$

Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 \leq a + b + c + 6$ theo đầu bài: $a^2 + b^2 + c^2 = 6$ nên: $a + b + c \geq 0$

Bài 133: Chứng minh rằng: Với mọi số nguyên dương n , ta

có: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{4\sqrt[3]{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n}} < 3$.

Lời giải

Ta có $1 = n+1-n = (\sqrt[3]{n+1})^3 - (\sqrt[3]{n})^3 = (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})(\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{(n+1)n} + \sqrt[3]{n^2})$.

Mà $\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{(n+1)n} + \sqrt[3]{n^2} < 3\sqrt[3]{(n+1)^2} \Rightarrow 1 < 3\sqrt[3]{(n+1)^2}(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})$.

Từ đó suy ra $\frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n}} < \frac{3\sqrt[3]{(n+1)^2}(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})}{(n+1)\sqrt[3]{n}} = 3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}} - \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\right)$

Nên $\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{4\sqrt[3]{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n}} < 3\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) + 3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right) + \dots + 3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}} - \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{4\sqrt[3]{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n}} < 3\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\right) < 3$

$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{4\sqrt[3]{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n}} < 3$.

Bài 134: Cho hai số thực x và y thỏa mãn $x^2 + xy + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = x^3y + xy^3$.

Lời giải

Áp dụng BĐT Côsi cho 2 số không âm ta có:

$$x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2y^2} = 2|xy| \geq 2xy \Rightarrow x^2 + y^2 + xy \geq 2xy + xy = 3xy \Rightarrow xy \leq \frac{1}{3}.$$

Ta có $(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2ab \leq a^2 + b^2 \Leftrightarrow 4ab \leq (a+b)^2 \Leftrightarrow ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$ (1).

$$P = x^3y + xy^3 = xy(x^2 + y^2) = xy(1 - xy) \text{ vì } x^2 + xy + y^2 = 1$$

Áp dụng BĐT (1) ta có $2P = 2xy \cdot (1 - xy) \leq \frac{(2xy + 1 - xy)^2}{4} = \frac{(1 + xy)^2}{4} \leq \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 : 4 = \frac{4}{9}$

$\Rightarrow P \leq \frac{2}{9}$. Vậy P có giá trị lớn nhất bằng $\frac{2}{9}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$xy = \frac{1}{3} \text{ và } |x| = |y| \Rightarrow x = y = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ hoặc } x = y = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Bài 135: Chứng minh rằng $(a+b+c) \left[\frac{3a-b}{a^2+ab} + \frac{3b-c}{b^2+bc} + \frac{3c-a}{c^2+ca} \right] \leq 9$ với a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Lời giải

Giả sử $a+b+c=t$ và đặt $a=tx; b=ty; c=tz \Rightarrow x+y+z=1$.

$$\text{Ta chứng minh } t(x+y+z) \left[\frac{t(3x-y)}{t^2(x^2+xy)} + \frac{t(3y-z)}{t^2(y^2+yz)} + \frac{t(3z-x)}{t^2(z^2+zx)} \right] \leq 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-y}{x^2+xy} + \frac{3y-z}{y^2+yz} + \frac{3z-x}{z^2+zx} \leq 9.$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x-(x+y)}{x(x+y)} + \frac{4y-(y+z)}{y(y+z)} + \frac{4z-(z+x)}{z(z+x)} \leq 9 \Leftrightarrow \frac{4}{1-z} - \frac{1}{x} + \frac{4}{1-x} - \frac{1}{y} + \frac{4}{1-y} - \frac{1}{z} \leq 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x-1}{x-x^2} + \frac{5y-1}{y-y^2} + \frac{5z-1}{z-z^2} \leq 9 \quad \text{Vì } a, b, c \text{ là ba cạnh của một tam giác}$$

$$\text{nên } a+b > c \Rightarrow x, y, z \in \left(0; \frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Ta có: } \frac{5x-1}{x-x^2} \leq 18x-3 \Leftrightarrow (3x-1)^2(2x-1) \leq 0 \text{ đúng } \forall x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{5y-1}{y-y^2} \leq 18y-3 \Leftrightarrow (3y-1)^2(2y-1) \leq 0 \text{ đúng } \forall y \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{5z-1}{z-z^2} \leq 18z-3 \Leftrightarrow (3z-1)^2(2z-1) \leq 0 \text{ đúng } \forall z \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Suy ra } \Leftrightarrow \frac{5x-1}{x-x^2} + \frac{5y-1}{y-y^2} + \frac{5z-1}{z-z^2} \leq 18(x+y+z)-9 \Leftrightarrow \frac{5x-1}{x-x^2} + \frac{5y-1}{y-y^2} + \frac{5z-1}{z-z^2} \leq 9$$

Bài 136: Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $2\sqrt{y} + \sqrt{z} = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Chứng minh rằng $\frac{3yz}{x} + \frac{4zx}{y} + \frac{5xy}{z} \geq 4$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\frac{3yz}{x} + \frac{4zx}{y} + \frac{5xy}{z} = \left(\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \right) + 2 \left(\frac{zy}{x} + \frac{xy}{z} \right) + 3 \left(\frac{zx}{y} + \frac{xy}{z} \right) \geq 2z + 4y + 6x$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$= 4(x+y) + 2(z+x) \geq 8\sqrt{xy} + 4\sqrt{xz} = 4\sqrt{x}(2\sqrt{y} + \sqrt{z}) = 4\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = 4.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

**(CÁC DẠNG BÀI TẬP THI HSG TOÁN 9
QUA CÁC ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI**

Dạng 7: Các bài toán về đa thức:

1. Xác định đa thức

A. Bài toán (giữ nguyên màu)

Bài 1: Cho đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \in \mathbb{N}^*$) thỏa mãn $P(9) - P(6) = 2019$.

Chứng minh $P(10) - P(7)$ là một số lẻ.

Bài 2: Cho các đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$; $Q(x) = x^2 + 2016x + 2017$ thỏa mãn $P(x) = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt và $P(Q(x)) = 0$ vô nghiệm.

Chứng minh rằng $P(2017) > 1008^6$.

Bài 3: Xác định các hệ số a và b để đa thức $P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + ax + b$ là bình phương của một đa thức.

B. Lời giải (giữ nguyên màu)

Bài 1: Cho đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \in \mathbb{N}^*$) thỏa mãn $P(9) - P(6) = 2019$.

Chứng minh $P(10) - P(7)$ là một số lẻ.

Lời giải

có:

$$P(9) - P(6) = 2019$$

$$\Leftrightarrow (81a + 9b + c) - (36a + 6b + c) = 2019$$

$$\Leftrightarrow 45a + 3b = 2019 \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } P(10) - P(7) = (100a + 10b + c) - (49a + 7b + c) = 51a + 3b$$

$$\text{Đặt } P(10) - P(7) = t \Rightarrow 51a + 3b = t \quad (2)$$

Trừ vế theo vế (2) cho (1) ta có: $6a = t - 2019$, mà $6a$ chẵn, 2019 lẻ nên t lẻ, ta có điều phải chứng minh

Bài 2: Cho các đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$; $Q(x) = x^2 + 2016x + 2017$ thỏa mãn $P(x) = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt và $P(Q(x)) = 0$ vô nghiệm.

Chứng minh rằng $P(2017) > 1008^6$.

Giải:

Gọi x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của $P(x)$ ta có $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

Suy ra, $P(Q(x)) = (Q(x) - x_1)(Q(x) - x_2)(Q(x) - x_3)$

Do $P(Q(x)) = 0$ vô nghiệm nên các phương trình $Q(x) - x_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$) vô nghiệm.

Hay các phương trình $x^2 + 2016x + 2017 - x_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$) vô nghiệm

Bài 3: Xác định các hệ số a và b để đa thức $P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + ax + b$ là bình phương của một đa thức.

Lời giải

Ta có $P(x)$ là bình phương của một đa thức thì:

$$P(x) = (x^2 + cx + d)^2 = x^4 + 2cx^3 + (c^2 + 2d)x^2 + 2cdx + d^2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Mà: } P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + ax + b$$

Do đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2c = -2 \\ c^2 + 2d = 3 \\ 2cd = a \\ d^2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -1 \\ d = 1 \\ a = -2 \\ b = 1 \end{cases}$$

Vậy: $a = -2, b = 1$.

CÁC DẠNG BÀI TẬP THI HSG TOÁN 9

QUA CÁC ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI

Dạng 8: Hàm số:

1. Hàm số bậc nhất

A. Bài toán

Bài 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng $(d): y = (m+2)x - m + 1$ và $(d'): x + (m+2)y = m+2$ trong đó m là tham số. Chứng minh rằng giao điểm của hai đường thẳng nói trên thuộc một đường cố định khi m thay đổi.

Bài 2: Anh Bình vừa tốt nghiệp loại xuất sắc nên được nhiều công ty mời về làm việc, trong đó có hai công ty A và B. Để thu hút người tài, cả hai công ty đưa ra hình thức trả lương trong thời gian thử việc như sau:

Công ty A: Anh Bình được nhận 1400 USD ngay khi ký hợp đồng thử việc và mỗi tháng sẽ được trả lương 1700USD.

Công ty B: Anh Bình được nhận 2400 USD ngay khi ký hợp đồng thử việc và mỗi tháng sẽ được trả lương 1500USD.

Em hãy tư vấn giúp anh Bình lựa chọn công ty để thử việc sao cho tổng số tiền nhận được là nhiều nhất. Biết thời gian thử việc của cả hai công ty đều từ 3 tháng đến 8 tháng.

Bài 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi (D) và (L) lần lượt là đồ thị của hai hàm số: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ và $y = |x|$.

a) Vẽ đồ thị (D) và (L) .

(D) và (L) cắt nhau tại M và N . Chứng minh OMN là tam giác vuông

Bài 4: Trên mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng (d) có phương trình $(m-4)x + (m-3)y = 1$ (m là tham số). Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng (d) là lớn nhất

Bài 5: Trong hệ trục tọa độ Oxy , tìm trên đường thẳng $y = 2x + 1$ những điểm $M(x; y)$

sao cho $y^2 - 5y\sqrt{x} + 6x = 0$.

Bài 6: Cho hàm số $y = ax + b$ (a khác 0) có đồ thị là (d) . Lập phương trình đường thẳng (d) , biết (d) đi qua điểm $A(1; 2)$ và cắt trục hoành tại điểm B có hoành độ dương, cắt trục tung tại điểm C có tung độ dương và thỏa mãn $(OB + OC)$ nhỏ nhất (O là gốc tọa độ)

Bài 7: Cho hàm số $y = 2\sqrt{x^2 - 6x + 9} - x - 2$ có đồ thị (D)

a) Vẽ đồ thị (D) của hàm số trên

b) Với giá trị nào của m thì phương trình $2\sqrt{x^2 - 6x + 9} - x - 2 = m$ vô nghiệm

c) Dựa vào đồ thị (D), tìm tập nghiệm của bất phương trình

Bài 8: Cho hàm số $y = x^2$. Tìm các giá trị của m để đường thẳng Δ có phương trình $y = x - m$ cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ thỏa mãn: $(x_2 - x_1)^4 + (y_2 - y_1)^4 = 18$.

Bài 9: (1,5 điểm)

Cho đường thẳng d_m có phương trình: $y = mx + 2m - 1$ (m là tham số)

a) Chứng minh rằng: Khi m thay đổi thì đường thẳng d_m luôn đi qua 1 điểm H cố định.
Tìm tọa độ của điểm H

b) Tìm giá trị của m sao cho khoảng cách từ điểm $A(1; 2)$ đến d_m lớn nhất.

Bài 10: a) Cho các hàm số bậc nhất: $y = 0,5x + 3$, $y = 6 - x$ và $y = mx$ có đồ thị lần lượt là các đường thẳng (d_1) , (d_2) và (Δ_m) . Với những giá trị nào của tham số m thì đường thẳng (Δ_m) cắt hai đường thẳng (d_1) và (d_2) lần lượt tại hai điểm A và B sao cho điểm A có hoành độ âm còn điểm B có hoành độ dương?

b) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho M và N là hai điểm phân biệt, di động lần lượt trên trục hoành và trên trục tung sao cho đường thẳng MN luôn đi qua điểm cố định $I(1; 2)$. Tìm hệ thức liên hệ giữa hoành độ của M và tung độ của N ; từ đó, suy ra giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2}.$$

B. Lời giải

Bài 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $(d): y = (m+2)x - m + 1$ và $(d'): x + (m+2)y = m+2$ trong đó m là tham số. Chứng minh rằng giao điểm của hai đường thẳng nói trên thuộc một đường cố định khi m thay đổi.

Lời giải

Nhận xét $A(1; 3) \in (d)$; $B(0; 1) \in (d')$

- Với $m = -2$ thì: $(d): y = 3$ và $(d'): x = 0$ vuông góc với nhau
- Với $m \neq -2$ thì: $(d'): y = -\frac{1}{m+2}x + 1$

$$\text{Khi đó ta có } a \cdot a' = (m+2) \left(-\frac{1}{m+2} \right) = -1 \Rightarrow (d) \perp (d')$$

Vậy $(d) \perp (d')$ với mọi m

Vậy giao điểm của hai đường thẳng nói trên nhìn đoạn AB cố định dưới một góc vuông nên thuộc đường tròn đường kính AB khi m thay đổi.

Bài 2: Anh Bình vừa tốt nghiệp loại xuất sắc nên được nhiều công ty mời về làm việc, trong đó có hai công ty A và B. Để thu hút người tài, cả hai công ty đưa ra hình thức trả lương trong thời gian thử việc như sau:

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Công ty A: Anh Bình được nhận 1400 USD ngay khi ký hợp đồng thử việc và mỗi tháng sẽ được trả lương 1700USD.

Công ty B: Anh Bình được nhận 2400 USD ngay khi ký hợp đồng thử việc và mỗi tháng sẽ được trả lương 1500USD.

Em hãy tư vấn giúp anh Bình lựa chọn công ty để thử việc sao cho tổng số tiền nhận được là nhiều nhất. Biết thời gian thử việc của cả hai công ty đều từ 3 tháng đến 8 tháng.

Lời giải

Gọi x (tháng) là số tháng thử việc của anh Bình. ($x \in \mathbb{N}^*$, $3 \leq x \leq 8$).

Gọi y (USD) là số tiền anh Bình nhận được sau x tháng thử việc.

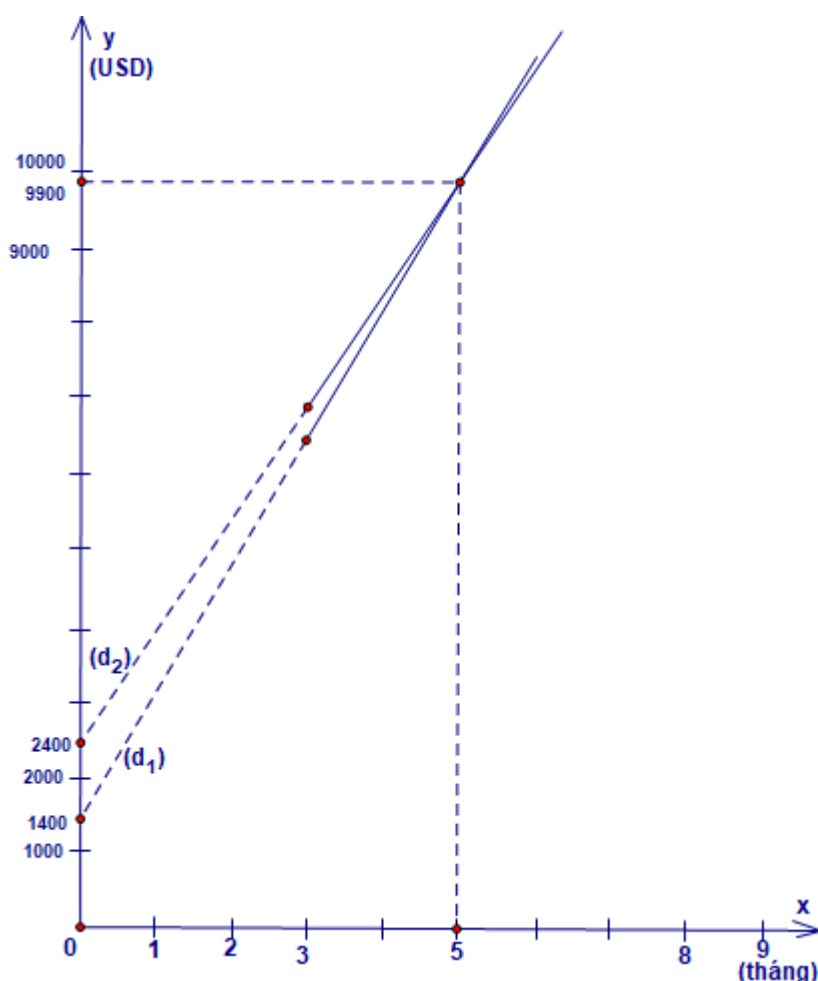
Theo công ty A thì số tiền anh Bình nhận được: $y = 1400 + 1700x$ (d_1)

Theo công ty B thì số tiền anh Bình nhận được: $y = 2400 + 1500x$ (d_2)

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và (d_2):

$$1400 + 1700x = 2400 + 1500x \Leftrightarrow x = 5 \Rightarrow y = 9900$$

Xét đồ thị biểu diễn hai hàm (d_1) và (d_2) như sau:



Căn cứ vào đồ thị, ta có thể tư vấn cho anh Bình như sau:

+Nếu thử việc từ 3 đến dưới 5 tháng thì anh Bình nên chọn công ty B sẽ thu được tiền nhiều hơn.

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

+Nếu thử việc từ hơn 5 tháng thì anh Bình nên chọn công ty A sẽ thu được tiền nhiều hơn.

+Nếu thử việc đúng 5 tháng thì anh Bình chọn công ty nào cũng sẽ thu được tiền như nhau.

Bài 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi (D) và (L) lần lượt là đồ thị của hai hàm số:

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \text{ và } y = |x|.$$

a) Vẽ đồ thị (D) và (L).

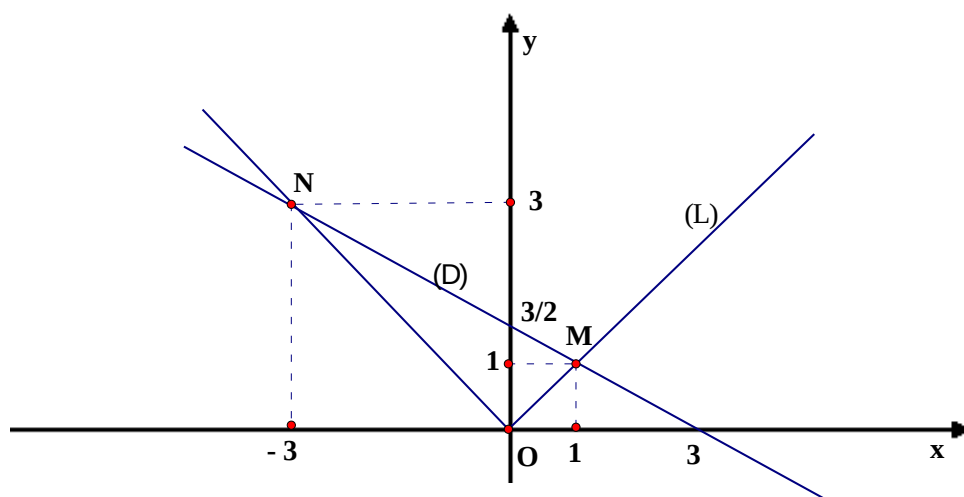
(D) và (L) cắt nhau tại M và N. Chứng minh OMN là tam giác vuông

Giải:

$$\text{a) Đồ thị } y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \text{ có: } \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2} \\ y = 0 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

$$\text{Đồ thị } y = |x| = \begin{cases} x \text{ khi } x \geq 0 \\ -x \text{ khi } x \leq 0 \end{cases}$$

Đồ thị như hình vẽ:



b) Đồ thị (D) và (L) cắt nhau tại hai điểm có tọa độ M(1; 1) và N(-3; 3)

$$\text{Ta có: } OM = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \Rightarrow OM^2 = 2$$

$$ON = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow ON^2 = 18$$

$$MN = \sqrt{(1-3)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{20} \Rightarrow MN^2 = 20$$

$$\text{Vì: } OM^2 + ON^2 = MN^2$$

Vậy: tam giác OMN vuông tại O

Bài 4: Trên mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng (d) có phương trình $(m-4)x + (m-3)y = 1$ (m là tham số). Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng (d) là lớn nhất.

Giải:

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Xét pt: $(m-4)x + (m-3)y = 1$

Ta thấy: $(m-4).0 + (m-3).0 = 0 \neq 1$ nên (d) không thể đi qua $O(0;0)$

+ $m = 4$ ta được $y = 1$ nên K/c từ (d) đến O bằng $|y| = 1$

+ $m = 3$ ta được $x = -1$ nên K/c từ (d) đến O bằng $|x| = |-1| = 1$

+ $m \neq 3; m \neq 4$ thì (d) cắt Ox tại $A\left(\frac{1}{m-4}, 0\right)$ và cắt Oy tại $B\left(0, \frac{1}{m-3}\right)$

Kẻ OH vuông góc với (d) tại H; ta có K/c từ O đến (d) là OH.

Dựa vào $\triangle OAB$ vuông tại O chỉ ra được

$$\frac{1}{OH^2} = (m-4)^2 + (m-3)^2 = 2\left(m - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

Suy ra được: $OH \leq \sqrt{2}$

Suy được khoảng cách từ O đến (d) lớn nhất $OH = \sqrt{2}$ khi $m = \frac{7}{2}$

Bài 5: Trong hệ trục tọa độ Oxy , tìm trên đường thẳng $y = 2x + 1$ những điểm $M(x; y)$

sao cho $y^2 - 5y\sqrt{x} + 6x = 0$.

Giải:

$$\text{Ta có } y^2 - 5y\sqrt{x} + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2\sqrt{x} \\ y = 3\sqrt{x} \end{cases}$$

Với $y = 2\sqrt{x} \Rightarrow 2x + 1 = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow x + (\sqrt{x} - 1)^2 = 0$, không có x thỏa mãn.

$$\text{Với } y = 3\sqrt{x} \Rightarrow 2x + 1 = 3\sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 1 \\ \sqrt{x} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Từ đó tìm được các điểm thỏa mãn là $M(1; 3)$ hoặc $M\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right)$.

Bài 6: Cho hàm số $y = ax + b$ (a khác 0) có đồ thị là (d). Lập phương trình đường thẳng (d), biết (d) đi qua điểm $A(1; 2)$ và cắt trục hoành tại điểm B có hoành độ dương, cắt trục tung tại điểm C có tung độ dương và thỏa mãn $(OB + OC)$ nhỏ nhất (O là gốc tọa độ)

Lời giải

Do (d) đi qua điểm $A(1; 2)$ nên (d) có dạng $y = ax + 2 - a$

Có (d) cắt trục Ox tại $B\left(\frac{a-2}{a}; 0\right)$ và cắt trục Oy tại $C(0; 2-a)$

Vì điểm B có hoành độ dương và C có tung độ dương nên $a < 0$

$$\text{Khi đó ta có } OB + OC = \frac{a-2}{a} + 2 - a = 1 - \frac{2}{a} + 2 - a = 3 + \frac{-2}{a} + (-a) \geq 3 + 2\sqrt{\frac{-2}{a} \cdot (-a)} = 5$$

Suy ra $OB + OC$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $a = -\sqrt{2}$

Vậy phương trình (d) có dạng: $y = -\sqrt{2}x + 2 + \sqrt{2}$

Bài 7: Cho hàm số $y = 2\sqrt{x^2 - 6x + 9} - x - 2$ có đồ thị (D)

a) Vẽ đồ thị (D) của hàm số trên

b) Với giá trị nào của m thì phương trình $2\sqrt{x^2 - 6x + 9} - x - 2 = m$ vô nghiệm

c) Dựa vào đồ thị (D), tìm tập nghiệm của bất phương trình: $2\sqrt{x^2 - 6x + 9} \geq x$

Lời giải

$$a) y = 2\sqrt{x^2 - 6x + 9} - x - 2 = 2|x - 3| - x - 2 = \begin{cases} x - 8 & \text{nếu } x \geq 3 \\ -3x + 4 & \text{nếu } x < 3 \end{cases}$$

Học sinh tự vẽ đồ thị.

b) Phương trình (*) là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị sau:

$$(D) y = 2\sqrt{x^2 - 6x + 9} - x - 2 \quad (1)$$

(D'): $y = m$ là đường thẳng song song với trục Ox và cắt trục Oy tại điểm có tung độ m . Căn cứ vào đồ thị, ta có phương trình (*) vô nghiệm

(D) và (D') không giao nhau $\Leftrightarrow m < -5$

Vậy $m < -5$ thì pt (*) vô nghiệm

c) Dựa vào đồ thị đã vẽ ở câu a, ta có nghiệm của (1) là tập hợp hoành độ của các điểm (D) có tung

$$\text{độ } y \geq -2, \text{ nên } \begin{cases} x \geq 6 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của (1) là $x \geq 6$ hoặc $x \leq 2$

Bài 8: Cho hàm số $y = x^2$. Tìm các giá trị của m để đường thẳng Δ có phương trình $y = x - m$ cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ thỏa mãn: $(x_2 - x_1)^4 + (y_2 - y_1)^4 = 18$.

Giải:

Xét pt hoành độ giao điểm:

$$x^2 = x - m$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + m = 0 \quad (1)$$

Đường thẳng Δ cắt đths đã cho tại hai điểm phân biệt A, B khi và chỉ khi pt(1) có hai nghiệm phân biệt.

+ Điều kiện: $\Delta = 1 - 4m > 0$

$$\Leftrightarrow m < \frac{1}{4}.$$

+ Khi đó $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$

+ Theo định lý Viet $x_1 + x_2 = 1$, $x_1 x_2 = m$. Ta có $y_1 = x_1 - m$, $y_2 = x_2 - m$

$$+ (x_1 - x_2)^4 + (y_1 - y_2)^4 = 18 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^4 = 9 \Leftrightarrow [(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2]^2 = 9$$

$$+ \text{Tìm được } \begin{cases} m = 1 (k^0 t / m) \\ m = -\frac{1}{2} (t / m) \end{cases}$$

KL:

Bài 9: (1,5 điểm)

Cho đường thẳng d_m có phương trình: $y = mx + 2m - 1$ (m là tham số)

- c) Chứng minh rằng: Khi m thay đổi thì đường thẳng d_m luôn đi qua 1 điểm H cố định.
 Tìm tọa độ của điểm H
 d) Tìm giá trị của m sao cho khoảng cách từ điểm $A(1;2)$ đến d_m lớn nhất.

Giải:

- a) Chứng minh rằng: Khi m thay đổi thì đường thẳng d_m luôn đi qua 1 điểm H cố định.

Tìm tọa độ của điểm H .

Gọi $H(x_0; y_0)$ là điểm cố định luôn đi qua d_m với mọi m .

$$H(x_0; y_0) \in d_m \text{ với mọi } m$$

$$\text{Ta có: } y_0 = mx_0 + 2m - 1 \Leftrightarrow y_0 + 1 = (x_0 + 2)m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 2 = 0 \\ y_0 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -2 \\ y_0 = -1 \end{cases} \cdot \text{Vậy } H(-2; -1)$$

- b) Khoảng cách từ điểm $A(1;2)$ đến d_m

$$h_{(A, d_m)} = \frac{|m - 2 + 2m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{3|m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} \leq 3\sqrt{2}$$

$$\text{Do } ((m - 1)^2 \leq 2(m^2 + 1)) \Rightarrow \frac{|m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} \leq \sqrt{2}$$

Dấu “=” xảy ra khi $m = -1$

Khoảng cách từ điểm $A(1;2)$ đến d_m lớn nhất là $3\sqrt{2}$ khi $m = -1$

Bài 1: a) Cho các hàm số bậc nhất: $y = 0,5x + 3$, $y = 6 - x$ và $y = mx$ có đồ thị lần lượt là các đường thẳng (d_1) , (d_2) và (Δ_m) . Với những giá trị nào của tham số m thì đường thẳng (Δ_m) cắt hai đường thẳng (d_1) và (d_2) lần lượt tại hai điểm A và B sao cho điểm A có hoành độ âm còn điểm B có hoành độ dương?

b) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho M và N là hai điểm phân biệt, di động lần lượt trên trục hoành và trên trục tung sao cho đường thẳng MN luôn đi qua điểm cố định $I(1; 2)$. Tìm hệ thức liên hệ giữa hoành độ của M và tung độ của N ; từ đó, suy ra giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2}.$$

Lời giải

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

a) Điều kiện để (Δ_m) là đồ thị hàm số bậc nhất là $m \neq 0$

Phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và (Δ_m) là:

$$0,5x + 3 = mx \Leftrightarrow (m - 0,5)x = 3$$

Điều kiện để phương trình này có nghiệm âm là $m - 0,5 < 0$ hay $m < 0,5$ Phương trình hoành độ giao điểm của (d_2) và (Δ_m) là:

$$6 - x = mx \Leftrightarrow (m + 1)x = 6$$

Điều kiện để phương trình này có nghiệm dương là $m + 1 > 0$ hay $m > -1$ Vậy điều kiện cần tìm là:
 $-1 < m < 0,5; m \neq 0$

b) Đặt $m = x_M$ và $n = y_N \Rightarrow m \cdot n \neq 0$ và $m \neq 1$ (*)

Nên đường thẳng qua ba điểm M, I, N có dạng: $y = ax + b \Rightarrow \begin{cases} 0 = am + b \\ 2 = a + b \\ n = b \end{cases} \Rightarrow$ hệ thức liên hệ giữa m

và n là $2m + n = mn$

Chia hai vế cho $m \cdot n \neq 0$ ta được: $\frac{1}{m} + \frac{2}{n} = 1$ (**)

$$\Rightarrow 1 = \left(\frac{1}{m} + \frac{2}{n} \right)^2 = \frac{1}{m^2} + \frac{4}{n^2} + \frac{4}{mn} = 5 \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} \right) - \left(\frac{2}{m} - \frac{1}{n} \right)^2$$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{5}; \text{ dấu "=" xảy ra khi } \frac{2}{m} = \frac{1}{n}; \text{ kết hợp (**): } m = 5, n = 2,5 \text{ (thỏa (*))}$$

Lời giải

2. Hàm số bậc hai

A. Bài toán

Bài 1: Trong mặt phẳng Oxy cho parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$.

a) Vẽ đồ thị (P) .

b) Trên (P) lấy điểm A có hoành độ $x_A = -2$. Tìm tọa độ điểm M trên trục Ox sao cho

$|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất, biết rằng $B(1;1)$.

Bài 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = x^2$ và hai điểm $A(-1;1)$, $B(3;9)$ nằm trên (P) . Gọi M là điểm thay đổi trên (P) và có hoành độ là m $(-1 < m < 3)$. Tìm m để tam giác ABM có diện tích lớn nhất.

Bài 3: Cho parabol $(P): y = ax^2$. Tìm điều kiện của a để trên (P) có $A(x_0; y_0)$ với hoành độ dương thỏa mãn điều kiện $\sqrt{x_0^2 + 1} - \sqrt{y_0 + 4} = x_0 - \sqrt{y_0 + 3}$

B. Lời giải

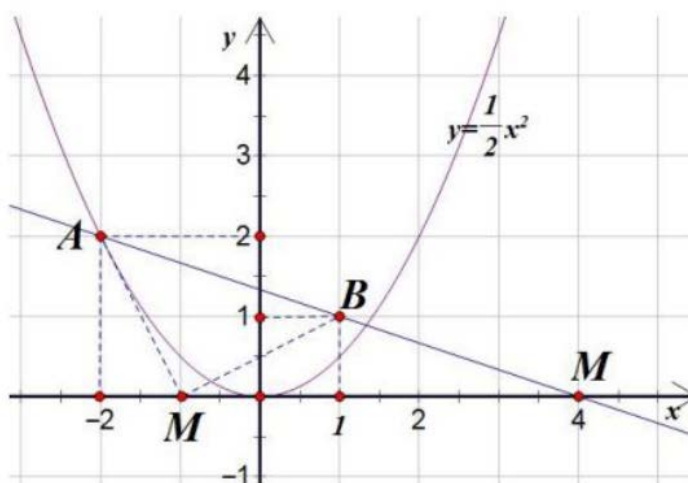
Bài 1: Trong mặt phẳng Oxy cho parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$.

- a) Vẽ đồ thị (P) .
- b) Trên (P) lấy điểm A có hoành độ $x_A = -2$. Tìm tọa độ điểm M trên trục Ox sao cho $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất, biết rằng $B(1; 1)$.

Lời giải

- a) Bảng giá trị

x	-4	-2	0	2	4
$y = \frac{1}{2}x^2$	8	2	0	2	8



- b) Vì $A \in (P)$ có hoành độ $x_A = -2$ nên $y_A = 2 \Rightarrow A(-2; 2)$

Lấy $M(x_M; 0)$ bất kì thuộc Ox , ta có: $|MA - MB| \leq AB$

Dấu “=” xảy ra khi 3 điểm A, B, M thẳng hàng khi đó M là giao điểm của đường thẳng AB và trục Ox .

Gọi phương trình đường thẳng AB có dạng: $y = ax + b$

Do A, B thuộc đường thẳng AB nên ta có:

$$\begin{cases} -2a + b = 2 \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-1}{3} \\ b = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng AB là: $y = \frac{-1}{3}x + \frac{4}{3}$

Phương trình hoành độ giao điểm của 2 đường thẳng AB và Ox là:

$$\frac{-1}{3}x + \frac{4}{3} = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

$\Rightarrow M(4;0)$

Bài 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P): $y = x^2$ và hai điểm $A(-1;1)$, $B(3;9)$ nằm trên (P). Gọi M là điểm thay đổi trên (P) và có hoành độ là m ($-1 < m < 3$). Tìm m để tam giác ABM có diện tích lớn nhất.

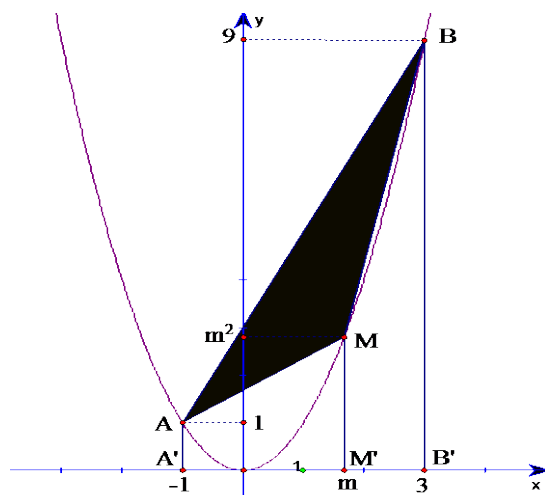
Giải:

$$\begin{aligned} S_{ABB'A'} &= \frac{1}{2}(AA' + BB') \cdot A'B' \\ &= \frac{1}{2}(1 + 9) \cdot 4 = 20 \\ S_{AMM'A'} &= \frac{1}{2}(AA' + MM') \cdot A'M' \\ &= \frac{1}{2}(1 + m^2)(m + 1) \\ S_{MBB'M'} &= \frac{1}{2}(MM' + BB') \cdot B'M' \\ &= \frac{1}{2}(m^2 + 9)(3 - m) \\ S_{ABM} &= S_{ABB'A'} - S_{AMM'A'} - S_{MBB'M'} \\ &= 8 - 2(m - 1)^2 \end{aligned}$$

Ta có: $S_{ABM} = 8 - 2(m - 1)^2 \leq 8$ và $S_{ABM} = 8 \Leftrightarrow m = 1$

Suy ra S_{ABM} lớn nhất bằng 8 $\Leftrightarrow m = 1$

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm



Bài 3: Cho parabol (P): $y = ax^2$. Tìm điều kiện của a để trên (P) có $A(x_0; y_0)$ với hoành độ

đương thỏa mãn điều kiện $\sqrt{x_0^2 + 1} - \sqrt{y_0 + 4} = x_0 - \sqrt{y_0 + 3}$.

Giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sqrt{x_0^2+1}-\sqrt{y_0+4} &= x_0-\sqrt{y_0+3} \Leftrightarrow \sqrt{x_0^2+1}-x_0 = \sqrt{y_0+4}-\sqrt{y_0+3} . \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x_0^2+1}+x_0} &= \frac{1}{\sqrt{y_0+4}+\sqrt{y_0+3}} . \end{aligned}$$

Vậy nên

$$\begin{cases} \sqrt{x_0^2+1}-\sqrt{y_0+4} = x_0-\sqrt{y_0+3} \\ \sqrt{x_0^2+1}+\sqrt{y_0+4} = x_0+\sqrt{y_0+3} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x_0^2+1} = \sqrt{y_0+4} \Rightarrow x_0^2+1 = y_0+4 \Rightarrow (1-a)x_0^2 = 3 \\ \Rightarrow x_0^2 = \frac{3}{1-a} > 0 \Rightarrow 1-a > 0 \Leftrightarrow a < 1. \end{aligned}$$

A. Bài toán (giữ nguyên màu)

3. Sự tương giao giữa các đồ thị

A. Bài toán (giữ nguyên màu)

Bài 1: Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ có đồ thị (P) và điểm $A(2;2)$. Gọi d_m là đường thẳng qua A có hệ số góc m. Tìm tất cả các giá trị của m để d_m cắt đồ thị (P) tại hai điểm A và B, đồng thời cắt trục Ox tại điểm C sao cho $AB = 3AC$.

Bài 2: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y = \frac{1}{2}x + 3$. Gọi $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ (với $x_A < x_B$) là các giao điểm của (P) và (d) , $C(x_C; y_C)$ là điểm thuộc (P) sao cho $x_A < x_C < x_B$. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác ABC.

Bài 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol $(P): y = -x^2$

a) Vẽ parabol (P) .

b) Xác định tọa độ các giao điểm A, B của đường thẳng $(d): y = -x - 2$ và (P) . Tìm tọa độ điểm M trên (P) sao cho $\triangle MAB$ cân tại M.

Bài 4: Cho hàm số $y = 2x^2$ có đồ thị là (P) và hàm số $y = 6x + m + 4$ có đồ thị là (d) . Tìm m để (P) và (d) tiếp xúc nhau.

Bài 5: Trong hệ tọa độ Oxy, tìm m để đường thẳng $(d): y = mx - m + 2$ cắt parabol $(P): y = 2x^2$ tại hai điểm phân biệt nằm bên phải trục tung.

Bài 6: Gọi đồ thị hàm số $y = x^2$ là parabol (P) , đồ thị hàm số $y = (m+4)x - 2m - 5$ là đường thẳng (d) .

- a) Tìm giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt.
- b) Khi (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 . Tìm các giá trị của m sao cho $x_1^3 + x_2^3 = 0$.

Bài 7: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho parabol $(P): y = x^2$ cắt đường thẳng

$$(d): y = mx - 2 \text{ tại 2 điểm phân biệt } A(x_1; y_1), B(x_2; y_2) \text{ thỏa mãn } y_1 + y_2 = 2(x_1 + x_2) - 1$$

Bài 8: Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = (m-1)x + m + 4$ (tham số m).

- a) Với $m = 2$, tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) .
- b) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm nằm về hai phía của trục tung.

Bài 9: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol $(P): y = -x^2$

- a) Vẽ parabol (P) .
- b) Xác định tọa độ các giao điểm A, B của đường thẳng $(d): y = -x - 2$ và (P) . Tìm tọa độ điểm M trên (P) sao cho $\triangle MAB$ cân tại M .

Bài 10: Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: y = (m+1)x - m$, m là tham số.

Tìm m để đường thẳng d cắt parabol $(P): y = x^2$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho OA vuông góc với OB

Bài 11: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng $d_1: y = \frac{2}{m}(x+1) - m - 1$ và đường

thẳng $d_2: y = \frac{-m}{2}x + m^2 - \frac{3m}{2} + 3$ (m là tham số thực khác 0).

a) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m khác 0 thì hai đường thẳng d_1 và d_2 luôn cắt nhau tại một điểm duy nhất.

b) Gọi $M(x; y)$ là giao điểm của d_1 và d_2 . Tìm m để biểu thức $P = x^2 - y^2 + xy + 2n + 3y$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 12: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2(m-2)x - 4m + 13$

- a) Với $m = 4$, trên cùng một hệ tọa độ Oxy , vẽ (P) và (d) . Xác định tọa độ giao điểm A và B .
- b) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm có hoành độ x_1, x_2 sao cho biểu thức

$$S = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1 \cdot x_2 + 2018 \text{ đạt giá trị nhỏ nhất}$$

Bài 13: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho đường thẳng $(d): (m-1)x + y = 3m - 4$ và $(d'): x + (m-1)y = m$. Tìm m để (d) cắt (d') tại điểm M sao cho $\widehat{MOx} = 30^\circ$.

Bài 14: Cho hai đường thẳng $(d_1): mx + (m-2)y + m + 2 = 0$ và $(d_2): mx + (m-2)y + m + 2 = 0$.

- a) Tìm điểm cố định mà (d_1) luôn đi qua và điểm cố định mà (d_2) luôn đi qua với mọi m .

b) Chứng minh rằng hai đường thẳng (d_1) và (d_2) luôn cắt nhau tại một điểm I và khi m thay đổi thì điểm I thuộc một đường tròn cố định.

Bài 15: Cho hàm số $y = (m^2 - 4m - 4)x + 3m - 2$ có đồ thị là d . Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng d cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại hai điểm A và B sao cho ΔOAB có diện tích là 1cm^2 (O là gốc tọa độ, đơn vị đo trên các trục là cm).

Bài 16: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $B(6;0)$, $C(0;3)$ và đường thẳng d_m có phương trình $y = mx - 2m + 2$, với m là tham số, $m \neq 0, m = -\frac{1}{2}$.

a) Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng d_m và BC .

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đường thẳng d_m chia tam giác OBC thành hai phần có diện tích bằng nhau (O là gốc tọa độ).

Bài 17: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường thẳng d có phương trình $y = mx + m - 1$ (m là tham số thực). Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng d tạo với các trục tọa độ $Ox; Oy$ một tam giác có diện tích là 2 .

Bài 18: Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx + 1$ (m là tham số thực). Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn $AB = \sqrt{10}$.

Bài 19: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho Parabol $(P): y = ax^2$ ($a \neq 0$) và đường thẳng $(d):$

$$y = bx + 1$$

1) Tìm các giá trị của a và b để (P) và (d) cùng đi qua điểm $M(1; 2)$

2) Với a, b vừa tìm được, chứng minh rằng (P) và (d) còn có một điểm chung N khác M . Tính diện tích tam giác MON (với O là gốc tọa độ)

Bài 20: Trong cùng một hệ tọa độ, cho đường thẳng $d: y = x - 2$ và parabol $(P): y = -x^2$. Gọi A và B là giao điểm của d và (P) .

1) Tính độ dài AB .

2) Tìm m để đường thẳng $d': y = -x + m$ cắt (P) tại hai điểm C và D sao cho

$$CD = AB.$$

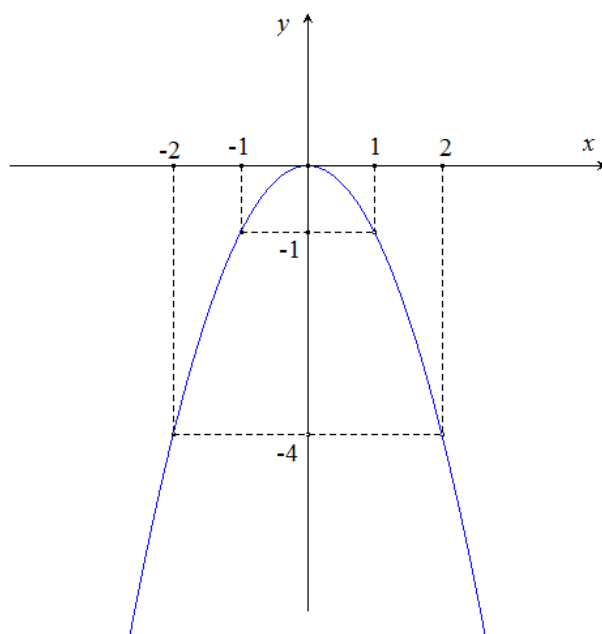
B. Lời giải

Bài 1: Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ có đồ thị (P) và điểm $A(2;2)$. Gọi d_m là đường thẳng qua A có hệ số góc m. Tìm tất cả các giá trị của m để d_m cắt đồ thị (P) tại hai điểm A và B, đồng thời cắt trục Ox tại điểm C sao cho $AB = 3AC$

Lời giải

a) Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = -x^2$	-4	-1	0	-1	-4



b) Phương trình hoành độ giao điểm A, B của đường thẳng $(d): y = -x - 2$ và (P) là:

$$-x - 2 = -x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

Giải phương trình ta được: $x = -1$ và $x = 2$

$$x = -1 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow A(-1; -1)$$

$$x = 2 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow B(2; -4)$$

$$\text{Gọi } I \text{ là trung điểm của } AB \Rightarrow I\left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right)$$

Đường thẳng (d') vuông góc với (d) tại I có dạng: $y = x + b$

$$\text{Vì } (d') \text{ đi qua } I \Rightarrow \frac{-5}{2} = \frac{1}{2} + b \Leftrightarrow b = -3$$

$$\Rightarrow (d'): y = x - 3$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (d') và (P) là:

$$x - 3 = -x^2 \Leftrightarrow x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \Rightarrow y = \frac{-7 - \sqrt{13}}{2}$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \Rightarrow y = \frac{-7 + \sqrt{13}}{2}$$

Vậy có hai điểm M cần tìm là: $M_1\left(\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}; \frac{-7 - \sqrt{13}}{2}\right)$ và $M_2\left(\frac{-1 + \sqrt{13}}{2}; \frac{-7 + \sqrt{13}}{2}\right)$

Bài 2: Cho hàm số $y = 2x^2$ có đồ thị là (P) và hàm số $y = 6x + m + 4$ có đồ thị là (d) . Tìm m để (P) và (d) tiếp xúc nhau.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$2x^2 = 6x + m + 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x - m - 4 = 0$$

$$\Delta' = (-3)^2 - 2(-m - 4) = 17 + 2m$$

$$(P) \text{ và } (d) \text{ tiếp xúc nhau} \Leftrightarrow \Delta' = 17 + 2m = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{17}{2}$$

Bài 3: Trong hệ tọa độ Oxy , tìm m để đường thẳng $(d): y = mx - m + 2$ cắt parabol $(P): y = 2x^2$ tại hai điểm phân biệt nằm bên phải trục tung.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$2x^2 = mx - m + 2 \Leftrightarrow 2x^2 - mx + m - 2 = 0$$

$$\Delta = m^2 - 4.2(m - 2) = m^2 - 8m + 16 = (m - 4)^2$$

Đường thẳng $(d): y = mx - m + 2$ cắt parabol $(P): y = 2x^2$ tại hai điểm phân biệt nằm bên phải trục tung

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m - 4)^2 > 0 \\ S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{m}{2} > 0 \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m - 2}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 4 \\ m > 0 \Leftrightarrow m > 2; m \neq 4 \\ m > 2 \end{cases}$$

Bài 4: Gọi đồ thị hàm số $y = x^2$ là parabol (P) , đồ thị hàm số $y = (m + 4)x - 2m - 5$ là đường thẳng (d) .

- a) Tìm giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt.
- b) Khi (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 . Tìm các giá trị của m sao cho $x_1^3 + x_2^3 = 0$.

Lời giải

- a) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$x^2 = (m+4)x - 2m - 5 \Leftrightarrow x^2 - (m+4)x + 2m+5 = 0 \quad (1)$$

$$\Delta = [-(m+4)]^2 - 4(2m+5) = (m+4)^2 - 4(2m+5) = m^2 - 4 = (m-2)(m+2)$$

$$(d) \text{ cắt } (P) \text{ tại hai điểm phân biệt} \Leftrightarrow \Delta > 0$$

$$\Leftrightarrow (m-2)(m+2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 > 0 \\ m-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-2 > 0 \\ m+2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$$

- b) Với $m > 2; m < -2$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$

$$\text{Theo Viet ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = m+4 \\ x_1 x_2 = 2m+5 \end{cases}$$

$$x_1^3 + x_2^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2) [(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2] = 0$$

$$\Leftrightarrow (m+4) [(m+4)^2 - 3(2m+5)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (m+4)(m+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -4 \text{ (nhận) hoặc } m = -1 \text{ (loại)}$$

Vậy $m = -4$ là giá trị cần tìm.

Bài 5: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho parabol $(P): y = x^2$ cắt đường thẳng $(d): y = mx - 2$ tại 2 điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thỏa mãn $y_1 + y_2 = 2(x_1 + x_2) - 1$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$x^2 = mx - 2 \Leftrightarrow x^2 - mx + 2 = 0$$

$$\Delta = m^2 - 8$$

(P) cắt đường thẳng (d) tại 2 điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 8 > 0 \Leftrightarrow m < -2\sqrt{2} \text{ hoặc } m > 2\sqrt{2}$$

Áp dụng định lý Vi – ét, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } y_1 + y_2 = 2(x_1 + x_2) - 1$$

$$\Leftrightarrow mx_1 - 2 + mx_2 - 2 = 2(x_1 + x_2) - 1$$

$$\Leftrightarrow (m-2)(x_1 + x_2) - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow m(m-2) - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -1 \text{ (loại) hoặc } m = 3 \text{ (nhận)}$$

Vậy $m = 3$ là giá trị cần tìm.

Bài 6: Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = (m-1)x + m + 4$ (tham số m).

- Với $m = 2$, tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d) .
- Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm nằm về hai phía của trục tung.

Lời giải

- Với $m = 2$, ta có: $(d_2): y = x + 6$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d_2) là:

$$x^2 = x + 6 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$x = -2 \Rightarrow y = 4$$

$$x = 3 \Rightarrow y = 9$$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d) là: $(-2; 4)$ và $(3; 9)$.

- Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$x^2 = (m-1)x + m + 4 \Leftrightarrow x^2 - (m-1)x - m - 4 = 0 \quad (1)$$

(d) cắt (P) tại hai điểm nằm về hai phía của trục tung

$$\Leftrightarrow \text{Phương trình (1) có 2 nghiệm trái dấu}$$

$$\Leftrightarrow -m - 4 < 0$$

$$\Leftrightarrow m > -4$$

Bài 7: Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ có đồ thị (P) và điểm $A(2;2)$. Gọi d_m là đường thẳng qua A có hệ số góc m. Tìm tất cả các giá trị của m để d_m cắt đồ thị (P) tại hai điểm A và B, đồng thời cắt trục Ox tại điểm C sao cho $AB = 3AC$.

Lời giải

Cách 1. Đường thẳng d_m có phương trình là $y = m(x - 2) + 2$ luôn đi qua điểm $A(2;2)$ của (P) .

Hình chiếu vuông góc của C lên Oy là $O(0;0)$, của A lên Oy là $A'(0;2)$, của $B\left(b; \frac{b^2}{2}\right)$ lên Oy là $B'\left(0; \frac{b^2}{2}\right)$.

Theo định lý Thales có:

$$3 = \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'O} \Rightarrow A'B' = 3A'O$$

$$\text{Suy ra } A'B' = 6 \Rightarrow OB' = 8 \Rightarrow \frac{b^2}{2} = 8$$

$$\Rightarrow b = \pm 4$$

Nếu $b = 4$, thế vào d_m tìm được $m = 3$; Nếu $b = -4$, thế vào d_m tìm được $m = -1$.

Cách 2

Phương trình đường thẳng d_m là $y = mx - 2m + 2 \Rightarrow$ tọa độ điểm C là

$$C\left(\frac{2m-2}{m}; 0\right)$$

Phương trình hoành độ giao điểm của d_m và (P) : $x^2 - 2mx + 4m - 4 = 0$ (1). Vì

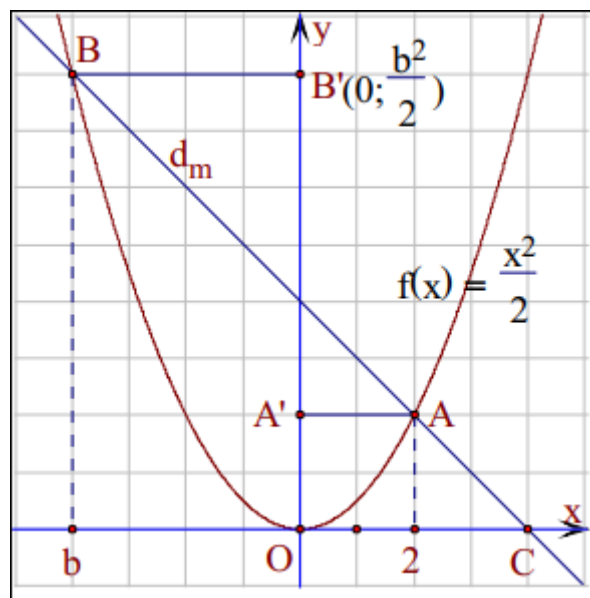
$A(2;2)$ thuộc (P) và d_m nên (1) có 1 nghiệm $x_A = 2 \Rightarrow B(2m-2; 2m^2-4m+2)$

$$AB^2 = 4(m-2)^2(m^2+1), AC^2 = \frac{4(m^2+1)}{m^2} \text{ từ } AB = 3AC \Leftrightarrow$$

$$4(m-2)^2(m^2+1) = 9 \cdot \frac{4(m^2+1)}{m^2}$$

$$\Leftrightarrow (m-2)^2 m^2 = 9 \Leftrightarrow m(m-2) = \pm 3 \Leftrightarrow m = -1 \text{ hoặc } m = 3.$$

Kết luận



Bài 8: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P): $y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng (d): $y = \frac{1}{2}x + 3$. Gọi $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ (với $x_A < x_B$) là các giao điểm của (P) và (d), $C(x_C; y_C)$ là điểm thuộc (P) sao cho $x_A < x_C < x_B$. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác ABC.

Lời giải.

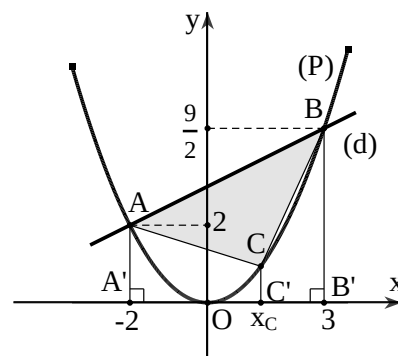
Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d):

$$\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x + 3 \Leftrightarrow x = -2, x = 3.$$

Các giao điểm là $A(-2; 2)$ và $B\left(3; \frac{9}{2}\right)$.

Gọi $C\left(x_C; \frac{x_C^2}{2}\right)$ với $-2 < x_C < 3$. Gọi A', B', C'

theo thứ tự là hình chiếu của A, B, C trên trục hoành. Ta có



$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{ABB'A'} - S_{ACC'A'} - S_{BCC'B'} = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{9}{2} \right) \cdot 5 - \frac{1}{2} \left(2 + \frac{x_C^2}{2} \right) \cdot (x_C + 2) - \frac{1}{2} \left(\frac{9}{2} + \frac{x_C^2}{2} \right) (3 - x_C) \\ &= -\frac{5}{4}x_C^2 + \frac{5}{4}x_C + \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } S_{ABC} = \frac{125}{16} - \frac{5}{4} \left(x_C - \frac{1}{2} \right)^2 \leq \frac{125}{16}.$$

Vậy diện tích tam giác ABC lớn nhất bằng $\frac{125}{16}$ khi $x_C = \frac{1}{2}$.

Bài 9: Cho parabol (P): $y = 2ax^2$ ($a > 0$) và đường thẳng $d: y = 4x - 2a^2$. Tìm a để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt M, N có hoành độ x_M, x_N sao cho $K = \frac{8}{x_M + x_N} + \frac{1}{2x_M x_N}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Phương trình hoành độ của (P) và d là:

$$2ax^2 = 4x - 2a^2 \Leftrightarrow 2ax^2 - 4x + 2a^2 = 0 \quad (*)$$

Để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt M, N thì (*) phải có hai nghiệm phân biệt, nghĩa là

$$\Delta > 0 \Rightarrow (-4)^2 - 4 \cdot 2a \cdot 2a^2 > 0$$

$$\Rightarrow 16 - 16a^3 > 0$$

$$\Rightarrow 1 - a^3 > 0$$

$$\Rightarrow (1 - a)(1 + a + a^2) > 0$$

$$\Rightarrow (1-a) \left[\left(a + \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{3}{4} \right] > 0$$

$$\Rightarrow 0 < a < 1$$

Ngoài ra, ta có:

$$x_M = \frac{4 + \sqrt{16 - 16a^3}}{2.2a} = \frac{1 + \sqrt{1 - a^3}}{a}$$

$$x_N = \frac{4 - \sqrt{16 - 16a^3}}{2.2a} = \frac{1 - \sqrt{1 - a^3}}{a}$$

$$x_M + x_N = \frac{1 + \sqrt{1 - a^3}}{a} + \frac{1 - \sqrt{1 - a^3}}{a} = \frac{2}{a}$$

$$2x_M \cdot x_N = 2 \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - a^3}}{a} \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - a^3}}{a} = 2a$$

$$\text{Mà } K = \frac{8}{x_M + x_N} + \frac{1}{2x_M x_N} = \frac{8}{\frac{2}{a}} + \frac{1}{2a} = 4a + \frac{1}{2a} \stackrel{BDT \text{ Cô-si}}{\geq} 2\sqrt{4a \cdot \frac{1}{2a}} = 2\sqrt{2}$$

Do đó K đạt giá trị nhỏ nhất, nghĩa là

$$4a + \frac{1}{2a} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 8a^2 - 4\sqrt{2}a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Vậy $a = \frac{\sqrt{2}}{4}$ thì thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài 10: Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: y = (m + 1)x - m$, m là tham số. Tìm m để đường thẳng d cắt parabol $(P): y = x^2$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho OA vuông góc với OB .

Giải:

Phương trình hoành độ của hai đồ thị là $x^2 - (m + 1)x + m = 0$ (*)

Hai đồ thị cắt nhau tại 2 điểm phân biệt A và $B \Leftrightarrow$ PT (*) có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta > 0$$

$$\Leftrightarrow (m + 1)^2 - 4m > 0 \Leftrightarrow (m - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 1.$$

Xét PT hoành độ, có $a + b + c = 1 - m - 1 + m = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = m \Rightarrow y_1 = 1; y_2 = m^2$

$$\Rightarrow A(1; 1); B(m; m^2)$$

Phương trình đường thẳng đi qua O và A là $y = x$

Phương trình đường thẳng đi qua O và B là $y = mx$

Đường thẳng OA vuông góc với đường thẳng $OB \Leftrightarrow m \cdot 1 = -1 \Leftrightarrow m = -1$

Vậy với $m = -1$ thì đường thẳng và parabol cắt nhau tại 2 điểm phân biệt A và B sao cho OA vuông góc với OB .

Bài 11: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1: y = \frac{2}{m}(x + 1) - m - 1$ và đường

thẳng $d_2: y = \frac{-m}{2}x + m^2 - \frac{3m}{2} + 3$ (m là tham số thực khác 0).

a) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m khác 0 thì hai đường thẳng d_1 và d_2 luôn cắt nhau tại một điểm duy nhất.

b) Gọi $M(x;y)$ là giao điểm của d_1 và d_2 . Tìm m để biểu thức $P = x^2 - y^2 + xy + 2x + 3y$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

a) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là:

$$\begin{aligned}\frac{2}{m}(x+1) - m - 1 &= \frac{-m}{2}x + m^2 - \frac{3m}{2} + 3 \\ \Leftrightarrow x\left(\frac{2}{m} + \frac{m}{2}\right) &= m^2 - \frac{3m}{2} + 3 + m + 1 - \frac{2}{m} \\ \Leftrightarrow x \cdot \frac{4+m^2}{2m} &= \frac{2m^3 - m^2 + 8m - 4}{2m} \\ \Leftrightarrow (4+m^2)x &= (2m-1)(4+m^2) \\ \Leftrightarrow x &= 2m-1 \\ \Rightarrow y &= \frac{2}{m}(x+1) - m - 1 = 3-m\end{aligned}$$

Vậy hai đường thẳng luôn cắt nhau tại điểm $M(2m-1; 3-m) \forall m$.

b) Theo câu a ta có $x = 2m-1$; $y = 3-m$

Thay vào P , ta có:

$$\begin{aligned}P &= x^2 - y^2 + xy + 2x + 3y \\ &= (2m-1)^2 - (3-m)^2 + (2m-1)(3-m) + 2(2m-1) + 3(3-m) \\ &= (4m^2 - 4m + 1) - (m^2 - 6m + 9) + (-2m^2 + 7m - 3) + 4m - 2 + 9 - 3m \\ &= m^2 + 10m - 4 \\ &= (m+5)^2 - 29 \geq -29\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow m = -5$

Vậy GTNN của P là $-29 \Leftrightarrow m = -5$.

Bài 12: Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2(m-2)x - 4m + 13$

a) Với $m = 4$, trên cùng một hệ tọa độ Oxy , vẽ (P) và (d) . Xác định tọa độ giao điểm A và B .

b) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm có hoành độ x_1, x_2 sao cho biểu thức

$S = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1 \cdot x_2 + 2018$ đạt giá trị nhỏ nhất

Giải:

a) Với $m=4$ phương trình đường thẳng (d) là: $y=4x-3$.

*Vẽ đồ thị:

- Vẽ $(P): y=x^2$. Ta có bảng giá trị

x	0	1
y	-3	1

Parabol (P) đi qua hai điểm $(0;-3)$ và $(1;1)$

- Vẽ $(d): y=4x-3$. Ta có bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

Đường thẳng (d) đi qua các điểm $(-2;4)$, $(-1;1)$, $(0;0)$, $(2;4)$, $(1;1)$

* Tìm giao điểm của hai đồ thị:

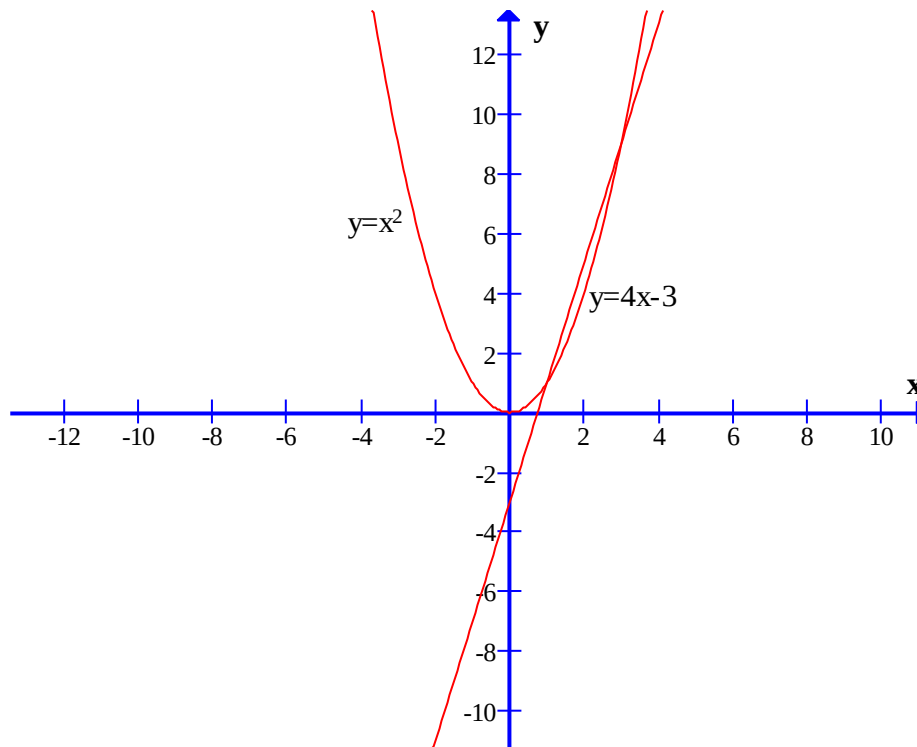
- Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$x^2 = 4x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \quad (1)$$

Vì $a+b+c=1-4+3=0$ nên phương trình (1) có hai nghiệm $x=1$ và $x=\frac{c}{a}=3$

- Nếu $x=1 \Rightarrow y=1$
- Nếu $x=3 \Rightarrow y=9$

Vậy (P) giao (d) tại A(1;1) và B(3;9)



Bài 13: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d): $(m-1)x + y = 3m - 4$ và (d'): $x + (m-1)y = m$. Tìm m để (d) cắt (d') tại điểm M sao cho $\widehat{MOx} = 30^\circ$.

Lời giải

Tọa độ giao điểm nếu có của (d) và (d') là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} (m-1)x + y = 3m - 4 \\ x + (m-1)y = m \end{cases} \quad (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = m - (m-1)y \\ m(m-2)y = (m-2)^2 \end{cases} \quad (1)$$

Để (d) cắt (d') $\Leftrightarrow$ Hệ (*) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow (1)$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases}$

$$\text{Với } \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases} \text{ hệ phương trình có nghiệm duy nhất } \begin{cases} x = \frac{3m-2}{m} \\ y = \frac{m-2}{m} \end{cases}$$

Lúc đó $M\left(\frac{3m-2}{m}; \frac{m-2}{m}\right)$. Từ giả thiết $\widehat{MOx} = 30^\circ \Rightarrow M$ có hoành độ dương

$$\text{và } \tan \widehat{MOx} = \left| \frac{\frac{m-2}{m}}{\frac{3m-2}{m}} \right| = \left| \frac{m-2}{3m-2} \right|$$

$$\Rightarrow \tan 30^\circ = \left| \frac{m-2}{3m-2} \right| \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \left| \frac{m-2}{3m-2} \right| \Leftrightarrow \begin{cases} 3m-2 = \sqrt{3}(m-2) \\ 3m-2 = -\sqrt{3}(m-2) \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Vậy } m = \frac{2\sqrt{3}}{3}; m = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Bài 14: Cho hai đường thẳng $(d_1): mx + (m-2)y + m + 2 = 0$ và $(d_2): mx + (m-2)y + m + 2 = 0$.

a) Tìm điểm cố định mà (d_1) luôn đi qua và điểm cố định mà (d_2) luôn đi qua với mọi m .

b) Chứng minh rằng hai đường thẳng (d_1) và (d_2) luôn cắt nhau tại một điểm I và khi m thay đổi thì điểm I thuộc một đường tròn cố định.

Lời giải

a) $mx + (m-2)y + m + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (x+y+1)m - 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1=0 \\ -2y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=1. \end{cases}$$

Vậy (d_1) luôn đi qua điểm cố định $A(-2;1)$.

$$(2-m)x + my - m - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 2 + (-x + y - 1)m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ -x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2. \end{cases}$$

Vậy (d_2) luôn đi qua điểm cố định là $B(1;2)$.

b) Với $m = 0$ thì $(d_1): -2y + 2 = 0$ và $(d_2): 2x - 2 = 0$, suy ra (d_1) và (d_2) luôn vuông góc và cắt nhau tại điểm $I_1(1;1)$.

Với $m = 2$ thì $(d_1): 2x + 4 = 0$ và $(d_2): 2y - 4 = 0$, suy ra (d_1) và (d_2) luôn vuông góc và cắt nhau tại điểm $I_2(-2;2)$.

$$\text{Với } m \neq 0; m \neq 2 \text{ thì } (d_1): y = \frac{m}{2-m}x - \frac{m+2}{m-2} \text{ và } (d_2): y = \frac{m-2}{m}x + \frac{m+2}{m}.$$

$$\text{Ta có tích hai hệ số góc } a_1 a_2 = \frac{m}{2-m} \cdot \frac{m-2}{m} = -1. \text{ Suy ra } (d_1) \perp (d_2).$$

Vậy với mọi giá trị của m thì (d_1) và (d_2) luôn cắt nhau và vuông góc với nhau tại điểm I . Mặt khác (d_1) và (d_2) luôn đi qua điểm cố định A và B nên I thuộc đường tròn đường kính AB .

Bài 15: Cho hàm số $y = (m^2 - 4m - 4)x + 3m - 2$ có đồ thị là d . Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng d cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại hai điểm A và B sao cho ΔOAB có diện tích là 1cm^2 (O là gốc tọa độ, đơn vị đo trên các trục là cm).

Lời giải

Vì ba điểm O, A, B tạo thành một tam giác nên $m^2 - 4m - 4 \neq 0$ và $3m - 2 \neq 0$

Tọa độ giao điểm A của d và Ox là $A\left(\frac{2-3m}{m^2-4m-2}; 0\right) \Rightarrow OA = \left|\frac{2-3m}{m^2-4m-2}\right|$

Tọa độ giao điểm B của d và Oy là $B(0; 3m-2) \Rightarrow OB = |3m-2|$

Do $\triangle ABO$ vuông tại O nên $S_{OAB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{2} \left|\frac{2-3m}{m^2-4m-2}\right| \cdot |3m-2| = 1$

$$\text{Do đó } \frac{(2-3m)^2}{|m^2-4m-2|} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 - 12m + 4 = 2(m^2 - 4m - 2) \\ 9m^2 - 12m + 4 = -2(m^2 - 4m - 2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7m^2 - 4m + 12 = 0 \\ 11m^2 - 20m - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = \frac{-2}{11} \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

Bài 16: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $B(6;0)$, $C(0;3)$ và đường thẳng d_m có phương trình $y = mx - 2m + 2$, với m là tham số, $m \neq 0, m = -\frac{1}{2}$.

a) Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng d_m và BC.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đường thẳng d_m chia tam giác OBC thành hai phần có diện tích bằng nhau (O là gốc tọa độ).

Lời giải

a) Phương trình BC có dạng $y = ax + b$ đi qua B và C nên có hệ phương trình $\begin{cases} 3 = b \\ 0 = 6a + b \end{cases}$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{2} \text{ và } b = 3 \Rightarrow \text{phương trình đường thẳng BC là } y = -\frac{1}{2}x + 3$$

Phương trình hoành độ giao điểm của d_m và BC là: $mx - 2m + 2 = -\frac{1}{2}x + 3$

$$\Leftrightarrow (2m+1)x = 2(2m+1) \Leftrightarrow x = 2 \text{ do } m \neq -\frac{1}{2} \text{ nên giao điểm là } K(2;2).$$

b) Ta có $S_{OBC} = \frac{1}{2}OC \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 = 9$ (đvdt)

Nếu d_m cắt cạnh OC tại D thì d_m chia thành hai phần đó là tam giác CDK và tứ giác DOBK mà:

$$S_{CDK} \leq S_{COK} = \frac{1}{2}|x_K| \cdot OC = 3 < \frac{S_{OBC}}{2} \text{ nên không thể nhận được.}$$

Khi d_m cắt cạnh OB tại E thì ta có: $y_E = 0$ và $x_E = 2 - \frac{2}{m}$ đồng

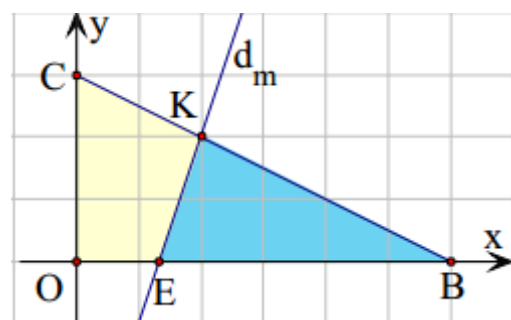
thời thỏa:

$$0 < 2 - \frac{2}{m} < 6$$

$$\Rightarrow S_{KEB} = \frac{1}{2}|y_K| \cdot EB = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot |x_B - x_E|$$

d_m chia tam giác OBC thành hai phần có diện tích bằng nhau khi và chỉ khi:

$$S_{KEB} = 4 + \frac{2}{m} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow m = 4 \text{ (thỏa điều kiện).}$$



Bài 17: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường thẳng d có phương trình $y = mx + m - 1$ (m là tham số thực). Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng d tạo với các trục tọa độ $Ox; Oy$ một tam giác có diện tích là 2.

Lời giải

$$y = mx + m - 1 \quad (d).$$

(d) cắt hai trục tọa độ Ox, Oy nên hệ số góc khác 0 hay $m \neq 0$.

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{1-m}{m}. \text{ Ta được điểm } A\left(\frac{1-m}{m}; 0\right) \text{ thuộc trục } Ox \Rightarrow OA = \left|\frac{1-m}{m}\right|.$$

$$x = 0 \Rightarrow y = m - 1. \text{ Ta được điểm } B(0; m-1) \text{ thuộc trục } Oy \Rightarrow OB = |m-1|.$$

Diện tích tam giác tạo bởi đường thẳng d với các trục tọa độ Ox, Oy là:

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot \left|\frac{1-m}{m}\right| \cdot |m-1| = \frac{1}{2} \cdot \left|\frac{(m-1)^2}{m}\right|.$$

Theo bài ta có: $S_{OAB} = 2$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{(m-1)^2}{m}\right| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 = 4m \\ (m-1)^2 = -4m \end{cases}.$$

$$\text{TH1: } (m-1)^2 = 4m \Leftrightarrow m^2 - 6m + 1 = 0 \Leftrightarrow (m-3)^2 = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 + 2\sqrt{2} \\ m = 3 - 2\sqrt{2} \end{cases} \text{ (Thỏa mãn } m \neq 0 \text{)}.$$

$$\text{TH2: } (m-1)^2 = -4m \Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 = 0 \Leftrightarrow m = -1 \text{ (Thỏa mãn } m \neq 0 \text{)}.$$

$$\text{Vậy } m \in \{-1; 3 - 2\sqrt{2}; 3 + 2\sqrt{2}\}.$$

Bài 18: Cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx + 1$ (m là tham số thực). Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn $AB = \sqrt{10}$.

Lời giải

Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là $x^2 = mx + 1 \Leftrightarrow x^2 - mx - 1 = 0$

Ta có $\Delta = m^2 + 4$ (vì $m^2 + 4 > 0$) nên đồ thị hàm số (P) và (d) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt)

$$\text{Theo hệ thức Viète ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 \cdot x_2 = -1 \end{cases}$$

Gọi $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ là giao điểm của (P) và (d) ta có:

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{10}$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)^2 + (x_1^2 - x_2^2)^2 = 10$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 + (x_1 + x_2)^2 \cdot (x_1 - x_2)^2 = 10$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 + (x_1 + x_2)^2 \cdot [(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2] = 10$$

$$\Rightarrow m^2 + 4 + m^2 \cdot (m^2 + 4) = 10$$

$$\Leftrightarrow m^4 + 5m^2 - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^4 - m^2 + 6m^2 - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m^2 - 1) \cdot (m^2 + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \pm 1$$

Bài 19: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho Parabol (P) : $y = ax^2$ ($a \neq 0$) và đường thẳng (d):

$$y = bx + 1$$

1/ Tìm các giá trị của a và b để (P) và (d) cùng đi qua điểm M(1; 2)

2/ Với a, b vừa tìm được, chứng minh rằng (P) và (d) còn có một điểm chung N khác M.

Tính diện tích tam giác MON (với O là gốc tọa độ)

Lời giải

1/ Tìm các giá trị của a và b để (P) và (d) cùng đi qua điểm M(1; 2)

$$M \in (P) \Rightarrow \dots \Rightarrow a = 2 \Rightarrow y = 2x^2$$

$$M \in (d) \Rightarrow \dots \Rightarrow b = 1 \Rightarrow y = x + 1$$

2/ Với a, b vừa tìm được, chứng minh rằng (P) và (d) còn có một điểm chung N khác M.

Tính diện tích tam giác MON (với O là gốc tọa độ)

$$\text{Xét pt hoành độ gđ: } 2x^2 = x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$$

$$\begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 2 \\ x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M(1; 2); N\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

$$S_{\Delta MON} = S_{\text{thang}} - (S_1 + S_2) = \dots = 0,75 \quad (\text{đvdt})$$

Bài 20: Trong cùng một hệ tọa độ, cho đường thẳng d: $y = x - 2$ và parabol (P): $y = -x^2$. Gọi A và B là giao điểm của d và (P).

1) Tính độ dài AB.

2) Tìm m để đường thẳng d': $y = -x + m$ cắt (P) tại hai điểm C và D sao cho

$$CD = AB.$$

Lời giải

1) Hoàn thành độ giao điểm là nghiệm phương trình

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = -2$$

$$\text{Vậy } A(1, -1) \text{ và } B(-2, -4) \text{ hoặc } A(-2, -4) \text{ và } B(1, -1) \Rightarrow AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 18$$

$$\Rightarrow AB = 3\sqrt{2}$$

2) Để (d') cắt (P) tại 2 điểm phân biệt thì phương trình $x^2 - x + m = 0$ (1)

$$\text{có hai nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{4}$$

$$\text{Ta có } CD^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \text{ mà } y_2 - y_1 = (-x_2 + m) - (-x_1 + m) = x_1 - x_2$$

$$\text{nên: } (y_2 - y_1)^2 = [(-x_2 + m) - (-x_1 + m)]^2 = (x_1 - x_2)^2$$

$$\text{Ta có } AB^2 = 18 \text{ nên } CD = AB \Leftrightarrow CD^2 = AB^2 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 18 (*)$$

$$\Leftrightarrow 2(x_1 - x_2)^2 = 18 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 9 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 9$$

$$\Leftrightarrow 1 - 4m - 9 = 0 \text{ (Theo Viet)} \Leftrightarrow m = -2 \quad (\text{TM})$$

CÁC DẠNG BÀI TẬP THI HSG TOÁN 9 QUA CÁC ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI

Dạng 9: Hình học:

1. Chứng minh hai đoạn thẳng, hai góc bằng nhau, trung điểm

A. Bài toán

Bài 1: Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O , trên dây cung DC lấy điểm E sao cho $DC = 3DE$, nối AE cắt cung nhỏ CD tại M . Trên cung nhỏ CB lấy điểm N sao cho cung nhỏ DM bằng cung nhỏ CN , nối AN cắt dây cung BC tại F . Chứng minh rằng: F là trung điểm của BC .

Bài 2: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại M, N . Kẻ dây MA của đường tròn (O) tiếp xúc với (O') và dây MB của đường tròn (O') tiếp xúc với (O) . Đường tròn ngoại tiếp $\triangle MAB$ cắt đường thẳng MN tại P ($P \neq M$). Chứng minh rằng $PN = MN$.

Bài 3: Cho $\triangle ABC$ cân tại A ($\angle BAC < 90^\circ$), đường vuông góc với AB tại A cắt đường thẳng BC tại D . Dựng DE vuông góc với AC ($E \in AC$). Gọi H là trung điểm BC . Chứng minh rằng $AH = HE$.

Bài 4: Từ điểm M nằm ngoài đường tròn tâm $(O; R)$. Vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm), cát tuyến MPQ không đi qua O (P nằm giữa M, Q). Gọi H là giao điểm của OM và AB .

a. Chứng minh: $HPO = HQO$

b. Tìm điểm E thuộc cung lớn AB sao cho tổng $\frac{1}{EA} + \frac{1}{EB}$ có giá trị nhỏ nhất.

Bài 5: Cho nửa đường tròn (O) , đường kính $AB = 2R$. Lấy điểm M bất kỳ trên nửa đường tròn (M khác A và B); các tiếp tuyến tại A và M của nửa đường tròn (O) cắt nhau ở K . Gọi E là giao điểm của AM và OK .

1) Chứng minh $OE \cdot OK$ không đổi khi M di chuyển trên nửa đường tròn.

2) Qua O kẻ đường vuông góc với AB cắt BK tại I và cắt đường thẳng BM tại N .

Chứng minh: $IN = IO$.

3) Vẽ MH vuông góc với AB tại H . Gọi F là giao điểm của BK và MH . Chứng minh: $EF \parallel AB$.

Bài 6: Cho điểm M thuộc nửa đường tròn (O) đường kính AB ($M \neq A, M \neq B, MA < MB$). Tia phân giác của $\angle AMB$ cắt AB tại C . Qua C vẽ đường vuông góc với AB cắt đường thẳng AM, BM theo thứ tự ở D, H . Chứng minh $CA = CH$.

Bài 7: Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O . Gọi E, F lần lượt là chân đường cao kẻ từ C, B của tam giác ABC . D là điểm đối xứng của A qua O , M là trung điểm BC , H là trực tâm tam giác ABC .

a) Chứng minh rằng M là trung điểm HD .

b) Gọi L là giao điểm thứ hai của CE với đường tròn tâm O . Chứng minh rằng H, L đối xứng nhau qua AB .

Bài 8: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 4. Trên hai cạnh AB và AD lần lượt lấy hai điểm E, F sao cho EC là phân giác góc BEF . Trên tia AB lấy K sao cho $BK = DF$. Chứng minh rằng $CK = CF$.

Bài 9: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. AD, BE, CF là các đường cao. Lấy M trên đoạn FD , lấy N trên tia DE sao cho $\angle MAN = \angle BAC$. Chứng minh MA là tia phân giác của góc $\angle NMF$.

Bài 10: Cho tam giác ABC có $(O), (I), (I_a)$ theo thứ tự là các đường tròn ngoại tiếp, đường tròn nội tiếp và đường tròn bàng tiếp đối diện đỉnh A của tam giác với các tâm tương ứng là O, I, I_a . Gọi D là tiếp điểm của (I) với BC , P là điểm chính giữa cung BAC của (O) , PI_a cắt (O) tại điểm K . Gọi M là giao điểm của PO và BC , N là điểm đối xứng với P qua O . Chứng minh $DAI = KAI_a$.

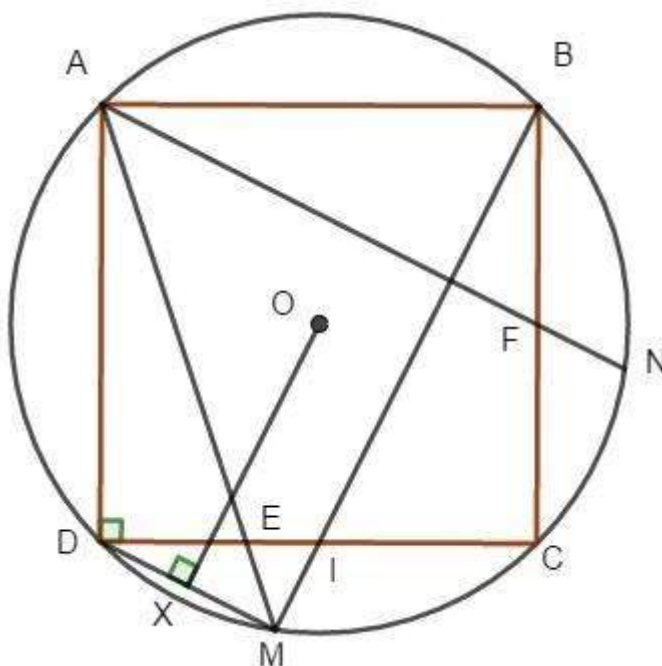
Bài 11: Cho ba điểm A, B, C cố định nằm trên một đường thẳng d (điểm B nằm giữa điểm A và điểm C). Vẽ đường tròn tâm O thay đổi nhưng luôn đi qua điểm B và điểm C (điểm O không thuộc đường thẳng d). Kẻ AM và AN là các tiếp tuyến với đường tròn tâm O (với M và N là các tiếp điểm). Đường thẳng BC cắt MN tại điểm K . Đường thẳng AO cắt MN tại điểm H và cắt đường tròn tại các điểm P và điểm Q (P nằm giữa A và Q).

Gọi D là trung điểm của HQ , từ H kẻ đường thẳng vuông góc với MD cắt đường thẳng MP tại E . Chứng minh P là trung điểm của ME .

B. Lời giải

Bài 1: Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O , trên dây cung DC lấy điểm E sao cho $DC = 3DE$, nối AE cắt cung nhỏ CD tại M . Trên cung nhỏ CB lấy điểm N sao cho cung nhỏ DM bằng cung nhỏ CN , nối AN cắt dây cung BC tại F . Chứng minh rằng: F là trung điểm của BC .

Lời giải


$$EI \parallel AB \Rightarrow \frac{EI}{AB} = \frac{ME}{AM}$$
$$\Rightarrow \frac{DX}{OD} = \frac{DE}{AE} = \frac{DE}{\sqrt{DE^2 + AD^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow DX = \frac{1}{\sqrt{10}} R$$

$$\Rightarrow DM = \frac{2}{\sqrt{10}} R$$

$$\text{Xét } \Delta DEM \sim \Delta AEC \Rightarrow \frac{ME}{CE} = \frac{DE}{AE} = \frac{MD}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{ME}{AE} \cdot \frac{DE}{CE} = \frac{MD^2}{AC^2} = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{ME}{AE} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{ME}{AM} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow EI = \frac{1}{6}AB = \frac{1}{6}CD \Rightarrow ID = EI + DE = \frac{1}{2}CD.$$

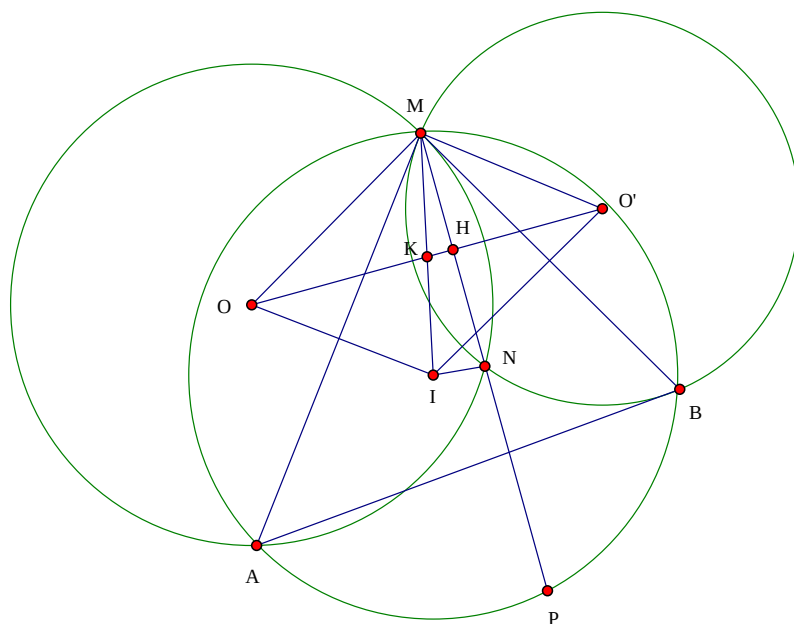
$$\Rightarrow \Delta CMI = \Delta BNF \text{ (g.c.g)}$$

$$\Rightarrow BF = CI = \frac{1}{2} BC$$

$\Rightarrow$ đpcm

Bài 2: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại M, N . Kẻ dây MA của đường tròn (O) tiếp xúc với (O') và dây MB của đường tròn (O') tiếp xúc với (O) . Đường tròn ngoại tiếp ΔMAB cắt đường thẳng MN tại P ($P \neq M$). Chứng minh rằng $PN = MN$.

Lời giải



Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔMAB

Gọi H, K theo thứ tự là giao điểm của OO' với MN và MI

$\Rightarrow OO' \perp MN$ và $HM = HN$

Ta có: $IM = IP, OM = OP$

$\Rightarrow OI$ là đường trung trực của MA .

$\Rightarrow MA \perp OI$

$\Rightarrow OI \parallel MO'$ (cùng vuông góc với MA)

Tương tự: $O'I \parallel MO \Rightarrow OIMO'$ là hình bình hành

$\Rightarrow K$ là trung điểm của MI

$\Rightarrow HK$ là đường trung bình của ΔMIN

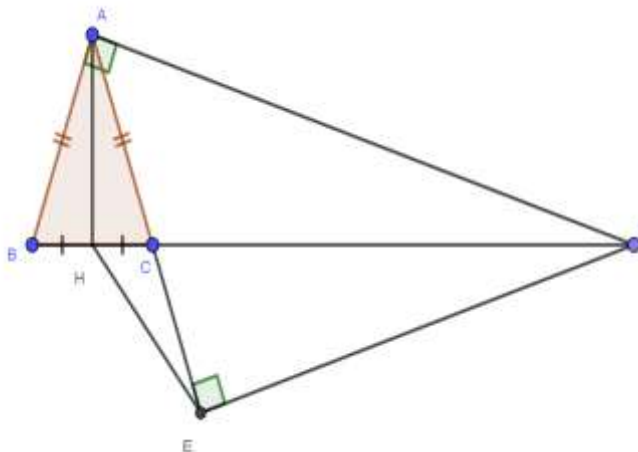
$\Rightarrow HK \parallel NI$ hay $NI \parallel OO'$

Mà $MN \perp OO'$

$\Rightarrow MN \perp NI$ hay $IN \perp MP$

Bài 3: Cho $\triangle ABC$ cân tại A ($\angle BAC < 90^\circ$), đường vuông góc với AB tại A cắt đường thẳng BC tại D . Dựng DE vuông góc với AC ($E \in AC$). Gọi H là trung điểm BC . Chứng minh rằng $AH = HE$.

Lời giải



Ta có: $\triangle ABC$ cân tại A ; $HB = HC$

$\Rightarrow AH$ vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao

$\Rightarrow AH \perp BC$

Xét tứ giác $ABED$, ta có:

$\angle AHD = \angle AED = 90^\circ$

$\Rightarrow$ tứ giác $ABED$ nội tiếp đường tròn đường kính AD

$\Rightarrow \angle HEA = \angle HDA$

Mà $\angle HAE = \angle HAB$ (AH là đường phân giác, $\triangle ABC$ cân tại A)

$\angle HDA = \angle HAB$ (cùng phụ với $\angle HAD$)

$\Rightarrow \angle HEA = \angle HAE$

$\Rightarrow \triangle AHE$ cân tại H

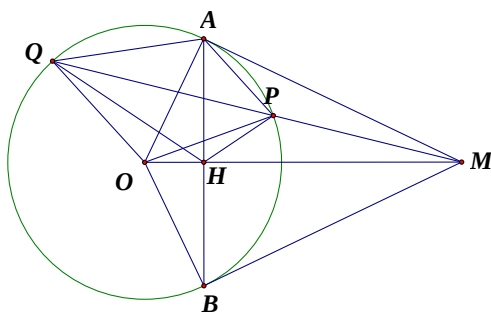
$\Rightarrow HA = HE$

Bài 4: Từ điểm M nằm ngoài đường tròn tâm $(O; R)$. Vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm), cát tuyến MPQ không đi qua O (P nằm giữa M, Q). Gọi H là giao điểm của OM và AB .

a. Chứng minh: $\angle HPO = \angle HQO$

b. Tìm điểm E thuộc cung lớn AB sao cho tổng $\frac{1}{EA} + \frac{1}{EB}$ có giá trị nhỏ nhất.

Giải:



a) $\triangle MPA$ đồng dạng $\triangle MAQ$ (g.g), suy ra $MA^2 = MP \cdot MQ$ (1)

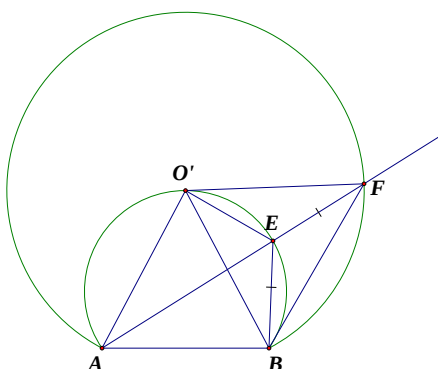
$\triangle MAO$ vuông tại A, có đường cao AH nên $MA^2 = MH \cdot MO$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MP \cdot MQ = MH \cdot MO$ hay $\frac{MP}{MH} = \frac{MO}{MQ}$ (*)

$\triangle MPH$ và $\triangle MOQ$ có góc M chung kết hợp với (*) ta suy ra $\triangle MPH$ đồng dạng $\triangle MOQ$ (c.g.c) suy ra $\angle MPH = \angle MQO$

Do đó tứ giác PQOH là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \angle HPO = \angle HQO = \frac{1}{2} \angle POH$ (đpcm)

b)



b) Trên tia đối của tia EA lấy điểm F sao cho $EB = EF$ hay $\triangle EBF$ cân tại E, suy ra $\angle BFA = \frac{1}{2} \angle BEA$. Đặt $\angle AEB = \alpha$ khi đó $\angle AFB = \frac{\alpha}{2}$ nên F di chuyển trên cung chứa góc $\frac{\alpha}{2}$ dựng trên BC.

Ta có: $\frac{1}{EA} + \frac{1}{EB} \geq \frac{4}{EA + EB}$. Như vậy $\frac{1}{EA} + \frac{1}{EB}$ nhỏ nhất khi $EA + EB$ lớn nhất hay $EA + EF$

lớn nhất $\Leftrightarrow AF$ lớn nhất (**)

Gọi O' là điểm chính giữa của cung lớn AB, suy ra $\triangle O'AB$ cân tại O' suy ra $O'A = O'B$ (3)

$\triangle O'EB$ và $\triangle O'EF$ có $EB = EF$, $O'E$ chung và $\angle FEO' = \angle BEO'$ (cùng bù với $\angle BAO' \Rightarrow \triangle O'EB = \triangle O'EF$ (c.g.c) suy ra $O'B = O'F$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra O' là tâm cung chứa góc $\frac{\alpha}{2}$ dựng trên đoạn thẳng BC. (cung đó và cung

lớn AB cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ AB)

Do đó AF lớn nhất khi nó là đường kính của (O') khi $E \equiv O'$ (***)

Từ (**) và (***) suy ra E là điểm chính giữa cung lớn AB thì $\frac{1}{EA} + \frac{1}{EB}$ có giá trị nhỏ nhất.

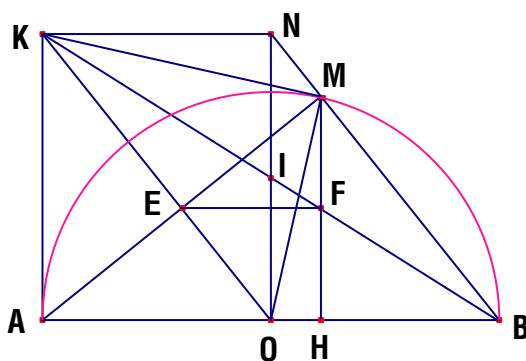
Bài 5: Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB = 2R. Lấy điểm M bất kỳ trên nửa đường tròn (M khác A và B); các tiếp tuyến tại A và M của nửa đường tròn (O) cắt nhau ở K. Gọi E là giao điểm của AM và OK.

- 1) Chứng minh OE.OK không đổi khi M di chuyển trên nửa đường tròn.
- 2) Qua O kẻ đường vuông góc với AB cắt BK tại I và cắt đường thẳng BM tại N.

Chứng minh: $IN = IO$.

- 3) Vẽ MH vuông góc với AB tại H. Gọi F là giao điểm của BK và MH. Chứng minh: $EF \parallel AB$.

Giải:



a) Chứng minh được $OK \perp AM$ tại E

Dựa vào $\triangle OAK$ vuông tại A chỉ ra được $OE.OK = OA^2 = R^2$ không đổi

b) Chứng minh được: $OK \parallel BN$ ($\perp AM$)

Chứng minh được: $\triangle AOK = \triangle OBN$ (g.c.g) $\Rightarrow OK = BN$

Suy được $OBNK$ là hình bình hành từ đó suy được: $IN = IO$

c) Chứng minh được $\triangle AOK$ đồng dạng $\triangle HBM$

$$\Rightarrow \frac{HB}{AO} = \frac{MB}{OK} \Rightarrow \frac{HB^2}{AO^2} = \frac{MB^2}{OK^2} \quad (1)$$

Chỉ ra được $MB^2 = HB.AB$ và $OA^2 = OE.OK$ (cma) (2)

Từ (1) và (2) suy được

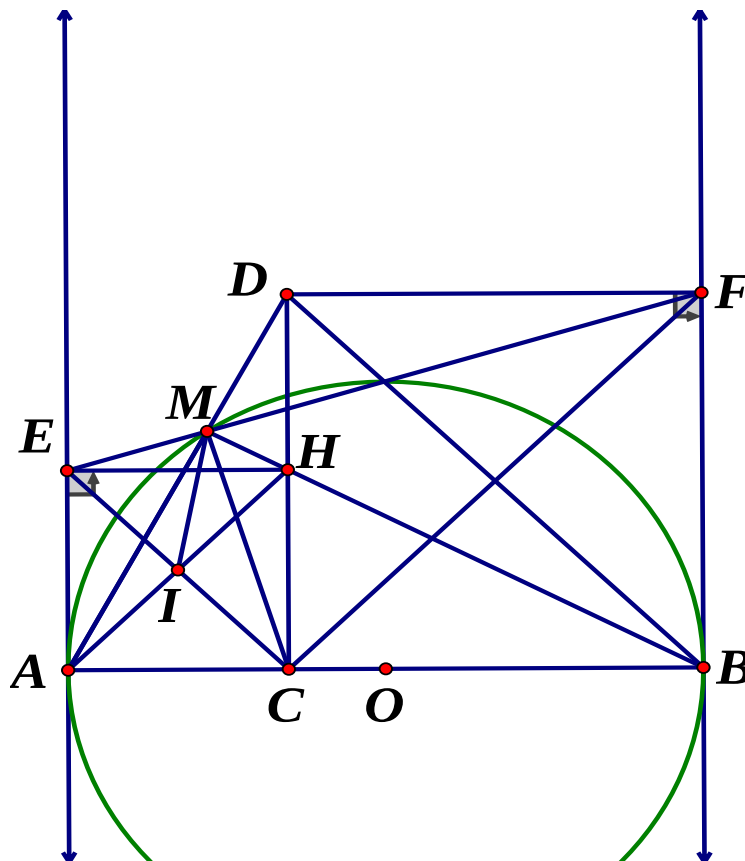
$$\frac{HB^2}{OK.OE} = \frac{HB.AB}{OK^2} \Rightarrow \frac{HB}{OE} = \frac{AB}{OK} \Rightarrow \frac{HB}{AB} = \frac{OE}{OK} \quad (3)$$

Chứng minh được $\frac{HB}{AB} = \frac{FB}{BK} \quad (4)$

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{FB}{KB} = \frac{OE}{OK} \Rightarrow EF \parallel OB \parallel AB$ (đl Ta let)

Bài 6: Cho điểm M thuộc nửa đường tròn (O) đường kính AB ($M \neq A, M \neq B, MA < MB$). Tia phân giác của $\angle AMB$ cắt AB tại C. Qua C vẽ đường vuông góc với AB cắt đường thẳng AM, BM theo thứ tự ở D, H. Chứng minh $CA = CH$.

Lời giải



Do MC là phân giác của $\triangle AMB$, theo tính chất đường phân giác $\Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{AM}{BM}$ (1)

Xét $\triangle BHC$ và $\triangle BAM$ có $\angle BCH = \angle BMA = 90^\circ$, góc B là góc chung

$$\Rightarrow \triangle BHC \sim \triangle BAM \Rightarrow \frac{HC}{AM} = \frac{BC}{BM} \Rightarrow \frac{HC}{BC} = \frac{AM}{BM} \quad (2)$$

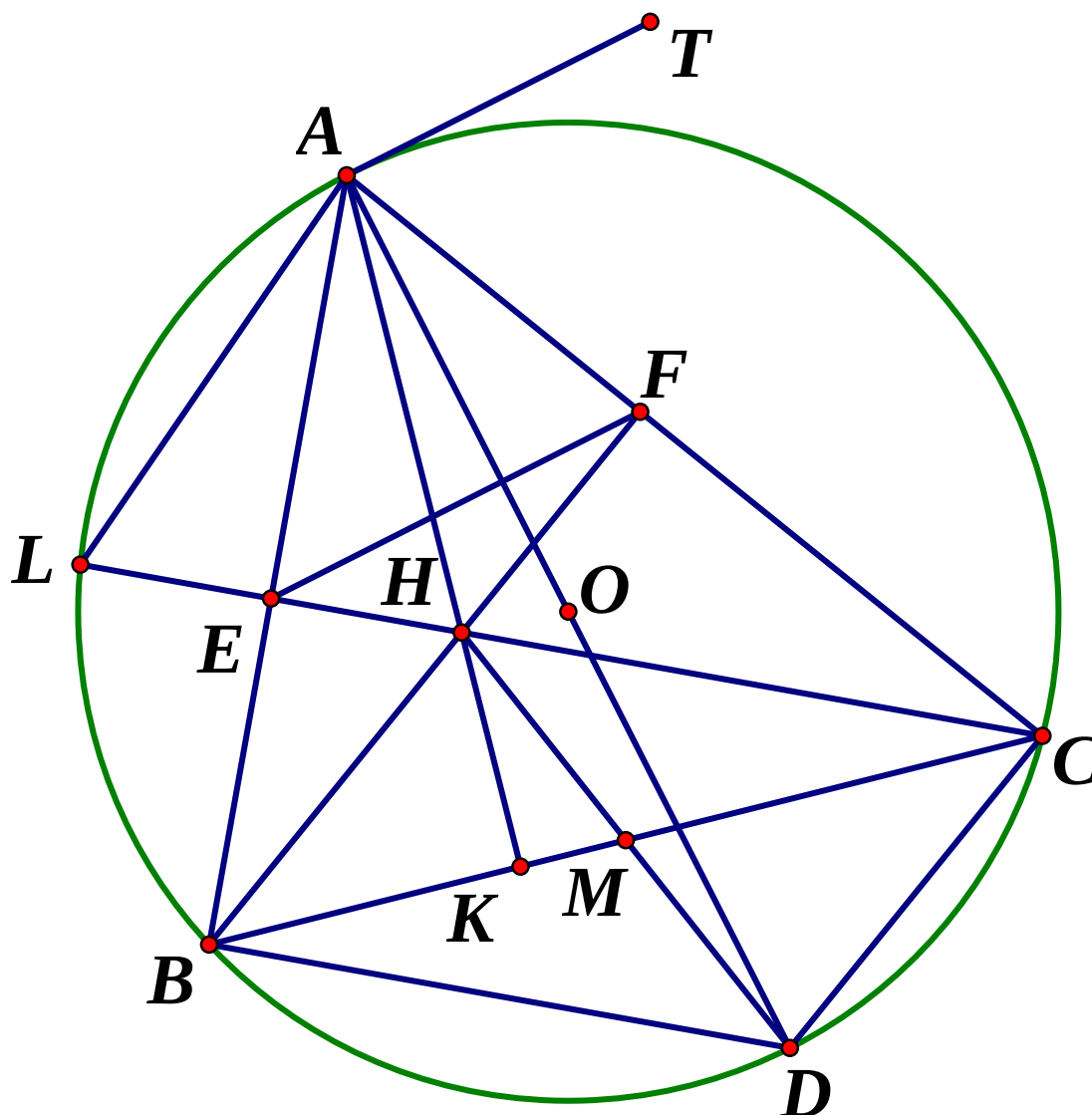
Từ (1) và (2) $\Rightarrow AC = HC$

Bài 7: Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi E, F lần lượt là chân đường cao kẻ từ C, B của tam giác ABC. D là điểm đối xứng của A qua O, M là trung điểm BC, H là trực tâm tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng M là trung điểm HD.

b) Gọi L là giao điểm thứ hai của CE với đường tròn tâm O. Chứng minh rằng H, L đối xứng nhau qua AB.

Lời giải



a) $DB \perp AC, CE \perp AB$ nên $CE \parallel DB$

$DC \perp AB, BF \perp AC$ nên $DC \parallel BF$

Tứ giác ABDC là hình bình hành, M là trung điểm BC nên M là trung điểm DH.

b) $AE \perp HL$ (a)

$\angle EAL = \angle LCB$ (1) (góc nội tiếp cùng chắn cung)

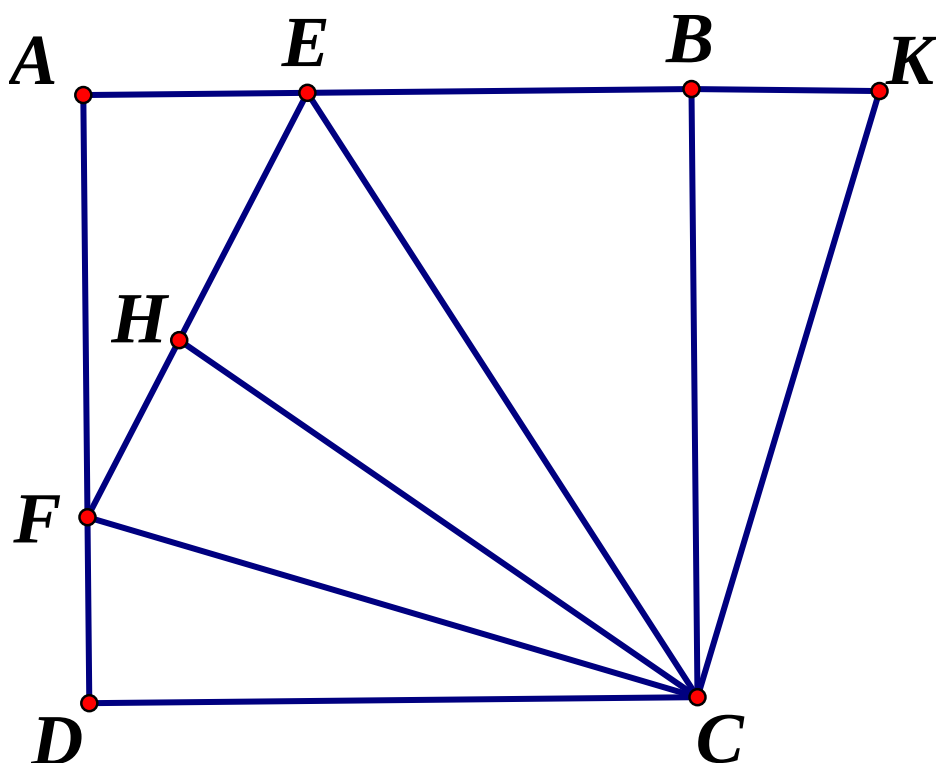
$\triangle EHA \sim \triangle KHC \Rightarrow \angle LCB = \angle HAB$ (2) (K là giao điểm của AH và BC)

Từ (1) và (2) suy ra AE là phân giác $\angle HAL$ (b)

Từ (a) và (b) suy ra E là trung điểm HL. Vậy H, L đối xứng qua AB.

Bài 8: Cho hình vuông ABCD cạnh bằng 4. Trên hai cạnh AB và AD lần lượt lấy hai điểm E, F sao cho EC là phân giác góc BEF. Trên tia AB lấy K sao cho $BK = DF$. Chứng minh rằng $CK = CF$.

Lời giải



Ta có: $CD = CB$, $DF = BK$, $FDC = CBK = 90^\circ$ nên $\triangle DFC = \triangle BKC \Rightarrow CK = CF$

Bài 9: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. AD , BE , CF là các đường cao. Lấy M trên đoạn FD , lấy N trên tia DE sao cho $MAN = BAC$. Chứng minh MA là tia phân giác của góc NMF

Giải:

Qua M kẻ đường thẳng song song với BC cắt DE tại K

Tứ giác $AEDB$ nội tiếp $\Rightarrow CDE = BAC$

Mà: $MKD = CDE$ (vì $MK \parallel BC$).

Do đó: $MKD = MAN \Rightarrow$ Tứ giác $AMKN$ nội tiếp

$\Rightarrow AMN = AKN$

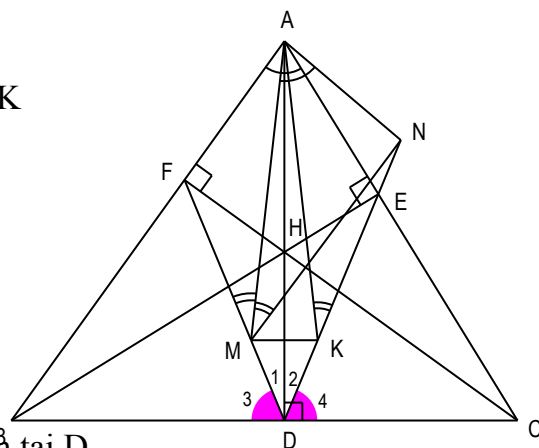
Ta có: $D_3 = D_4 (= BAC) \Rightarrow D_1 = D_2$

$\triangle DMK$ có DA là phân giác vừa là đường cao nên cân tại D
 $\Rightarrow DM = DK$

$\triangle AMD = \triangle AKD$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle AMD = \angle AKD$

Nên: $\angle AMF = \angle AKN$. Ta có: $\angle AMF = \angle AMN (= \angle AKN)$

Vậy: MA là phân giác của góc NMF



Bài 10: Cho tam giác ABC có $(O), (I), (I_a)$ theo thứ tự là các đường tròn ngoại tiếp, đường tròn nội tiếp và đường tròn bàng tiếp đối diện đỉnh A của tam giác với các tâm tương ứng là O, I, I_a . Gọi D là tiếp điểm của (I) với BC , P là điểm chính giữa cung BAC của (O) ,

PI_a cắt (O) tại điểm K . Gọi M là giao điểm của PO và BC , N là điểm đối xứng với P qua O . Chứng minh $DAI = KAI_a$.

Giải:

Gọi F là tiếp điểm của đường tròn (I) với AB .

Xét hai tam giác có: $NBM = \frac{1}{2} BAC = IAF$

$\Rightarrow \triangle MNB$ đồng dạng với $\triangle FIA$.

Suy ra mà: , nên

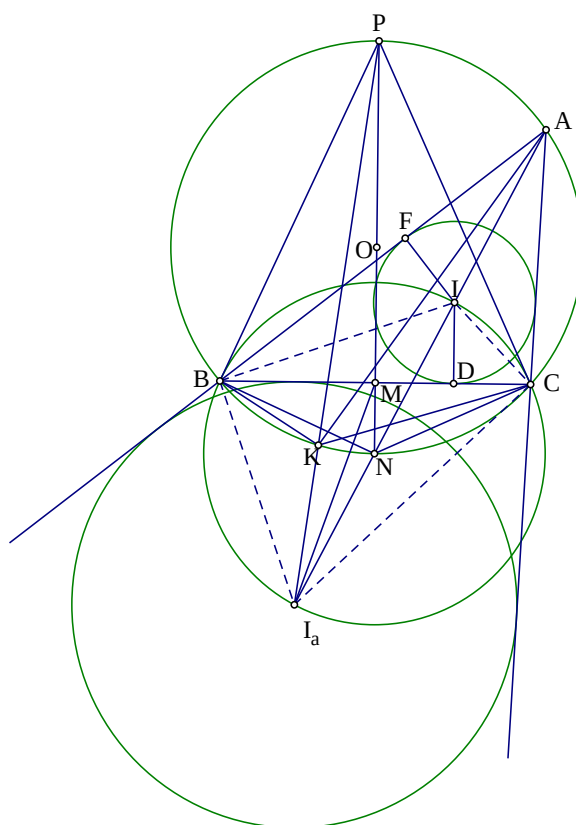
Ta có:

nên suy ra $\triangle NMI_a$ đồng dạng với $\triangle IDA \Rightarrow$ (1).

Do NI_a là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác I_aMP nên

$$KAI_a = KAN = KPN = I_aPN = NI_aM \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $DAI = KAI_a$

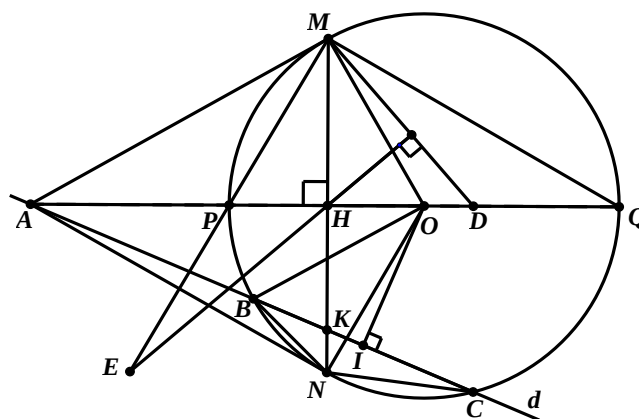


Bài 11: Cho ba điểm A, B, C cố định nằm trên một đường thẳng d (điểm B nằm giữa điểm A và điểm C). Vẽ đường tròn tâm O thay đổi nhưng luôn đi qua điểm B và điểm C (điểm O không thuộc đường thẳng d). Kẻ AM và AN là các tiếp tuyến với đường tròn tâm O (với M và N là các tiếp điểm). Đường thẳng BC cắt MN tại điểm K . Đường thẳng AO cắt MN tại điểm H và cắt đường tròn tại các điểm P và điểm Q (P nằm giữa A và Q).

Gọi D là trung điểm của HQ , từ H kẻ đường thẳng vuông góc với MD cắt đường thẳng MP tại E . Chứng minh P là trung điểm của ME .

Giải:

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\Rightarrow \frac{ME}{MO} = \frac{MH}{DO}$$
$$\Rightarrow \frac{MP}{MQ} = \frac{MH}{QH} = \frac{MH}{2DQ}$$
$$\Rightarrow \frac{MP}{MQ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{ME}{MQ} \Rightarrow ME = 2 MP \Rightarrow P \text{ là trung điểm ME.}$$


A. Bài toán

Bài 2: Để có được tờ giấy khổ A4 (kích thước xấp xỉ

họa bên.

Bước 1: Tạo ra hình vuông $ABCD$ cạnh $a = 21\text{ cm}$.

Bước 2: Vẽ cung tròn tâm A bán kính AC cắt tia AD tại F .

Bước 3: Tao hình chữ nhật $ABEF$.

Khi đó hình chữ nhật $ABEF$ chính là tờ giấy A4 thông dụng hiện nay.

Bạn An ngồi nghịch xếp tờ giấy A4 này theo đường thẳng AE , rồi xếp theo đường thẳng FM (M là trung điểm BE) khi mở tờ giấy ra. An ngạc nhiên thấy hai đường thẳng FM và AE vuông góc với nhau. Em hãy chứng minh giúp bạn An vẽ điều đó.

Bài 3: Cho tam giác ABC nhọn ($BA < BC$) nội tiếp trong đường tròn (O) . Vẽ đường tròn (Q) đi qua A và C sao cho (Q) cắt các tia đối của tia AB và CB lần lượt tại các điểm thứ hai là D và E. Gọi M là giao điểm thứ hai của đường tròn (O) và đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE. Chứng minh QM vuông góc BM.

Bài 4: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn tâm I. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Hai đường thẳng BH, CH cắt đường tròn (I) lần lượt tại hai điểm P và Q (P khác B và Q khác C).

- a) Chứng minh $IA \perp PQ$
 b) Trên hai đoạn HB và HC lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho $AM \perp MC, AN \perp NB$. Chứng minh $\triangle AMN$ cân

Bài 5: Cho A là điểm cố định nằm ngoài đường tròn (O) . Từ A kẻ tiếp tuyến AP và AQ tới đường tròn (P và Q là các tiếp điểm). Đường thẳng đi qua O và vuông góc với OP cắt đường thẳng OQ tại M .

1/ Chứng minh rằng: $MO = MA$

2/ Lấy điểm N trên cung lớn PQ của đường tròn (O) sao cho tiếp tuyến với (O) tại N cắt các tia AP, AQ lần lượt tại B và C . Chứng minh rằng:

- a) $AB + AC - BC$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm N .
 b) Nếu tứ giác $BCQP$ nội tiếp được trong một đường tròn thì $PQ \parallel BC$

Bài 6: Cho tam giác nhọn ABC có $AB > AC$. Gọi M là trung điểm của BC ; H là trực tâm; AD, BE, CF là các đường cao của tam giác ABC . Kí hiệu (C_1) và (C_2) lần lượt là đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và DKE , với K là giao điểm của EF và BC . Chứng minh rằng:

- 1) ME là tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) .
 2) $KH \perp AM$.

Bài 7: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) , H là trực tâm của tam giác. Gọi M là một điểm trên cung BC không chứa điểm A . (M không trùng với B và C). Gọi N và P lần lượt là điểm đối xứng của M qua các đường thẳng AB và AC .

a) Chứng minh ba điểm N, H, P thẳng hàng.

b) Khi $\angle BOC = 120^\circ$, xác định vị trí của điểm M để $\frac{1}{MB} + \frac{1}{MC}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 8: Cho đường tròn (C) với tâm O và đường kính AB cố định. Gọi M là điểm di động trên (C) sao cho M không trùng với các điểm A và B . Lấy C là điểm đối xứng của O qua A . Đường thẳng vuông góc với AB tại C cắt đường thẳng AM tại N . Đường thẳng BN cắt đường tròn (C) tại điểm thứ hai là E . Các đường thẳng BM và CN cắt nhau tại F .

- a) Chứng minh rằng các điểm A, E, F thẳng hàng.
 b) Chứng minh rằng tích $AM \cdot AN$ không đổi.
 c) Chứng minh rằng A là trọng tâm của tam giác BNF khi và chỉ khi NF ngắn nhất.

Bài 9: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Một điểm C cố định thuộc đoạn thẳng AO (C khác A và C khác O). Đường thẳng đi qua C và vuông góc với AO cắt nửa đường tròn đã cho tại D . Trên cung BD lấy điểm M (M khác B và M khác D). Tiếp tuyến của nửa đường tròn đã cho tại M cắt đường thẳng CD tại E . Gọi F là giao điểm của AM và CD .

1. Chứng minh tam giác EMF là tam giác cân.

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

2. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác FDM . Chứng minh ba điểm D, I, B thẳng hàng.

3. Chứng minh góc ABI có số đo không đổi khi M di chuyển trên cung BD

Bài 10: Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp trong đường tròn (O) và có trục tâm là H . Gọi D, E, F lần lượt là các chân đường cao vẽ từ A, B, C của tam giác ABC .

a) Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng EF và BC , gọi L là giao điểm của đường thẳng AK và đường tròn (O) (L khác A). Chứng minh HL vuông góc với AK .

b) Lấy điểm M thuộc cung nhỏ BC của đường tròn (O) (M khác B, C). Gọi N và P lần lượt là hai điểm đối xứng của điểm M qua hai đường thẳng AB và AC . Chứng minh ba điểm N, H, P thẳng hàng.

Bài 11: Cho đoạn thẳng AB và điểm E nằm giữa điểm A và điểm B sao cho $AE < BE$. Vẽ đường tròn (O_1) đường kính AE và đường tròn (O_2) đường kính BE . Vẽ tiếp tuyến chung ngoài MN của hai đường tròn với M là tiếp điểm thuộc (O_1) và N là tiếp điểm thuộc (O_2) . Gọi F là giao điểm của các đường thẳng AM và BN . Chứng minh rằng đường thẳng EF vuông góc với đường thẳng AB .

Bài 12: Cho điểm M thuộc nửa đường tròn (O) đường kính AB ($M \neq A, M \neq B, MA < MB$). Tia phân giác của $\angle AMB$ cắt AB tại C . Qua C vẽ đường vuông góc với AB cắt đường thẳng AM, BM theo thứ tự ở D, H . Gọi E là hình chiếu vuông góc của H trên tiếp tuyến tại A của (O) , F là hình chiếu vuông góc của D trên tiếp tuyến tại B của (O) . Chứng minh E, M, F thẳng hàng.

Bài 13: Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O . Gọi E, F lần lượt là chân đường cao kẻ từ C, B của tam giác ABC . Chứng minh rằng EF vuông góc với AO .

Bài 14: Cho hình thang vuông $ABCD$ ($A = D = 90^\circ$), có $DC = 2AB$. Kẻ DH vuông góc với AC ($H \in AC$), gọi N là trung điểm của CH . Chứng minh BN vuông góc với DN .

Bài 15: Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC < BC$) nội tiếp trong đường tròn (O) . Gọi H là giao điểm của hai đường cao BD và CE của tam giác ABC ($D \in AC, E \in AB$). Gọi I là điểm đối xứng với A qua O và J là trung điểm của BC . Chứng minh rằng ba điểm H, J, I thẳng hàng.

Bài 16: Cho điểm M nằm trên nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$ (M không trùng với A và B). Trong nửa mặt phẳng chứa nửa đường tròn có bờ là đường thẳng AB , kẻ tiếp tuyến Ax .

Đường thẳng BM cắt Ax tại I ; tia phân giác của $\angle IAM$ cắt nửa đường tròn O tại E , cắt IB tại F ; đường thẳng BE cắt AI tại H , cắt AM tại K . Chứng minh $HF \perp BI$.

Bài 17: Cho đường tròn tâm O đường kính AB ; E là một điểm bất kì thuộc đường kính AB (E khác A và B). Vẽ đường tròn (O') đường kính EB , qua trung điểm H của AE vẽ dây cung CD của đường tròn (O) và vuông góc với AE, BC cắt đường tròn (O') tại I . Chứng minh rằng:

a) Ba điểm I, E, D thẳng hàng.

b) HI là tiếp tuyến của đường tròn (O') .

Bài 18: Cho đường tròn tâm O có hai đường kính AB và MN . Vẽ tiếp tuyến d của đường tròn (O) tại B . Đường thẳng AM, AN lần lượt cắt đường thẳng d tại E và F . Gọi K là trung điểm của FE . Chứng minh rằng AK vuông góc với MN .

Bài 19: Cho tam giác nhọn ABC có trục tâm H . Gọi M, N lần lượt là chân đường cao vẽ từ B và C của tam giác ABC . Gọi D là điểm thuộc cạnh BC (D khác B và C), E là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác CDM và đường tròn ngoại tiếp tam giác BDN (E khác D). Chứng minh ba điểm A, E, D thẳng hàng.

Bài 20: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$, M là điểm chính giữa của cung BC không chứa điểm A . Vẽ đường tròn (I) đi qua M và tiếp xúc với AB tại B , vẽ đường tròn (K) đi qua M và tiếp xúc với AC tại C . Gọi N là giao điểm thứ hai của đường tròn (I) và (K) . Chứng minh rằng ba điểm B, N, C thẳng hàng

Bài 21: Cho tam giác ABC , ($AB < AC$), với ba đường cao AD , BE , CF đồng quy tại H . Các đường thẳng EF , BC cắt nhau tại G , gọi I là hình chiếu của H trên GA .

Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng $GH \perp AM$.

Bài 22: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Giả sử các điểm B, C cố định và A di động trên đường tròn (O) sao cho $AB < AC$ và $AC < BC$. Đường trung trực của đoạn thẳng AB cắt AC và BC lần lượt tại P và Q . Đường trung trực của đoạn thẳng AC cắt AB và BC lần lượt tại M và N .

Giả sử hai đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN và CPQ cắt nhau tại S và T . Chứng minh ba điểm S, T, O thẳng hàng.

Bài 23: Cho tam giác ABC cân tại A ($\angle BAC > 90^\circ$) nội tiếp đường tròn (O) bán kính R . M là điểm nằm trên cạnh BC ($BM > CM$). Gọi D là giao điểm của AM và đường tròn (O) (D khác A), điểm H là trung điểm đoạn thẳng BC . Gọi E là điểm chính giữa cung lớn BC , ED cắt BC tại N . Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMD . Chứng minh rằng ba điểm B, I, E thẳng hàng.

Bài 24: Cho đường tròn tâm O , đường kính BC cố định và một điểm A chuyển động trên nửa đường tròn (A khác B và C). Hạ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa A dựng hai nửa đường tròn tâm P đường kính HB và tâm Q đường kính HC , chúng lần lượt cắt AB và AC tại E và F . Gọi I và K lần lượt là hai điểm đối xứng với H qua AB và AC . Chứng minh rằng ba điểm I, A, K thẳng hàng.

Bài 25: Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa nửa đường tròn vẽ tiếp tuyến Ax với nửa đường tròn, trên Ax lấy M sao cho $AM > R$. Từ M vẽ tiếp tuyến MC với nửa đường tròn, từ C vẽ CH vuông góc với AB , CE vuông góc với AM . Đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt BC tại N . Đường thẳng MO cắt CE , CA , CH lần lượt tại Q, K, P .

a. MB cắt CH tại I . Chứng minh KI song song với AB

b. Gọi G và F lần lượt là trung điểm của AH và AE . Chứng minh PG vuông góc với QF

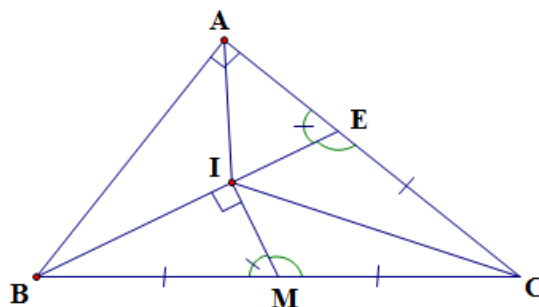
Bài 26: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . N là điểm tùy ý thuộc cạnh AB . Gọi E là giao điểm của CN và DA . Vẽ tia Cx vuông góc với CE và cắt AB tại F . Lấy M là trung điểm của EF . Chứng minh: CM vuông góc với EF .

Bài 27: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . N là điểm tùy ý thuộc cạnh AB . Gọi E là giao điểm của CN và DA . Vẽ tia Cx vuông góc với CE và cắt AB tại F . Lấy M là trung điểm của EF . Chứng minh: $NB \cdot DE = a^2$ và B, D, M thẳng hàng.

B. Lời giải

Bài 1: Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = 12\text{cm}$, $AC = 16\text{cm}$. Gọi I là giao điểm các đường phân giác trong của tam giác ABC , M là trung điểm của cạnh BC . Chứng minh rằng đường thẳng BI vuông góc với đường thẳng MI .

Lời giải



Ta có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 20\text{cm}$. Gọi E là giao điểm của BI với AC.

Theo tính chất đường phân giác ta có: $\frac{AE}{AB} = \frac{EC}{BC} = \frac{AE + EC}{AB + BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow EC = \frac{BC}{2} = 10\text{cm}$

Ta có $\triangle ICE = \triangle ICM$ (c - g - c) do: $EC = MC = 10$; $\angle ICE = \angle ICM$; IC chung.

Suy ra: $\angle IEC = \angle IMC \Rightarrow \angle IEA = \angle IMB$

Mặt khác $\angle IBM = \angle IBA \Rightarrow$ hai tam giác $\triangle IBM, \triangle ABE$ đồng dạng

$\Rightarrow \angle BIM = \angle BAE = 90^\circ \Rightarrow BI \perp MI$

Bài 2: Để có được tờ giấy khổ A4 (kích thước xấp xỉ

$21\text{cm} \times 29,7\text{cm}$) người ta thực hiện như hình vẽ minh

họa bên.

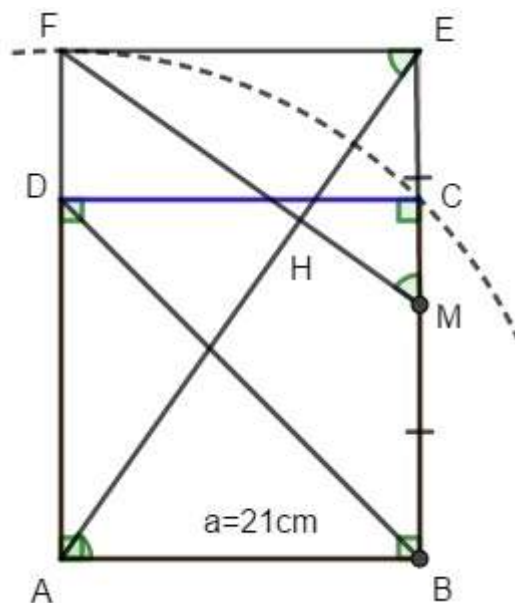
Bước 1: Tạo ra hình vuông ABCD cạnh $a = 21\text{cm}$.

Bước 2: Vẽ cung tròn tâm A bán kính AC cắt tia AD tại F.

Bước 3: Tạo hình chữ nhật ABEF.

Khi đó hình chữ nhật ABEF chính là tờ giấy A4 thông dụng hiện nay.

Bạn An ngồi nghịch xếp tờ giấy A4 này theo đường thẳng AE, rồi xếp theo đường thẳng FM (M là trung điểm BE) khi mở tờ giấy ra. An ngạc nhiên thấy hai đường thẳng FM và AE vuông góc với nhau. Em hãy chứng minh giúp bạn An vẽ điều đó.



Lời giải

Ta có: $AC = DB = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 21\sqrt{2}$ (cm).

Mà $AC = AF$ (C, F thuộc đường tròn tâm A)

$$\Rightarrow AF = AC = 21\sqrt{2} = EB.$$

Xét $\triangle ABE$ vuông tại B .

Áp dụng định lý Pi – ta – go ta có:

$$AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{21^2 + (21\sqrt{2})^2} = 21\sqrt{3}$$

Xét $\triangle FME$ vuông tại E có: $EM = \frac{1}{2}EB = \frac{21\sqrt{2}}{2}$

Áp dụng định lý Pi – ta – go ta có:

$$FM = \sqrt{FE^2 + ME^2} = \sqrt{21^2 + \left(\frac{21\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{21\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{Ta có: } \frac{AE}{EF} = \frac{21\sqrt{3}}{21} = \sqrt{3}; \quad \frac{FM}{ME} = \frac{\frac{21\sqrt{6}}{2}}{21\sqrt{2}} = \sqrt{3}$$

Xét $\triangle AEF$ và $\triangle FME$ ta có:

$$\angle AFE = \angle FEM = 90^\circ$$

$$\frac{AE}{EF} = \frac{FM}{ME}$$

$$\Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle FME \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \angle FEA = \angle FME$$

$$\text{Mà } \angle FEA + \angle HEM = 90^\circ \Rightarrow \angle FME + \angle MEH = 90^\circ$$

$$\Rightarrow FM \perp AE \text{ (đpcm).}$$

Bài 3: Cho tam giác ABC nhọn ($BA < BC$) nội tiếp trong đường tròn (O). Vẽ đường tròn (Q) đi qua A và C sao cho (Q) cắt các tia đối của tia AB và CB lần lượt tại các điểm thứ hai là D và E. Gọi M là giao điểm thứ hai của đường tròn (O) và đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE. Chứng minh QM vuông góc BM.

Lời giải

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Vẽ tia tiếp tuyến Bx như hình vẽ, gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE, ta có

$CBx = CAB$ (cùng chắn cung CB)

$BED = CAB$ (tứ giác ACED nội tiếp)

Suy ra $CBx = BED$
 $\Rightarrow Bx \parallel DE$

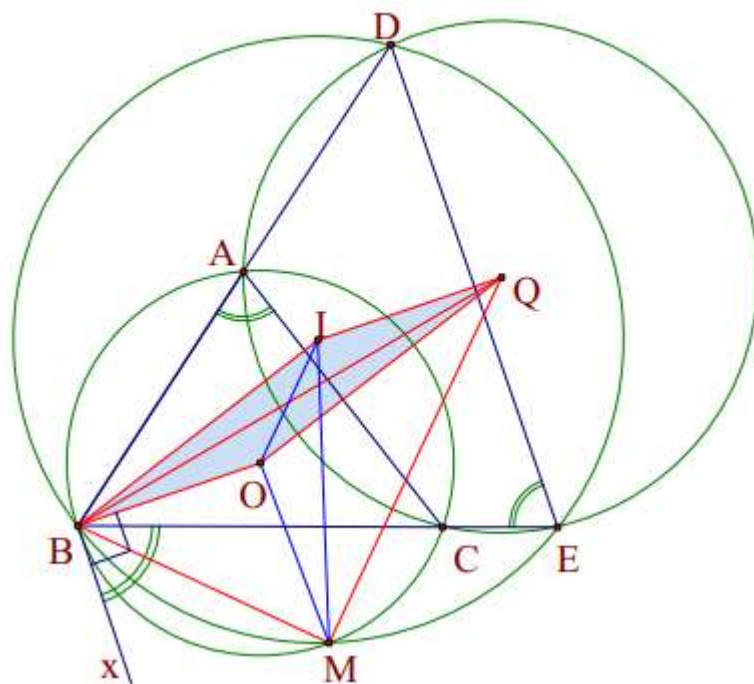
Mà $BO \perp Bx$ và $IQ \perp DE$ (đường nối tâm)
 $\Rightarrow BO \parallel IQ$

Tương tự vẽ tiếp tuyến By của (I) ta cũng suy ra được $BI \parallel OQ$ suy ra $BOIQ$ là hình bình hành

Suy ra $OB = IQ$ và $IB = OQ$ mà $OB = OM$ và $IB = IM \Rightarrow OM = IQ$ và $IM = OQ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $OIQM$ là hình thang nên $OI \parallel MQ$

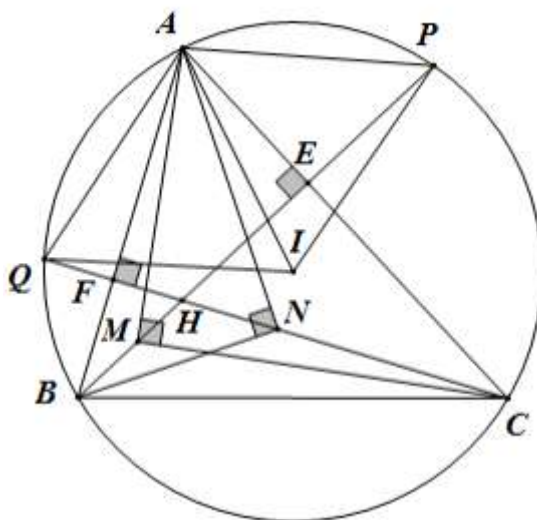
Mà $OI \perp BM \Rightarrow QM \perp BM$



Bài 4: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn tâm I. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Hai đường thẳng BH, CH cắt đường tròn (I) lần lượt tại hai điểm P và Q (P khác B và Q khác C).

- c) Chứng minh $IA \perp PQ$
 d) Trên hai đoạn HB và HC lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho $AM \perp MC$, $AN \perp NB$. Chứng minh $\triangle AMN$ cân

Lời giải



- a) Gọi E, F lần lượt là giao của BH và AC, CH và AB.

Ta có: $\angle ABE = \angle ACF = 90^\circ - \angle BAC$

$$\Rightarrow sđ AP = sđ AQ$$

$$\Rightarrow AP = AQ$$

Mà $IP = IQ$

$\Rightarrow IA$ là trung trực PQ

$\Rightarrow IA \perp PQ$.

b) Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông AMC ta có:

$$AM^2 = AE.AC; AN^2 = AF.AB$$

Lại có: $\triangle ABE \sim \triangle ACF$ (g - g)

$$\Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AE.AC = AB.AF$$

$$\Rightarrow AM^2 = AN^2 \Rightarrow AM = AN$$

Bài 5: Cho A là điểm cố định nằm ngoài đường tròn (O) . Từ A kẻ tiếp tuyến AP và AQ tới đường tròn (P và Q là các tiếp điểm). Đường thẳng đi qua O và vuông góc với OP cắt đường thẳng OQ tại M .

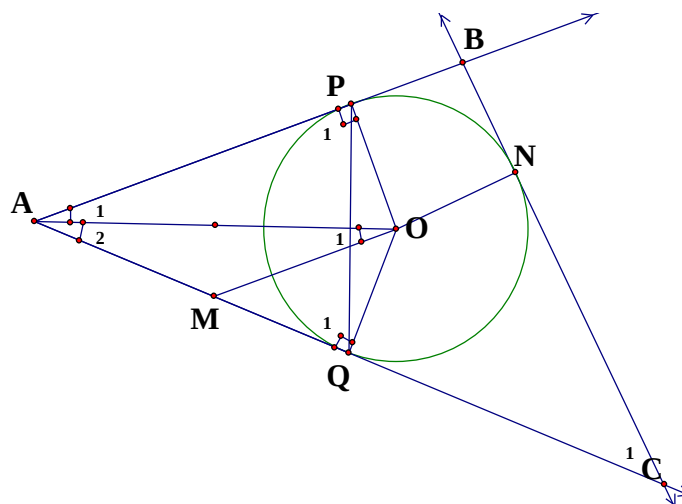
1/ Chứng minh rằng: $MO = MA$

2/ Lấy điểm N trên cung lớn PQ của đường tròn (O) sao cho tiếp tuyến với (O) tại N cắt các tia AP, AQ lần lượt tại B và C . Chứng minh rằng:

a) $AB + AC - BC$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm N .

b) Nếu tứ giác $BCQP$ nội tiếp được trong một đường tròn thì $PQ \parallel BC$

Lời giải



1/ Chứng minh rằng: $MO = MA$

$$\angle A_1 = \angle O_1 \text{ và } \angle A_1 = \angle A_2 \Rightarrow \angle A_2 = \angle O_1 \Rightarrow \Delta MAO \text{ cân} \Rightarrow MO = MA$$

2/ Lấy điểm N trên cung lớn PQ của đường tròn (O) sao cho tiếp tuyến với (O) tại N cắt các tia AP, AQ lần lượt tại B và C . Chứng minh rằng:

a) $AB + AC - BC$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm N .

Theo t/c hai tia tiếp tuyến ta có $\dots \Rightarrow AB + AC - BC = \dots = 2.AP$ (không đổi)

b) Nếu tứ giác $BCQP$ nội tiếp được trong một đường tròn thì $PQ \parallel BC$

Nếu tứ giác $BCQP$ nội tiếp được $\Rightarrow \angle P_1 = \angle C_1$

$$\text{mà } \angle P_1 = \angle Q_1 \Rightarrow \angle C_1 = \angle Q_1 \Rightarrow PQ \parallel BC$$

Bài 6: Cho tam giác nhọn ABC có $AB > AC$. Gọi M là trung điểm của BC ; H là trực tâm; AD, BE, CF là các đường cao của tam giác ABC . Kí hiệu (C_1) và (C_2) lần lượt là đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và DKE , với K là giao điểm của EF và BC . Chứng minh rằng:

1) ME là tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) .

2) $KH \perp AM$.

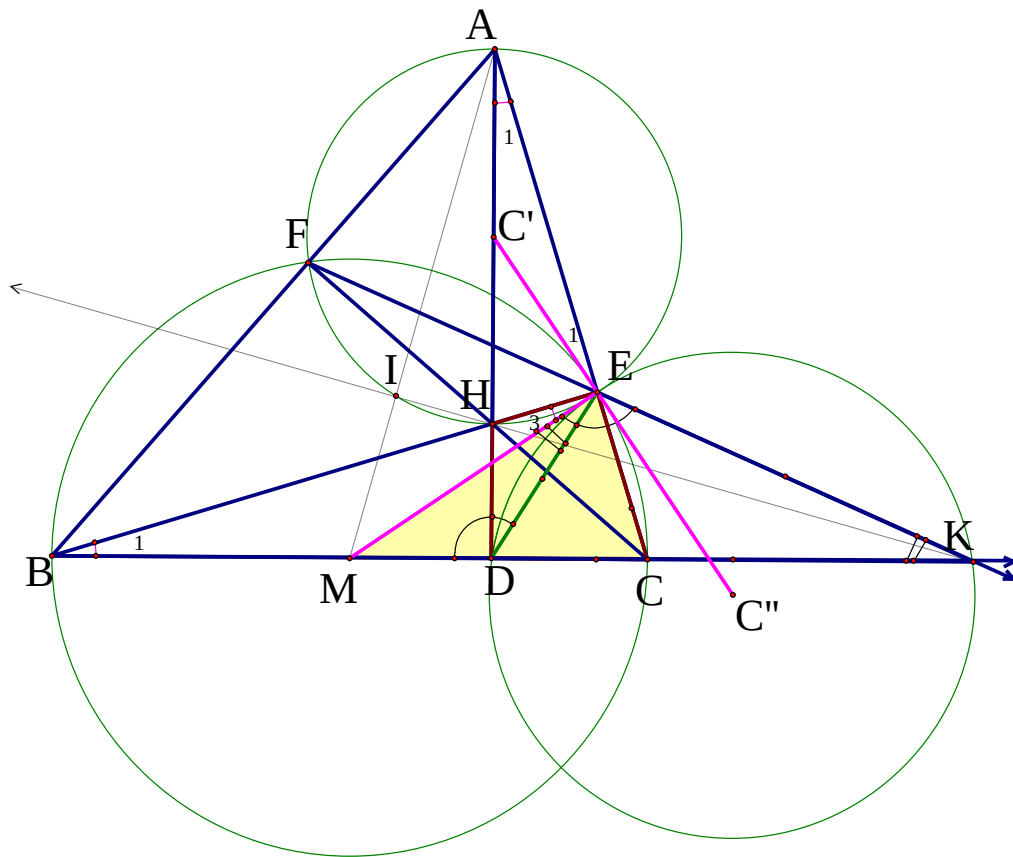
Lời giải

(Đổi điểm C_1 thành C' , C_2 thành C'' cho dễ đánh máy và vẽ hình)

1) Ta có $\angle E = \angle F = 90^\circ$ nên tứ giác $AEHF$ nội tiếp một đường tròn tâm chính là (C_1) là trung điểm AH

$\angle AEC' = \angle B_1 = \angle A_1 = \angle BEM$
$\Uparrow$
$\angle AEC' = \angle BEM$
$\Uparrow$
$ME \perp C'E$
$\Uparrow$
ME là tt của (C')

$\angle MEC + \angle CEK = \angle MCE + \angle DEC$
$\Uparrow$
$\angle MEK = \angle MDE$
$\Uparrow$
$\angle MED = \angle MKE$
$\Uparrow$
ME là tt của (C'')



2, gọi giao điểm AM với (C') là I. ta có:

$$ME \text{ là tt của } (C'') \Rightarrow ME^2 = MI \cdot MA$$

$$ME \text{ là tt của } (C'') \Rightarrow ME^2 = MD \cdot MK$$

$$\Rightarrow MI \cdot MA = MD \cdot MK \Rightarrow \dots \Rightarrow \square AIDK \text{ nt} \Rightarrow \angle AIK = \angle ADK = 1v \Rightarrow KI \perp AM \quad (1)$$

$$\text{Ta lại có: } \angle AIH = 1v \text{ (góc nt chắn nửa } (C') \Rightarrow HI \perp AM \quad (2)$$

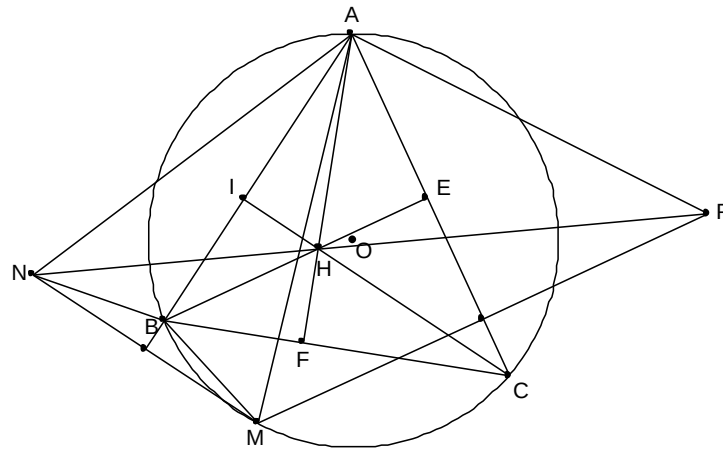
$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow I; H; K \text{ thẳng hàng} \Rightarrow KH \perp AM \text{ (Đpcm)}$$

Bài 7: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) , H là trực tâm của tam giác. Gọi M là một điểm trên cung BC không chứa điểm A. (M không trùng với B và C). Gọi N và P lần lượt là điểm đối xứng của M qua các đường thẳng AB và AC.

a) Chứng minh ba điểm N, H, P thẳng hàng.

b) Khi $\angle BOC = 120^\circ$, xác định vị trí của điểm M để $\frac{1}{MB} + \frac{1}{MC}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải



a) Gọi giao điểm của BH với AC là E

AH với BC là F, CH với AB là I

$\Rightarrow$ HECF là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow \angle AHE = \angle ACB$ (1) Mà $\angle ACB = \angle AMB$ (góc nội tiếp cùng chắn một cung)

Ta có: $\angle AMB = \angle ANB$ (Do M, N đối xứng qua AB) (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow$ AHBN là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \angle NAB = \angle NHB$ (*)

Mà $\angle NAB = \angle MAB$ (Do M, N đối xứng qua AB (**))

Từ (*), (**) $\Rightarrow \angle NHB = \angle BAM$ Chứng minh tương tự: $\angle PHC = \angle MAC$

$\Rightarrow \angle NHB + \angle PHC = \angle BAM + \angle MAC = \angle BAC$

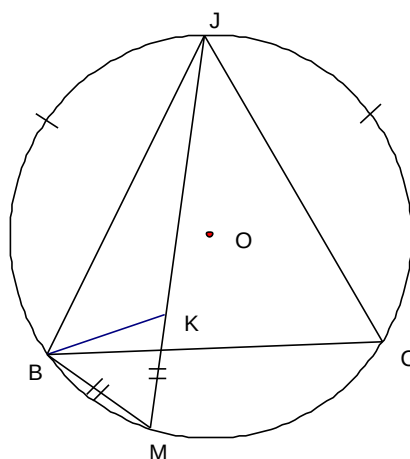
Mà $\angle BAC + \angle IHE = 180^\circ \Rightarrow \angle NHB + \angle PHC + \angle BHC = 180^\circ$ (vì $\angle IHE = \angle BHC$)

$\Rightarrow$ N, H, P thẳng hàng

b) Gọi J là điểm chính giữa của cung lớn BC

$\angle BOC = 120^\circ \Rightarrow \triangle BJC$ đều Trên đoạn JM lấy K sao cho $MK = MB$

$\Rightarrow \triangle JKB = \triangle CMB$



$$\Rightarrow BM + MC = JM; \frac{1}{BM} + \frac{1}{MC} \geq \frac{4}{BM + MC} \Rightarrow \frac{1}{BM} + \frac{1}{MC} \geq \frac{4}{JM}$$

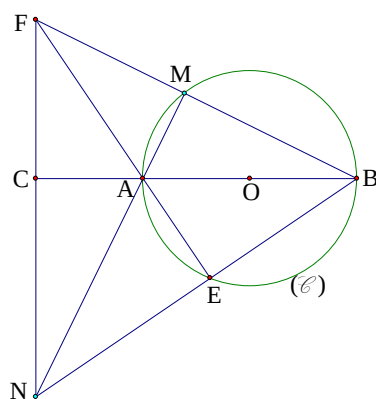
JM lớn nhất $\Leftrightarrow JM$ là đường kính (O) lúc đó M là điểm chính giữa của cung nhỏ BC.

Vậy $\frac{1}{BM} + \frac{1}{MC}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là điểm chính giữa cung nhỏ BC

Bài 8: Cho đường tròn (C) với tâm O và đường kính AB cố định. Gọi M là điểm di động trên (C) sao cho M không trùng với các điểm A và B. Lấy C là điểm đối xứng của O qua A. Đường thẳng vuông góc với AB tại C cắt đường thẳng AM tại N. Đường thẳng BN cắt đường tròn (C) tại điểm thứ hai là E. Các đường thẳng BM và CN cắt nhau tại F.

- Chứng minh rằng các điểm A, E, F thẳng hàng.
- Chứng minh rằng tích $AM \cdot AN$ không đổi.
- Chứng minh rằng A là trọng tâm của tam giác BNF khi và chỉ khi NF ngắn nhất.

Lời giải



- $MN \perp BF$ và $BC \perp NF$

$\Rightarrow A$ là trực tâm của tam giác BNF

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$\Rightarrow FA \perp NB$$

Lại có $AE \perp NB$

Nên A, E, F thẳng hàng

b) $CAN = MAB$, nên hai tam giác ACN và AMB đồng dạng.

$$\text{Suy ra: } \frac{AN}{AB} = \frac{AC}{AM}$$

Hay $AM \cdot AN = AB \cdot AC = 2R^2$ không đổi (với R là bán kính đường tròn (C))

c) Ta có $BA = \frac{2}{3}BC$ nên A là trọng tâm tam giác BNF $\Leftrightarrow$ C là trung điểm NF (3)

Mặt khác: $CAN = CFM$, nên hai tam giác CNA và CBF đồng dạng

$$\Rightarrow \frac{CN}{BC} = \frac{AC}{CF} \Rightarrow CN \cdot CF = BC \cdot AC = 3R^2 \text{ Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:}$$

$$NF = CN + CF \geq 2\sqrt{CN \cdot CF} = 2R\sqrt{3} \text{ không đổi}$$

Nên: NF ngắn nhất $\Leftrightarrow CN = CF \Leftrightarrow$ C là trung điểm NF (4)

(3) và (4) cho ta: A là trọng tâm tam giác BNF $\Leftrightarrow$ NF ngắn nhất

Bài 9: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Một điểm C cố định thuộc đoạn thẳng AO (C khác A và C khác O). Đường thẳng đi qua C và vuông góc với AO cắt nửa đường tròn đã cho tại D. Trên cung BD lấy điểm M (M khác B và M khác D). Tiếp tuyến của nửa đường tròn đã cho tại M cắt đường thẳng CD tại E. Gọi F là giao điểm của AM và CD.

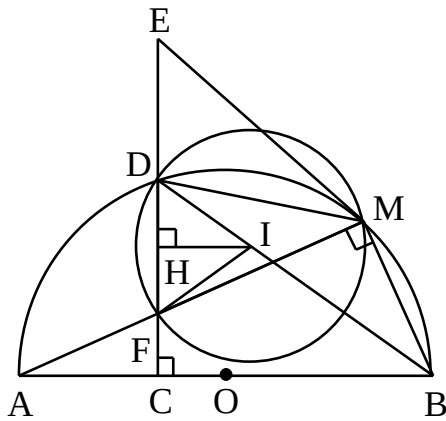
1. Chứng minh tam giác EMF là tam giác cân.

2. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác FDM. Chứng minh ba điểm D, I, B thẳng hàng.

3. Chứng minh góc ABI có số đo không đổi khi M di chuyển trên cung BD

Giải:

1)



Ta có M thuộc đường tròn tâm O đường kính AB (giả thiết) nên $\angle AMB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

hay $\angle FMB = 90^\circ$.

Mặt khác $\angle FCB = 90^\circ$ (giả thiết). Do đó $\angle FMB + \angle FCB = 180^\circ$.

Suy ra BCFM là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \angle CBM = \angle EFM$ (1) (vì cùng bù với $\angle CFM$).

Mặt khác $\angle CBM = \angle EMF$ (2) (góc nội tiếp; góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn AM). Từ (1) và (2) $\Rightarrow \angle EFM = \angle EMF$.

Suy ra tam giác EMF là tam giác cân tại E.

(Có thể nhận ra ngay $\angle EMF = \angle MBA = \angle MFE$ nên suy ra EMF cân)

2) Gọi H là trung điểm của DF. Suy ra $IH \perp DF$ và $\angle DIH = \frac{\angle DIF}{2}$ (3)

Trong đường tròn (I) ta có: DMF và DIF lần lượt là góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn

cung DF. Suy ra $\angle DMF = \frac{1}{2} \angle DIF$

Từ (3) và (4) suy ra $\angle DMF = \angle DIH$ hay $\angle DMA = \angle DIH$.

Trong đường tròn (O) ta có: $\angle DMA = \angle DBA$

(góc nội tiếp cùng chắn DA)

Suy ra $\angle DBA = \angle DIH$.

Vì IH và BC cùng vuông góc với EC nên suy ra $IH \parallel BC$. Do đó

$\angle DBA + \angle HIB = 180^\circ \Rightarrow \angle DIH + \angle HIB = 180^\circ \Rightarrow$ Ba điểm D, I, B thẳng hàng.

2) Vì ba điểm D, I, B thẳng hàng $\Rightarrow \angle ABI = \angle ABD = \frac{1}{2} \angle ADB$

Mà C cố định nên D cố định $\Rightarrow \frac{1}{2} \angle ADB$ không đổi.

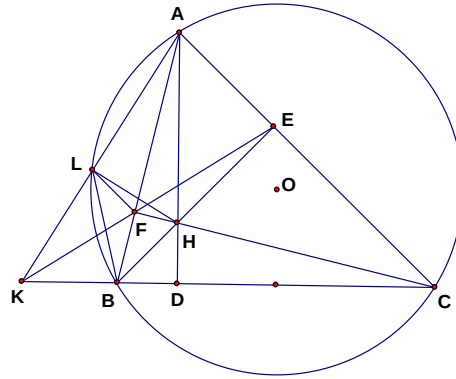
Do đó góc ABI có số đo không đổi khi M thay đổi trên cung BD.

Bài 10: Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp trong đường tròn (O) và có trực tâm là H. Gọi D, E, F lần lượt là các chân đường cao vẽ từ A, B, C của tam giác ABC.

a) Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng EF và BC , gọi L là giao điểm của đường thẳng AK và đường tròn (O) (L khác A). Chứng minh HL vuông góc với AK .

b) Lấy điểm M thuộc cung nhỏ BC của đường tròn (O) (M khác B, C). Gọi N và P lần lượt là hai điểm đối xứng của điểm M qua hai đường thẳng AB và AC . Chứng minh ba điểm N, H, P thẳng hàng.

Giải:



a) + Xét hai tam giác ΔKBF và ΔKEC có:

K chung, $\angle KBF = \angle KEC$ (vì cùng bù với $\angle FBC$)

Suy ra ΔKBF và ΔKEC đồng dạng.

$$\text{Suy ra: } \frac{KB}{KE} = \frac{KF}{KC} \Leftrightarrow KB \cdot KC = KF \cdot KE \quad (1)$$

+ Tương tự: ΔKBL và ΔKAC đồng dạng.

$$\text{Suy ra: } \frac{KB}{KA} = \frac{KL}{KC} \Leftrightarrow KB \cdot KC = KL \cdot KA \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $KF \cdot KE = KL \cdot KA \Leftrightarrow \frac{KF}{KA} = \frac{KL}{KE}$; hơn nữa $\angle FKL = \angle AKE$.

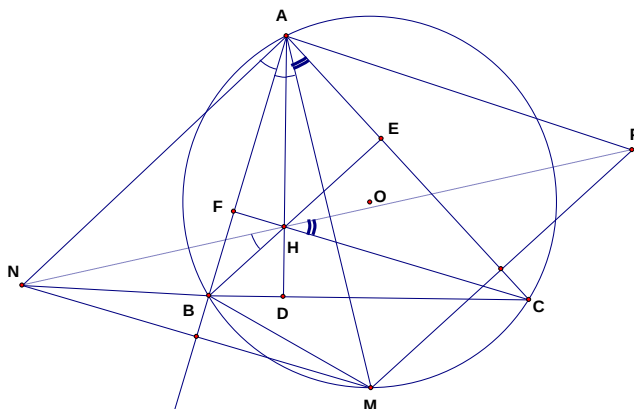
Suy ra ΔKFL và ΔKAE đồng dạng.

Suy ra $\angle KFL = \angle KAE$.

Do đó 4 điểm A, L, F, E cùng nằm trên đường tròn.

Mà A, E, F nằm trên đường tròn đường kính AH nên L cũng nằm trên đường tròn đường kính AH .

Vậy HL vuông góc với AK .



b)

+ Ta có:
$$\begin{cases} ANB = AMB \\ AMB = ACB \end{cases} \Rightarrow ANB = ACB$$

+ Tứ giác $DHEC$ nội tiếp nên $ACB + AHB = 180^\circ$. Suy ra $ANB + AHB = 180^\circ$.
Do đó tứ giác $AHBN$ nội tiếp trong đường tròn.

Suy ra $NHB = NAB$. Mà $NAB = MAB$ nên $NHB = MAB$

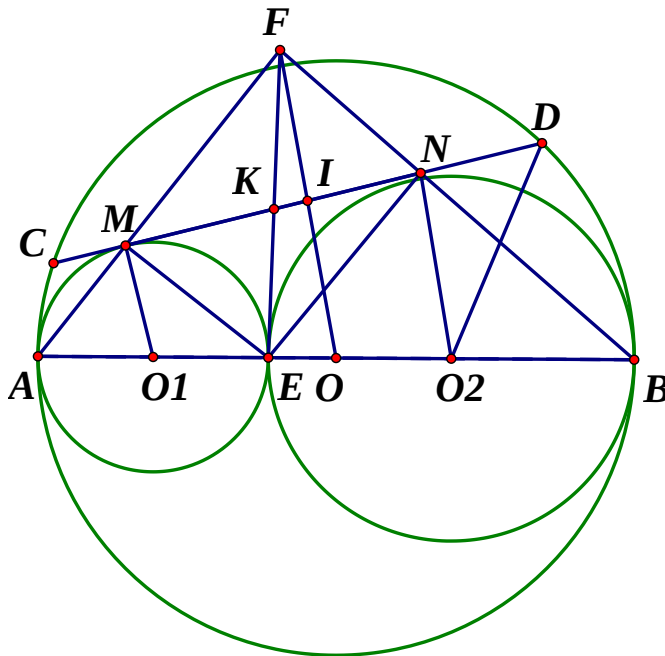
+ Tương tự ta cũng chứng minh được: $CHP = MAC$.

+ Suy ra $NHB + BHC + CHP = MAB + BHC + MAC = (MAB + MAC) + BHC$
 $= BAC + BHC = BAC + FHE = 180^\circ$

Suy ra N, H và P thẳng hàng.

Bài 11: Cho đoạn thẳng AB và điểm E nằm giữa điểm A và điểm B sao cho $AE < BE$. Vẽ đường tròn (O_1) đường kính AE và đường tròn (O_2) đường kính BE . Vẽ tiếp tuyến chung ngoài MN của hai đường tròn với M là tiếp điểm thuộc (O_1) và N là tiếp điểm thuộc (O_2) . Gọi F là giao điểm của các đường thẳng AM và BN . Chứng minh rằng đường thẳng EF vuông góc với đường thẳng AB .

Lời giải



MN là tiếp tuyến chung của (O_1) và (O_2) nên $MN \perp O_1M; MN \perp O_2N \Rightarrow O_1M \parallel O_2N$

$$\Rightarrow \angle MO_1E + \angle NO_2E = 180^\circ$$

$$\Delta O_1AM \text{ cân tại } O_1 \text{ suy ra } \angle MO_1E = 2\angle O_1AM$$

$$\Delta O_2BN \text{ cân tại } O_2 \text{ nên } \angle NO_2E = 2\angle O_2BN$$

$$\Rightarrow \angle MO_1E + \angle NO_2E = 2(\angle O_1AM + \angle O_2BN) \Rightarrow \angle O_1AM + \angle O_2BN = 90^\circ \Rightarrow \angle MFN = 90^\circ$$

Mặt khác $\angle AME = \angle BNE = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$$\Rightarrow \angle EMF = \angle ENF = 90^\circ \text{ suy ra } MENF \text{ là hình chữ nhật} \Rightarrow \angle MEF = \angle NME$$

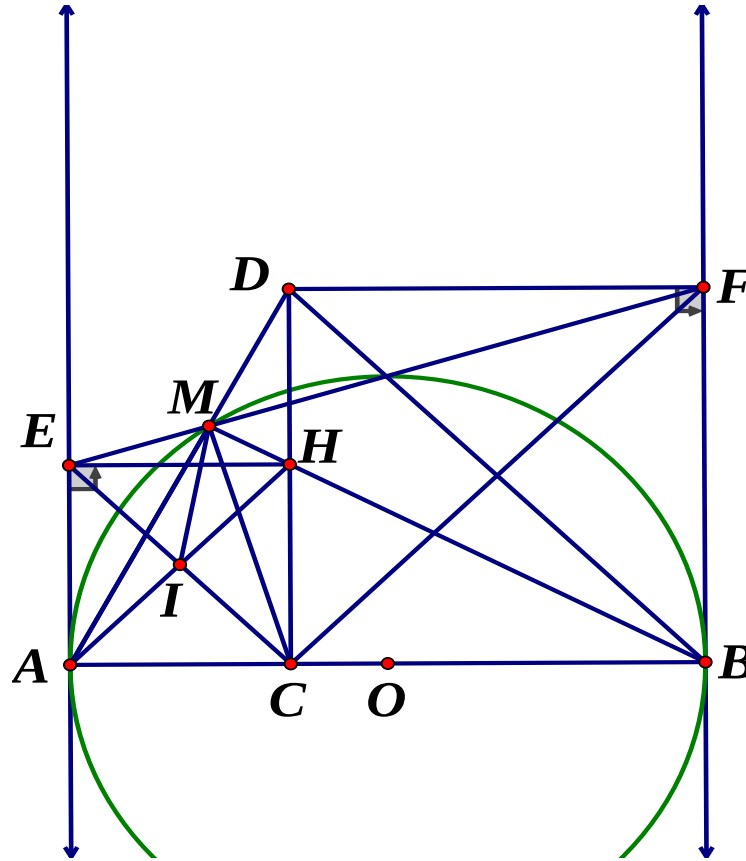
Mà $\angle O_1EM = \angle O_1ME$ (ΔO_1ME cân tại O_1) và $\angle NME + \angle O_1ME = 90^\circ$ (MN là tiếp tuyến)

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$\Rightarrow \angle MEF + \angle OEM = 90^\circ$ hay $EF \perp AB$ tại E.

Bài 12: Cho điểm M thuộc nửa đường tròn (O) đường kính AB ($M \neq A, M \neq B, MA < MB$). Tia phân giác của $\angle AMB$ cắt AB tại C. Qua C vẽ đường vuông góc với AB cắt đường thẳng AM, BM theo thứ tự ở D, H. Gọi E là hình chiếu vuông góc của H trên tiếp tuyến tại A của (O), F là hình chiếu vuông góc của D trên tiếp tuyến tại B của (O). Chứng minh E, M, F thẳng hàng.

Lời giải



Do MC là phân giác của $\triangle AMB$, theo tính chất đường phân giác $\Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{AM}{BM}$ (1)

Xét $\triangle BHC$ và $\triangle BAM$ có $\angle BCH = \angle BMA = 90^\circ$, góc ABM là góc chung

$$\Rightarrow \triangle BHC \text{ đồng dạng với } \triangle BAM \Rightarrow \frac{HC}{AM} = \frac{BC}{BM} \Rightarrow \frac{HC}{BC} = \frac{AM}{BM} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AC = HC$

Tứ giác ACHE là hình vuông suy ra $AH = EC$

Gọi AH cắt EC tại I.

$$\text{Xét } \triangle AMH \text{ vuông tại } M \Rightarrow MI = \frac{AH}{2} \Rightarrow MI = \frac{EC}{2} \Rightarrow \angle EMC = 90^\circ$$

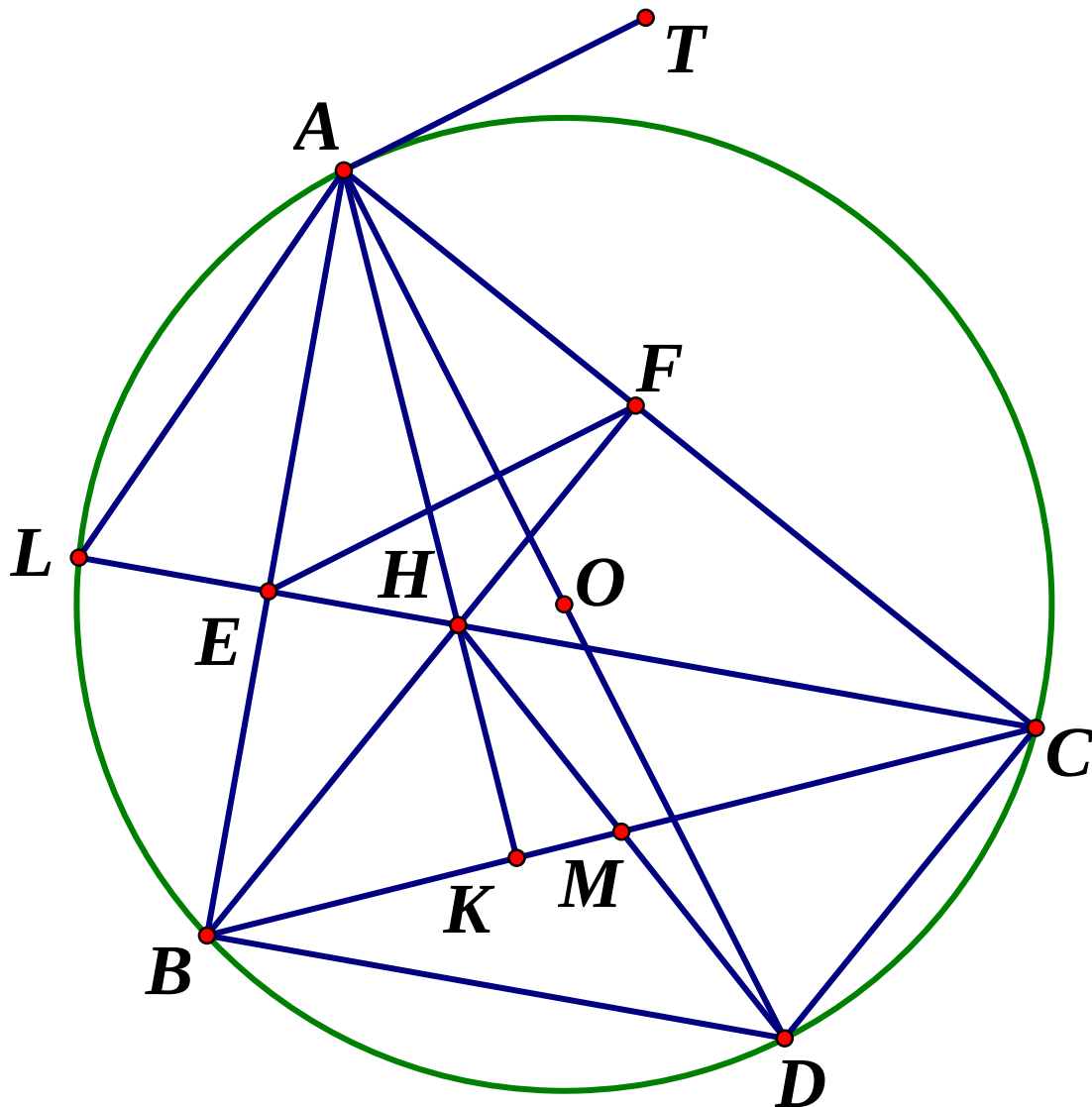
Chứng minh tương tự ta có $\angle CMF = 90^\circ$

Vậy $\angle EMF = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ suy ra E, M, F thẳng hàng.

Bài 13: Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi E, F lần lượt là chân đường cao kẻ từ C, B của tam giác ABC. Chứng minh rằng EF vuông góc với AO.

Lời giải

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038



Kẻ tiếp tuyến từ A của đường tròn tâm (O) suy ra $AT \perp AO$ (1)

$\angle TAC = \angle ABC$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

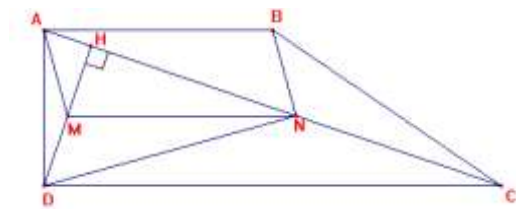
Tứ giác EFCB nội tiếp $\Rightarrow \angle ABC + \angle EFC = 180^\circ$

Mà $\angle EFC + \angle EFA = 180^\circ$ (hai góc kề bù) nên $\angle ABC = \angle AFE = \angle TAC$ suy ra $EF \parallel AT$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra EF vuông góc với AO.

Bài 14: Cho hình thang vuông ABCD ($\angle A = \angle D = 90^\circ$), có $DC = 2AB$. Kẻ DH vuông góc với AC ($H \in AC$), gọi N là trung điểm của CH. Chứng minh BN vuông góc với DN.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của DH.

Chứng minh tứ giác ABNM là hình bình hành $\Rightarrow AM \parallel BN$ (1)

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

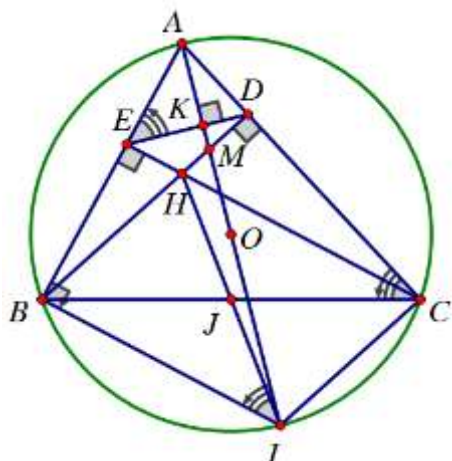
Chứng minh $MN \perp AD$

Suy ra M là trực tâm của $\triangle ADN \Rightarrow AM \perp DN(2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BN \perp DN$

Bài 15: Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC < BC$) nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi H là giao điểm của hai đường cao BD và CE của tam giác ABC ($D \in AC$, $E \in AB$). Gọi I là điểm đối xứng với A qua O và J là trung điểm của BC . Chứng minh rằng ba điểm H, J, I thẳng hàng.

Lời giải



Ta có $IB \perp AC$; $CH \perp AB$ ($CE \perp AB$) suy ra $IB \parallel CH$.

$IC \perp AB$; $BH \perp AC$ ($BD \perp AC$) suy ra $BH \parallel IC$.

Như vậy tứ giác $BHCI$ là hình bình hành, mà J là trung điểm của BC (GT)

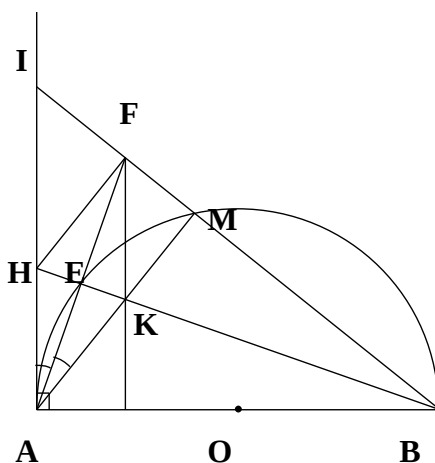
$\Rightarrow J$ trung điểm IH .

Vậy H, J, I thẳng hàng.

Bài 16: Cho điểm M nằm trên nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$ (M không trùng với A và B). Trong nửa mặt phẳng chứa nửa đường tròn có bờ là đường thẳng AB , kẻ tiếp tuyến Ax .

Đường thẳng BM cắt Ax tại I ; tia phân giác của $\angle IAM$ cắt nửa đường tròn O tại E , cắt IB tại F ; đường thẳng BE cắt AI tại H , cắt AM tại K . Chứng minh $HF \perp BI$.

Lời giải



Ta có M, E nằm trên nửa đường tròn đường kính AB nên $\angle FMK = 90^\circ$ và $\angle FEK = 90^\circ$.

Ta có $\triangle HAK$ cân tại A nên $AH = AK$ (1)

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

K là trực tâm của $\triangle AFB$ nên ta có $FK \perp AB$ suy ra $FK \parallel AH$ (2)

Do đó $FAH = AFK$ mà $FAH = FAK$ (gt) cho nên $AFK = FAK$

Suy ra $AK = KF$, kết hợp với (1) ta được $AH = KF$ (3)

Từ (2) và (3) ta có $AKFH$ là hình bình hành nên $HF \parallel AK$. Mà $AK \perp IB$ suy ra $HF \perp IB$

Bài 17: Cho đường tròn tâm O đường kính AB ; E là một điểm bất kì thuộc đường kính AB (E khác A và B). Vẽ đường tròn (O') đường kính EB , qua trung điểm H của AE vẽ dây cung CD của đường tròn (O) và vuông góc với AE , BC cắt đường tròn (O') tại I . Chứng minh rằng:

a) Ba điểm I, E, D thẳng hàng.

b) HI là tiếp tuyến của đường tròn (O').

Lời giải

a) Tứ giác $ACED$ là hình thoi (vì hai đường chéo vuông góc và cắt nhau tại trung điểm) $\Rightarrow AC \parallel DE$

Mà $AC \perp BC \Rightarrow DE \perp BC$ (1)

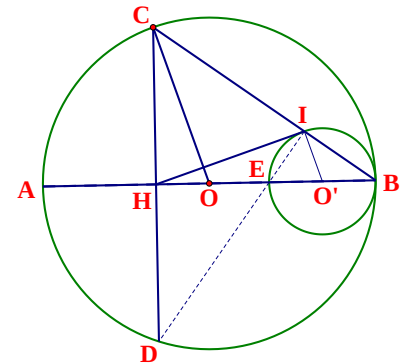
I thuộc (O') $\Rightarrow EI \perp IB$ hay $EI \perp BC$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow D, E, I$ thẳng hàng (đpcm)

b) Vì $HID = HDI$ và $O'IB = B$ mà $D = B$ (cùng phụ với BCD)

$\Rightarrow HID = O'IB$

Do đó: $HIO = 90^\circ$, suy ra HI là tiếp tuyến của (O')



Bài 18: Cho đường tròn tâm O có hai đường kính AB và MN . Vẽ tiếp tuyến d của đường tròn (O) tại B . Đường thẳng AM, AN lần lượt cắt đường thẳng d tại E và F . Gọi K là trung điểm của FE . Chứng minh rằng AK vuông góc với MN .

Lời giải

Tam giác ABE vuông tại B và BM vuông góc với AE

Nên ta có $AM \cdot AE = AB^2$

Tương tự $AN \cdot AF = AB^2$

Suy ra $AM \cdot AE = AN \cdot AF$

Hay $\frac{AM}{AN} = \frac{AF}{AE}$

Xét $\triangle AMN$ và $\triangle AFE$ có góc MAN chung

và $\frac{AM}{AN} = \frac{AF}{AE}$

Do đó $\triangle AMN$ và $\triangle AFE$ đồng dạng

Suy ra góc $AMN = AFE$ hay $AMN = KFA$

Ta có: $MAN = 90^\circ$

nên tam giác AEF vuông tại A

suy ra $AK = KE = KF$

Do đó góc $KAF = KFA$

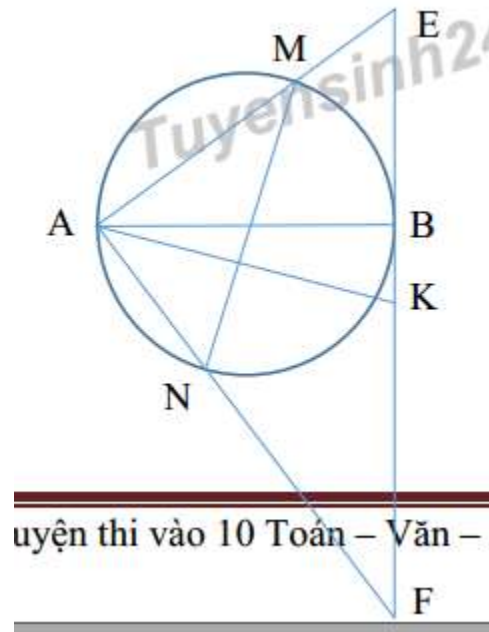
Mà góc $AMN = KFA$ (cmt)

Suy ra $KAF = AMN$

Mà góc $AMN + ANM = 90^\circ$

Suy ra góc $KAF + ANM = 90^\circ$

Vậy AK vuông góc với MN .



Bài 19: Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm H. Gọi M, N lần lượt là chân đường cao vẽ từ B và C của tam giác ABC. Gọi D là điểm thuộc cạnh BC (D khác B và C), E là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác CDM và đường tròn ngoại tiếp tam giác BDN (E khác D). Chứng minh ba điểm A, E, D thẳng hàng.

Lời giải

Vì BNED là tứ giác nội tiếp nên:

$\angle BNE = \angle EDC$ (góc trong và góc ngoài đỉnh đối diện) (1)

Vì CDEM là tứ giác nội tiếp nên:

$\angle EDC = \angle EMA$ (góc trong và góc ngoài đỉnh đối diện) (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$$\angle BNE = \angle EMA \Rightarrow \angle ANE + \angle EMA = 180^\circ$$

Suy ra tứ giác ANEM nội tiếp

$\Rightarrow \angle AEN = \angle AMN$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AN) (3)

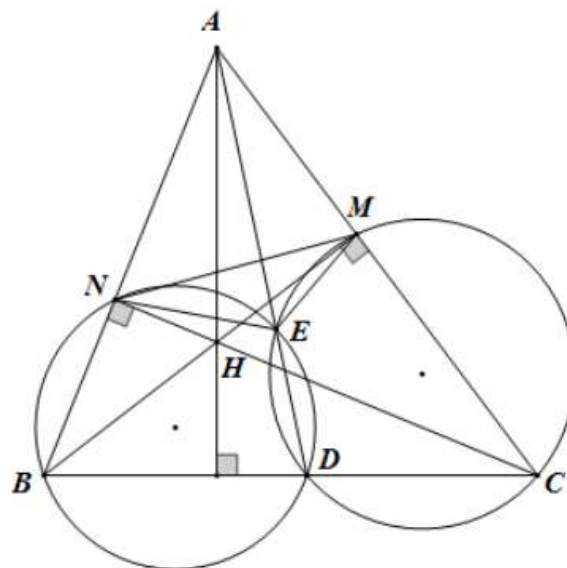
Vì $\angle BNC = \angle BMC = 90^\circ$ nên BNMC là tứ giác nội tiếp.

Suy ra $\angle AMN = \angle NBD$ (góc trong và góc ngoài đỉnh đối diện) (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\angle AEN = \angle NBD$

Mà BNED là tứ giác nội tiếp nên $\angle NBD + \angle NED = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle AEN + \angle NED = 180^\circ \Rightarrow \angle AED = 180^\circ$ suy ra A, E, D thẳng hàng.



Bài 20: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O; R), M là điểm chính giữa của cung BC không chứa điểm A. Vẽ đường tròn (I) đi qua M và tiếp xúc với AB tại B, vẽ đường tròn (K) đi qua M và tiếp xúc với AC tại C. Gọi N là giao điểm thứ hai của đường tròn (I) và (K). Chứng minh rằng ba điểm B, N, C thẳng hàng

Giải:

Xét (I) : $\angle BNM = \angle MBx$ cùng chắn cung BM

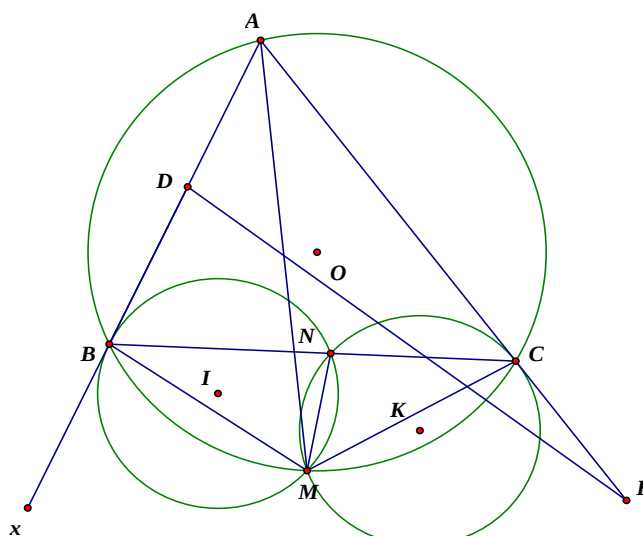
Xét (K) : $\angle MNC = \angle MCE$ cùng chắn cung MC

Do tứ giác ABMC nội tiếp (gt)

Suy ra: $\angle ABM + \angle ACM = 180^\circ$

Mà : $\angle MBx + \angle MCE = 180^\circ$

Nên : $\angle BNM + \angle CNM = 180^\circ$ suy ra B, N, C thẳng hàng



Bài 21: Cho tam giác ABC , ($AB < AC$), với ba đường cao AD , BE , CF đồng quy tại H . Các đường thẳng EF , BC cắt nhau tại G , gọi I là hình chiếu của H trên GA . Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng $GH \perp AM$.

Giải:

Chứng minh $GH \perp AM$.

Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp

$\triangle ABC$. Kẻ đường kính AA' của (O) .

Vì tứ giác $BCAI$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow I \in (O) \Rightarrow \angle AIA' = 90^\circ \Rightarrow A'I \perp AI$

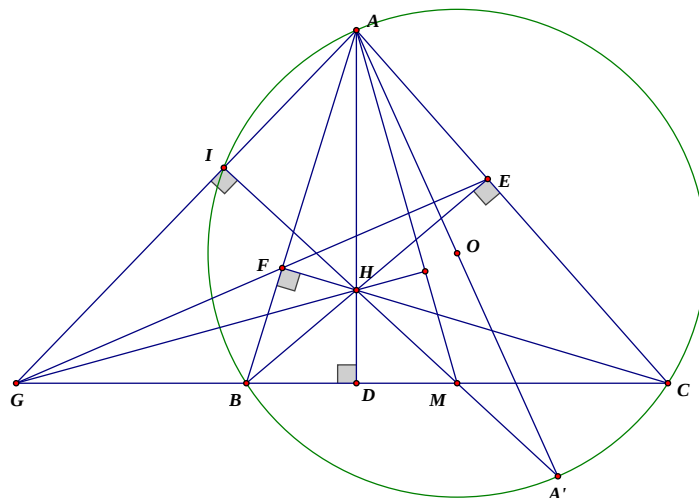
hay $A'I \perp AG$.

Mà $HI \perp AG$ (giả thiết)

$\Rightarrow A'I \equiv HI \Rightarrow A', I, H$ thẳng hàng.

Mà dễ dàng chứng minh được $A'H$ đi qua trung điểm M của BC (tứ giác $BHCA'$ là hình bình hành).

$\Rightarrow M, I, H$ thẳng hàng.



Xét $\triangle AGM$ có: $AD \perp AM$, $MI \perp AG$ và AD cắt MI tại H .

$\Rightarrow H$ là trực tâm của tam giác AGM . $\Rightarrow GH \perp AM$

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài 22: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Giả sử các điểm B, C cố định và A di động trên đường tròn (O) sao cho $AB < AC$ và $AC < BC$. Đường trung trực của đoạn thẳng AB cắt AC và BC lần lượt tại P và Q . Đường trung trực của đoạn thẳng AC cắt AB và BC lần lượt tại M và N .

Giả sử hai đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN và CPQ cắt nhau tại S và T . Chứng minh ba điểm S, T, O thẳng hàng.

Giải:

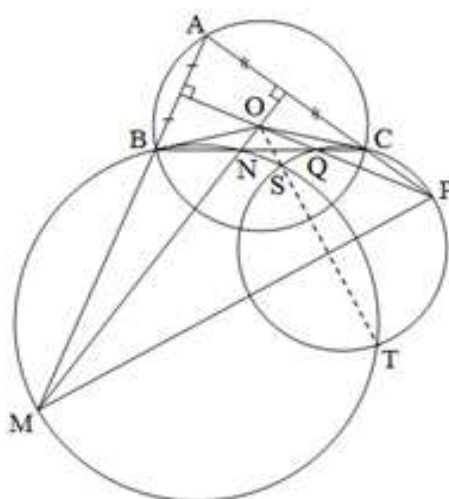
Giả sử hai đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN và CPQ cắt nhau tại S và T . Chứng minh ba điểm S, T, O thẳng hàng.

Ta chứng minh O thuộc đường thẳng ST . Thật vậy, giả sử OS cắt hai đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN và CPQ lần lượt tại T_1 và T_2 .

Xét $\triangle ONS$ $\triangle OT_1M$.

$\angle MOT_1$: chung

$\angle OT_1M = \angle ONS$ ($MNST_1$ nội tiếp)



Vậy $\triangle ONS \sim \triangle OT_1M$ (g.g). $\Rightarrow \frac{ON}{OT_1} = \frac{OS}{OM}$. $\Rightarrow ON \cdot OM = OS \cdot OT_1$ (1).

Chứng minh tương tự, $OP.OQ = OS.OT_2$ (2)

Mà $ON.OM = OP.OQ$ (3).

Từ (1), (2) và (3), suy ra: $OS.OT_1 = OS.OT_2$.

Do đó T_1 trùng với T_2 . Vậy ba điểm S, T, O thẳng hàng.

Bài 23: Cho tam giác ABC cân tại A ($BAC > 90^\circ$) nội tiếp đường tròn (O) bán kính R . M là điểm nằm trên cạnh BC ($BM > CM$). Gọi D là giao điểm của AM và đường tròn (O) (D khác A), điểm H là trung điểm đoạn thẳng BC . Gọi E là điểm chính giữa cung lớn BC , ED cắt BC tại N . Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMD . Chứng minh rằng ba điểm B, I, E thẳng hàng.

Giải:

Kẻ BE cắt (I) tại J

Ta có $EBD = EAD$

$BJD = DMC$ (góc trong- góc ngoài)

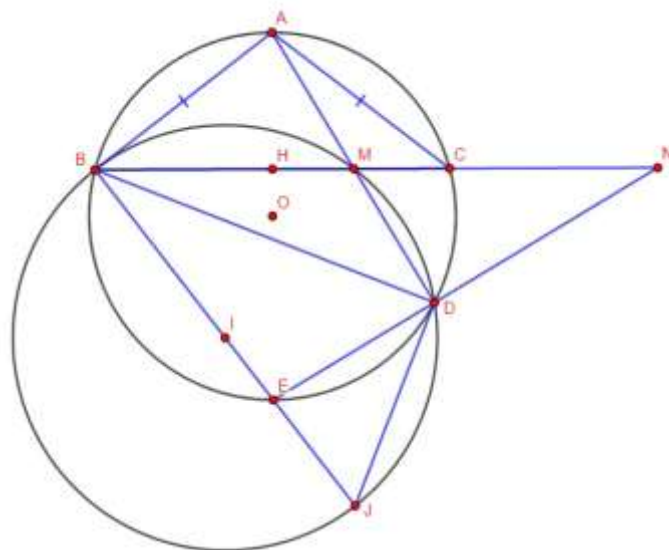
Mà $EAD + DMC = 90^\circ$

$\Rightarrow EBD + BJD = 90^\circ$

$\Rightarrow BD \perp JD \Rightarrow BJ$ là đường kính $\Rightarrow$

$I \in BJ$ hay $I \in BE$

$\Rightarrow B, I, E$ thẳng hàng (đpcm)



Bài 24: Cho đường tròn tâm O , đường kính BC cố định và một điểm A chuyển động trên nửa đường tròn (A khác B và C). Hạ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa A dựng hai nửa đường tròn tâm P đường kính HB và tâm Q đường kính HC , chúng lần lượt cắt AB và AC tại E và F . Gọi I và K lần lượt là hai điểm đối xứng với H qua AB và AC . Chứng minh rằng ba điểm I, A, K thẳng hàng.

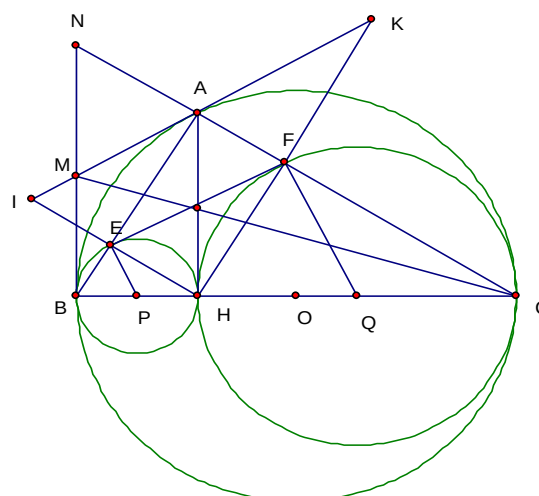
Giải:

Góc IAH bằng 2 lần góc BAH

Góc KAH bằng 2 lần góc CAH

Suy ra góc $IAH +$ góc $KAH = 2(\text{góc } BAH + \text{góc } CAH) = 180^\circ$

Suy ra I, A và K thẳng hàng



Bài 25: Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB . Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa nửa đường tròn vẽ tiếp tuyến Ax với nửa đường tròn, trên Ax lấy M sao cho $AM > R$. Từ M

vẽ tiếp tuyến MC với nửa đường tròn, từ C vẽ CH vuông góc với AB, CE vuông góc với AM. Đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt BC tại N. Đường thẳng MO cắt CE, CA, CH lần lượt tại Q, K, P.

a. MB cắt CH tại I. Chứng minh KI song song với AB

b. Gọi G và F lần lượt là trung điểm của AH và AE. Chứng minh PG vuông góc với QF

Giải:

a. Xét $\triangle CHB$ và $\triangle MAO$ có

$$MAO = NOB = 90^\circ; CBH = MOA \text{ (cm trên)}$$

$$\Rightarrow \triangle CHB \sim \triangle MAO \Rightarrow \frac{CH}{MA} = \frac{HB}{AO} = \frac{HB}{R}$$

-Ta có $CH \perp AB$ (gt) ; $MA \perp AB$

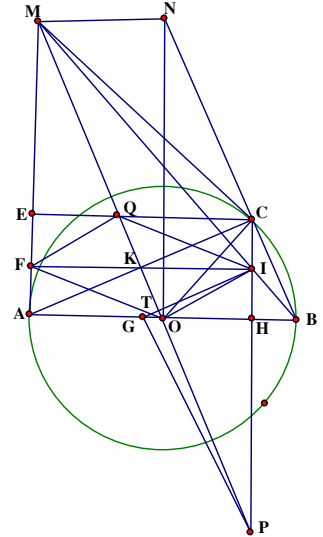
$$(\dots) \Rightarrow CH \parallel MA \Rightarrow IH \parallel MA \Rightarrow \frac{IH}{MA} = \frac{HB}{AB} = \frac{HB}{2R}$$

$$\text{-Nên ta có } \Rightarrow \frac{CH}{MA} = \frac{HB}{R} = 2 \cdot \frac{HB}{2R} = 2 \cdot \frac{IH}{MA} = \frac{2IH}{MA} \cdot$$

$$\Rightarrow CH = 2IH \Rightarrow IC = IH$$

-Chỉ ra KI là đường trung bình của tam giác

$$ACH \Rightarrow KI \parallel AB$$



b. Xét $\triangle CHB$ và $\triangle MAO$ có $MAO = NOB = 90^\circ; CBH = MOA$ (cm trên)

$$\Rightarrow \triangle CHB \sim \triangle MAO \Rightarrow \frac{CH}{MA} = \frac{HB}{AO} = \frac{HB}{R}$$

$$\text{-Ta có } CH \perp AB \text{ (gt) ; } MA \perp AB (\dots) \Rightarrow CH \parallel MA \Rightarrow IH \parallel MA \Rightarrow \frac{IH}{MA} = \frac{HB}{AB} = \frac{HB}{2R}$$

$$\text{-Nên ta có } \Rightarrow \frac{CH}{MA} = \frac{HB}{R} = 2 \cdot \frac{HB}{2R} = 2 \cdot \frac{IH}{MA} = \frac{2IH}{MA} \Rightarrow CH = 2IH \Rightarrow IC = IH.$$

-Chỉ ra KI là đường trung bình của tam giác $ACH \Rightarrow KI \parallel AB$

-Chứng minh FQIO là hình bình hành $\Rightarrow QF \parallel IO$

-Chứng minh O là trọng tâm tam giác GIP

$$\Rightarrow PG \perp OI \Rightarrow PG \perp QF$$

Bài 26: Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. N là điểm tùy ý thuộc cạnh AB. Gọi E là giao điểm của CN và DA. Vẽ tia Cx vuông góc với CE và cắt AB tại F. Lấy M là trung điểm của EF. Chứng minh: CM vuông góc với EF.

Giải:

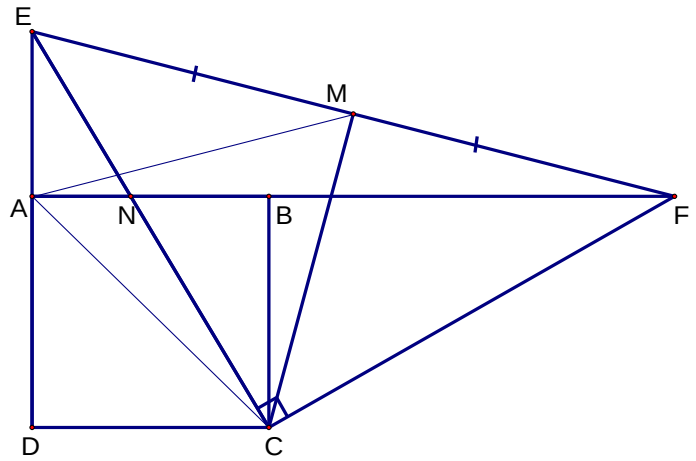
Ta có: $\angle ECD = \angle BCF$ (cùng phụ với $\angle ECB$)

Chứng minh được: $\triangle EDC = \triangle FBC$
(cạnh góc vuông – góc nhọn)

$$\Rightarrow CE = CF$$

$\Rightarrow \triangle ECF$ cân tại C

Mà CM là đường trung tuyến nên $CM \perp EF$



Bài 27: Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. N là điểm tùy ý thuộc cạnh AB. Gọi E là giao điểm của CN và DA. Vẽ tia Cx vuông góc với CE và cắt AB tại F. Lấy M là trung điểm của EF. Chứng minh: $NB \cdot DE = a^2$ và B, D, M thẳng hàng.

Giải:

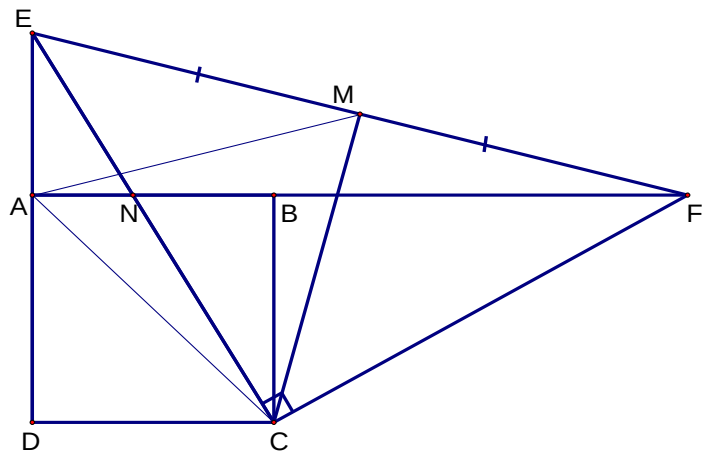
* Vì $\triangle EDC = \triangle FBC \Rightarrow ED = FB$

$\triangle NCF$ vuông tại C. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$$BC^2 = NB \cdot BF \Rightarrow a^2 = NB \cdot DE \text{ (đpcm)}$$

* $\triangle CEF$ vuông tại C có CM là đường

$$\text{trung tuyến nên } CM = \frac{EF}{2}$$



$$\triangle AEF \text{ vuông tại A có AM là đường trung tuyến nên } AM = \frac{EF}{2}$$

$\Rightarrow CM = AM \Rightarrow M$ thuộc đường trung trực của AC.

Vì ABCD là hình vuông nên B, D thuộc đường trung trực của AC

$\Rightarrow B, D, M$ thẳng hàng vì cùng thuộc đường trung trực của AC (đpcm).

Lời giải (chữ đen)

3. Chứng minh các đa giác đặc biệt

A. Bài toán ()

Bài 1: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D sao cho $BD = BA$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, AD. Đường thẳng qua B và song song với AD cắt MN tại E.

a) Chứng minh tứ giác NAEB là hình chữ nhật.

b) Chứng minh $\angle ACE = \angle DCN$.

Bài 2: Cho đường tròn (O) đường kính BC . Điểm A thuộc đường tròn (O) . Kẻ $AH \perp BC$, $(H \in BC)$. Gọi I, K theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp của các $\triangle AHB, \triangle AHC$. Đường thẳng IK cắt AB, AC lần lượt tại M, N

a) Chứng minh $\triangle AMN$ vuông cân

Chứng minh $S_{AMN} \leq \frac{1}{2} S_{ABC}$

Bài 3: Cho hai đường tròn (O) và (O') ở ngoài nhau. Đường nối tâm OO' cắt đường tròn (O) và (O') tại các điểm A, B, C, D theo thứ tự trên đường thẳng. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài EF , $E \in (O)$ và $F \in (O')$. Gọi M là giao điểm của AE và DF ; N là giao điểm của EB và FC . Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $MENF$ là hình chữ nhật.

b) $MN \perp AD$.

c) $ME \cdot MA = MF \cdot MD$

Bài 4: Cho tam giác nhọn ABC cân tại A và nội tiếp trong đường tròn (O) đường kính AK ; lấy điểm I thuộc cung nhỏ AB của đường tròn (O) (I khác A, B). Gọi M là giao điểm của IK và BC , đường trung trực của đoạn thẳng IM cắt AB và AC lần lượt tại D và E . Chứng minh tứ giác $ADME$ là hình bình hành.

Bài 5: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$. Gọi AH là đường cao; E và F lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB và AC . Chứng minh tứ giác $AEHF$ là hình chữ nhật.

Bài 6: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Gọi C là một điểm nằm trên nửa đường tròn (O) (C khác A, C khác B). Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB , D là điểm đối xứng với A qua C , I là trung điểm của CH , J là trung điểm của DH .

a) Chứng minh $CIJ = CBH$

b) Chứng minh $\triangle CJH$ đồng dạng với $\triangle HIB$

c) Gọi E là giao điểm của HD và BI . Chứng minh $HE \cdot HD = HC^2$

d) Xác định vị trí của điểm C trên nửa đường tròn (O) để $AH + CH$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 7: Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa nửa đường tròn vẽ tiếp tuyến Ax với nửa đường tròn, trên Ax lấy M sao cho $AM > R$. Từ M vẽ tiếp tuyến MC với nửa đường tròn. Đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt BC tại N .

Chứng minh $MNCO$ là hình thang cân

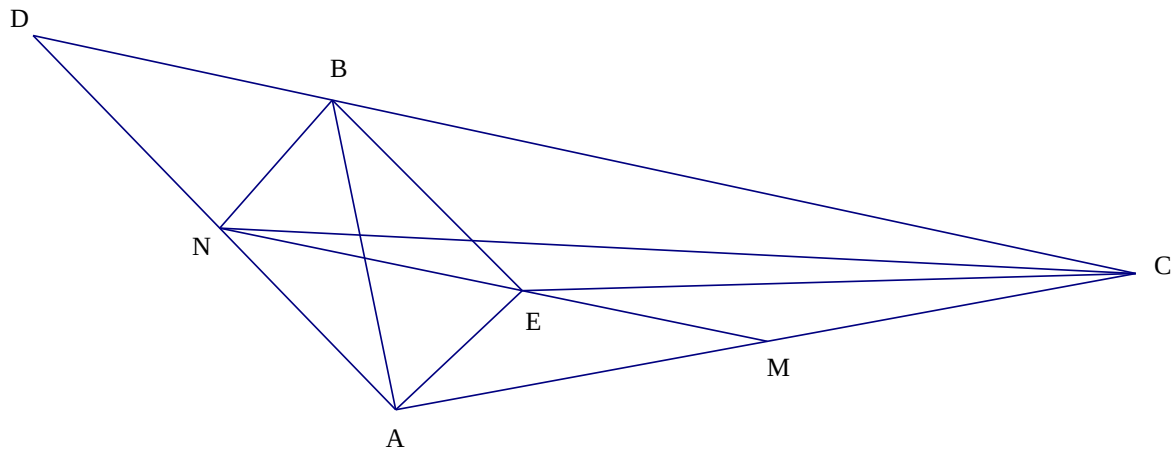
B. Lời giải

Bài 1: Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Trên tia đối của tia BC lấy điểm D sao cho $BD = BA$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, AD . Đường thẳng qua B và song song với AD cắt MN tại E .

a) Chứng minh tứ giác $NAEB$ là hình chữ nhật.

b) Chứng minh $ACE = DCN$.

Lời giải



- a) Ta có: M, N lần lượt là trung điểm của AC, AD
nên MN là đường trung bình của $\triangle ACD$

$$\Rightarrow MN \parallel CD \Rightarrow \angle ANE = \angle ADB$$

$$\text{Vì: } BA = BD \Rightarrow \triangle ABD \text{ cân tại B} \Rightarrow BN \perp AB; \angle BDA = \angle BAD$$

$$\text{Vì: } BE \parallel AD \Rightarrow \angle BNA = \angle NBE = 90^\circ; \angle ANE = \angle NEB$$

$$\Rightarrow \angle BAN = \angle ADB = \angle ANE = \angle NEB$$

$$\Rightarrow \text{tứ giác BEAN nội tiếp}$$

$$\Rightarrow \angle NEA = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

$$\text{Vì: } \angle NAE = \angle BNA = \angle NBE = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \text{tứ giác NAEB là hình chữ nhật}$$

- b) Ta có: $\angle MAE = \angle DAB$ (cùng phụ với $\angle BAE$)

$$\Rightarrow \angle MAE = \angle MNA$$

Lại có: $\angle AME$ chung

$$\Rightarrow \triangle MAE \sim \triangle MNA \text{ (g - g)}$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{ME} = \frac{MN}{MA}$$

$$\text{Mà: } MA = MC$$

$$\Rightarrow \frac{MC}{ME} = \frac{MN}{MC}$$

Do $\angle EMC$ chung

$$\Rightarrow \triangle MEC \sim \triangle MCN \text{ (c - g - c)}$$

$$\Rightarrow \angle ECM = \angle MNC$$

Lại có: $MN \parallel CD$

$$\Rightarrow MNC = DCN$$

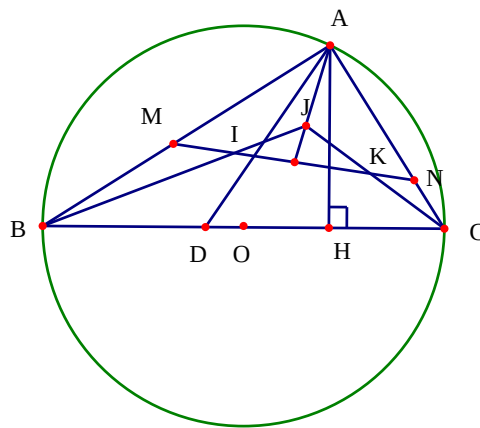
$$\Rightarrow ACE = DCN$$

Bài 2: Cho đường tròn (O) đường kính BC . Điểm A thuộc đường tròn (O) . Kẻ $AH \perp BC$, $(H \in BC)$. Gọi I, K theo thứ tự là tâm đường tròn nội tiếp của các $\triangle AHB$, $\triangle AHC$. Đường thẳng IK cắt AB, AC lần lượt tại M, N

a) Chứng minh $\triangle AMN$ vuông cân

b) Chứng minh $S_{AMN} \leq \frac{1}{2} S_{ABC}$

Lời giải



a) Ta có: $BAC = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \triangle AMN$ vuông tại A

Gọi J là giao điểm của BI và CK

$\Rightarrow AJ$ là tia phân giác của MAN

$\triangle ADC$ cân tại C , suy ra được $KJ \perp AI$

Chứng minh được J là trực tâm của $\triangle AIK$

Suy ra được $AJ \perp MN$

Chứng minh được $\triangle AMN$ vuông cân tại A

b) Chứng minh được $\triangle AMI \sim \triangle AHI$ ($MAI = IAH$; $AMI = AHI = 45^\circ$)

Suy ra được $AM = AH$

Chứng minh được $AH \leq OA$; $OA = \frac{1}{2} BC$

Tính được $S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2} AM \cdot AN = \frac{1}{2} AH^2$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC$ suy ra được $S_{\triangle AMN} \leq \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$

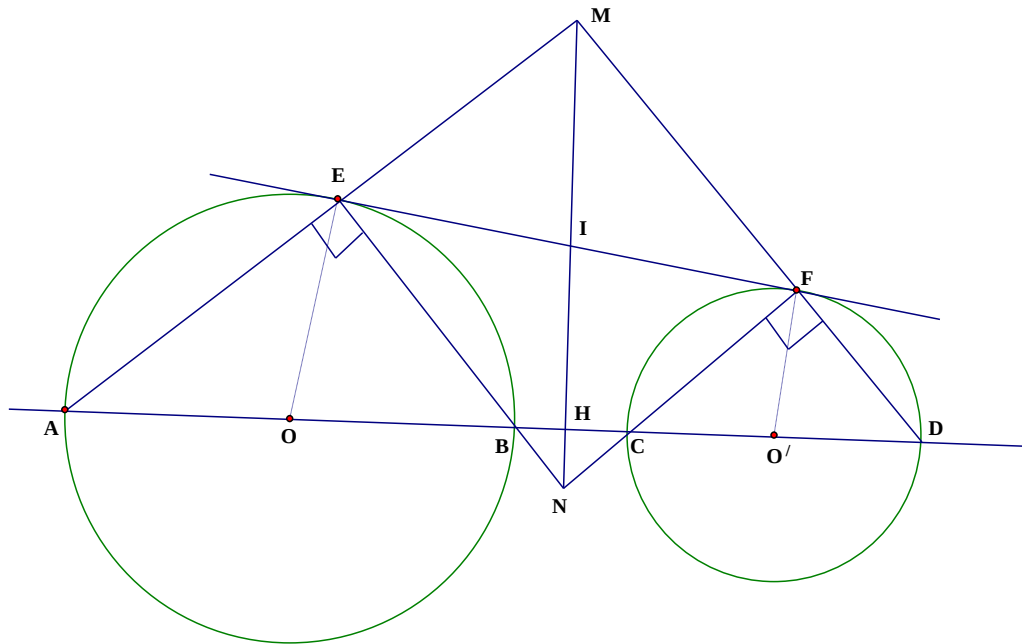
Bài 3: Cho hai đường tròn (O) và (O') ở ngoài nhau. Đường nối tâm OO' cắt đường tròn (O) và (O') tại các điểm A, B, C, D theo thứ tự trên đường thẳng. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài EF , $E \in (O)$ và $F \in (O')$. Gọi M là giao điểm của AE và DF ; N là giao điểm của EB và FC . Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $MENF$ là hình chữ nhật.

b) $MN \perp AD$.

c) $ME \cdot MA = MF \cdot MD$

Giải:



a) Ta có $\angle AEB = \angle CFD = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Vì EF là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O) và (O') , nên:

$OE \perp EF$ và $OF \perp EF \Rightarrow OE \parallel OF$

$\Rightarrow \angle EOB = \angle FO'D$ (góc đồng vị) $\Rightarrow \angle EAO = \angle FCO'$

Do đó $MA \parallel FN$, mà $EB \perp MA \Rightarrow EB \perp FN$

Hay $\angle ENF = 90^\circ$.

Tứ giác $MENF$ có $\angle E = \angle N = \angle F = 90^\circ$, nên $MENF$ là hình chữ nhật

b) Gọi I là giao điểm của MN và EF ; H là giao điểm của MN và AD

Vì $MENF$ là hình chữ nhật, nên $IFN = INF$

Mặt khác, trong đường tròn (O') : $\angle IFN = \angle FDC = \frac{1}{2}$ số đo $\widehat{FC}$

$\Rightarrow \angle FDC = \angle HNC$

Suy ra $\triangle FDC$ đồng dạng $\triangle HNC$ (g – g)

$\Rightarrow \angle NHC = \angle DFC = 90^\circ$ hay $MN \perp AD$

c) Do $MENF$ là hình chữ nhật, nên $ME = FN$

Trong đường tròn (O) có: $\widehat{FEN} = \widehat{EAB} = \frac{1}{2} \text{ số đo } \widehat{EB}$

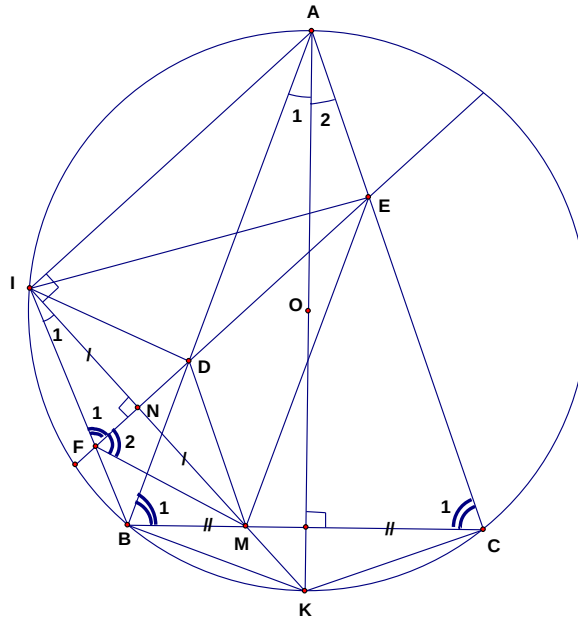
$$\Rightarrow \widehat{MFE} = \widehat{EAB}$$

Suy ra $\triangle MEF$ đồng dạng $\triangle MDA$ (g – g)

$$\Rightarrow \frac{ME}{MD} = \frac{MF}{MA}, \text{ hay } ME \cdot MA = MF \cdot MD$$

Bài 4: Cho tam giác nhọn ABC cân tại A và nội tiếp trong đường tròn (O) đường kính AK ; lấy điểm I thuộc cung nhỏ AB của đường tròn (O) (I khác A, B). Gọi M là giao điểm của IK và BC , đường trung trực của đoạn thẳng IM cắt AB và AC lần lượt tại D và E . Chứng minh tứ giác $ADME$ là hình bình hành.

Giải:



+ Gọi N là trung điểm của IM , F là giao điểm của DE và IB .

+ Ta có: $I_1 = A_1 = A_2 \Rightarrow F_1 = C_1 \Rightarrow F_2 = B_1$

Suy ra tứ giác $BFDM$ nội tiếp trong đường tròn.

$$\Rightarrow \widehat{DMB} = \widehat{F_1} = \widehat{C_1}$$

Suy ra $DM \parallel AC$ hay $DM \parallel AE$ (1)

$\widehat{AED} = \widehat{EDM} = \widehat{EDI}$. Suy ra $AEDI$ là hình thang cân.

(Hoặc tứ giác $BFDM$ và $BIAC$ nội tiếp nên $\widehat{FDM} = \widehat{IAE}$;

$\widehat{FDM} = \widehat{FDI} = \widehat{DIA} \Rightarrow \widehat{DIA} = \widehat{IAE}$. Suy ra $AEDI$ là hình thang cân.)

Suy ra $\widehat{ADE} = \widehat{IED} = \widehat{DEM}$ nên $AD \parallel EM$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $ADME$ là hình bình hành.

Cách khác:

+ Gọi N là trung điểm của IM , F là giao điểm của DE và IB .

+ Ta có: $I_1 = A_1 = A_2 \Rightarrow F_1 = C_1 \Rightarrow$ tứ giác $BFEC$ nội tiếp trong đường tròn.

Suy ra $\widehat{FBC} = \widehat{AED}$ (1).

+ Mặt khác $F_1 = C_1 \Rightarrow F_2 = B_1 \Rightarrow$ tứ giác $BFDM$ nội tiếp trong đường tròn.

Suy ra $\widehat{FBC} = \widehat{MDE}$ (2).

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Từ (1) và (2) suy ra $AED = MDE \Rightarrow AE \parallel DM$ (*)

Hơn nữa $AED = MDE \Rightarrow AED = IDE$

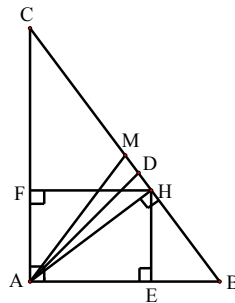
Mà $DE \parallel IA$. Do đó tứ giác $AEDI$ là hình thang cân.

Suy ra $ADE = IED$; mà $IED = DEM$ nên $ADE = DEM \Rightarrow AD \parallel EM$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra tứ giác $ADME$ là hình bình hành.

Bài 5: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$. Gọi AH là đường cao; E và F lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB và AC . Chứng minh tứ giác $AEHF$ là hình chữ nhật.

Lời giải



Xét tứ giác $AEHF$ có:

$EAF = 90^\circ$ (vì $\triangle ABC$ vuông tại A)

$AEH = 90^\circ$ (vì E là hình chiếu vuông góc của H trên AB)

$AFH = 90^\circ$ (vì F là hình chiếu vuông góc của H trên AC)

Vậy tứ giác $AEHF$ là hình chữ nhật (dấu hiệu nhận biết hình chữ nhật).

Bài 6: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Gọi C là một điểm nằm trên nửa đường tròn (O) (C khác A , C khác B). Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB , D là điểm đối xứng với A qua C , I là trung điểm của CH , J là trung điểm của DH .

a) Chứng minh $CIJ = CBH$

b) Chứng minh $\triangle CJH$ đồng dạng với $\triangle HIB$

c) Gọi E là giao điểm của HD và BI . Chứng minh $HE \cdot HD = HC^2$

d) Xác định vị trí của điểm C trên nửa đường tròn (O) để $AH + CH$ đạt giá trị lớn nhất.

Giải:

a. Vì $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn đường kính AB nên $AC \perp BC$

Suy ra $BC \perp CD$ (1)

+ Lập luận để chỉ ra $IJ \parallel CD$ (2)

+ Từ (1) và (2) suy ra $IJ \perp BC$

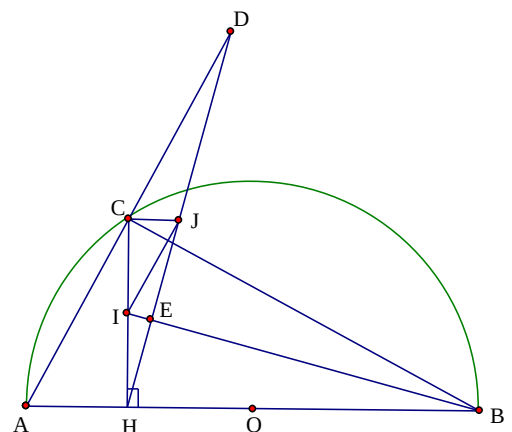
+ Suy ra $CIJ = CBH$ (cùng phụ với HCB) (3)

b. Trong $\triangle$ vuông CBH ta có: $\tan CBH = \frac{CH}{BH}$ (4)

+ Lập luận chứng minh được $CJ \parallel AB$

+ Mà $CH \perp AB$ (gt)

+ Suy ra $CJ \perp CH$



+) Trong tam giác vuông CIJ ta có $\tan CIJ = \frac{CJ}{CI} = \frac{CJ}{HI}$ $CI = HI$ (5)

+ Từ (3), (4), (5) $\Rightarrow \frac{CH}{HB} = \frac{CJ}{HI}$

+ Xét $\triangle CJH$ và $\triangle HIB$ có $\angle HCJ = \angle BHI = 90^\circ$ và $\frac{CH}{HB} = \frac{CJ}{HI}$ (cmt)

+ Nên $\triangle CJH$ đồng dạng với $\triangle HIB$

c. Lập luận để chứng minh được $\angle HEI = 90^\circ$

+ Chứng minh được $\triangle HEI$ đồng dạng với $\triangle HIC$

+ Suy ra $\frac{HE}{HC} = \frac{HI}{HJ}$

+ Suy ra $HE.HJ = HI.HC$

+ Mà $HJ = \frac{1}{2}HD$; $HI = \frac{1}{2}HC$

+ Suy ra $HE.HD = HC^2$

Bài 7: Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa nửa đường tròn vẽ tiếp tuyến Ax với nửa đường tròn, trên Ax lấy M sao cho $AM > R$. Từ M vẽ tiếp tuyến MC với nửa đường tròn. Đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt BC tại N .

Chứng minh $MNCO$ là hình thang cân

Giải:

-Ta có $\triangle ACB$ nội tiếp đường tròn (vì...)
mà AB là đường kính nên $\triangle ACB$ vuông tại $C \Rightarrow AC \perp BN$

Ta có $MA = MC$ (.....), $OA = OC$ (....)
nên MO là trung trực của AC

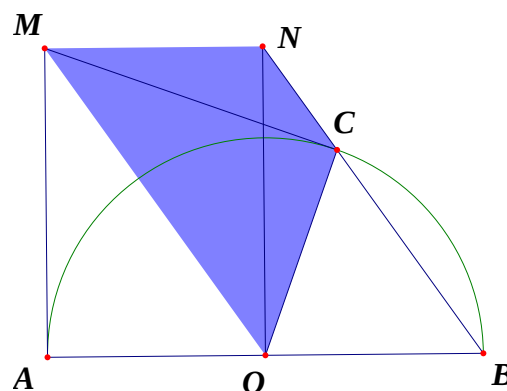
$\Rightarrow MO \perp AC \Rightarrow MO \parallel NB \Rightarrow \angle MOA = \angle NBO$

-Ta có $OA \perp MA$ (....) $\Rightarrow \angle MAO = \angle NOB = 90^\circ$;
xét $\triangle MAO$ và $\triangle NOB$ có

$\angle MAO = \angle NOB = 90^\circ$; $\angle MOA = \angle NBO$; $OA = OB = R$

$\Rightarrow \triangle MAO = \triangle NOB \Rightarrow MO = NB$

-Ta có $MO \parallel NB$; $MO = NB \Rightarrow MNBO$ là hình bình hành. Ta có $\triangle MAO = \triangle NOB$ (cm trên)
nên ta có $NO = MA$, mà $MA = MC$ (...) nên
 $NO = MC$ vậy $MNCO$ là hình thang cân



4. Chứng minh hệ thức hình học

A. Bài toán (giữ nguyên màu)

Bài 1: Cho hình thoi $ABCD$ có góc $\angle BAD = 50^\circ$, O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ O đến đường thẳng AB . Trên tia đối của tia BC lấy điểm M (điểm M không trùng với điểm B), trên tia đối của tia DC lấy điểm N sao cho đường thẳng HM song song với đường thẳng AN .

a) Chứng minh rằng: $MB.DN = BH.AD$

b) Tính số đo góc $\angle MON$

Bài 2: Cho $\triangle ABC$ có $\angle C - \angle B = 90^\circ$ và AH là đường cao của tam giác. Chứng minh rằng

$$AH^2 = BH.CH$$

Bài 3: Cho tam giác ABC có $\angle BAC = 2\angle CBA = 4\angle ACB$. Chứng minh $\frac{1}{AB} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{CA}$

Bài 4: Cho hình vuông ABCD, có độ dài cạnh bằng a. E là một điểm di chuyển trên CD (E khác C, D). Đường thẳng AE cắt đường thẳng BC tại F, đường thẳng vuông góc với AE tại A cắt đường thẳng CD tại K.

a. Chứng minh: $\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AF^2}$ không đổi

b. Chứng minh: $\cos \angle AKE = \sin \angle EKF \cdot \cos \angle EFK + \sin \angle EFK \cdot \cos \angle EKF$

c. Lấy điểm M là trung điểm đoạn AC. Trình bày cách dựng điểm N trên DM sao cho khoảng cách từ N đến AC bằng tổng khoảng cách từ N đến DC và AD.

Bài 5: Cho tam giác ABC có $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Ba đường cao tương ứng với ba cạnh BC,

AC, BC là h_a, h_b, h_c chứng minh rằng: $\frac{(a+b+c)^2}{h_a^2 + h_b^2 + h_c^2} \geq 4$

Bài 6: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng $BH \cdot BE + CH \cdot CF = BC^2$

b) Gọi K là điểm đối xứng với H qua BC. Chứng minh rằng $K \in (O)$.

Bài 7 : Cho tam giác ABC nhọn; các đường cao AK; BD; CE cắt nhau tại H.

a) Chứng minh: $\frac{KC}{KB} = \frac{AC^2 + CB^2 - BA^2}{CB^2 + BA^2 - AC^2}$

b) Giả sử: $HK = \frac{1}{3} AK$. Chứng minh rằng: $\tan B \cdot \tan C = 3$

c) Giả sử $S_{ABC} = 120 \text{ cm}^2$ và $\angle BAC = 60^\circ$. Hãy tính diện tích tam giác ADE?

Bài 8: Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O). Gọi E, F lần lượt là các chân đường cao kẻ từ

B, C của tam giác ABC. Đường tròn (I) đi qua E, F và tiếp xúc với BC tại D. Chứng minh

rằng: $\frac{DB^2}{DC^2} = \frac{BF \cdot BE}{CF \cdot CE}$.

Bài 9: Qua đỉnh A của hình vuông ABCD cạnh là a, vẽ một đường thẳng cắt cạnh BC ở M và cắt đường thẳng DC ở I.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{a^2}$.

Bài 10: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O;R). Gọi I là điểm bất kỳ nằm trong tam giác ABC (I không nằm trên cạnh của tam giác). Các tia AI, BI, CI lần lượt cắt BC, CA, AB tại M, N, P.

a) Chứng minh: $\frac{AI}{AM} + \frac{BI}{BN} + \frac{CI}{CP} = 2$.

b) Chứng minh: $\frac{1}{AM \cdot BN} + \frac{1}{BN \cdot CP} + \frac{1}{CP \cdot AM} \leq \frac{4}{3(R - OI)^2}$.

Bài 11:

Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. N là điểm tùy ý thuộc cạnh AB. Gọi E là giao điểm của CN và DA. Vẽ tia Cx vuông góc với CE và cắt AB tại F. Lấy M là trung điểm của EF.

a) Chứng minh: CM vuông góc với EF.

b) Chứng minh: NB.DE = a² và B, D, M thẳng hàng.

c) Tìm vị trí của N trên AB sao cho diện tích của tứ giác AEFC gấp 3 lần diện tích của hình vuông ABCD

Bài 12: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng BH.BE + CH.CF = BC²

b) Gọi K là điểm đối xứng với H qua BC. Chứng minh rằng K ∈ (O).

Bài 13: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O ; R). Gọi (I ; r) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC, M là tiếp điểm của AB với đường tròn (I); H là giao điểm của AI với đường tròn (O) (H khác A), HK là đường kính của đường tròn (O). Gọi a là độ dài đoạn OI. Chứng minh rằng:

a) Tam giác AMI và tam giác KCH đồng dạng

b) HB = HI

c) IA.IH = R² - a².

d) R² - 2Rr = a²

Bài 14: Cho tam giác ABC cân tại A, có góc A nhỏ hơn 90°. Từ B kẻ BM vuông góc với AC tại M (điểm M thuộc AC). Chứng minh $\frac{AM}{MC} + 1 = 2 \left(\frac{AB}{BC} \right)^2$

Bài 15: Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp (O). Gọi BD và CE là hai đường cao của tam giác ABC.

a) Chứng minh AD.AC=AE.AB

b) Tia AO cắt BC tại A_1 và cắt cung nhỏ BC tại A_2 . Tia BO cắt AC tại B_1 và cắt cung nhỏ AC tại B_2 . Tia CO cắt BA tại C_1 và cắt cung nhỏ AB tại C_2 . Chứng minh: $\frac{A_1A_2}{AA_1} + \frac{B_1B_2}{BB_1} + \frac{C_1C_2}{CC_1} = 1$.

Bài 16: Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC < BC$) nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi H là giao điểm của hai đường cao BD và CE của tam giác ABC. Gọi I là điểm đối xứng với A qua O và J là trung điểm của BC. Gọi K, M lần lượt là giao điểm của AI với ED và BD. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{DK^2} = \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{DM^2}$$

Bài 17: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$. Gọi AH là đường cao; E và F lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB và AC. Chứng minh rằng $AH \cdot BC = AB \cdot AC$.

Bài 18: Cho ΔABC có diện tích là S. Một đường thẳng xy chuyển động và luôn đi qua điểm A. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của B và C trên xy. Trong trường hợp BC cắt xy tại điểm G, hãy chứng minh rằng: $AG(BE + CF) = 2S$.

Bài 19: Cho tam giác nhọn ABC có $AC > AB$ nội tiếp đường tròn (O). Kẻ phân giác trong AI của tam giác ABC ($I \in BC$) cắt (O) ở E. Tại E và C kẻ hai tiếp tuyến với (O) cắt nhau ở F, AE cắt CF tại N, AB cắt CE tại M.

a) Chứng minh $\frac{1}{CN} + \frac{1}{CI} = \frac{1}{CF}$.

b) Gọi AD là trung tuyến của tam giác ABC, kẻ $DK \parallel AI$ ($K \in AC$).

Chứng minh $2AK = AC - AB$.

Bài 20: Cho đường tròn tâm O đường kính AB; E là một điểm bất kỳ thuộc đường kính AB (E khác A và B). Vẽ đường tròn (O') đường kính EB, qua trung điểm H của AE vẽ dây cung CD của đường tròn (O) và vuông góc với AE, BC cắt đường tròn (O') tại I. Chứng minh rằng:

a) $\Delta CHO = \Delta HIO'$.

b) $HA^2 + HB^2 + HC^2 + HD^2$ không đổi khi E chuyển động trên đường kính AB.

Bài 21: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O; R). Gọi I là điểm bất kỳ nằm trong tam giác ABC (I không nằm trên cạnh của tam giác). Các tia AI, BI, CI lần lượt cắt BC, CA, AB tại M, N, P.

a) Chứng minh: $\frac{AI}{AM} + \frac{BI}{BN} + \frac{CI}{CP} = 2$.

b) Chứng minh: $\frac{1}{AM \cdot BN} + \frac{1}{BN \cdot CP} + \frac{1}{CP \cdot AM} \leq \frac{4}{3(R - OI)^2}$.

Bài 22: Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; R') cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B. Từ một điểm C thay đổi trên tia đối của tia AB. Vẽ các tiếp tuyến CD; CE với đường tròn tâm O (D; E là các tiếp điểm và E nằm trong đường tròn tâm O'). Hai đường thẳng AD và AE cắt đường tròn tâm O' lần lượt tại M và N (M và N khác với điểm A). Đường thẳng DE cắt MN tại I. Chứng minh rằng: $MI \cdot BE = BI \cdot AE$

Bài 23: Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. M là một điểm di động trên cung nhỏ BC của đường tròn đó.

a) Chứng minh $MB + MC = MA$

b) Gọi H, I, K lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ M xuống AB, BC, CA. Gọi S, S' lần lượt là diện tích của tam giác ABC, MBC. Chứng minh rằng: Khi M di động ta luôn có đẳng thức: $MH + MI + MK = \frac{2\sqrt{3}(S + 2S')}{3R}$

Bài 24: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Giả sử các điểm B, C cố định và A di động trên đường tròn (O) sao cho $AB < AC$ và $AC < BC$. Đường trung trực của đoạn thẳng AB cắt AC và BC lần lượt tại P và Q . Đường trung trực của đoạn thẳng AC cắt AB và BC lần lượt tại M và N .

Chứng minh rằng: $OM.ON = R^2$.

Bài 25: Cho tam giác ABC cân tại A ($BAC > 90^\circ$) nội tiếp đường tròn (O) bán kính R . M là điểm nằm trên cạnh BC ($BM > CM$). Gọi D là giao điểm của AM và đường tròn (O) (D khác A), điểm H là trung điểm đoạn thẳng BC . Gọi E là điểm chính giữa cung lớn BC , ED cắt BC tại N . Chứng minh rằng $MA.MD = MB.MC$ và $BN.CM = BM.CN$.

Bài 26: Cho tam giác ABC vuông tại C có CD là đường cao. X là điểm thuộc đoạn CD , K là điểm thuộc đoạn AX sao cho $BK = BC$, T thuộc đoạn BX sao cho $AT = AC$, AT cắt BK tại M . Chứng minh rằng $MK = MT$.

Bài 27: Cho đường tròn tâm O , đường kính BC cố định và một điểm A chuyển động trên nửa đường tròn (A khác B và C). Hạ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa A dựng hai nửa đường tròn tâm P đường kính HB và tâm Q đường kính HC , chúng lần lượt cắt AB và AC tại E và F . Chứng minh rằng: $AE.AB = AF.AC$.

Bài 28: Cho đường tròn tâm O , đường kính BC cố định và một điểm A chuyển động trên nửa đường tròn (A khác B và C). Hạ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa A dựng hai nửa đường tròn tâm P đường kính HB và tâm Q đường kính

HC , chúng lần lượt cắt AB và AC tại E và F . Chứng minh tỷ số $\frac{AH^3}{BC.BE.CF}$ không đổi.

Bài 29: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . N là điểm tùy ý thuộc cạnh AB . Gọi E là giao điểm của CN và DA . Vẽ tia Cx vuông góc với CE và cắt AB tại F . Lấy M là trung điểm của EF .

Tìm vị trí của N trên AB sao cho diện tích của tứ giác $AEFC$ gấp 3 lần diện tích của hình vuông $ABCD$

B. Lời giải

Bài 1: Cho hình thoi $ABCD$ có góc $BAD = 50^\circ$, O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ O đến đường thẳng AB . Trên tia đối của tia BC lấy điểm M (điểm M không trùng với điểm B), trên tia đối của tia DC lấy điểm N sao cho đường thẳng HM song song với đường thẳng AN .

a) Chứng minh rằng: $MB.DN = BH.AD$

b) Tính số đo góc MON

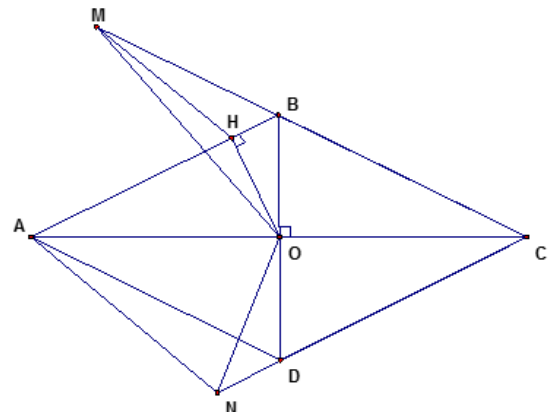
Lời giải

a) Ta có $MBH = ADN, MHB = AND$

$$\triangle MBH \sim \triangle ADN \Rightarrow \frac{MB}{AD} = \frac{BH}{DN}$$

$$\Rightarrow MB.DN = BH.AD \quad (1)$$

b) Ta có: $\triangle OHB \sim \triangle AOD$



$$\Rightarrow \frac{BH}{DO} = \frac{OB}{AD} \Rightarrow DO.OB = BH.AD \quad (2)$$

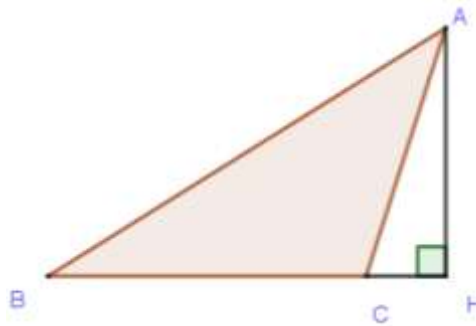
$$\text{Từ (1) và (2) ta có: } MB.DN = DO.OB \Rightarrow \frac{MB}{DO} = \frac{OB}{DN}$$

Ta lại có: $MBO = 180^\circ - CBD = 180^\circ - CDB = ODN$
 nên $\triangle MBO \sim \triangle ODN \Rightarrow OMB = NOD$.

$$\begin{aligned} \text{Từ đó suy ra: } MON &= 180^\circ - (MOB + NOD) = 180^\circ - (MOB + OMB) \\ &= 180^\circ - OBC = 115^\circ \end{aligned}$$

Bài 2: Cho $\triangle ABC$ có $ACB - B = 90^\circ$ và AH là đường cao của tam giác. Chứng minh rằng
 $AH^2 = BH.CH$

Lời giải



$$\text{Ta có: } ACB - B = 90^\circ \Rightarrow ACB = 90^\circ + B$$

$$ACB = HAC + AHC = HAC + 90^\circ$$

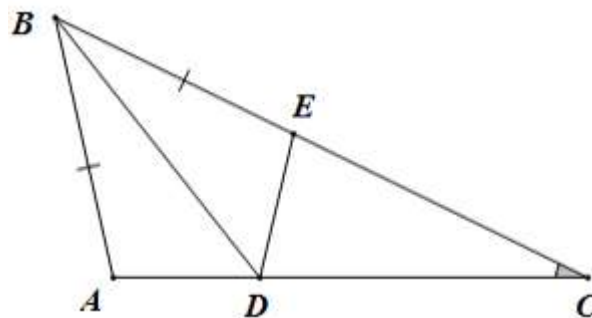
$$\Rightarrow B = HAC$$

$$\Rightarrow \triangle HBA \sim \triangle HAC \quad (\text{g - g})$$

$$\Rightarrow \frac{HB}{HA} = \frac{HA}{HC} \Rightarrow HA^2 = HB.HC$$

Bài 3: Cho tam giác ABC có $BAC = 2CBA = 4ACB$. Chứng minh $\frac{1}{AB} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{CA}$

Lời giải



$$\text{Đặt } C = \alpha \Rightarrow \begin{cases} \angle ABC = 2\alpha \\ \angle BAC = 4\alpha \end{cases}$$

Gọi BD là phân giác của góc ABC ($D \in AC$). E thuộc đoạn BC sao cho $BE = BA$

Ta có $\angle ABD = \angle EBD = \alpha$

$\Rightarrow \triangle BDC$ cân tại D

$\Rightarrow BD = DC$

$\triangle ABD = \triangle AED$ (c.g.c) $\angle BED = \angle BAC = 4\alpha$ (1)

Vì $\angle ABD = C = \alpha$

$\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle ACB$ (g - g)

$\Rightarrow \angle ADB = \angle ABC = 2\alpha$

$\Rightarrow \angle EDB = \angle ADB = 2\alpha$

$\Rightarrow \angle ADE = 4\alpha$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \angle BED = \angle ADE = 4\alpha$

$\Rightarrow \angle CED = \angle CDE = 180^\circ - 4\alpha$

Suy ra $\triangle CED$ cân tại C

Suy ra $CE = CD \Rightarrow BC - BE = BD \Rightarrow BD = BC - BA$ (3)

Vì $\triangle ABD \sim \triangle ACB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{BD}{CB} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow BD = \frac{CB \cdot AB}{AC}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra

$$BC - BA = \frac{CB \cdot AB}{AC} \Rightarrow \frac{BC - BA}{BC \cdot BA} = \frac{1}{AC} \Rightarrow \frac{1}{BA} - \frac{1}{BC} = \frac{1}{AC} \Rightarrow \frac{1}{AB} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{CA}$$

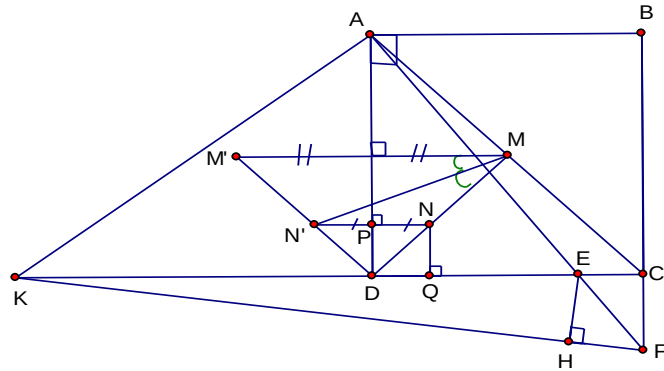
Bài 4: Cho hình vuông ABCD, có độ dài cạnh bằng a. E là một điểm di chuyển trên CD (E khác C, D). Đường thẳng AE cắt đường thẳng BC tại F, đường thẳng vuông góc với AE tại A cắt đường thẳng CD tại K.

a. Chứng minh: $\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AF^2}$ không đổi

b. Chứng minh: $\cos \angle AKE = \sin \angle EKF \cdot \cos \angle EFK + \sin \angle EFK \cdot \cos \angle EKF$

c. Lấy điểm M là trung điểm đoạn AC. Trình bày cách dựng điểm N trên DM sao cho khoảng cách từ N đến AC bằng tổng khoảng cách từ N đến DC và AD.

Lời giải



a) Học sinh c/m: $\triangle ABF = \triangle ADK$ (g.c.g) suy ra $AF = AK$

Trong tam giác vuông: KAE có AD là đường cao nên:

$$\frac{1}{AK^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AD^2} \text{ hay } \frac{1}{AF^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{a^2} \text{ (không đổi)}$$

b) HS c/m $S_{KEF} = \frac{1}{2} KE.EF.\sin AEK = \frac{1}{2} KE.EF.\cos AKE$

Mặt khác: $S_{KEF} = \frac{1}{2} EH.KF = \frac{1}{2} EH.(KH + HF)$. Suy ra:

$$KE.EF.\cos AKE = EH.(KH + HF) \Leftrightarrow \cos AKE = \frac{EH.KH + EH.HF}{KE.EF}$$

:

$$\Leftrightarrow \cos AKE = \frac{EH}{EF} \cdot \frac{KH}{EK} + \frac{EH}{KE} \cdot \frac{HF}{EF} = \sin EFK.\cos EKF + \sin EKF.\cos EFK$$

c) Giả sử đã dựng được điểm N thỏa mãn. $NP + NQ = MN$

Lấy N' đối xứng N; M' đối xứng M qua AD suy ra tam giác $NN'M$ cân tại N $\Rightarrow MN'$ là phân giác của $\angle DMM' \Rightarrow$ Cách dựng điểm N:

- Dựng M' đối xứng M qua AD
- Dựng phân giác $\angle DMM'$ cắt DM' tại N'
- Dựng điểm N đối xứng N' qua AD

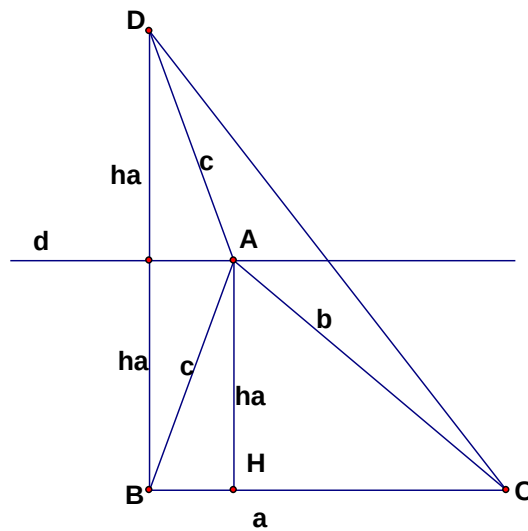
Chú ý: Học sinh có thể không trình bày phân tích mà trình bày được cách dựng vẫn cho điểm tối đa.

Bài 5: Cho tam giác ABC có $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Ba đường cao tương ứng với ba cạnh BC,

AC, BC là h_a, h_b, h_c chứng minh rằng: $\frac{(a+b+c)^2}{h_a^2 + h_b^2 + h_c^2} \geq 4$

Lời giải

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038



Qua A kẻ đường thẳng $d \parallel BC$ gọi D là đối xứng của B qua d thì $BD = 2h_a$, $AD = c$

Trong tam giác ACD ta có $DC \leq AD + AC = c + b \Rightarrow DC^2 \leq (b + c)^2$

dấu " $=$ ": xảy ra khi $\triangle ABC$ $\angle A = 60^\circ$

mà trong tam giác vuông DBC

$$DC^2 = BD^2 + BC^2 = 4h_a^2 + a^2 \Rightarrow 4h_a^2 \leq (b + c)^2 - a^2 = (b + c - a)(b + c + a), (1)$$

Tương tự $4h_b^2 \leq (a + c - b)(b + c + a), (2); 4h_c^2 \leq (a + b - c)(b + c + a), (3)$

Từ (1);(2);(3) ta có:

$$\begin{aligned} 4h_a^2 + 4h_b^2 + 4h_c^2 &\leq (a + b + c)(b + c - a + a + c - b + a + b - c) = (a + b + c)^2 \\ \Leftrightarrow \frac{(a + b + c)^2}{h_a^2 + h_b^2 + h_c^2} &\geq 4 \end{aligned}$$

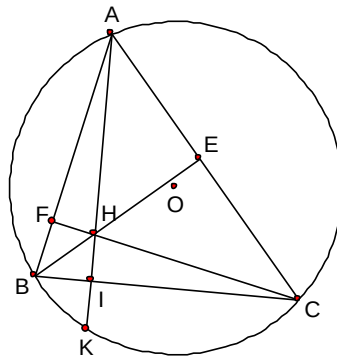
Dấu " $=$ " xảy ra khi tam giác ABC đều

Bài 6: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng $BH \cdot BE + CH \cdot CF = BC^2$

b) Gọi K là điểm đối xứng với H qua BC. Chứng minh rằng $K \in (O)$.

Lời giải



a) Gọi I là giao điểm của AH và BC $\Rightarrow AI \perp BC$

Ta có: $\triangle BHI \sim \triangle BCE$ (g, g)

$$\Rightarrow \frac{BH}{BC} = \frac{BI}{BE} \Rightarrow BH \cdot BE = BC \cdot BI \quad (1)$$

Ta có: $\triangle CHI \sim \triangle CBF$ (g, g)

$$\Rightarrow \frac{CH}{CB} = \frac{CI}{CF} \Rightarrow CH \cdot CF = BC \cdot CI \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $BH \cdot HE + CH \cdot CF = BC(BI + CI) = BC^2$

b) Gọi K là điểm đối xứng của H qua BC suy ra $HCB = KCB$

Mà $FAI = HCI$ (do tứ giác AFIC nội tiếp)

$$\Rightarrow FAI = BCK \text{ hay } BAK = BCK$$

$\Rightarrow$ tứ giác BACK nội tiếp đường tròn (O) $\Rightarrow K \in (O)$

Bài 7: Cho tam giác ABC nhọn; các đường cao AK; BD; CE cắt nhau tại H.

a) Chứng minh: $\frac{KC}{KB} = \frac{AC^2 + CB^2 - BA^2}{CB^2 + BA^2 - AC^2}$

b) Giả sử: $HK = \frac{1}{3} AK$. Chứng minh rằng: $\tan B \cdot \tan C = 3$

c) Giả sử $S_{ABC} = 120 \text{ cm}^2$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Hãy tính diện tích tam giác ADE?

Lời giải

a) Sử dụng định lý pytago:

$$\frac{AC^2 + CB^2 - BA^2}{CB^2 + BA^2 - AC^2} = \frac{AK^2 + KC^2 + (BK + CK)^2 - AB^2}{(BK + CK)^2 + BA^2 - (AK + KC)^2}$$

$$= \frac{2CK^2 + 2BK.CK}{2BK^2 + 2BK.CK} = \frac{2CK(CK + BK)}{2BK(BK + CK)} = \frac{CK}{BK}$$

b) Ta có: $\tan B = \frac{AK}{BK}$; $\tan C = \frac{AK}{CK}$

Nên: $\tan B \tan C = \frac{AK^2}{BK.CK}$ (1)

Mặt khác ta có: $B = HKC$ mà: $\tan HKC = \frac{KC}{KH}$

Nên $\tan B = \frac{KC}{KH}$ tương tự $\tan C = \frac{KB}{KH} \Rightarrow \tan B . \tan C = \frac{KB.KC}{KH^2}$ (2)

Từ (1)(2) $\Rightarrow (\tan B . \tan C)^2 = \left(\frac{AK}{KH}\right)^2$

Theo gt: $HK = \frac{1}{3} AK \Rightarrow \tan B . \tan C = 3$

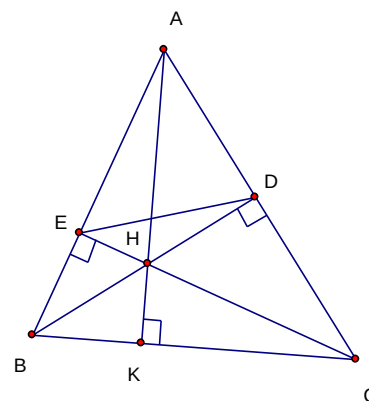
c) Ta chứng minh được: $\triangle ABC$ và $\triangle ADE$ đồng dạng vậy: $\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = \left(\frac{AB}{AD}\right)^2$ (3)

Mà $\widehat{BAC} = 60^\circ$ nên $\widehat{ABD} = 30^\circ \Rightarrow AB = 2AD$ (4)

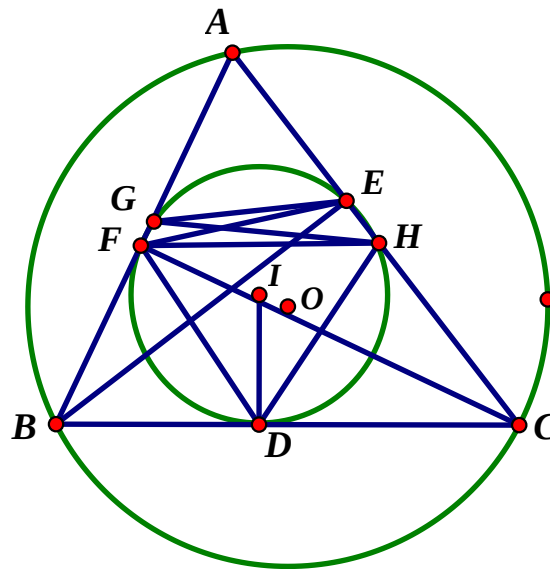
Từ (3)(4) ta có: $\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = 4 \Rightarrow S_{ADE} = 30(cm^2)$

Bài 8: Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O) . Gọi E, F lần lượt là các chân đường cao kẻ từ B, C của tam giác ABC . Đường tròn (I) đi qua E, F và tiếp xúc với BC tại D . Chứng minh

rằng: $\frac{DB^2}{DC^2} = \frac{BF.BE}{CF.CE}$.



Lời giải



Gọi $H = AC \cap (I)$, $G = AB \cap (I)$.

Trước hết ta chứng minh được $\triangle CDH \sim \triangle CED$ ($g - g$) do $\begin{cases} C \text{ chung} \\ \angle CDH = \angle CED \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{CD}{CH} = \frac{CE}{CD} \Rightarrow CD^2 = CH \cdot CE \quad (1).$$

$$\text{Chứng minh tương tự} \Rightarrow \triangle BDF \sim \triangle BGD \quad (g - g) \Rightarrow \frac{BD}{BF} = \frac{BG}{BD} \Rightarrow BD^2 = BG \cdot BF \quad (2).$$

Ta có $\angle GBE = \angle HCF$ (cùng phụ với $\angle A$) và $\angle BGE = \angle CHF$ (cùng bù với $\angle EHF$)

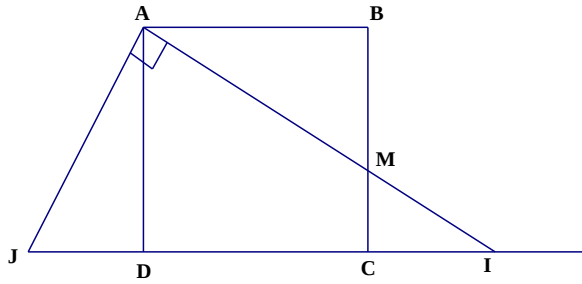
$$\Rightarrow \triangle BGE \sim \triangle CHF \quad (g - g) \Rightarrow \frac{BG}{CH} = \frac{BE}{CF} \quad (3). \text{ Từ (1), (2) và (3) } \Rightarrow$$

$$\frac{DB^2}{DC^2} = \frac{BG \cdot BF}{CH \cdot CE} = \frac{BG}{CH} \cdot \frac{BF}{CE} = \frac{BE}{CF} \cdot \frac{BF}{CE} = \frac{BF \cdot BE}{CF \cdot CE} \quad (\text{đpcm}).$$

Bài 9: Qua đỉnh A của hình vuông ABCD cạnh là a, vẽ một đường thẳng cắt cạnh BC ở M và cắt đường thẳng DC ở I.

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{a^2}.$$

Giải:



Vẽ $Ax \perp AI$ cắt đường thẳng CD tại J .

Ta có $\triangle AIJ$ vuông tại A , có AD là đường cao thuộc cạnh huyền IJ , nên:

$$\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AJ^2} + \frac{1}{AI^2} \quad (1) \text{ Xét hai tam giác vuông } ADJ \text{ và } ABM, \text{ ta có:}$$

$AB = AD = a$; $\angle DAJ = \angle BAM$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc)

$\Rightarrow \triangle ADJ = \triangle ABM$. Suy ra: $AJ = AM$

Thay vào (1) ta được: $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{a^2}$ (đpcm)

Bài 10: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Gọi I là điểm bất kỳ nằm trong tam giác ABC (I không nằm trên cạnh của tam giác). Các tia AI, BI, CI lần lượt cắt BC, CA, AB tại M, N, P .

a) Chứng minh: $\frac{AI}{AM} + \frac{BI}{BN} + \frac{CI}{CP} = 2$.

b) Chứng minh: $\frac{1}{AM \cdot BN} + \frac{1}{BN \cdot CP} + \frac{1}{CP \cdot AM} \leq \frac{4}{3(R - OI)^2}$.

Giải: a) Kẻ IK, AH vuông góc với BC tại K, H . Ta có:

$$\frac{IM}{AM} = \frac{IK}{AH} = \frac{S_{IBC}}{S_{ABC}}$$

Tương tự, ta có:

$$\frac{IN}{BN} = \frac{S_{IAC}}{S_{ABC}}, \quad \frac{IP}{CP} = \frac{S_{IAB}}{S_{ABC}}$$

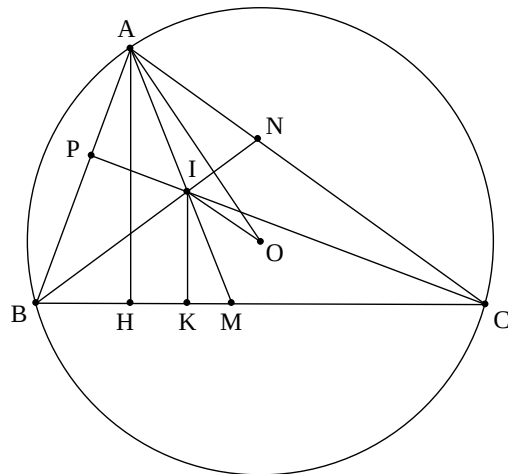
$$\text{Suy ra: } \frac{IM}{AM} + \frac{IN}{BN} + \frac{IP}{CP} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{AM - AI}{AM} + \frac{BN - BI}{BN} + \frac{CP - CI}{CP} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{AI}{AM} + \frac{BI}{BN} + \frac{CI}{CP} = 2 \quad (\text{đpcm})$$

$$\text{Ta có: } 2 = \frac{AI}{AM} + \frac{BI}{BN} + \frac{CI}{CP} \geq \frac{OA - OI}{AM} + \frac{OB - OI}{BN} + \frac{OC - OI}{CP}$$

b)



$$\Leftrightarrow 2 \geq (R - OI) \left(\frac{1}{AM} + \frac{1}{BN} + \frac{1}{CP} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{R - OI} \geq \frac{1}{AM} + \frac{1}{BN} + \frac{1}{CP} \quad (\text{vì } R > OI)$$

Chứng minh: $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$ (*) dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$

Áp dụng (*)

$$\begin{aligned} \frac{1}{AM \cdot BN} + \frac{1}{BN \cdot CP} + \frac{1}{CP \cdot AM} &\leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{AM} + \frac{1}{BN} + \frac{1}{CP} \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{3} \left(\frac{2}{R - OI} \right)^2 = \frac{4}{3(R - OI)^2} \quad (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

Khi tam giác ABC đều thì dấu đẳng thức xảy ra.

Bài 11:

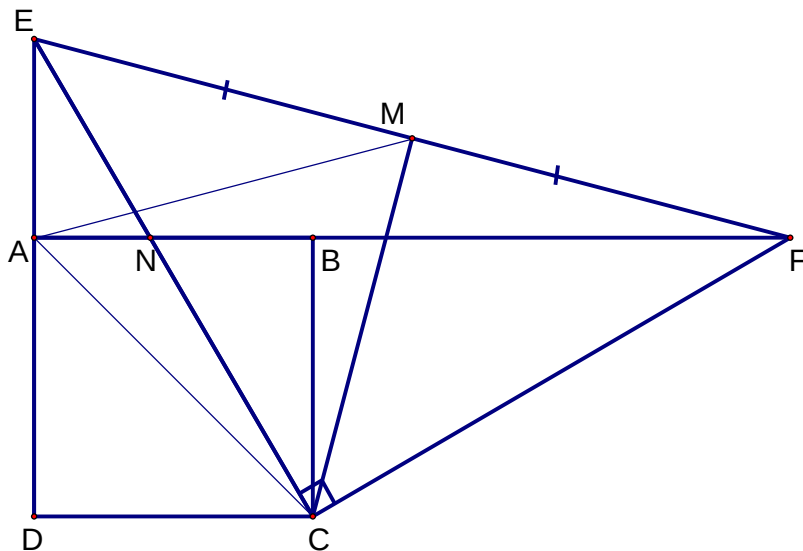
Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. N là điểm tùy ý thuộc cạnh AB. Gọi E là giao điểm của CN và DA. Vẽ tia Cx vuông góc với CE và cắt AB tại F. Lấy M là trung điểm của EF.

a) Chứng minh: CM vuông góc với EF.

b) Chứng minh: $NB \cdot DE = a^2$ và B, D, M thẳng hàng.

c) Tìm vị trí của N trên AB sao cho diện tích của tứ giác AEFC gấp 3 lần diện tích của hình vuông ABCD

Giải: a)



Ta có: $\angle ECD = \angle BCF$ (cùng phụ với $\angle ECB$)

Chứng minh được: $\triangle EDC = \triangle FBC$ (cạnh góc vuông – góc nhọn)

$\Rightarrow CE = CF$

$\Rightarrow \triangle ECF$ cân tại C

Mà CM là đường trung tuyến nên $CM \perp EF$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

b) Vì $\triangle EDC = \triangle FBC \Rightarrow ED = FB$

$\triangle NCF$ vuông tại C. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$$BC^2 = NB.BF \Rightarrow a^2 = NB.DE \text{ (đpcm)}$$

* $\triangle CEF$ vuông tại C có CM là đường trung tuyến nên $CM = \frac{EF}{2}$

$\triangle AEF$ vuông tại A có AM là đường trung tuyến nên $AM = \frac{EF}{2}$

$\Rightarrow CM = AM \Rightarrow M$ thuộc đường trung trực của AC.

Vì ABCD là hình vuông nên B, D thuộc đường trung trực của AC

$\Rightarrow B, D, M$ thẳng hàng vì cùng thuộc đường trung trực của AC (đpcm).

c) Đặt $DE = x$ ($x > 0$) $\Rightarrow BF = x$

$$S_{ACFE} = S_{ACF} + S_{AEF} = \frac{1}{2} AF \cdot (AE + CB)$$

$$= \frac{1}{2} (AB + BF) \cdot (AE + AD)$$

$$= \frac{1}{2} (a + x) \cdot DE$$

$$= \frac{1}{2} (a + x)x$$

$$S_{ACFE} = 3.S_{ABCD} \Leftrightarrow \frac{1}{2} (a + x)x = 3a^2 \Leftrightarrow 6a^2 - ax - x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2a - x)(3a + x) = 0$$

$$\text{Do } x > 0; a > 0 \Rightarrow 3a + x > 0 \Rightarrow 2a - x = 0 \Leftrightarrow x = 2a$$

$$\Leftrightarrow A \text{ là trung điểm của } DE \Leftrightarrow AE = a$$

$$\text{Vì } AE \parallel BC \text{ nên } \frac{AN}{NB} = \frac{AE}{BC} = 1$$

$\Rightarrow N$ là trung điểm của AB.

Vậy với N là trung điểm của AB thì $S_{ACFE} = 3.S_{ABCD}$

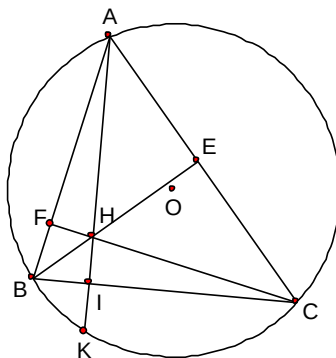
Bài 12: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng $BH.BE + CH.CF = BC^2$

b) Gọi K là điểm đối xứng với H qua BC. Chứng minh rằng $K \in (O)$.

Giải:a)

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038



Ta có: $\triangle BHI \cong \triangle BCE$ (g, g)

$$\Rightarrow \frac{BH}{BC} = \frac{BI}{BE} \Rightarrow BH \cdot BE = BC \cdot BI \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{CH}{CB} = \frac{CI}{CF} \Rightarrow CH.CF = BC.CI \quad (2)$$

b) Gọi K là điểm đối xứng của H qua BC suy ra $\widehat{HCB} = \widehat{KCB}$

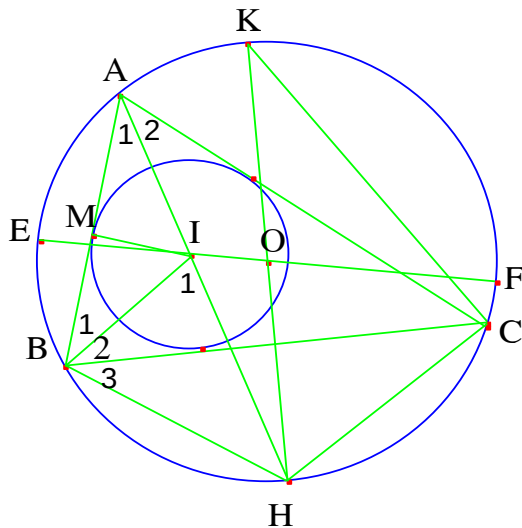
Mà $FAI = HCl$ (do tứ giác AFIC nội tiếp)

$$\Rightarrow \text{FAI} = \text{BCK} \text{ hay } \text{BAK} = \text{BCK}$$

$\Rightarrow$ tứ giác BACK nội tiếp đường tròn (O) $\Rightarrow K \in (O)$

Bài 13: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O ; R)$. Gọi $(I ; r)$ là đường tròn nội tiếp tam giác ABC, M là tiếp điểm của AB với đường tròn (I) ; H là giao điểm của AI với đường tròn (O) (H khác A), HK là đường kính của đường tròn (O) . Gọi a là độ dài đoạn OI. Chứng minh rằng:

- a) Tam giác AMI và tam giác KCH đồng dạng
b) $HB = HI$
c) $IA.IH = R^2 - a^2$.
d) $R^2 - 2Rr = a^2$



a) Chứng minh được các tam giác AMI và KCH là các tam giác vuông

- Chứng minh được $A_1 = A_2 = K$

- Suy ra được tam giác AMI và tam giác KCH đồng dạng (*đpcm*)

b) - Chứng minh được $\hat{I}_1 = A_1 + B_1$; $IBH = B_2 + B_3 = B_1 + A_1$

Do đó $\hat{I}_1 = IBH \Rightarrow HB = HI$ (*đpcm*)

c) Gọi EF là đường kính của (O) và đi qua I.

- Nêu được: $IA.IH = IE.IF$ (hệ thức trong đường tròn)

- Suy ra: $IA.IH = (R - a).(R + a) = R^2 - a^2$

d) Từ câu a), ta có: $\frac{IA}{HK} = \frac{IM}{HC} \Rightarrow IA.HC = HK.IM = 2Rr$ (*)

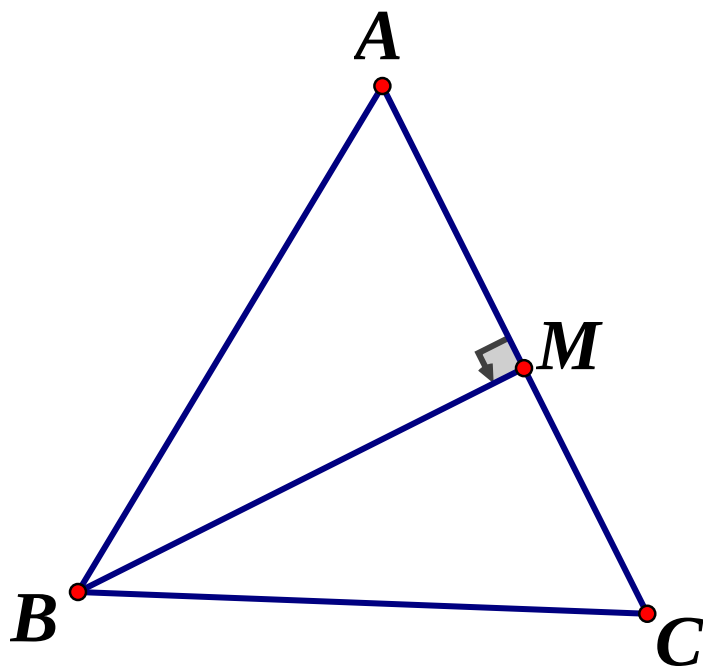
Mà $HB = HC$ (do $A_1 = A_2$) $\Rightarrow HC = HI$.

Kết hợp câu c), thay vào (*) ta có: $R^2 - a^2 = 2Rr \Rightarrow R^2 - 2Rr = a^2$ (*đpcm*)

Bài 14: Cho tam giác ABC cân tại A, có góc A nhỏ hơn 90° . Từ B kẻ BM vuông góc với AC tại M

(điểm M thuộc AC). Chứng minh $\frac{AM}{MC} + 1 = 2 \left(\frac{AB}{BC} \right)^2$

Lời giải



$\triangle ABC$ cân tại A nên $AB = AC$

$$\text{Ta có } \frac{AM}{MC} + 1 = 2 \cdot \left(\frac{AB}{BC} \right)^2 \Leftrightarrow \frac{AM + MC}{MC} = 2 \cdot \frac{AC^2}{BC^2} \Leftrightarrow \frac{AC}{MC} = 2 \cdot \frac{AC^2}{BC^2} \Leftrightarrow BC^2 = 2 \cdot AC \cdot MC$$

Ta cần chứng minh: $BC^2 = 2AC \cdot MC$

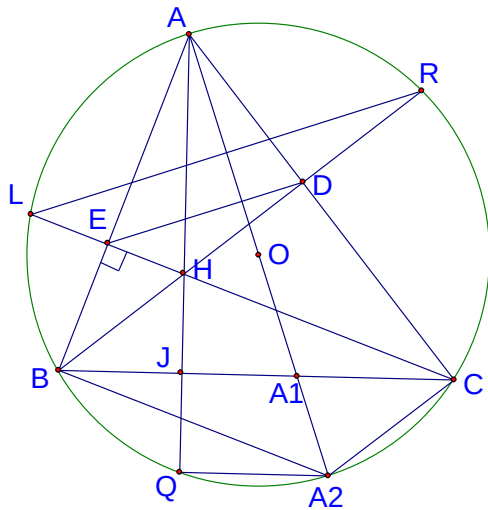
$$\begin{aligned} \text{Thật vậy, } BC^2 &= BM^2 + MC^2 = AB^2 - AM^2 + (AC - AM)^2 \\ &= AC^2 - AM^2 + AC^2 - 2AC \cdot AM + AM^2 \\ &= 2AC^2 - 2AC \cdot AM = 2AC \cdot (AC - AM) = 2AC \cdot MC \end{aligned}$$

Bài 15: Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn nội tiếp (O). Gọi BD và CE là hai đường cao của tam giác ABC.

a) Chứng minh $AD \cdot AC = AE \cdot AB$

b) Tia AO cắt BC tại A_1 và cắt cung nhỏ BC tại A_2 . Tia BO cắt AC tại B_1 và cắt cung nhỏ AC tại B_2 . Tia CO cắt BA tại C_1 và cắt cung nhỏ AB tại C_2 . Chứng minh: $\frac{A_1A_2}{AA_1} + \frac{B_1B_2}{BB_1} + \frac{C_1C_2}{CC_1} = 1$.

Lời giải



a) Chứng minh được tam giác ABD đồng dạng với tam giác ACE

Chứng minh được $AD.AC = AE.AB$.

b) * Gọi H là trực tâm của ΔABC .

Tia AH cắt BC tại J và cắt cung BC tại Q. Chứng minh được: $\frac{A_1A_2}{A_1A_2} = \frac{JQ}{JA}$

* Chứng minh được: $\frac{JH}{JA} = \frac{JQ}{JA} = \frac{S_{BHC}}{S_{BAC}}$

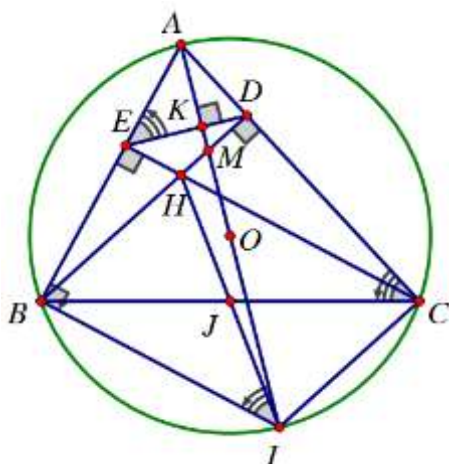
* Tương tự chứng minh được: $\frac{B_1B_2}{BB_1} = \frac{S_{CHA}}{S_{BAC}}, \frac{C_1C_2}{CC_1} = \frac{S_{BHA}}{S_{BAC}}$

* ΔABC nhọn nên điểm H nằm trong tam giác. Suy ra $S_{BHC} + S_{BHA} + S_{AHC} = S_{BAC}$

Từ đó $\frac{A_1A_2}{AA_1} + \frac{B_1B_2}{BB_1} + \frac{C_1C_2}{CC_1} = \frac{S_{BHC} + S_{BHA} + S_{CHA}}{S_{ABC}} = \frac{S_{BAC}}{S_{ABC}} = 1$.

Bài 16:

Lời giải



Ta có $\angle ACB = \angle AIB = \frac{1}{2} \angle AOB$

$\angle ACB = \angle DEA$ cùng bù với góc $\angle DEB$ của tứ giác nội tiếp BCDE

$\angle BAI + \angle AIB = 90^\circ$ vì ΔABI vuông tại B

Suy ra $\angle BAI + \angle AED = 90^\circ$, hay $\angle EAK + \angle AEK = 90^\circ$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

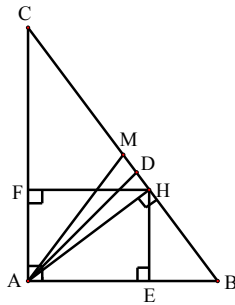
Suy ra $\triangle AEK$ vuông tại K

Xét $\triangle ADM$ vuông tại D (suy từ giả thiết), $DK \perp AM$ (suy từ chứng minh trên).

$$\text{Nhu vậy } \frac{1}{DK^2} = \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{DM^2}$$

Bài 17: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$. Gọi AH là đường cao; E và F lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB và AC. Chứng minh rằng $AH \cdot BC = AB \cdot AC$.

Lời giải



Xét tam giác ABC và tam giác HBA có:

ABC chung

$$\angle BAC = \angle AHB = 90^\circ$$

Do đó $\triangle ABC \sim \triangle HBA$ (g-g)

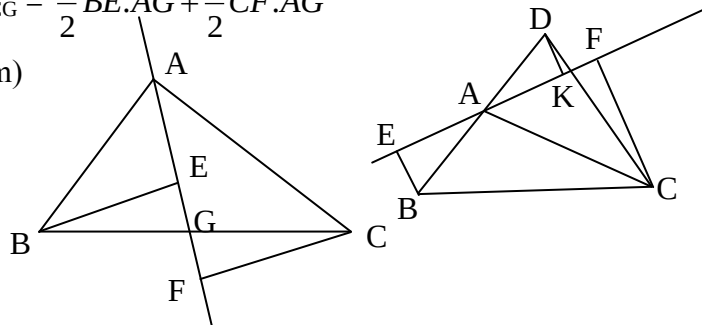
$$\Rightarrow \frac{AC}{AH} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow AH \cdot BC = AB \cdot AC \text{ (đpcm).}$$

Bài 18: Cho $\triangle ABC$ có diện tích là S. Một đường thẳng xy chuyển động và luôn đi qua điểm A. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của B và C trên xy. Trong trường hợp BC cắt xy tại điểm G, hãy chứng minh rằng $AG(BE + CF) = 2S$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } S_{ABC} = S = S_{ABG} + S_{ACG} = \frac{1}{2} BE \cdot AG + \frac{1}{2} CF \cdot AG$$

$$\Leftrightarrow 2S = AG(BE + CF) \text{ (đpcm)}$$



Bài 19: Cho tam giác nhọn ABC có $AC > AB$ nội tiếp đường tròn (O). Kẻ phân giác trong AI của tam giác ABC ($I \in BC$) cắt (O) ở E. Tại E và C kẻ hai tiếp tuyến với (O) cắt nhau ở F, AE cắt CF tại N, AB cắt CE tại M.

a) Chứng minh $\frac{1}{CN} + \frac{1}{CI} = \frac{1}{CF}$.

b) Gọi AD là trung tuyến của tam giác ABC, kẻ $DK \parallel AI$ ($K \in AC$). Chứng minh $2AK = AC - AB$.

Lời giải

a) Do hai tứ giác $AMNC$ và $ABEC$ nội tiếp, nên ta có các góc trong bằng nhau:

$$A_1 = C_1; A_1 = C_2; A_2 = M_2$$

Suy ra : $BC \parallel MN \parallel EF$, $\triangle CMN$ cân tại N

Xét tam giác CIN có CE là phân giác và $EF \parallel IC$ nên ta có các tỉ số

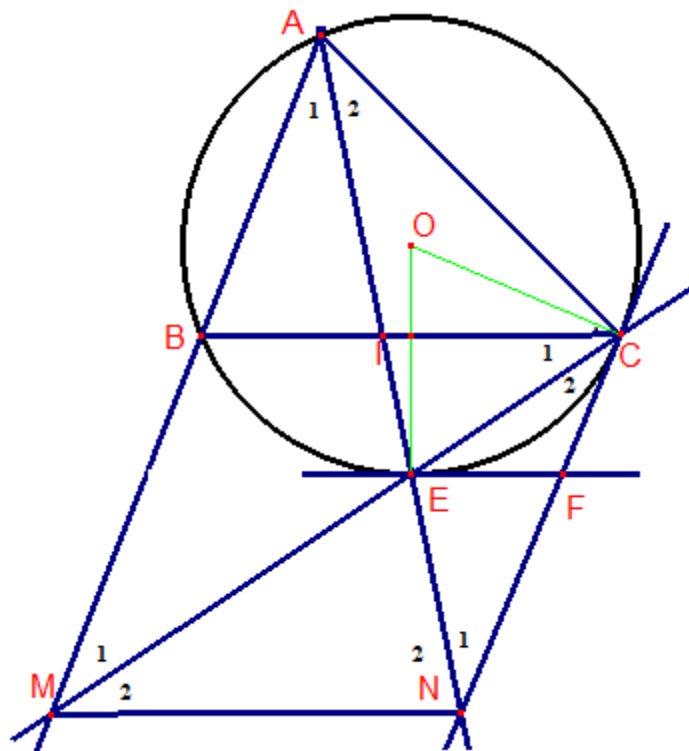
$$\frac{EN}{EI} = \frac{CN}{CI}; \frac{EN}{EI} = \frac{FN}{FC}$$

$$\Rightarrow \frac{CN}{CI} = \frac{FN}{FC}$$

$$\Rightarrow \frac{CN}{CI} = \frac{CN - CF}{FC} \Rightarrow \frac{CN}{CI} = \frac{CN}{FC} - 1$$

Chuyển vế : $\frac{CN}{CI} + 1 = \frac{CN}{FC}$, chia 2 vế cho

CN ta có điều phải chứng minh



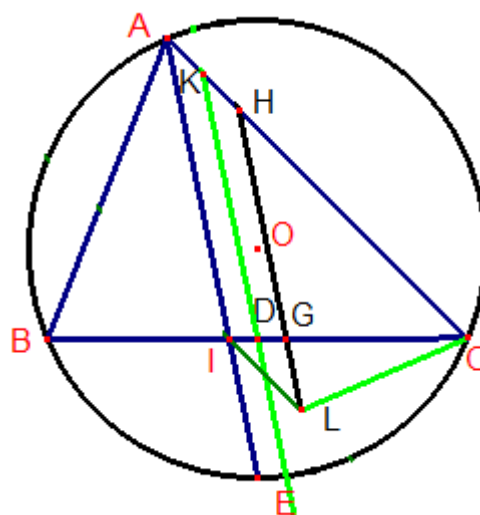
b) Gọi H thuộc AC sao cho K là trung điểm của AH , Kẻ $HG \parallel AI$ với G thuộc BC , trên HG lấy điểm L sao cho $CG = CL$ ($\triangle CLG$ cân)

Từ $AI \parallel DK \parallel HG$ và K là trung điểm của AH nên $DI = DG$, theo giả thiết $DB = DC$ nên $BI = GC$ vậy $BI = CL$

$AI \parallel HL$ nên $BAI = IAC = LHC$, và

$$BIA = EIC = LGC = HLC$$

(so le và đồng vị)



Xét hai tam giác AIB và HLC có hai góc bằng nhau nên góc còn lại bằng nhau, có 1 cạnh bằng nhau $BI = CL$ nên $\triangle AIB = \triangle HLC$ g.c.g

Vậy $AB = HC$

Mặt khác $HC = AC - AH = AC - 2AK$

Nên $AB = AC - 2AK \Rightarrow 2AK = AC - AB$ (đpcm).

Bài 20: Cho đường tròn tâm O đường kính AB ; E là một điểm bất kì thuộc đường kính AB (E khác A và B). Vẽ đường tròn (O') đường kính EB , qua trung điểm H của AE vẽ dây cung CD của đường tròn (O) và vuông góc với AE , BC cắt đường tròn (O') tại I . Chứng minh rằng:

a) $\triangle CHO = \triangle HIO'$.

b) $HA^2 + HB^2 + HC^2 + HD^2$ không đổi khi E chuyển động trên đường kính AB .

Lời giải

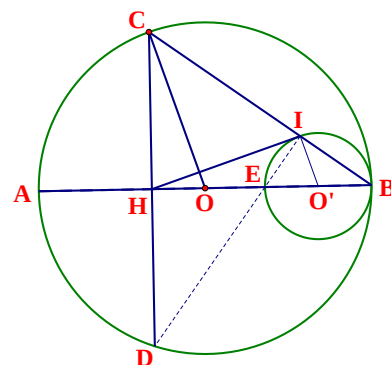
a) Xét 2 tam giác vuông HCO và IHO' có HC = HI (vì cùng = HD) (1)

Ta có $OC = R_{(O)}$

$$HO' = HE + EO' = \frac{1}{2} AE + \frac{1}{2} EB = \frac{1}{2} .2R_{(O)} = R_{(O)}$$

$$\Rightarrow \text{OC} = \text{HO}' \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta HCO = \Delta IHO'$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)



b) Ta có: $HA^2 + HB^2 = AC^2$; $HC^2 + HD^2 = BD^2$

Mà $BD = BC$ (do AB là đường trung trực của CD)

$$N_{\text{ên}} \text{ HA}^2 + \text{HB}^2 + \text{HC}^2 + \text{HD}^2 = \text{AC}^2 + \text{BC}^2$$

Mặt khác: ΔACB nội tiếp đường tròn đường kính $AB \Rightarrow \Delta ACB$ vuông tại C

$$\Rightarrow AC^2 + BC^2 = AB^2 = 4R^2$$

Vậy, tổng $HA^2 + HB^2 + HC^2 + HD^2 = 4R^2$ không đổi khi E chuyển động trên đường kính AB.

Bài 21. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Gọi I là điểm bất kỳ nằm trong tam giác ABC (I không nằm trên cạnh của tam giác). Các tia AI, BI, CI lần lượt cắt BC, CA, AB tại M, N, P.

a) Chứng minh: $\frac{AI}{AM} + \frac{BI}{BN} + \frac{CI}{CP} = 2$.

b) Chứng minh: $\frac{1}{AM \cdot BN} + \frac{1}{BN \cdot CP} + \frac{1}{CP \cdot AM} \leq \frac{4}{3(R - OI)^2}.$

Lời giải

a) Kẻ IK , AH vuông góc với BC tại K , H . Ta có:

$$\frac{IM}{AM} = \frac{IK}{AH} = \frac{S_{IBC}}{S_{ABC}}$$

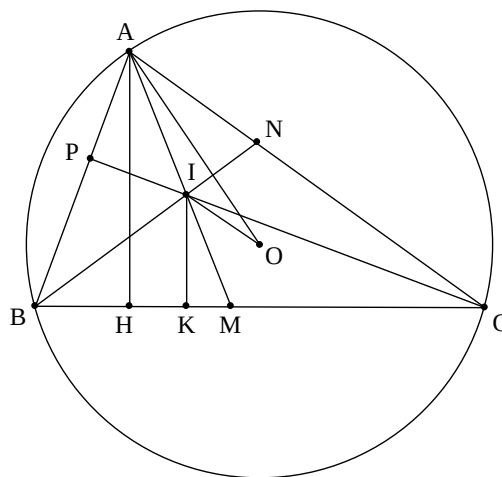
Tương tự, ta có:

$$\frac{\text{IN}}{\text{BN}} = \frac{S_{\text{IAC}}}{S_{\text{ABC}}}, \quad \frac{\text{IP}}{\text{CP}} = \frac{S_{\text{IAB}}}{S_{\text{ABC}}}$$

Suy ra: $\frac{IM}{AM} + \frac{IN}{BN} + \frac{IP}{CP} = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{AM - AI}{AM} + \frac{BN - BI}{BN} + \frac{CP - CI}{CP} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{AI}{AM} + \frac{BI}{BN} + \frac{CI}{CP} = 2 \quad (\text{đpcm})$$



$$\text{b) Ta có: } 2 = \frac{AI}{AM} + \frac{BI}{BN} + \frac{CI}{CP} \geq \frac{OA - OI}{AM} + \frac{OB - OI}{BN} + \frac{OC - OI}{CP}$$

$$\Leftrightarrow 2 \geq (R - OI) \left(\frac{1}{AM} + \frac{1}{BN} + \frac{1}{CP} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{R-OI} \geq \frac{1}{AM} + \frac{1}{BN} + \frac{1}{CP} \quad (\text{vì } R > OI)$$

Bài 22: Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B. Từ một điểm C thay đổi trên tia đối của tia AB. Vẽ các tiếp tuyến CD; CE với đường tròn tâm O (D; E là các tiếp điểm và E nằm trong đường tròn tâm O'). Hai đường thẳng AD và AE

cắt đường tròn tâm O' lần lượt tại M và N (M và N khác với điểm A). Đường thẳng DE cắt MN tại I . Chứng minh rằng:

a) $MI \cdot BE = BI \cdot AE$

Giải

Ta có: $\angle BDE = \angle BAE$ (cùng chắn cung BE của đường tròn tâm O)

$\angle BAE = \angle BMN$ (cùng chắn cung BN của đường tròn tâm O')

$$\Rightarrow \angle BDE = \angle BMN$$

hay $\angle BDI = \angle BMN \Rightarrow BDMI$ là tứ giác nội tiếp

$$\Rightarrow \angle MDI = \angle MBI \text{ (cùng chắn cung } MI)$$

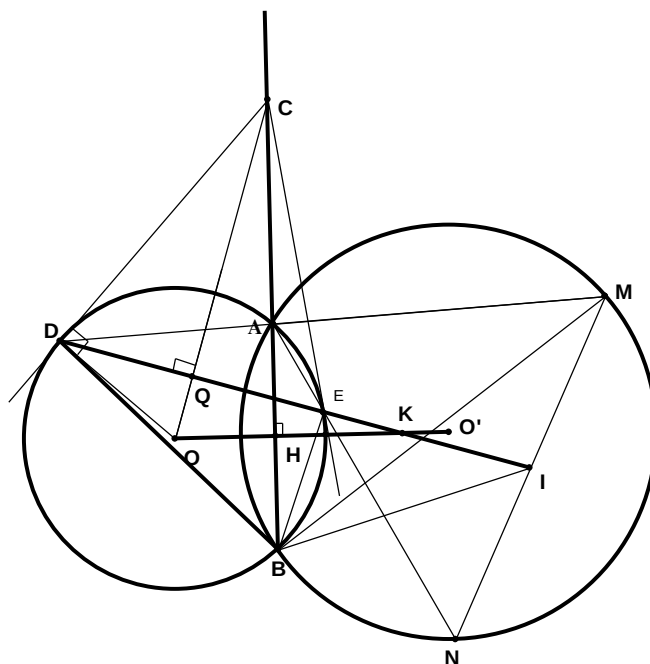
mà $\angle MDI = \angle ABE$ (cùng chắn cung AE của đường tròn tâm O)

$$\Rightarrow \angle ABE = \angle MBI$$

mặt khác $\angle BMI = \angle BAE$ (chứng minh trên)

$$\Rightarrow \triangle MBI \sim \triangle ABE \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{MI}{AE} = \frac{BI}{BE} \Leftrightarrow MI \cdot BE = BI \cdot AE$$



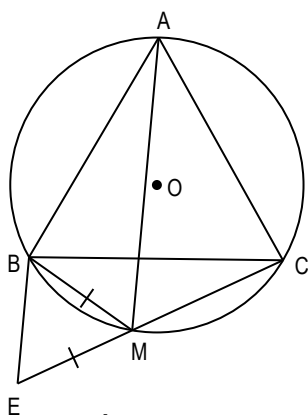
Bài 23: Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R . M là một điểm di động trên cung nhỏ BC của đường tròn đó.

a. Chứng minh $MB + MC = MA$

b. Gọi H, I, K lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ M xuống AB, BC, CA . Gọi S, S' lần lượt là diện tích của tam giác ABC, MBC . Chứng minh rằng: Khi M di động ta luôn có đẳng thức: $MH + MI + MK = \frac{2\sqrt{3}(S + 2S')}{3R}$

Giải:

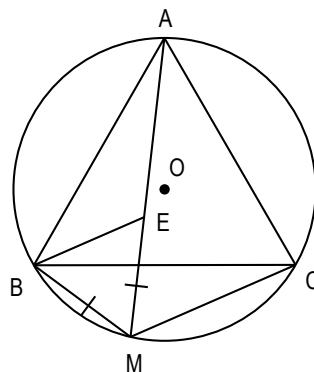
a.



Cách 1: Trên tia đối của tia MC lấy điểm E sao cho $ME = MB$

Ta có: $\triangle BEM$ là tam giác đều $\Rightarrow BE = BM = EM$

$$\triangle BMA = \triangle BEC \Rightarrow MA = EC$$



Cách 2:

Trên AM lấy điểm E sao cho $ME = MB$

Ta có: $\triangle BEM$ là tam giác đều

$$\Rightarrow BE = BM = EM$$

$$\triangle MBC = \triangle EBA \text{ (c.g.c)} \Rightarrow MC = AE$$

Do đó: $MB + MC = MA$

Do đó: $MB + MC = MA$

b. Kẻ AN vuông góc với BC tại N

Vì $\triangle ABC$ là tam giác đều nên O là trọng tâm của tam giác

$\Rightarrow A, O, N$ thẳng hàng $\Rightarrow AN = \frac{3}{2}R$

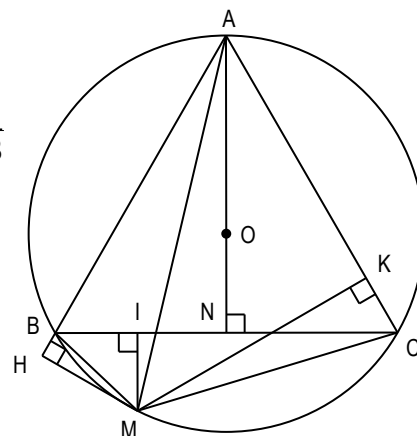
Ta có: $AN = AB \cdot \sin \angle ABN \Rightarrow AB = \frac{AN}{\sin \angle ABN} = \frac{\frac{3}{2}R}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = R\sqrt{3}$

Ta có: $\frac{1}{2}MH \cdot AB = S_{ABM} \Leftrightarrow MH = \frac{2S_{ABM}}{AB} = \frac{2S_{ABM}}{R\sqrt{3}}$

$\frac{1}{2}MK \cdot AC = S_{ACM} \Leftrightarrow MK = \frac{2S_{ACM}}{AC} = \frac{2S_{ACM}}{R\sqrt{3}}$

$\frac{1}{2}MI \cdot BC = S_{BCM} \Leftrightarrow MI = \frac{2S_{BCM}}{BC} = \frac{2S_{BCM}}{R\sqrt{3}} = \frac{2S'}{R\sqrt{3}}$

Do đó: $MH + MK + MI = \frac{2S'}{R\sqrt{3}} + \frac{2}{R\sqrt{3}}(S_{ABM} + S_{ACM}) = \frac{2S'}{R\sqrt{3}} + \frac{2}{R\sqrt{3}} \cdot S_{ABMC}$
 $= \frac{2S'}{R\sqrt{3}} + \frac{2}{R\sqrt{3}} \cdot (S + S') = \frac{2\sqrt{3}(S + 2S')}{3R}$



Bài 24: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Giả sử các điểm B, C cố định và A di động trên đường tròn (O) sao cho $AB < AC$ và $AC < BC$. Đường trung trực của đoạn thẳng AB cắt AC và BC lần lượt tại P và Q . Đường trung trực của đoạn thẳng AC cắt AB và BC lần lượt tại M và N .

Chứng minh rằng: $OM \cdot ON = R^2$.

Giải:

Xét $\triangle OBM$ và $\triangle ONB$, ta có:

$\angle BOM$: chung

Ta có $\angle OMB = 90^\circ - A$

Và $\angle OBN = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BOC) = 90^\circ - A$

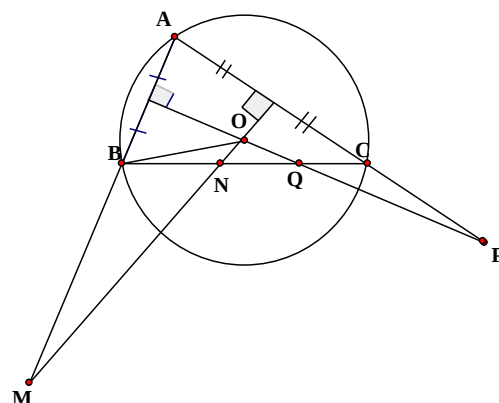
Nên $\angle OMB = \angle OBN$

Vậy $\triangle OBM \sim \triangle ONB$ (g.g).

$\Rightarrow \frac{OM}{OB} = \frac{OB}{ON}$

$\Rightarrow ON \cdot OM = OB^2 = R^2$

$\Rightarrow OM \cdot ON = R^2$.



Bài 25: Cho tam giác ABC cân tại A ($\angle BAC > 90^\circ$) nội tiếp đường tròn (O) bán kính R . M là điểm nằm trên cạnh BC ($BM > CM$). Gọi D là giao điểm của AM và đường tròn (O) (D khác A), điểm H là trung điểm đoạn thẳng BC . Gọi E là điểm chính giữa cung lớn BC , ED cắt BC tại N . Chứng minh rằng $MA \cdot MD = MB \cdot MC$ và $BN \cdot CM = BM \cdot CN$.

Ta có $\triangle MAB \sim \triangle MCD$ (g.g)

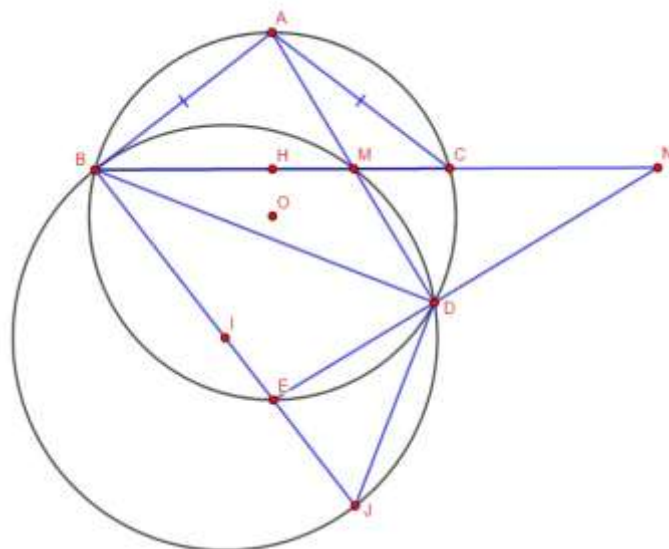
$$\Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MB}{MD} \Rightarrow MA \cdot MD = MB \cdot MC$$

(đpcm)

+) Theo gt A là điểm chính giữa cung nhỏ BC $\Rightarrow DA$ là tia phân giác BDC của $\triangle BDC$ (1)

Mặt khác, E là điểm chính giữa cung lớn BC $\Rightarrow AE$ là đường kính của (O)

$$\Rightarrow \angle ADE = 90^\circ \Rightarrow DA \perp DN \quad (2)$$



Từ (1) và (2) $\Rightarrow DN$ là tia phân giác ngoài BDC của $\triangle BDC$

Do đó, theo tính chất của tia phân giác trong và tia phân giác ngoài của tam giác ta có:

$$\frac{BM}{CM} = \frac{BD}{CD} = \frac{BN}{CN} \Rightarrow BM \cdot CN = BN \cdot CM \quad (\text{đpcm})$$

Bài 26: Cho tam giác ABC vuông tại C có CD là đường cao. X là điểm thuộc đoạn CD, K là điểm thuộc đoạn AX sao cho $BK = BC$, T thuộc đoạn BX sao cho $AT = AC$, AT cắt BK tại M. Chứng minh rằng $MK = MT$.

Giải:

Vẽ đường tròn A; AC, B; BC và đường tròn (I) ngoại tiếp $\triangle ABC$

Kẻ AX cắt (I) tại Y, BX cắt (I) tại Z, AZ cắt BY tại P

Ta có $\angle AYB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (I)) $\Rightarrow AY \perp BP$

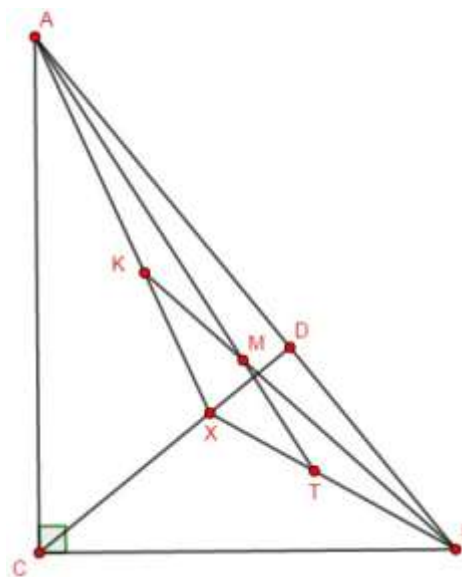
$\angle BZA = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (I)) $\Rightarrow BZ \perp AP$

$\Rightarrow X$ là trực tâm của $\triangle ABP$

Ta thấy $\triangle ABC \sim \triangle ACD$

$$\Rightarrow AC^2 = AD \cdot AB = AT^2 \Rightarrow \angle ATD = \angle ABT$$

Tương tự, ta có $\angle BKD = \angle BAK$



Ta có $\angle APD = \angle ABZ = \angle ATZ \Rightarrow$ tứ giác ADTP là tứ giác nội tiếp

$$\Rightarrow AT \perp PT \quad (1)$$

Tương tự, ta có $BK \perp PK \quad (2)$

$$\Rightarrow PK = PT \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3), suy ra $\triangle MKP = \triangle MTP$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$$\Rightarrow MK = MT \quad (\text{đpcm})$$

Bài 27: Cho đường tròn tâm O, đường kính BC cố định và một điểm A chuyển động trên nửa đường tròn (A khác B và C). Hạ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Trên nửa mặt

phẳng bờ BC chứa A dựng hai nửa đường tròn tâm P đường kính HB và tâm Q đường kính HC, chúng lần lượt cắt AB và AC tại E và F. Chứng minh rằng: $AE \cdot AB = AF \cdot AC$.

Giải:

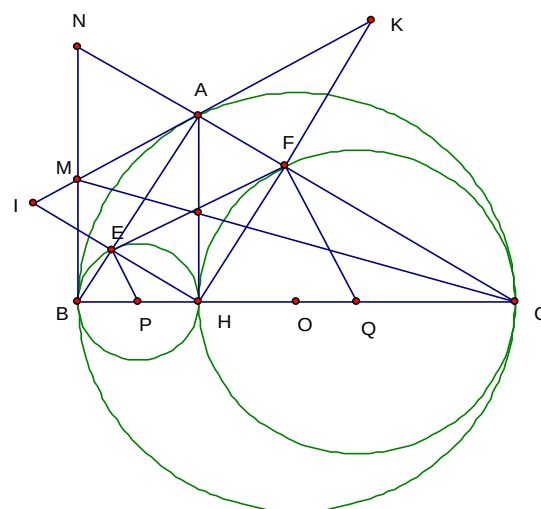
XĐt tam gi, c vu«ng ABH cũ HE $\perp$ AB

$$\Rightarrow AB \cdot AE = AH^2 \quad (1)$$

XĐt tam gi, c vu«ng ACH cũ HF $\perp$ AC

$$\Rightarrow AC \cdot AF = AH^2 \quad (2)$$

Tõ (1) vù (2) suy ra $AE \cdot AB = AF \cdot AC$.



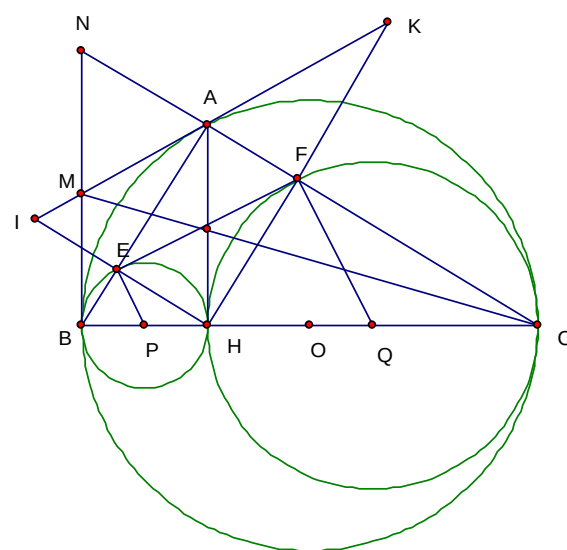
Bài 28: Cho đường tròn tâm O, đường kính BC cố định và một điểm A chuyển động trên nửa đường tròn (A khác B và C). Hạ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa A dựng hai nửa đường tròn tâm P đường kính HB và tâm Q đường kính HC, chúng lần lượt cắt AB và AC tại E và F. Chứng minh tỷ số $\frac{AH^3}{BC \cdot BE \cdot CF}$ không đổi.

Giải:

Ta có: $AH^2 = BH \cdot CH \Rightarrow$

$$AH^4 = BH^2 \cdot CH^2 = BE \cdot BA \cdot CF \cdot CA = BE \cdot CF \cdot AH \cdot BC \Rightarrow$$

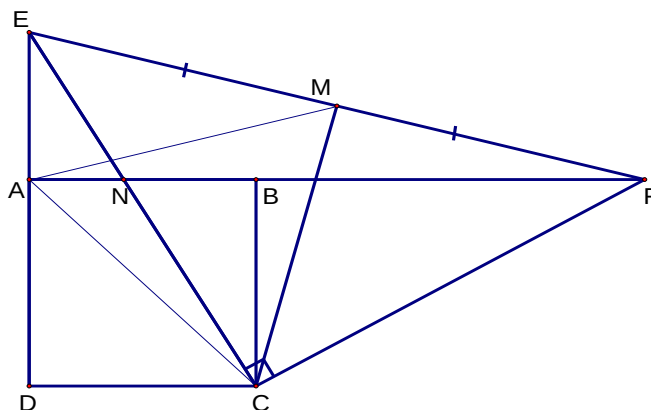
$$AH^3 = BE \cdot CF \cdot BC \Rightarrow \frac{AH^3}{BE \cdot CF \cdot BC} = 1$$



Bài 29: Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. N là điểm tùy ý thuộc cạnh AB. Gọi E là giao điểm của CN và DA. Vẽ tia Cx vuông góc với CE và cắt AB tại F. Lấy M là trung điểm của EF.

Tìm vị trí của N trên AB sao cho diện tích của tứ giác AEFC gấp 3 lần diện tích của hình vuông ABCD

Giải:

$$\begin{aligned} S_{ACFE} &= S_{ACF} + S_{AEF} = \frac{1}{2}AF \cdot (AE + CB) \\ &= \frac{1}{2}(AB + BF) \cdot (AE + AD) \\ &= \frac{1}{2}(a + x) \cdot DE \\ &= \frac{1}{2}(a + x)x \end{aligned}$$


$$\Leftrightarrow (2a - x)(3a + x) = 0$$

$$\Leftrightarrow A \text{ là trung điểm của DE} \Leftrightarrow AE = a$$

Vì $AE \parallel BC$ nên $\frac{AN}{NB} = \frac{AE}{BC} = 1$

$\Rightarrow N$ là trung điểm của AB .

Vậy với N là trung điểm của AB thì $S_{ACFE} = 3.S_{ABCD}$

A. Bài toán (giữ nguyên màu)

1) Tính BIF.

2) Gọi H là giao điểm của BM và EF. Chứng minh rằng nếu $AM = AB$ thì tứ giác ABHI nội tiếp.

3) Gọi N là giao điểm của BM với cung nhỏ EF của (O) , P và Q lần lượt là hình chiếu của N trên các đường thẳng DE , DF . Xác định vị trí của điểm M để PQ lớn nhất.

Bài 2: Cho đường tròn (O) đường kính $BD=2R$, dây cung AC của đường tròn (O) thay đổi nhưng luôn vuông góc và cắt BD tại H. Gọi P,Q,R,S lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ H xuống AB,AD,CD,CB.

a) CMR: $HA^2 + HB^2 + HC^2 + HD^2$ không đổi.

b) CMR : $PQRS$ là tứ giác nội tiếp.

2) Cho hình vuông ABCD và MNPQ có bốn đỉnh M,N,P,Q lần lượt thuộc các cạnh AB,BC,CD,DA của hình vuông. CMR: $S_{ABCD} \leq AC \frac{MN + NP + PQ + QM}{4}$

Bài 3: Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài (O) . Qua A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với (O) (B, C là các tiếp điểm). Một cát tuyến thay đổi qua A cắt (O) tại D và E ($AD < AE$). Tiếp tuyến của (O) tại D cắt đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABOC$ tại các điểm M và N .

a) Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AD . Chứng minh rằng bốn điểm M, E, N, I cùng thuộc một đường tròn (T) .

b) Chứng minh rằng hai đường tròn (O) và (T) tiếp xúc nhau.

c) Chứng minh rằng đường thẳng IT luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 4: Cho đường tròn (O) , đường thẳng d cắt (O) tại hai điểm C và D . Từ điểm M tùy ý trên d kẻ các tiếp tuyến MA và MB với (O) (A và B là các tiếp điểm). Gọi I là trung điểm của CD .

a) Chứng minh tứ giác $MAIB$ nội tiếp.

b) Các đường thẳng MO và AB cắt nhau tại H . Chứng minh H thuộc đường tròn ngoại tiếp $\triangle COD$.

c) Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định khi M thay đổi trên đường thẳng d .

d) Chứng minh $\frac{MD}{MC} = \frac{HA^2}{HC^2}$

Bài 5: Cho điểm M nằm trên nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$ (M không trùng với A và B). Trong nửa mặt phẳng chứa nửa đường tròn có bờ là đường thẳng AB , kẻ tiếp tuyến Ax . Đường thẳng BM cắt Ax tại I ; tia phân giác của $\angle IAM$ cắt nửa đường tròn O tại E , cắt IB tại F ; đường thẳng BE cắt AI tại H , cắt AM tại K . Chứng minh 4 điểm F, E, K, M cùng nằm trên một đường tròn.

Bài 6: Cho tam giác nhọn ABC có $AC > AB$ nội tiếp đường tròn (O) . Kẻ phân giác trong AI của tam giác ABC ($I \in BC$) cắt (O) ở E . Tại E và C kẻ hai tiếp tuyến với (O) cắt nhau ở F , AE cắt CF tại N , AB cắt CE tại M . Chứng minh tứ giác $AMNC$ nội tiếp đường tròn.

Bài 7: Cho đường tròn tâm O có hai đường kính AB và MN . Vẽ tiếp tuyến d của đường tròn (O) tại B . Đường thẳng AM, AN lần lượt cắt đường thẳng d tại E và F . Chứng minh rằng $MNFE$ là tứ giác nội tiếp.

Bài 8: Cho đường tròn tâm H tiếp xúc trong với đường tròn tâm O tại D ($OD > HD$). Gọi A là điểm thuộc (O) (A khác D) sao cho các tiếp tuyến AE, AF của đường tròn tâm H (E, F là các tiếp điểm) cắt đường tròn tâm O lần lượt tại B và C thỏa $AB < AC$. Gọi P là giao điểm thứ hai của DF với đường tròn (O) .

a) Chứng minh DP là tia phân giác của $\angle ADC$.

b) Tia phân giác của $\angle BDC$ cắt EF tại Q . Chứng minh tứ giác $QFCD$ nội tiếp.

c) Chứng minh $QD^2 = DB \cdot DC$.

Bài 9: Cho tam giác ABC có $(O), (I), (I_a)$ theo thứ tự là các đường tròn ngoại tiếp, đường tròn nội tiếp và đường tròn bàng tiếp đối diện đỉnh A của tam giác với các tâm tương ứng là O, I, I_a . Gọi D là tiếp điểm của (I) với BC , P là điểm chính giữa cung BAC của (O) , PI_a cắt (O) tại điểm K . Gọi M là giao điểm của PO và BC , N là điểm đối xứng với P qua O .

1. Chứng minh IBI_aC là tứ giác nội tiếp.

2. Chứng minh NI_a là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác I_aMP .

Bài 10: Cho tam giác ABC , ($AB < AC$), với ba đường cao AD , BE , CF đồng quy tại H . Các đường thẳng EF , BC cắt nhau tại G , gọi I là hình chiếu của H trên GA .

. Chứng minh rằng tứ giác $BCAI$ nội tiếp.

Bài 11: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Giả sử các điểm B, C cố định và A di động trên đường tròn (O) sao cho $AB < AC$ và $AC < BC$. Đường trung trực của đoạn thẳng AB cắt AC và BC lần lượt tại P và Q . Đường trung trực của đoạn thẳng AC cắt AB và BC lần lượt tại M và N .

Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn.

Bài 12: Cho đường tròn tâm (O) và dây BC khác đường kính. Lấy A thuộc cung BC lớn sao cho $AB > AC$

(A khác C). Các đường cao AD , BE , CF của tam giác ABC cắt nhau tại H . Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại M .

a) Chứng minh tứ giác $BFEC$ nội tiếp.

b) Chứng minh EB là phân giác góc DEF

c) Gọi I là trung điểm của BC . Chứng minh IE là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp tam giác MED .

Bài 13: Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung AB cố định, $AB = R\sqrt{2}$. Điểm P di động trên dây AB (P khác A và B). Gọi $(C; R_1)$ là đường tròn đi qua P và tiếp xúc với đường tròn $(O; R)$ tại A , $(D; R_2)$ là đường tròn đi qua P và tiếp xúc với đường tròn $(O; R)$ tại B . hai đường tròn $(C; R_1)$ và $(D; R_2)$ cắt nhau tại điểm thứ hai là M . Trong trường hợp P không trùng với trung điểm dây AB , chứng minh $OM \parallel CD$ và 4 điểm C, D, O, M cùng thuộc một đường tròn

B. Lời giải

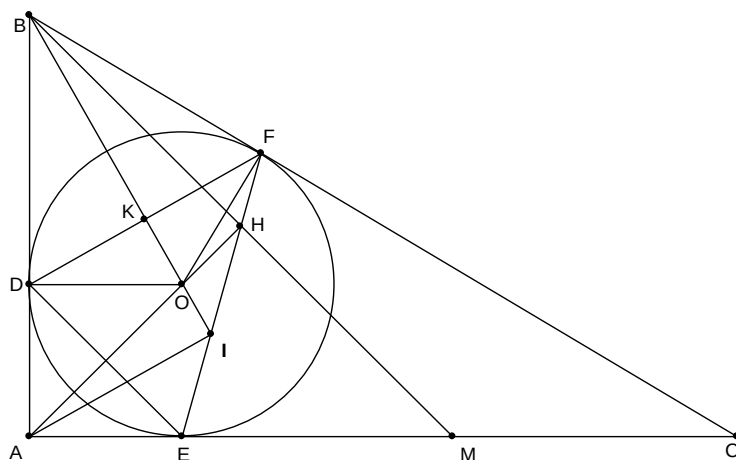
Bài 1: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB < AC$ ngoại tiếp đường tròn tâm O . Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của (O) với các cạnh AB, AC, BC ; BO cắt EF tại I . M là điểm di chuyển trên đoạn CE .

1) Tính BIF .

2) Gọi H là giao điểm của BM và EF . Chứng minh rằng nếu $AM = AB$ thì tứ giác $ABHI$ nội tiếp.

3) Gọi N là giao điểm của BM với cung nhỏ EF của (O), P và Q lần lượt là hình chiếu của N trên các đường thẳng DE, DF. Xác định vị trí của điểm M để PQ lớn nhất.

Lời giải



1) Gọi K là giao điểm của BO với DF $\Rightarrow \Delta IKF$ vuông tại K

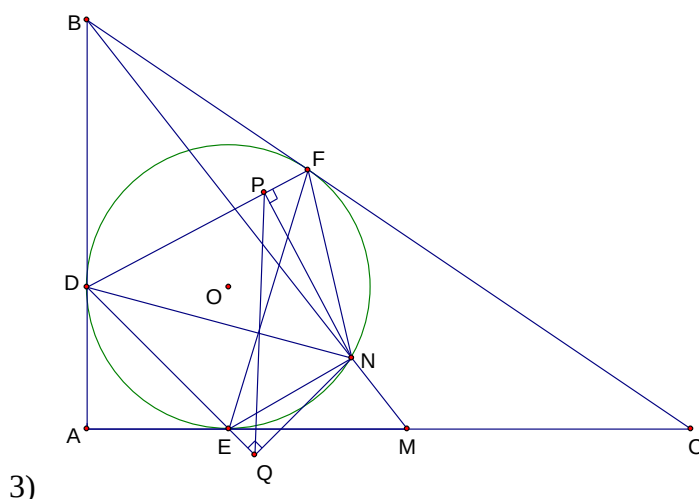
$$\text{Có } \angle DFE = \frac{1}{2} \angle DOE = 45^\circ \Rightarrow \angle BIF = 45^\circ$$

2) Khi $AM = AB$ thì ΔABM vuông cân tại A $\Rightarrow \angle DBH = 45^\circ$. Có $\angle DFH = 45^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác BDHF nội tiếp $\Rightarrow 5$ điểm B, D, O, H, F cùng thuộc một đường tròn.

$\Rightarrow \angle BFO = \angle BHO = 90^\circ \Rightarrow OH \perp BM$, mà $OA \perp BM \Rightarrow A, O, H$ thẳng hàng

$\angle BAH = \angle BIH = 45^\circ \Rightarrow$ Tứ giác ABHI nội tiếp.



Có tứ giác PNQD nội tiếp $\Rightarrow \angle QPN = \angle QDN = \angle ENF$.

Tương tự có $NQP = NDP = FEN \Rightarrow \triangle NEF$ và $\triangle NQP$ đồng dạng $\Rightarrow \frac{PQ}{EF} = \frac{NQ}{NE} \leq 1 \Rightarrow PQ \leq EF$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $P \equiv F; Q \equiv E \Rightarrow DN$ là đường kính của $(O) \Rightarrow PQ$ lớn nhất bằng EF .

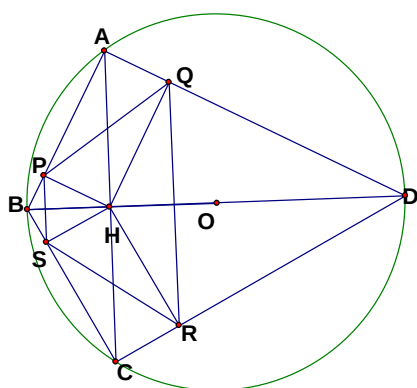
Cách xác định điểm M : Kẻ đường kính DN của (O) , BN cắt AC tại M thì PQ lớn nhất.

Bài 2: Cho đường tròn (O) đường kính $BD = 2R$, dây cung AC của đường tròn (O) thay đổi nhưng luôn vuông góc và cắt BD tại H . Gọi P, Q, R, S lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ H xuống AB, AD, CD, CB .

a) CMR: $HA^2 + HB^2 + HC^2 + HD^2$ không đổi.

b) CMR: $PQRS$ là tứ giác nội tiếp.

Lời giải



a) theo Pitago $HA^2 + HB^2 = AB^2; HC^2 + HB^2 = BC^2; HC^2 + HD^2 = CD^2; HA^2 + HD^2 = AD^2;$

suy ra đpcm

b) Tứ giác HPBS nội tiếp $\Rightarrow \angle HPS = \angle HBS = \angle DBC$

Tứ giác HPAQ là hình chữ nhật $\Rightarrow \angle HPQ = \angle HAQ = \angle CAD = \angle CBD$

Do đó $\angle SPQ = \angle HPS + \angle HPQ = 2\angle DBC$

Tương tự $\angle SQR = 2\angle BDC$

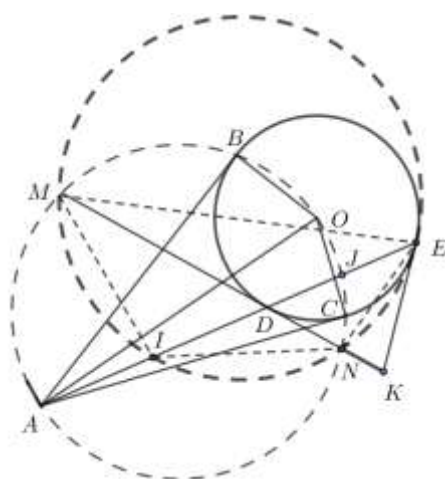
Do đó $\angle DBC + \angle BDC = 180^\circ \Leftrightarrow \angle SPQ + \angle SRQ = 180^\circ$ nên tứ giác PQRS nội tiếp (đ/lí đảo)

Bài 3: Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài (O) . Qua A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với (O) (B, C là các tiếp điểm). Một cát tuyến thay đổi qua A cắt (O) tại D và E ($AD < AE$). Tiếp tuyến của (O) tại D cắt đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABOC$ tại các điểm M và N .

b) Chứng minh rằng hai đường tròn (O) và (T) tiếp xúc nhau.

c) Chứng minh rằng đường thẳng IT luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



a) Ta có $\angle ABO + \angle ACO = 180^\circ$ nên tứ giác $ABON$ nội tiếp

Gọi J là giao điểm của AD với đường tròn $(ABOC)$. Suy ra $\triangle DMA$ đồng dạng $\triangle DNJ$

Su su ra $DM.DN = DA.DJ$. Ma $DA = 2DI$; $DJ = \frac{1}{2}DE$.

Nên $DM.DN = DI.DE \Rightarrow \Delta DMI$ đồng dạng ΔDEN

Vậy tứ giác $MINE$ nội tiếp hay có đpcm.

b) Dễ thấy khi $MN \perp OA$ thì (O) và (T) tiếp xúc nhau tại E .

Khi MN không vuông góc OA . Gọi K là giao điểm của MN với tiếp tuyến của (O) tại E .

Ta có O, J, K thẳng hàng

Trong tam giác $OEK : KJ.KO = KE^2$ (1) (Định lý hình chiếu)

Trên đường tròn ($ABOC$) ta có $KJ.KO = KN.KM$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $KE^2 = KN.KM$ nên KE tiếp xúc (T)

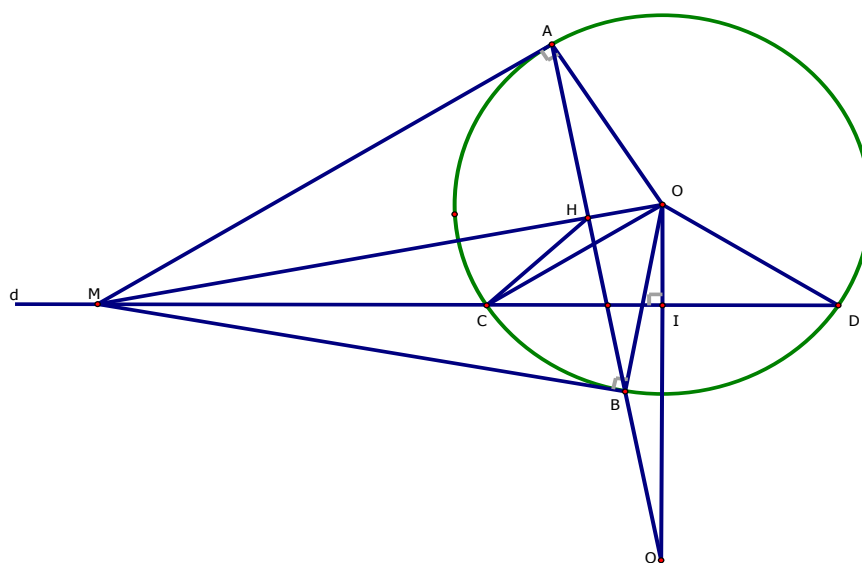
c) Ta có $OED = ODE = TIE$

Nên $IT \parallel OD$. Gọi $W = OA \cap IT$. Vì I là trung điểm của AD nên W là trung điểm OA (đpcm)

Khi $MN \perp OA$ thì $W \in IT$.

Bài 4: Cho đường tròn (O), đường thẳng d cắt (O) tại hai điểm C và D. Từ điểm M tùy ý trên d kẻ các tiếp tuyến MA và MB với (O) (A và B là các tiếp điểm). Gọi I là trung điểm của CD.

- Chứng minh tứ giác MAIB nội tiếp.
- Các đường thẳng MO và AB cắt nhau tại H. Chứng minh H thuộc đường tròn ngoại tiếp $\triangle COD$.
- Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định khi M thay đổi trên đường thẳng d.
- Chứng minh $\frac{MD}{MC} = \frac{HA^2}{HC^2}$



Giải:

- a) MA, MB là các tiếp tuyến của (O)

$$\Rightarrow MAO = MBO = 90^0$$

I là trung điểm của CD $\Rightarrow OI \perp CD \Rightarrow MIO = 90^0$

$\Rightarrow$ A, I, B cùng thuộc đường tròn đường kính MO

$\Rightarrow$ Tứ giác MAIB nội tiếp đường tròn đường kính MO.

- b) $MA = MB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$$OA = OB$$

$\Rightarrow$ MO là đường trung trực của AB

$$\Rightarrow \text{MO} \perp \text{AB}$$

$$\Rightarrow MH.MO = MB^2 \text{ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)} \quad (1)$$

$$MBC = MBD = \frac{1}{2} \text{sd } BC$$

$$\Rightarrow \Delta MBC \sim \Delta MDB(q.q)$$

$$\Rightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{MD}{MB} \Rightarrow MC.MD = MB^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ MH.MO = MC.MD

$$\Rightarrow \frac{MC}{MH} = \frac{MO}{MD} \Rightarrow \Delta MCH \sim \Delta MOD (c.g.c)$$

$$\Rightarrow MHC = MDO$$

$\Rightarrow$ tứ giác CHOD nội tiếp

$\Rightarrow H$ thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔCOD .

c) Gọi Q là giao điểm của AB và OI

Hai tam giác vuông MIO và QHO có IOH chung

$$\Rightarrow \Delta MIO \sim \Delta QHO$$

$$\Rightarrow \frac{MO}{OI} = \frac{OQ}{OH}$$

$$\Rightarrow OQ = \frac{MO \cdot OH}{OI} = \frac{OA^2}{OI} = \frac{R^2}{OI} \quad (R \text{ là bán kính } (O) \text{ không đổi})$$

$$\Rightarrow OQ = \frac{MO \cdot OH}{OI} = \frac{OA^2}{OI} = \frac{R^2}{OI}$$

O, I cố định $\Rightarrow$ độ dài OI không đổi

$\Rightarrow$ lại có Q thuộc tia OI cố định

$\Rightarrow Q$ là điểm cố định $\Rightarrow$ đpcm.

$$d) \angle AHC = 90^\circ + \angle MHC = 90^\circ + \angle ODC = 90^\circ + \frac{180^\circ - \angle COD}{2} \quad (\Delta COD \text{ cân tại } O)$$

$$= 180^\circ - \frac{1}{2} \angle COD = \frac{1}{2} (360^\circ - \angle CBOCB) = \frac{1}{2} \angle CAD$$

$$= \angle CBD \quad (3)$$

$$\angle CAH = \angle CDB \quad (4) \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung } BC)$$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \Delta AHC \sim \Delta DBC (g.g)$

$$\Rightarrow \frac{HA}{HC} = \frac{BD}{BC} \quad (5)$$

$$\Delta MBC \sim \Delta MDB (g.g) \text{ (chứng minh trên)}$$

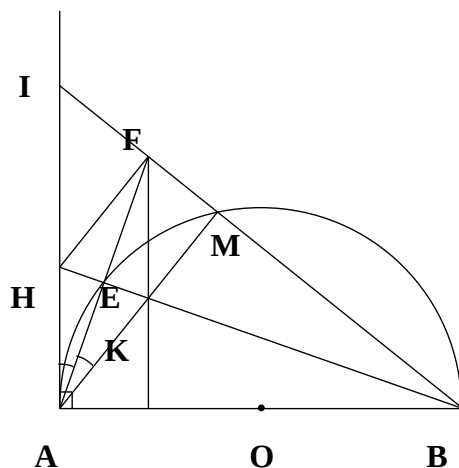
$$\Rightarrow \frac{MD}{MB} = \frac{MB}{MC} = \frac{BD}{BC} \quad (6)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{BD}{BC} \right)^2 = \frac{MD}{MB} \cdot \frac{MB}{MC} = \frac{MD}{MC}$$

$$\text{Từ (5) và (6)} \Rightarrow \frac{MD}{MB} = \frac{HA^2}{HC^2}$$

Bài 5: Cho điểm M nằm trên nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$ (M không trùng với A và B). Trong nửa mặt phẳng chứa nửa đường tròn có bờ là đường thẳng AB , kẻ tiếp tuyến Ax . Đường thẳng BM cắt Ax tại I ; tia phân giác của $\angle IAM$ cắt nửa đường tròn O tại E , cắt IB tại F ; đường thẳng BE cắt AI tại H , cắt AM tại K . Chứng minh 4 điểm F, E, K, M cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải



Ta có M, E nằm trên nửa đường tròn đường kính AB nên $\angle FMK = 90^\circ$ và $\angle FEK = 90^\circ$.

Vậy 4 điểm F, E, K, M cùng nằm trên đường tròn đường kính FK .

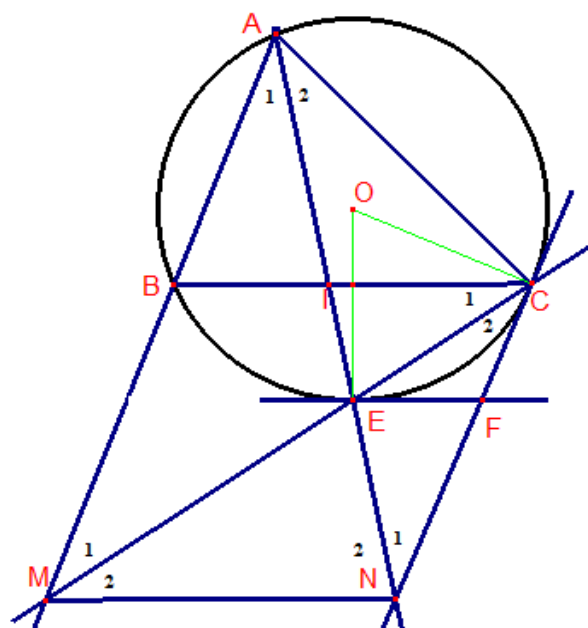
Bài 6: Cho tam giác nhọn ABC có $AC > AB$ nội tiếp đường tròn (O) . Kẻ phân giác trong AI của tam giác ABC ($I \in BC$) cắt (O) ở E . Tại E và C kẻ hai tiếp tuyến với (O) cắt nhau ở F , AE cắt CF tại N , AB cắt CE tại M . Chứng minh tứ giác $AMNC$ nội tiếp đường tròn.

Lời giải

Do AI là phân giác nên $BE = CE$, theo tính chất góc ngoài đường tròn, ta có :

$$AMC = AC - BE = AC - CE = ANC$$

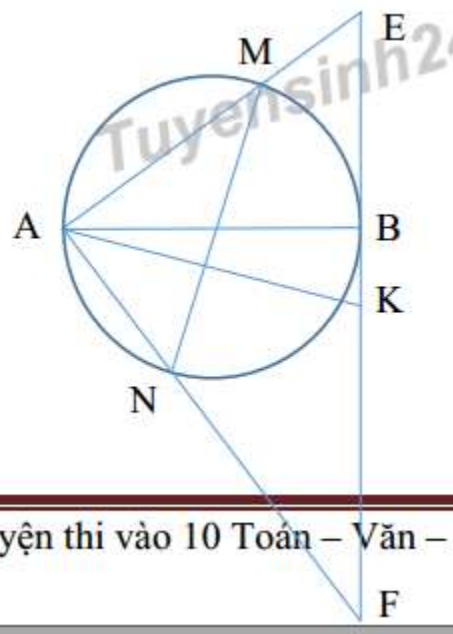
Vậy tứ giác $AMNC$ nội tiếp.



Bài 7: Cho đường tròn tâm O có hai đường kính AB và MN . Vẽ tiếp tuyến d của đường tròn (O) tại B . Đường thẳng AM , AN lần lượt cắt đường thẳng d tại E và F . Chứng minh rằng $MNFE$ là tứ giác nội tiếp.

Lời giải

Vây tứ giác MNFE nội tiếp đường tròn.



c) Chứng minh $QD^2 = DB \cdot DC$.

b) Chứng minh tương tự câu a ta có DE là phân giác góc ADB . Do đó

$$EDF = EDA + FDA = \frac{1}{2}BDA + \frac{1}{2}CDA$$

$$= \frac{1}{2}BDC = CDQ$$

$$\Rightarrow EDF = CDQ \quad (3)$$

Theo quan hệ giữa góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung:

$$EDF = EFA \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta có:

$$CDQ = EFA \Rightarrow CDQ + QFC = 180^\circ$$

Suy ra tứ giác QFCD nội tiếp đường tròn.

c) Chứng minh tương tự câu b ta có hai tứ giác QFCD và QEBD nội tiếp. Suy ra

$$DBQ = DEQ; DQC = DFC \quad (5)$$

Mặt khác:

$$DEQ = DFC \quad (\text{góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung DF}) \quad (6)$$

Từ (5) và (6) suy ra $DBQ = DQC$

Xét $\triangle DQB$ và $\triangle DCQ$ có:

$$\begin{cases} QDB = QDC (GT) \\ DBQ = DQC (cmt) \end{cases} \Rightarrow \triangle DBQ \sim \triangle DCQ (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{DB}{DQ} = \frac{DQ}{DC} \Rightarrow DQ^2 = DB \cdot DC$$

Bài 9: Cho tam giác ABC có $(O), (I), (I_a)$ theo thứ tự là các đường tròn ngoại tiếp, đường tròn nội tiếp và đường tròn bàng tiếp đối diện đỉnh A của tam giác với các tâm tương ứng là O, I, I_a . Gọi D là tiếp điểm của (I) với BC , P là điểm chính giữa cung BAC của (O) , PI_a cắt (O) tại điểm K . Gọi M là giao điểm của PO và BC , N là điểm đối xứng với P qua O .

1. Chứng minh IBI_aC là tứ giác nội tiếp.

2. Chứng minh NI_a là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác I_aMP .

Giải:

1.

I_a là tâm đường tròn bàng tiếp đối diện đỉnh A và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC , từ đó suy ra $BI_a \perp BI, CI_a \perp CI$

(Phân giác trong và phân giác ngoài cùng một góc thì vuông góc với nhau).

Xét tứ giác IBI_aC có $IBI_a + ICI_a = 180^\circ$

Từ đó suy ra tứ giác IBI_aC là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính II_a .

2.

Nhận thấy bốn điểm A, I, N, I_a thẳng hàng

(vì cùng thuộc tia phân giác của BAC).

Do NP là đường kính của (O) nên

$\angle NBP = 90^\circ$, M là trung điểm của BC nên

$PN \perp BC$ tại M

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông

PBN ta có $NB^2 = NM.NP$

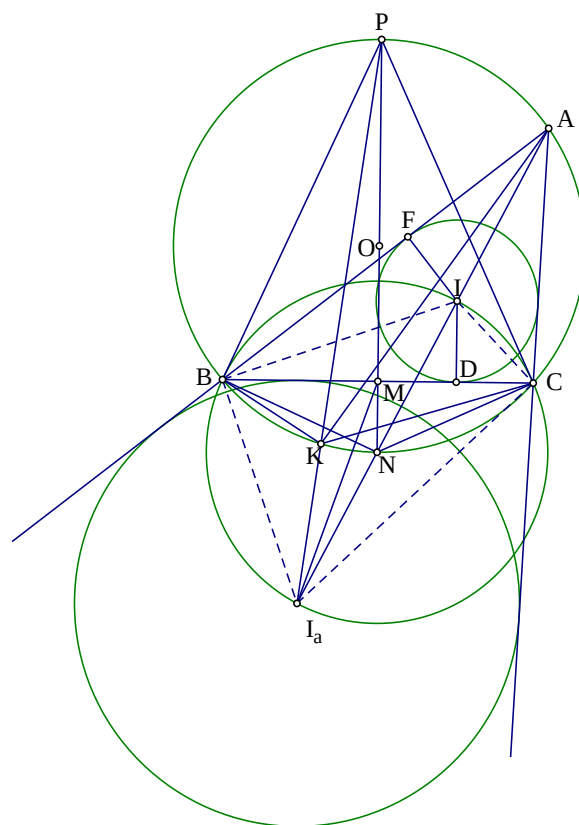
Vì $\angle BIN$ là góc ngoài tại đỉnh I của tam giác

ABI nên $\angle BIN = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BAC)$ (1)

Xét (O) : $\angle NBC = \angle NAC = \frac{\angle BAC}{2}$ (cùng chắn cung NC)

$\Rightarrow \angle NBI = \angle NBC + \angle CBI = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ABC)$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $\angle BIN = \angle NBI$ nên tam giác NIB cân tại N



Chứng minh tương tự tam giác NIC cân tại N

Từ đó suy ra N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC , cũng chính là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $IBI_aC \Rightarrow NI_a^2 = NB^2 = NM.NP$

Vậy NI_a là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác I_aMP

Bài 10: Cho tam giác ABC , ($AB < AC$), với ba đường cao AD , BE , CF đồng quy tại H . Các đường thẳng EF , BC cắt nhau tại G , gọi I là hình chiếu của H trên GA . Chứng minh rằng tứ giác $BCAI$ nội tiếp.

Giải:

Chứng minh rằng tứ giác $BCAI$ nội tiếp.

Dễ dàng chứng minh tứ giác $AIFH$

nội tiếp và tứ giác $AFHE$ nội tiếp

$\Rightarrow$ 5 điểm A, F, H, E, I cùng thuộc một đường tròn.

$\Rightarrow$ tứ giác $AIFE$ nội tiếp.

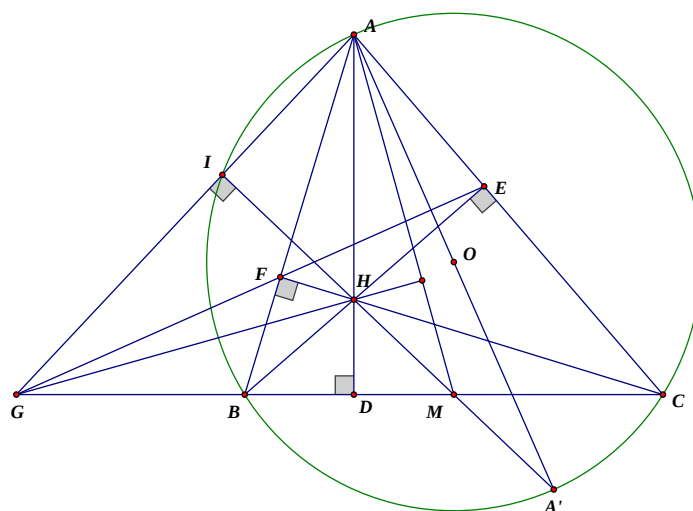
$\Rightarrow GI.GA = GF.GE$ (1).

Dễ dàng chứng minh tứ giác $BFEC$

nội tiếp $\Rightarrow GF.GE = GB.GC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra:

$GI.GA = GB.GC \Rightarrow$ tứ giác $BCAI$ nội tiếp (điều phải chứng minh).



Bài 11: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Giả sử các điểm B, C cố định và A di động trên đường tròn (O) sao cho $AB < AC$ và $AC < BC$. Đường trung trực của đoạn thẳng AB cắt AC và BC lần lượt tại P và Q . Đường trung trực của đoạn thẳng AC cắt AB và BC lần lượt tại M và N .

Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn.

Giải:

Chứng minh tương tự câu a, ta cũng có:

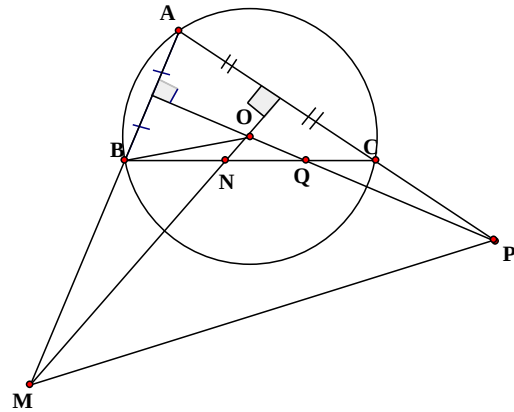
$$OP.OQ = R^2 \Rightarrow ON.OM = OP.OQ.$$

$$\Rightarrow \frac{OP}{ON} = \frac{OM}{OQ}, \text{ có } \angle MOP \text{ chung.}$$

Vậy $\triangle OPM \sim \triangle ONQ$ (c.g.c).

$$\Rightarrow \angle ONQ = \angle OPM.$$

Suy ra tứ giác $MNQP$ nội tiếp hay bốn điểm M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn.



Bài 12: Cho đường tròn tâm (O) và dây BC khác đường kính. Lấy A thuộc cung BC lớn sao cho $AB > AC$

(A khác C). Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H . Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại M .

a) Chứng minh tứ giác $BFEC$ nội tiếp.

b) Chứng minh EB là phân giác góc DEF

c) Gọi I là trung điểm của BC . Chứng minh IE là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp tam giác MED .

Giải:

a) Ta có: AD, BE, CF là các đường cao của $\triangle ABC$

$$\Rightarrow \angle BFD = 90^\circ; \angle CEB = 90^\circ$$

Xét tứ giác $BFEC$ có:

$$\angle BFC = \angle BEC = 90^\circ$$

Mà 2 góc này cùng nhìn BC
tứ giác $BFEC$ nội tiếp (dnhb)

b) Ta có: Tứ giác $BFEC$ là tứ giác nội tiếp (cmt)

$$\Rightarrow \angle FEB = \angle FCB \text{ (t/c) (1)}$$

Xét tứ giác $CEHD$ có $\angle HEC = 90^\circ; \angle HDC = 90^\circ$

$$\Rightarrow \angle HEC + \angle HDC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

Mà 2 góc này ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ tứ giác $CDHE$ nội tiếp (dnhb)

$$\Rightarrow \angle DCH = \angle DEH \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra $\angle DEH = \angle FEB$

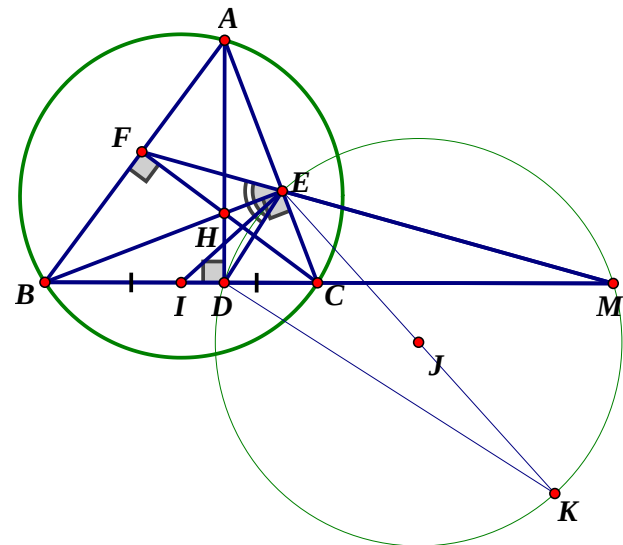
$\Rightarrow EB$ là phân giác của $\angle DEF$

c) Ta có: I là trung điểm của BC (gt) $\Rightarrow IB = IC = IE$

$\Rightarrow \triangle IEC$ cân $\Rightarrow \angle IEC = \angle ICE$ (t/c)

Lại có: $\angle ICE$ là góc ngoài của tam giác $EMC \Rightarrow \angle ICE = \angle MEC + \angle CME$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038



$$\Rightarrow IEC = CEM + CME$$

Lại có: $CEM = FEA$ (đối đỉnh)

Dễ dàng chứng minh tứ giác AEHF nội tiếp $\Rightarrow AEF = AHF$

$$\Rightarrow IEC = AHF + CME = DHC + CME = DEC + CME$$

$$\Leftrightarrow IED + DEC = DEC + CME$$

$$\Rightarrow IED = CME$$

Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle DEM$. Kẻ đường kính EK

$$\Rightarrow \text{tứ giác KDEM nội tiếp} \Rightarrow EMD = EKD(\text{t/c})$$

$$\text{Mà } EMD = IED(\text{cmt})$$

$$\Rightarrow EKD = IED$$

Lại có: $\triangle DEK$ vuông tại D

$$\Rightarrow EKD + KED = 90^\circ$$

$$\Rightarrow IED + KED = 90^\circ$$

$$\Rightarrow IE \perp JE$$

$\Rightarrow IE$ là tiếp tuyến của (J)

Bài 13: Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung AB cố định, $AB = R\sqrt{2}$. Điểm P di động trên dây AB (P khác A và B). Gọi $(C;R_1)$ là đường tròn đi qua P và tiếp xúc với đường tròn $(O;R)$ tại A, $(D;R_2)$ là đường tròn đi qua P và tiếp xúc với đường tròn $(O;R)$ tại B. hai đường tròn $(C;R_1)$ và $(D;R_2)$ cắt nhau tại điểm thứ hai là M. Trong trường hợp P không trùng với trung điểm dây AB, chứng minh $OM \parallel CD$ và 4 điểm C, D, O, M cùng thuộc một đường tròn

Giải:

Nối CP, PD ta có $\triangle ACP, \triangle OAB$ lần

lượt cân tại C, O nên

$$CPA = CAP = OBP$$

do đó $CP \parallel OD$ (1)

Tương tự $\triangle DPB, \triangle OAB$ lần lượt cân

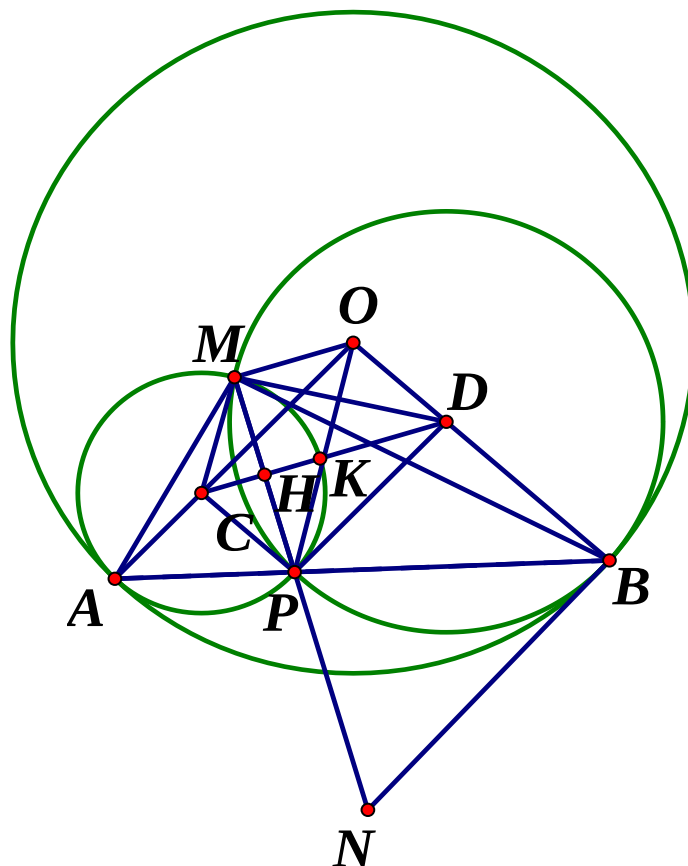
tại D, O nên $DPB = DBP = OAB$ nên

$OD \parallel CP$ (2). Từ (1) và (2) suy ra

$ODPC$ là hình bình hành

Gọi CD cắt MP tại H cắt OP tại K thì K là trung điểm của OP

Theo tính chất 2 của đường tròn cắt nhau ta có $CD \perp MP \Rightarrow H$ là trung điểm MP



Vậy $HK \parallel OM$ do đó $CD \parallel OM$

Ta phải xét 2 trường hợp $AP < BP$ và $AP > BP$, đáp án chỉ yêu cầu xét 1 trường hợp giả sử $AP < BP$. Vì tứ giác $CDOM$ là hình bình hành nên $OC = DP$, $DP = DM = R_2$ nên tứ giác $CDOM$ là hình thang cân do đó 4 điểm C, D, O, M cùng thuộc một đường tròn

6. Tính độ dài đoạn thẳng, tính số đo của một góc, tính số đo cung, độ dài cung, tính diện tích

A. Bài toán (giữ nguyên màu)

Bài 1: Trên nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2r$ lấy điểm C khác A sao cho $CA < CB$. Hai tiếp tuyến của nửa đường tròn (O) tại B, C cắt nhau ở M. Tia AC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác MCB tại điểm thứ hai là D. Gọi K là giao điểm thứ hai của BD và nửa đường tròn (O) , P là

giao điểm của AK và BC. Biết rằng diện tích hai tam giác CPK và APB lần lượt là $\frac{r^2\sqrt{3}}{12}$ và

$\frac{r^2\sqrt{3}}{3}$, tính diện tích tứ giác ABKC.

Bài 2: Tính số đo góc nhọn α biết $10\sin^2 \alpha + 6\cos^2 \alpha = 8$.

Bài 3: Cho đường tròn $(O; R)$. Hai dây AB và CD song song với nhau sao cho tâm O nằm trong dải song song tạo với AB và CD . Biết khoảng cách giữa hai dây đó bằng 11cm và

$$AB = 10\sqrt{3}cm; CD = 16cm. \text{ Tính } R.$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Bài 13: Trong hình bên, cho biết M là trung điểm của AC và các đường thẳng AD, BM và CE đồng quy tại K. Hai tam giác AKE và BKE có diện tích là 10 và 20.

Bài 14: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, trung tuyến AM, phân giác AI. Tính HI, IM; biết rằng $AC = \frac{4}{3}AB$ và diện tích tam giác ABC là 24 cm^2

Bài 15: Cho tam giác ABC vuông cân tại C. Gọi M là trung điểm của cạnh AB, P là điểm trên cạnh BC; các điểm N, L thuộc AP sao cho $CN \perp AP$ và $AL = CN$.

1. Chứng minh góc MCN bằng góc MAL.
2. Chứng minh $\triangle LMN$ vuông cân
3. Diện tích $\triangle ABC$ gấp 4 lần diện tích $\triangle MNL$, hãy tính góc CAP.

B. Lời giải (giữ nguyên màu)

Bài 1: Trên nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2r$ lấy điểm C khác A sao cho $CA < CB$. Hai tiếp tuyến của nửa đường tròn (O) tại B, C cắt nhau ở M. Tia AC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác MCB tại điểm thứ hai là D. Gọi K là giao điểm thứ hai của BD và nửa đường tròn (O) , P là giao điểm của AK và BC. Biết rằng diện tích hai tam giác CPK và APB lần lượt là $\frac{r^2\sqrt{3}}{12}$ và

$\frac{r^2\sqrt{3}}{3}$, tính diện tích tứ giác ABKC.

Lời giải

Chứng minh được DO là đường cao tam giác DAB và D,P,O thẳng hàng

Chứng minh được ABKC là hình thang

Chứng minh được ABKC là hình thang
Suy ra diện tích của chúng bằng nhau đặt bằng S_x

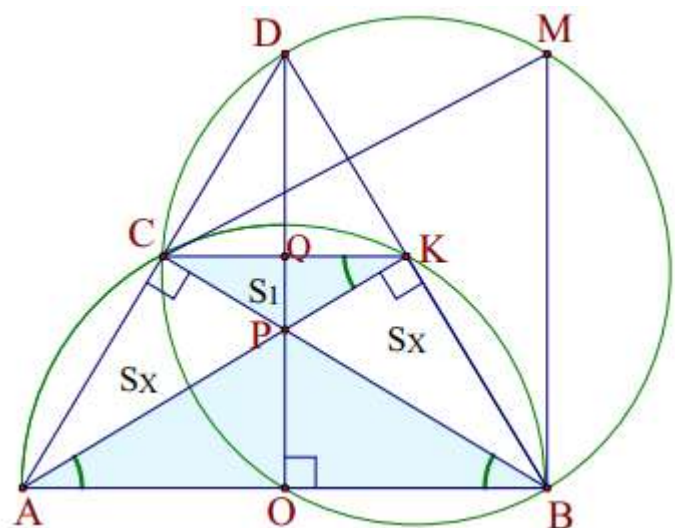
Hai tam giác KCP và KPD có cùng đường cao nên

$$\frac{dt(\triangle KCP)}{dt(\triangle KPB)} = \frac{S_1}{S_x} = \frac{CP}{PB} \quad \left(\right.$$

với S_1 là diện tích $\triangle CPK$)

Hai tam giác ACP và APB có cùng đường cao nên

$$\frac{dt(\triangle ACP)}{dt(\triangle APB)} = \frac{S_x}{S_2} = \frac{CP}{PB} \quad \left(\text{với } S_2 \text{ là diện tích } \triangle APB \right.$$



$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_x} = \frac{S_x}{S_2} \Rightarrow S_x^2 = S_1 \cdot S_2 = \frac{r^4}{12} \Rightarrow S_x = \frac{r^2 \sqrt{3}}{6}.$$

Vậy diện tích tứ giác ABKC là

$$dt(ABKC) = S_1 + S_2 + 2S_x = \frac{r^3 \sqrt{3}}{12} + \frac{r^2 \sqrt{3}}{3} + \frac{r^2 \sqrt{3}}{3} = \frac{3r^2 \sqrt{3}}{4}$$

Bài 2: Tính số đo góc nhọn α biết $10\sin^2 \alpha + 6\cos^2 \alpha = 8$.

Lời giải

$$10\sin^2 \alpha + 6\cos^2 \alpha = 8 \Leftrightarrow 6(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + 4\sin^2 \alpha = 8$$

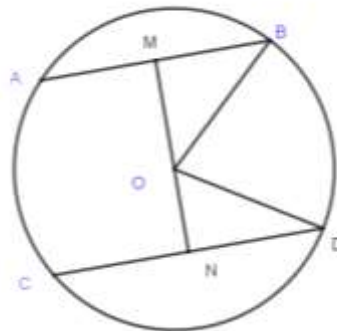
$$\Leftrightarrow 4\sin^2 \alpha = 2$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (Vì } \sin \alpha \geq 0 \text{)}$$

$$\Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

Bài 3: Cho đường tròn $(O; R)$. Hai dây AB và CD song song với nhau sao cho tâm O nằm trong dải song song tạo với AB và CD . Biết khoảng cách giữa hai dây đó bằng 11cm và $AB = 10\sqrt{3}\text{cm}$; $CD = 16\text{cm}$. Tính R .

Lời giải



Kẻ $OM \perp AB; ON \perp CD$.

$$\Rightarrow \begin{cases} AM = MB = \frac{AB}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}(\text{cm}) \\ CN = ND = \frac{CD}{2} = \frac{16}{2} = 8(\text{cm}) \end{cases}$$

$$\text{Đặt } OM = x \Rightarrow ON = MN - OM = 11 - x$$

Ta có:

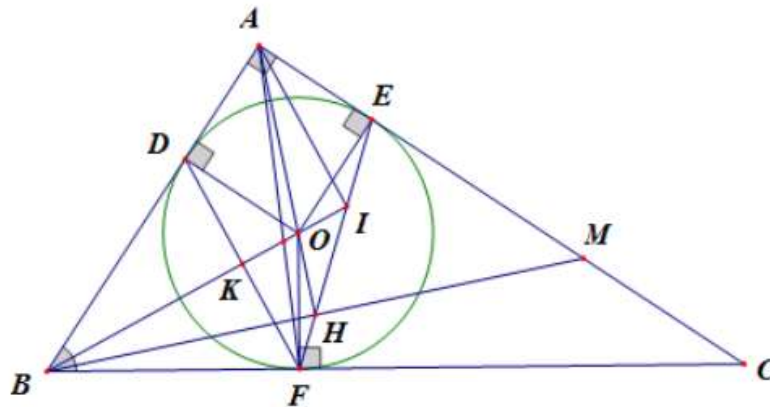
$$R^2 = MB^2 + OM^2 = ND^2 + ON^2$$

$$\Leftrightarrow R^2 = (5\sqrt{3})^2 + x^2 = 8^2 + (11 - x)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5(\text{cm}) \\ R = 10(\text{cm}) \end{cases}$$

Bài 4: Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) ngoại tiếp đường tròn tâm O. Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của (O) với các cạnh AB, AC, BC. Đường thẳng BO cắt các đường thẳng EF và DF lần lượt tại I và K. Tính số đo góc BIF

Lời giải



Vì BD, BF là các tiếp tuyến của (O) nên $OD \perp BD$, $OF \perp BF$.

Xét 2 tam giác vuông OBD và OBF có

$$\left. \begin{array}{l} OB \text{ chung} \\ OBD = OBF(\text{gt}) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OBD = \triangle OBF \text{ (cạnh huyền-góc nhọn)}$$

$$\Rightarrow BD = BF$$

Mà $OD = OF = r$ nên OB là trung trực của DF

$$\Rightarrow OB \perp DF \Rightarrow \triangle KIF \text{ vuông tại K.}$$

Mà $OD = OF = r$ nên OB là trung trực của DF

$$\Rightarrow OB \perp DF \Rightarrow \triangle KIF \text{ vuông tại K}$$

$$\Rightarrow \angle DOE = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle DFE = \frac{1}{2} \angle DOE = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle KIF \text{ vuông cân tại K.}$$

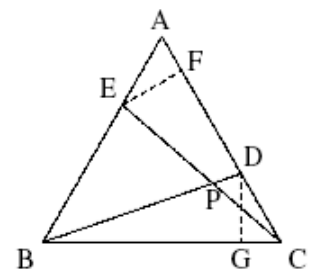
$$\Rightarrow \angle BIF = 45^\circ$$

Bài 5: Cho tam giác đều ABC, các điểm D, E lần lượt thuộc các cạnh AC, AB sao cho BD, CE cắt nhau tại P và diện tích tứ giác ADPE bằng diện tích tam giác BPC. Tính $\angle BPE$.

Lời giải

Kẻ $EF \perp AC$ tại F, $DG \perp BC$ tại G.

$$\Rightarrow S_{(ACE)} = S_{(BCD)}. \text{ Mà } AC = BC \Rightarrow EF = DG \text{ và } A = C$$



$$\text{Suy ra } \triangle AEF = \triangle CDG \Rightarrow AE = CG. \text{ Do đó } \triangle AEC = \triangle CDB (c - g - c) \Rightarrow \angle BPC = \angle ECA$$

Theo giả thiết $S_{(ADPE)} = S_{(BPC)}$

$$\Rightarrow BPE = PBC + PCB = PCD + PCB = 60^0$$

Bài 6: Cho tam giác ABC cân tại A, có góc $BAC = 20^0$. Trên AC lấy điểm E sao cho góc $EBC = 20^0$. cho $AB = AC = b$, $BC = a$

a) Tính CE.

b) Chứng minh rằng $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

Lời giải

a) Tam giác ABC đồng dạng với tam giác BCE (hai tam giác cân có góc đỉnh bằng 20^0 và góc đáy bằng 80^0) nên $\frac{CE}{BC} = \frac{BC}{AB}$

Và $BE = BC = a$, suy ra $CE = \frac{a^2}{b}$

b) Dựng $AD \perp BE$, suy ra $BD = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} b$

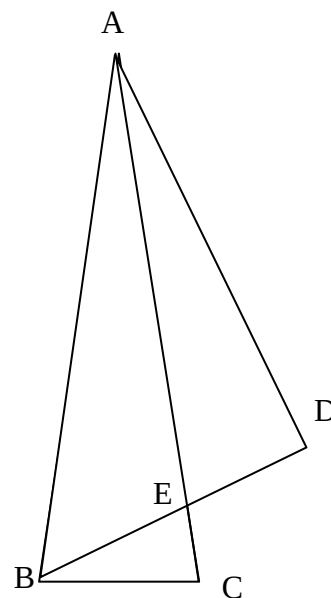
ta có: $AE^2 = ED^2 + AD^2$, $AB^2 = BD^2 + AD^2$ do đó

$$AB^2 = BD^2 + EA^2 - DE^2$$

$$\begin{aligned} \text{Thay vào ta được: } b^2 &= \frac{b^2}{4} + \left(b - \frac{a^2}{b}\right)^2 - \left(\frac{b}{2} - a\right)^2 \\ &= \frac{b^2}{4} + b^2 + \frac{a^4}{b^2} - 2a^2 - \frac{b^2}{4} - a^2 + ab \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow b^4 = b^4 + a^4 - 3a^2b^2 + ab^3$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 = 3ab^2$$



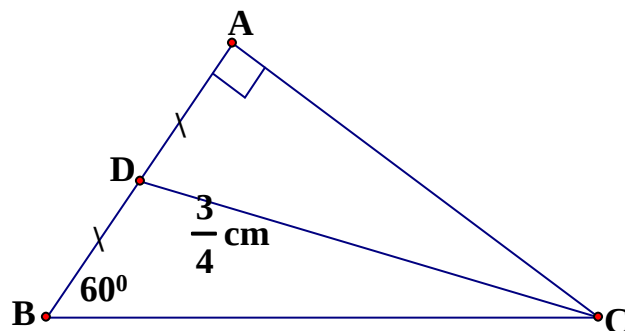
Bài 7: Cho tam giác ABC vuông tại A, $ABC = 60^0$. Trung tuyến $CD = \frac{3}{4}$ cm. Tính diện tích tam giác ABC.

Giải

Đặt $BC = 2x$ ($x > 0$). Vì $ABC = 60^0$
 $\Rightarrow C = 30^0 \Rightarrow AB = x \Rightarrow AD = \frac{1}{2} x$;

$$AC = \sqrt{3} x$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038



Tam giác ADC vuông tại $A \Rightarrow$

$$CD^2 = AD^2 + AC^2 \text{ (Đ/l Py tago)}$$

$$\Rightarrow \frac{9}{16} = 3x^2 + \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow x = \frac{3}{2\sqrt{13}}$$

$$\text{Vậy diện tích } S \text{ của tam giác } ABC \text{ là } S = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{3}{2\sqrt{13}} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{104} (\text{cm}^2)$$

Bài 8: Cho đoạn thẳng $AB = 2a$ có trung điểm là O . Trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB dựng nửa đường tròn tâm O đường kính AB và nửa đường tròn tâm O' đường kính AO . Điểm M thay đổi trên nửa đường tròn O' (M khác A và O), tia OM cắt đường tròn O tại C . Gọi D là giao điểm thứ hai của CA với đường tròn O' .

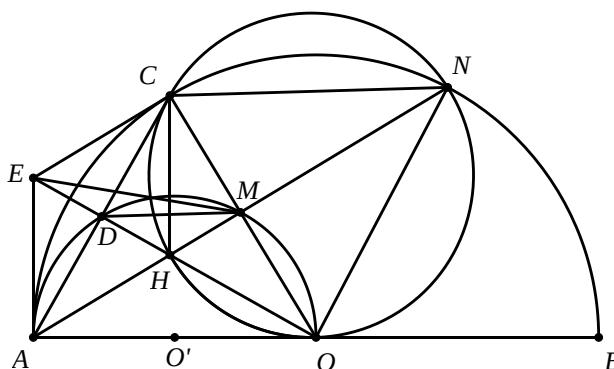
1) Chứng minh rằng tam giác ADM cân.

2) Tiếp tuyến tại C của đường tròn O cắt tia OD tại E , chứng minh EA là tiếp tuyến chung của hai đường tròn O và O' .

3) Đường thẳng AM cắt OD tại H , đường tròn ngoại tiếp tam giác COH cắt đường tròn O tại điểm thứ hai là N . Chứng minh rằng ba điểm A, M, N thẳng hàng.

4) Tính độ dài đoạn OM theo a biết ME song song với AB .

Giải



1) Tam giác AOC cân tại O , có OD là đường cao nên là phân giác trong góc AOC , do đó

$$\angle AOD = \angle COD$$

$$\Rightarrow AD = DM \text{ nên } DA = DM.$$

Vậy tam giác AMD cân tại D .

$$2) \triangle OEA = \triangle OEC \text{ c.g.c} \Rightarrow \angle OAE = \angle OCE = 90^\circ.$$

Do đó, $AE \perp AB$. Vậy AE là tiếp tuyến chung của O và O' .

3)

Giả sử AM cắt O tại N' . $\triangle OAN'$ cân tại O , có $OM \perp AN'$ nên OM là đường trung trực của $AN' \Rightarrow CA = CN'$.

Ta có $CN'A = CAM$ mà $CAM = DOM$, do đó $CN'H = COH$. Bốn điểm C, N', O, H thuộc một đường tròn.

Suy ra, N' thuộc đường tròn ngoại tiếp $\triangle CHO$. Do vậy, N' trùng với N . Vậy ba điểm A, M, N thẳng hàng.

4) Vì $ME \parallel AB$ và $AB \perp AE$ nên $ME \perp AE$.

Ta có hai tam giác MAO, EMA đồng dạng nên

$$\frac{MO}{EA} = \frac{MA}{EM} = \frac{AO}{MA} \Rightarrow MA^2 = AO \cdot EM \quad (*)$$

Dễ thấy $\triangle MEO$ cân tại M nên $ME = MO$. Thay vào (*) ta được $MA^2 = OA \cdot MO \quad (**)$

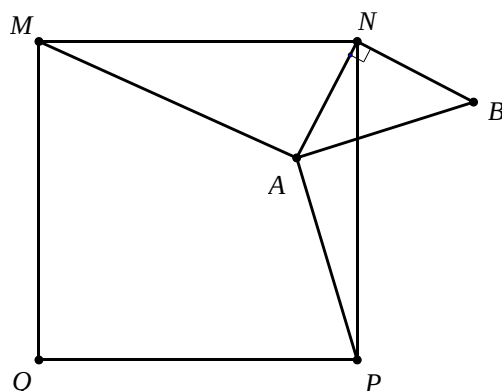
Đặt $MO = x > 0$ ta có $MA^2 = OA^2 - MO^2 = a^2 - x^2$.

Từ (**) suy ra $a^2 - x^2 = ax \Leftrightarrow x^2 + ax - a^2 = 0$.

$$\text{Từ đó tìm được } OM = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} a$$

Bài 9: Cho hình vuông $MNPQ$ và điểm A nằm trong tam giác MNP sao cho $AM^2 = AP^2 + 2AN^2$. Tính góc PAN .

Giải



Dựng tam giác ANB vuông cân tại N (A, B nằm khác phía đối với NP).

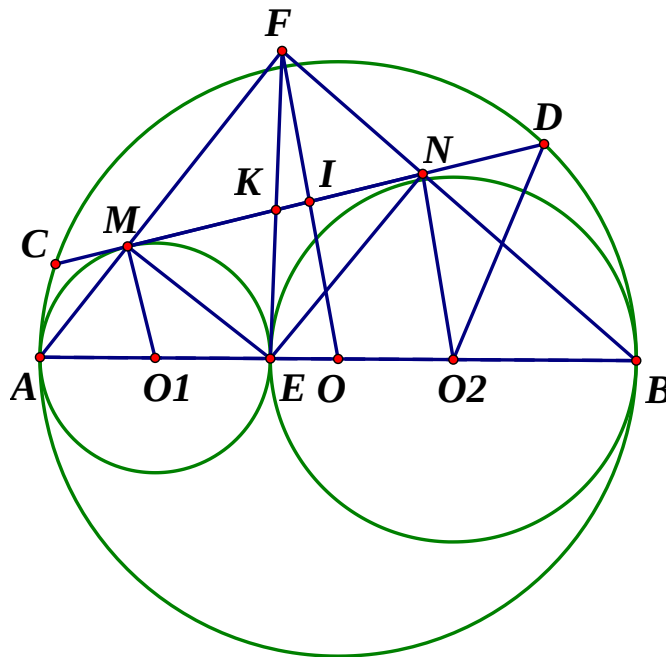
Ta có $AB^2 = 2AN^2$, $BAN = 45^\circ$ và $\triangle AMN = \triangle BNP$ c.g.c $\Rightarrow AM = BP$.

Do đó, $AP^2 + AB^2 = AP^2 + 2AN^2 = AM^2 = BP^2 \Rightarrow \triangle ABP$ vuông tại A .

Nên $PAN = PAB + BAN = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$

Bài 10: Cho đoạn thẳng AB và điểm E nằm giữa điểm A và điểm B sao cho $AB = 18$ cm và $AE = 6$ cm. Vẽ đường tròn (O_1) đường kính AE và đường tròn (O_2) đường kính BE . Vẽ tiếp tuyến chung ngoài MN của hai đường tròn với M là tiếp điểm thuộc (O_1) và N là tiếp điểm thuộc (O_2) . Gọi F là giao điểm của các đường thẳng AM và BN . Vẽ đường tròn (O) đường kính AB . Đường thẳng MN cắt đường tròn (O) tại C và D sao cho điểm C thuộc cung nhỏ AD . Tính độ dài đoạn thẳng CD .

Lời giải



MN là tiếp tuyến chung của (O_1) và (O_2) nên $MN \perp O_1M; MN \perp O_2N \Rightarrow O_1M // O_2N$

$$\Rightarrow \angle MO_1E + \angle NO_2E = 180^\circ$$

ΔO_1AM cân tại O_1 suy ra $\angle MO_1E = 2\angle O_1AM$

ΔO_2BN cân tại O_2 nên $\angle NO_2E = 2\angle O_2BN$

$$\Rightarrow \angle MO_1E + \angle NO_2E = 2(\angle O_1AM + \angle O_2BN) \Rightarrow \angle O_1AM + \angle O_2BN = 90^\circ \Rightarrow \angle MFN = 90^\circ$$

Mặt khác $\angle AME = \angle BNE = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$$\Rightarrow \angle EMF = \angle ENF = 90^\circ \text{ suy ra } MENF \text{ là hình chữ nhật} \Rightarrow \angle MEF = \angle NME$$

Mà $\angle O_1EM = \angle O_1ME$ (ΔO_1ME cân tại O_1) và $\angle NME + \angle O_1ME = 90^\circ$ (MN là tiếp tuyến)

$$\Rightarrow \angle MEF + \angle O_1EM = 90^\circ \text{ hay } EF \perp AB \text{ tại } E$$

Ta có $AB = 18 \text{ cm}$, $AE = 6 \text{ cm} \Rightarrow EB = 12 \text{ cm}$, $OF = 9 \text{ cm}$

$$\Delta AFB \text{ vuông tại } F \text{ có đường cao } EF \text{ nên } EF^2 = AE \cdot EB = 6 \cdot 12 = 72 \Rightarrow EF = 6\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$$\Rightarrow MN = EF = 6\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

Gọi K, I lần lượt là giao điểm của EF, OF với MN.

Tứ giác MENF là hình chữ nhật nên có $\angle NMF = \angle NEF$ mà $\angle NEF = \angle ABF$ (cùng phụ góc BEM)

$$\Rightarrow \angle NMF = \angle ABF \quad (1) \Rightarrow \Delta FNM \sim \Delta FAB$$

Ta lại có ΔOAF cân tại O suy ra $\angle OAF = \angle OFA \quad (2)$

$$\text{và } \angle OAF + \angle ABF = 90^\circ \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \angle NMF + \angle OFA = 90^\circ \Rightarrow \angle MIF = 90^\circ$

ΔFNM đồng dạng tam giác FAB và có FI, FE là hai đường cao tương ứng nên

$$\frac{FI}{EF} = \frac{MN}{AB} \Rightarrow \frac{FI}{6\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{18} \Rightarrow FI = 4 \text{ cm} \Rightarrow OI = OF - FI = 9 - 4 = 5 \text{ cm}$$

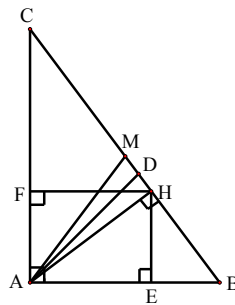
$$\Delta OID \text{ vuông tại } I \text{ có } ID^2 = OD^2 - OI^2 = 9^2 - 5^2 = 56 \Rightarrow ID = 2\sqrt{14} \text{ (cm)}$$

Vì $OF \perp CD$ tại I nên $CD = 2 \cdot ID = 4\sqrt{14} \text{ (cm)}$

Bài 11: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6 \text{ cm}$, $AC = 8 \text{ cm}$. Gọi AH là đường cao; E và F lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB và AC.

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

- a) Tính độ dài EF.
- b) Gọi M là trung điểm của BC, đường phân giác của $\angle BAC$ cắt BC tại D. Tính diện tích các tam giác ABH, AHD, ADM và AMC.

Lời giải

- a) * Xét tam giác ABC và tam giác HBA có:

ABC chung

$$\angle BAC = \angle AHB = 90^\circ$$

Do đó $\triangle ABC$ đồng dạng với $\triangle HBA$ (g-g)

$$\Rightarrow \frac{AC}{AH} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow AH \cdot BC = AB \cdot AC \text{ (đpcm)}$$

$$\begin{aligned} * \text{ Vì } \triangle ABC \text{ vuông tại A nên ta có: } BC^2 &= AB^2 + AC^2 \text{ (theo Py-ta-go)} \\ &= 6^2 + 8^2 \\ &= 100 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow BC = 10 \text{ (cm)}$$

$$\text{Từ } AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{6 \cdot 8}{10} = \frac{24}{5} = 4,8 \text{ (cm)}$$

Mà tứ giác AEHF là hình chữ nhật (câu a)

nên $EF = AH = 4,8$ cm (tính chất đường chéo của hình chữ nhật).

- b) * Ta có $\triangle ABC$ đồng dạng với $\triangle HBA$ (câu a)

$$\Rightarrow \frac{AB}{BH} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{6^2}{10} = \frac{18}{5} \text{ (cm)}$$

$$\text{Diện tích } \triangle ABH \text{ là: } S_{\triangle ABH} = \frac{1}{2} AH \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot \frac{24}{5} \cdot \frac{18}{5} = \frac{216}{25} \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$* \text{ Vì AD là phân giác của } \triangle ABC \text{ nên } \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \text{ (t/c đường phân giác)}$$

$$\Rightarrow \frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC} = \frac{DB+DC}{AB+AC} = \frac{BC}{AB+AC} = \frac{10}{6+8} = \frac{5}{7} \Rightarrow DB = \frac{5}{7} \cdot AB = \frac{5}{7} \cdot 6 = \frac{30}{7} \text{ (cm)}$$

Ta thấy $BD > BH$ (vì $\frac{30}{7} > \frac{18}{5}$) nên H nằm giữa B và D

$$\text{do đó } HD = BD - BH = \frac{30}{7} - \frac{18}{5} = \frac{24}{35} \text{ (cm)}$$

$$\text{Diện tích } \triangle AHD \text{ là: } S_{\triangle AHD} = \frac{1}{2} AH \cdot HD = \frac{1}{2} \cdot \frac{24}{5} \cdot \frac{24}{35} = \frac{288}{175} \text{ (cm}^2\text{)}$$

* Tam giác ABC vuông tại A có AM là trung tuyến ứng với cạnh huyền BC, do đó

$$BM = CM = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5 \text{ (cm)}$$

Ta thấy $BM > BD$ (vì $5 > \frac{30}{7}$) nên D nằm giữa B và M

$$\text{do đó } DM = BM - BD = 5 - \frac{30}{7} = \frac{5}{7} \text{ (cm)}$$

$$\text{Diện tích } \triangle ADM \text{ là: } S_{\triangle ADM} = \frac{1}{2} AH \cdot DM = \frac{1}{2} \cdot \frac{24}{5} \cdot \frac{5}{7} = \frac{12}{7} \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{* Diện tích } \triangle AMC \text{ là: } S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2} AH \cdot MC = \frac{1}{2} \cdot \frac{24}{5} \cdot 5 = 12 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Bài 12: Cho đường tròn $(O; R)$, trên đó lấy một điểm cố định A và vẽ đường tròn $(A; R)$. Lấy điểm H di động trên $(A; R)$, cát tuyến của (O) đi qua A và H cắt (O) tại điểm thứ hai K . Dựng trung trực của đoạn HK cắt (O) tại B và C .

a) Chứng tỏ rằng H là trực tâm của tam giác ABC .

b) Tính số đo góc A của tam giác ABC .

Lời giải

a) Ta có: Hai tam giác BHC và BKC đối xứng với nhau qua BC , nên chúng bằng nhau, suy ra:

$$\angle BHC = \angle BKC.$$

Vẽ tia CH cắt AB tại E và tia BH cắt AC tại D .

Ta có: $\angle BAK = \angle BCK$ (góc nội tiếp cùng chắn cung BK) và $\angle BCH = \angle BCK$ (CI là đường cao của tam giác cân HCK , vừa là phân giác góc C).

$$\text{Suy ra: } \angle BAK = \angle BCE$$

$$\text{Mà } \angle BAK + \angle ABC = 90^\circ \text{ nên } \angle BCE + \angle ABC = 90^\circ$$

Do đó: $\angle BEC = 90^\circ$, nên CE là đường cao thứ hai của tam giác ABC .

H là giao điểm của hai đường cao AI và CE của tam giác ABC , vậy H

là trực tâm của tam giác ABC .

b) + **Trường hợp H ở trong đường tròn (O) :**

Kẻ đường kính FG của (O) vuông góc với dây BC tại M , thì M là trung điểm của BC .

Trong đường tròn (O) hai dây AK và FG song song nên chắn hai cung $KF = AG \Rightarrow KF = AG$ (1).

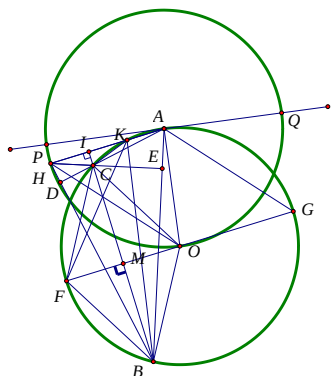
Tứ giác $OHAG$ có $OG \parallel AH = R$ nên $OHAG$ là hình bình hành, suy ra: $AG = OH$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $KF = HO$, nên $HKFO$ là hình thang cân.

Mà BC là trung trực của HK nên cũng là trung trực của OF , nên

$$OM = \frac{1}{2} OF = \frac{R}{2} \Rightarrow \cos \angle FOC = \frac{OM}{OC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle FOC = 60^\circ$$

$$\text{Mà } \angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC = \angle FOC = 60^\circ \text{ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung } BC).$$



+ **Trường hợp H ở ngoài (O) nhưng vẫn ở trên nửa đường tròn (A) chứa điểm O , đường kính PQ là tiếp tuyến của (O) tại A .**

Khi đó tam giác ABC có 2 góc nhọn và một góc tù (góc C tù chẳng hạn).

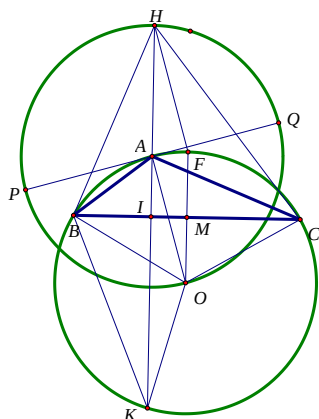
Ta có: $\angle HBI + \angle AHB = 90^\circ$, $\angle HBI = \angle IBK$ (đối xứng nhau qua BI),

$\angle IBK = \angle CAK$ (góc nội tiếp cùng chắn cung KC), nên

$\angle CAH + \angle AHB = 90^\circ$, suy ra: $BH \perp AC$ tại D . Vậy H là trực tâm của tam giác ABC .

Chứng minh tương tự trên, ta có M là trung điểm của OF và

$$\angle BAC = 60^\circ$$



+ Trường hợp H ở trên nửa đường tròn (A) đường kính PQ và không chứa O:

Khi đó A là góc tù. Ta cũng chứng minh tương tự H là trực tâm tam giác ABC và M là trung điểm của bán kính OF .

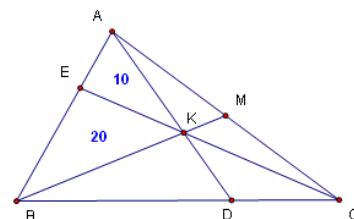
Suy ra $MOC = 60^0 \Rightarrow BOC = 120^0$

Mà $BFC = BOC = 120^\circ$ (2 góc đối xứng nhau qua BC).

Nhưng $BAC = BFC$ (góc nội tiếp cùng chắn cung BK).

Vậy $\widehat{BAC} = 120^\circ$

Bài 13: Trong hình bên, cho biết M là trung điểm của AC và các đường thẳng AD , BM và CE đồng quy tại K . Hai tam giác AKE và BKE có diện tích là 10 và 20. Tính diện tích tam giác ABC .



Lời giải

+ Gọi h là khoảng cách từ K đến AB , ta có:

$$\frac{S_{\Delta AKE}}{S_{\Delta BKE}} = \frac{AE \cdot \frac{h}{2}}{BE \cdot \frac{h}{2}} = \frac{AE}{BE} \Leftrightarrow \frac{AE}{BE} = \frac{1}{2}.$$

$$+ \text{ Suy ra: } \frac{S_{\Delta ACE}}{S_{\Delta BCE}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow S_{\Delta BCE} = 2S_{\Delta ACE} \quad (1)$$

+ Tương tự: $\frac{S_{\Delta AKM}}{S_{\Delta CKM}} = \frac{MA}{MB} = 1 \Leftrightarrow S_{\Delta AKM} = S_{\Delta CKM}$

Đặt $x = S_{\Delta AKM} = S_{\Delta CKM}$, ta có:

$$S_{ARM} = S_{CBM} \Leftrightarrow 20 + 10 + x = x + S_{BCK} \Rightarrow S_{BCK} = 30$$

$$(1) \Leftrightarrow 20 + S_{BCK} = 2(10 + 2x) \Leftrightarrow 10 + 2x = 25 \Leftrightarrow x = \frac{15}{2}$$

Do đó: $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AKB} + S_{\Delta BCK} + S_{\Delta AKC} = 10 + 20 + 30 + 2x = 75$

Bài 14: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, trung tuyến AM, phân giác AI. Tính HI, IM; biết rằng $AC = \frac{4}{3}AB$ và diện tích tam giác ABC là 24 cm^2

Giải:

1. Do $AC = \frac{3}{4} AB$ (gt) và $AB.AC = 2S = 48$,
suy ra $AC = 6$ (cm); $AB = 8$ (cm).

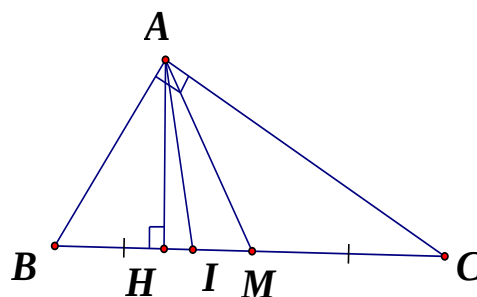
Áp dụng định lí Pitago trong tam giác vuông ABC ta tính được $BC = 10$ cm, suy ra $AM = 5$ (cm) (1)

Áp dụng tính chất giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông ABC ta tính được

$$BH = \frac{AB^2}{BC} = 3,6(\text{cm}) \quad (2)$$

Áp dụng tính chất đường phân giác của tam giác

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038



ta có

$$\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{IB}{IB+IC} = \frac{AB}{AB+AC} \Leftrightarrow \frac{IB}{10} = \frac{6}{6+8} \Rightarrow IB = \frac{30}{7}$$

cm (3)

Từ (1), (2) và (3), ta có I nằm giữa B và M; H nằm giữa B và I

$$\text{Vậy: } HI = BI - BH = \frac{4,8}{7} \text{ cm,} \quad MI = BM - BI = \frac{5}{7} \text{ cm}$$

Bài 15: Cho tam giác ABC vuông cân tại C. Gọi M là trung điểm của cạnh AB, P là điểm trên cạnh BC; các điểm N, L thuộc AP sao cho $CN \perp AP$ và $AL = CN$.

1. Chứng minh góc MCN bằng góc MAL.
2. Chứng minh $\triangle LMN$ vuông cân
3. Diện tích $\triangle ABC$ gấp 4 lần diện tích $\triangle MNL$, hãy tính góc CAP.

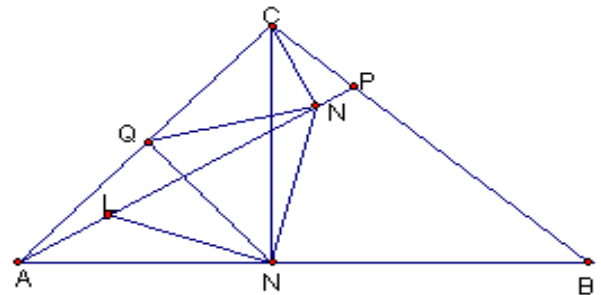
Giải:

1(1,0đ)

$$\text{Đặt } \angle ACP = a \Rightarrow \angle ACN = 90^\circ - a$$

$$\angle MCN = \angle ACN - 45^\circ$$

$$= 90^\circ - a - 45^\circ = 45^\circ - a = \angle LAM$$



2(2,0đ) Do $\triangle ABC$ vuông tại A mà AM là trung tuyến nên $AM = CM$ và $AL = CN$ (gt)
 $\angle MCN = \angle LAM$ (c/m trên)

Nên $\triangle AML = \triangle CMN \Rightarrow LM = MN$ và $\angle AML = \angle CMN \Rightarrow \angle LMN = 90^\circ - \angle AML + \angle CMN = 90^\circ$. Vậy tam giác $\triangle LMN$ vuông cân tại M

3 (2,0đ) Do các $\triangle LMN$, $\triangle ABC$ vuông cân nên:

$$2 S_{\triangle LMN} = MN^2 \text{ và } 2 S_{\triangle ABC} = AC^2$$

$$S_{\triangle ABC} = 4 S_{\triangle LMN} \text{ (gt) Từ đó suy ra } MN = \frac{1}{2} AC.$$

$$\text{Gọi Q là trung điểm của AC thì } QM = QN = \frac{1}{2} AC = MN$$

$$\Rightarrow \angle QMN = 60^\circ \text{ và } \angle QNA = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ.$$

$$\text{Mặt khác } AQ = NQ \text{ nên } \angle CAP = \angle QNA = 15^\circ$$

7. Điểm cố định, đường thẳng cố định, đường tròn cố định

A. Bài toán (giữ nguyên màu)

Bài 1: Cho đường tròn (O) cố định và hai điểm phân biệt B, C cố định thuộc đường tròn (O). Gọi A là một điểm thay đổi trên đường tròn (O) (điểm A không trùng với điểm B và C), M là trung điểm của đoạn thẳng AC. Từ điểm M kẻ đường thẳng (d) vuông góc với đường thẳng AB, đường thẳng (d) cắt đường thẳng AB tại điểm H. Chứng minh rằng khi điểm A thay đổi trên đường tròn (O) thì điểm H luôn nằm trên một đường tròn cố định.

Bài 2: Cho đường tròn tâm O và dây cung AB cố định ($O \notin AB$). P là điểm di động trên đoạn thẳng AB ($P \neq A, B$ và P khác trung điểm AB). Đường tròn tâm C đi qua điểm P tiếp xúc với đường tròn (O) tại A. Đường tròn tâm D đi qua điểm P tiếp xúc với đường tròn (O) tại B. Hai đường tròn (C) và (D) cắt nhau tại N ($N \neq P$).

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

- 1) Chứng minh rằng $ANP = BNP$ và bốn điểm O, D, C, N cùng nằm trên một đường tròn.
- 2) Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn ON luôn đi qua điểm cố định khi P di động.

Bài 3: Cho đoạn thẳng $OA=R$, vẽ đường tròn $(O;R)$. Trên đường tròn $(O;R)$ lấy H bất kỳ sao cho $AH < R$, qua H vẽ đường thẳng a tiếp xúc với đường tròn $(O;R)$. Trên đường thẳng a lấy B và C sao cho H nằm giữa B và C và $AB=AC=R$. Vẽ HM vuông góc với OB ($M \in OB$), vẽ HN vuông góc với OC ($N \in OC$)

a/ Chứng minh $OM \cdot OB = ON \cdot OC$ và MN luôn đi qua 1 điểm cố định

b/ Chứng minh $OB \cdot OC = 2R^2$

c/ Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác OMN khi H thay đổi

Bài 4: Cho đường tròn tâm O bán kính R đường kính AB . Từ hai điểm A và B kẻ hai tia tiếp tuyến Ax và By với nửa đường tròn, điểm M thuộc nửa đường tròn (sao cho tia Ax , By và nửa đường tròn chứa điểm M cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ AB). Qua điểm M kẻ tiếp tuyến thứ ba, cắt các tia tiếp tuyến Ax và By lần lượt ở C và D , Gọi giao điểm của AD và BC là K , MC và AB là H .

a) Chứng minh MK vuông góc với AB và $MK=KH$.

b) Vẽ tam giác vuông cân MBE đỉnh B ra phía ngoài nửa đường tròn (O) (BE và BD cùng nửa mặt phẳng bờ AB). Chứng minh rằng khi M di chuyển trên nửa đường tròn đường kính AB thì đường thẳng đi qua E và song song với MB luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 5: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O , một điểm I chuyển động trên cung BC không chứa điểm A (I không trùng với B và C). Đường thẳng vuông góc với IB tại I cắt đường thẳng AC tại E , đường thẳng vuông góc với IC tại I cắt đường thẳng AB tại F . Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 6: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O , một điểm I chuyển động trên cung BC không chứa điểm A (I không trùng với B và C). Đường thẳng vuông góc với IB tại I cắt đường thẳng AC tại E , đường thẳng vuông góc với IC tại I cắt đường thẳng AB tại F . Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 7: Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm A cố định với $OA=2R$, đường kính BC quay quanh O sao cho tam giác ABC là tam giác nhọn. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt đường thẳng OA tại điểm thứ hai là I . Các đường thẳng AB, AC cắt đường tròn (O) lần lượt tại điểm thứ hai là D và E . Gọi K là giao điểm của DE và AO

a) Chứng minh rằng $AK \cdot AI = AE \cdot AC$.

b) Tính độ dài của đoạn AK theo R .

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

c) Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ADE$ luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Bài 8: Cho đường tròn (O) , bán kính R , A là 1 điểm cố định nằm ngoài đường tròn. Một đường tròn thay đổi đi qua 2 điểm O, A cắt đường tròn (O) tại hai điểm P, Q . Chứng minh rằng đường thẳng PQ luôn đi qua 1 điểm cố định. (trước khi chứng minh hãy nêu dự đoán điểm cố định mà P, Q đi qua, giải thích cách nghĩ).

Bài 9: Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung BC không đi qua tâm. Gọi A là chính giữa cung nhỏ BC . Góc nội tiếp EAF quay quanh điểm A và có số đo bằng α không đổi sao cho E và F khác phía với điểm A qua BC ; AE và AF cắt BC lần lượt tại M và N . Lấy điểm D sao cho tứ giác $MNEF$ là hình bình hành.

a) Chứng minh tứ giác $MNEF$ nội tiếp.

b) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MDF . Chứng minh rằng khi góc nội tiếp EAF quay quanh A thì I chuyển động trên đường thẳng cố định.

c) Khi $\alpha = 60^\circ$ và $BC = R$, tính theo R độ dài nhỏ nhất của đoạn OI .

Bài 10: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O , một điểm I chuyển động trên cung BC không chứa điểm A (I không trùng với B và C). Đường thẳng vuông góc với IB tại I cắt đường thẳng AC tại E , đường thẳng vuông góc với IC tại I cắt đường thẳng AB tại F . Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 11: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 4. Trên hai cạnh AB và AD lần lượt lấy hai điểm E, F sao cho EC là phân giác góc BEF . Trên tia AB lấy K sao cho $BK = DF$. Chứng minh rằng $EF = EK$ và EF luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Bài 12: Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn nội tiếp (O) . Gọi BD và CE là hai đường cao của tam giác ABC . Tia AO cắt BC tại A_1 và cắt cung nhỏ BC tại A_2 . Tia BO cắt AC tại B_1 và cắt cung nhỏ AC tại B_2 . Tia CO cắt BA tại C_1 và cắt cung nhỏ AB tại C_2 . Từ A vẽ tia Ax vuông góc với DE . Cho cạnh BC cố định, đỉnh A di động trên cung lớn BC sao cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn. Chứng minh tia Ax luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 13: Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B . Từ một điểm C thay đổi trên tia đối của tia AB . Vẽ các tiếp tuyến $CD; CE$ với đường tròn tâm O ($D; E$ là các tiếp điểm và E nằm trong đường tròn tâm O'). Hai đường thẳng AD và AE cắt đường tròn tâm O' lần lượt tại M và N (M và N khác với điểm

b) Khi điểm C thay đổi thì đường thẳng DE luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 14: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$, M là điểm chính giữa của cung BC không chứa điểm A . Vẽ đường tròn (I) đi qua M và tiếp xúc với AB tại B , vẽ đường tròn (K) đi qua M và tiếp xúc với AC tại C . Gọi N là giao điểm thứ hai của đường tròn (I) và (K) . Lấy D là điểm bất kỳ thuộc cạnh AB (D khác A và B) điểm E thuộc tia đối của tia CA sao cho $BD = CE$. chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE luôn đi qua một điểm cố định khác A .

Bài 15: Cho đường tròn tâm (O) và dây BC khác đường kính. Lấy A thuộc cung BC lớn sao cho $AB > AC$ (A khác C). Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H . Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại M .

Qua D kẻ đường thẳng song song với EF cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt ở P và N.

Chứng minh rằng khi A di động trên cung BC lớn (nhưng vẫn thỏa mãn giả thiết ban đầu) thì đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 16: Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung AB cố định, $AB = R\sqrt{2}$. Điểm P di động trên dây AB (P khác A và B). Gọi $(C;R_1)$ là đường tròn đi qua P và tiếp xúc với đường tròn $(O;R)$ tại A, $(D;R_2)$ là đường tròn đi qua P và tiếp xúc với đường tròn $(O;R)$ tại B. hai đường tròn $(C;R_1)$ và $(D;R_2)$ cắt nhau tại điểm thứ hai là M.

Chứng minh khi P di động trên dây AB thì điểm M di động trên đường tròn cố định và đường thẳng MP luôn đi qua một điểm cố định N

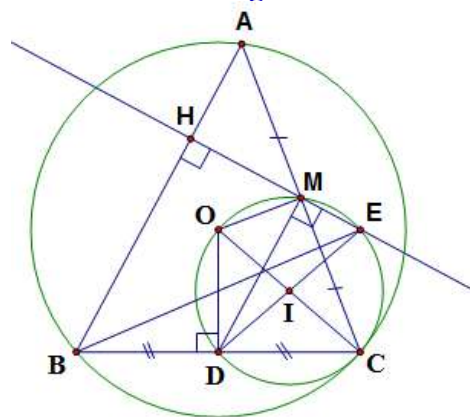
Bài 17: Cho ba điểm A, B, C cố định nằm trên một đường thẳng d (điểm B nằm giữa điểm A và điểm C). Vẽ đường tròn tâm O thay đổi nhưng luôn đi qua điểm B và điểm C (điểm O không thuộc đường thẳng d). Kẻ AM và AN là các tiếp tuyến với đường tròn tâm O (với M và N là các tiếp điểm). Đường thẳng BC cắt MN tại điểm K.

Chứng minh điểm K cố định khi đường tròn tâm O thay đổi.

B. Lời giải (giữ nguyên màu)

Bài 1: Cho đường tròn (O) cố định và hai điểm phân biệt B, C cố định thuộc đường tròn (O) . Gọi A là một điểm thay đổi trên đường tròn (O) (điểm A không trùng với điểm B và C), M là trung điểm của đoạn thẳng AC. Từ điểm M kẻ đường thẳng (d) vuông góc với đường thẳng AB, đường thẳng (d) cắt đường thẳng AB tại điểm H. Chứng minh rằng khi điểm A thay đổi trên đường tròn (O) thì điểm H luôn nằm trên một đường tròn cố định.

Lời giải



Gọi D là trung điểm của đoạn BC, vì tam giác BOC, AOC là các tam giác cân tại O nên $OD \perp BC, OM \perp AC$.

Ta có: $ODC = OMC = 90^\circ \Rightarrow$ Bốn điểm O, D, C, M cùng nằm trên đường tròn (I) có tâm I cố định, đường kính OC cố định.

Gọi E là điểm đối xứng với D qua tâm I, khi đó E cố định và DE là đường kính của đường tròn (I) .

Nếu $H \neq E, H \neq B$:

- Với $M \equiv E \Rightarrow BHE = 90^\circ$

- Với $M \neq E$, do $DM \parallel BH \Rightarrow DMH = 90^\circ$. Khi đó $DME = DMH = 90^\circ \Rightarrow H, M, E$ thẳng hàng. Suy ra $BHE = 90^\circ$

Vậy ta luôn có: $BHE = 90^\circ$ hoặc $H \equiv E$ hoặc $H \equiv B$ do đó H thuộc đường tròn đường kính BE cố định.

Bài 2: Cho đường tròn tâm O và dây cung AB cố định ($O \notin AB$). P là điểm di động trên đoạn thẳng AB ($P \neq A, B$ và P khác trung điểm AB). Đường tròn tâm C đi qua điểm P tiếp xúc với đường tròn (O) tại A . Đường tròn tâm D đi qua điểm P tiếp xúc với đường tròn (O) tại B . Hai đường tròn (C) và (D) cắt nhau tại N ($N \neq P$).

1) Chứng minh rằng $ANP = BNP$ và bốn điểm O, D, C, N cùng nằm trên một đường tròn.

2) Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn ON luôn đi qua điểm cố định khi P di động.

1) Gọi Q là giao điểm của các tiếp tuyến chung của (O) với (C), (D) tại A, B tương ứng.

Suy ra $ANP = QAP = QBP = BNP$.

Ta có $ANB = ANP + BNP = QAP + QBP$

$= 180^\circ - AQB$, suy ra $NAQB$ nội tiếp (1).

Dễ thấy tứ giác $OAQB$ nội tiếp (2)

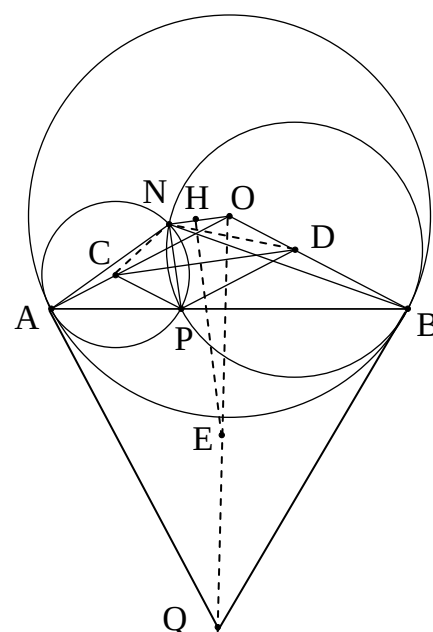
Từ (1) và (2) suy ra 5 điểm O, N, A, Q, B cùng nằm trên một đường tròn.

Suy ra các điểm O, N, A, B cùng nằm trên một đường tròn.

Ta có $OCN = 2OAN = 2OBN = ODN$,

suy ra bốn điểm O, D, C, N cùng nằm trên một đường tròn.

2) Gọi E là trung điểm OQ , suy ra E cố định và E là tâm đường tròn đi qua các điểm N, O, D, C . Suy ra đường trung trực của ON luôn đi qua điểm E cố định.



Lời giải

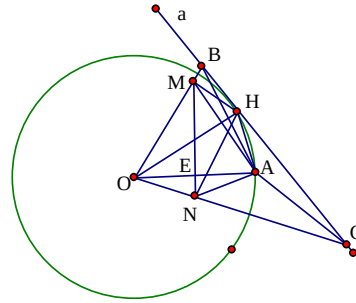
Bài 3: Cho đoạn thẳng $OA=R$, vẽ đường tròn $(O;R)$. Trên đường tròn $(O;R)$ lấy H bất kỳ sao cho $AH < R$, qua H vẽ đường thẳng a tiếp xúc với đường tròn $(O;R)$. Trên đường thẳng a lấy B và C sao cho H nằm giữa B và C và $AB=AC=R$. Vẽ HM vuông góc với OB ($M \in OB$), vẽ HN vuông góc với OC ($N \in OC$)

a/ Chứng minh $OM \cdot OB = ON \cdot OC$ và MN luôn đi qua 1 điểm cố định

b/ Chứng minh $OB \cdot OC = 2R^2$

c/ Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác OMN khi H thay đổi

Lời giải



a/ Chứng minh $OM \cdot OB = ON \cdot OC$ và MN luôn đi qua 1 điểm cố định

*Ta có $OH \perp HB$ (t/c tiếp tuyến) $\Rightarrow \triangle OHB$ vuông tại H, mà $HM \perp OB$ (gt) nên theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có $OM \cdot OB = OH^2 = R^2$

Chứng minh tương tự ta có $ON \cdot OC = OH^2 = R^2$. Vậy ta có $OM \cdot OB = ON \cdot OC$

* Ta có $OM \cdot OB = OH^2 = R^2$ mà $OA = R$ nên ta có $OM \cdot OB = OA^2 \Rightarrow \frac{OM}{OA} = \frac{OA}{OB}$

Xét $\triangle OMA$ và $\triangle OAB$ có O chung, có $\frac{OM}{OA} = \frac{OA}{OB} \Rightarrow \triangle OMA \sim \triangle OAB \Rightarrow \angle OAM = \angle OBA$. Ta có

$AO = AB = R$ (gt) $\Rightarrow \triangle OAB$ cân $\Rightarrow \angle AOB = \angle OBA \Rightarrow \angle AOM = \angle OBA$, vậy $\angle OAM = \angle AOM \Rightarrow \triangle OMA$ cân $\Rightarrow MO = MA$

Chứng minh tương tự ta có $\triangle ONA$ cân $\Rightarrow NO = NA$

Ta có $MO = MA$; $NO = NA$, vậy MN là trung trực của OA, gọi E là giao điểm của MN với OA ta có $EO = EA = \frac{OA}{2}$ và $MN \perp OA$ tại E, mà O, A cố định nên E cố định. Vậy MN luôn đi qua 1 điểm cố định

b/ Chứng minh $OB \cdot OC = 2R^2$

Ta có $OM \cdot OB = ON \cdot OC \Rightarrow \frac{OM}{OC} = \frac{ON}{OB}$

Xét $\triangle OMN$ và $\triangle OCB$ có O chung, có $\frac{OM}{OC} = \frac{ON}{OB} \Rightarrow \triangle OMN \sim \triangle OCB$, mà $OE \perp MN$ và $OH \perp BC$

nên ta có $\frac{OM}{OC} = \frac{OE}{OH} \Rightarrow \frac{OM}{OC} = \frac{OE}{OA} = \frac{OE}{2OE} = \frac{1}{2} \Rightarrow OM = \frac{1}{2} OC$ (vì $OH = OA = 2OE$)

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Ta có $OM \cdot OB = OH^2 = R^2$ (cm trên) $\Rightarrow \frac{1}{2} OC \cdot OB = R^2 \Rightarrow OC \cdot OB = 2R^2$

c/ Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác OMN khi H thay đổi

Ta có $\triangle OMN \sim \triangle OCB$ (cm trên) $\Rightarrow \frac{S_{OMN}}{S_{OCB}} = \frac{OE^2}{OH^2} = \frac{OE^2}{OA^2} = \frac{OE^2}{(2OE)^2} = \frac{1}{4}$

Nên $S_{OMN} = \frac{1}{4} S_{OCB} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot OH \cdot BC = \frac{1}{8} R \cdot BC \leq \frac{1}{8} R(AB + AC) = \frac{1}{8} R(R + R) = \frac{1}{4} R^2$

Dấu bằng có khi B, A, C thẳng hàng $\Leftrightarrow H \equiv A$

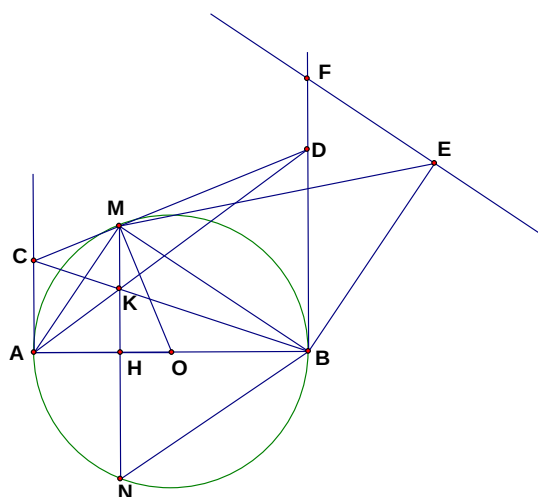
Vậy diện tích tam giác OMN lớn nhất là $S_{OMN} = \frac{1}{4} R^2$ khi $H \equiv A$

Bài 4: Cho đường tròn tâm O bán kính R đường kính AB. Từ hai điểm A và B kẻ hai tia tiếp tuyến Ax và By với nửa đường tròn, điểm M thuộc nửa đường tròn (sao cho tia Ax, By và nửa đường tròn chứa điểm M cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ AB). Qua điểm M kẻ tiếp tuyến thứ ba, cắt các tia tiếp tuyến Ax và By lần lượt ở C và D, Gọi giao điểm của AD và BC là K, MK và AB là H.

a) Chứng minh MK vuông góc với AB và MK=KH.

b) Vẽ tam giác vuông cân MBE đỉnh B ra phía ngoài nửa đường tròn (O) (BE và BD cùng nửa mặt phẳng bờ AB). Chứng minh rằng khi M di chuyển trên nửa đường tròn đường kính AB thì đường thẳng đi qua E và song song với MB luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



a) Theo tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau ta có:

$AC = CM, BD = DM.$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Vì Ax và By cùng vuông góc với AB nên Ax // By, theo định lí Ta-lét ta

$$\text{có: } \frac{KD}{KA} = \frac{BD}{AC} \Rightarrow \frac{KD}{KA} = \frac{MD}{MC} \Rightarrow MK \parallel AC \text{ mà } AC \perp AB \Rightarrow MK \perp AB$$

$$\text{Ta có } \frac{KH}{AC} = \frac{BK}{BC} (1); \frac{KM}{AC} = \frac{DK}{DA} (2); \frac{KD}{AD} = \frac{BK}{BC} (3); \text{Tu (1)(2)(3) ta có:}$$

$$\frac{KH}{AC} = \frac{MK}{AC} \Rightarrow MK = KH$$

b) Gọi F là giao điểm của tia By và đường thẳng đi qua E và song song với MB. Ta có $\angle BEF = 90^\circ$.

Chứng minh tam giác AMB và tam giác FEB bằng nhau (g-c-g)

$$\Rightarrow AB = BF = 2R \Rightarrow BF \text{ không đổi,}$$

F thuộc tia By cố định $\Rightarrow$ F cố định.

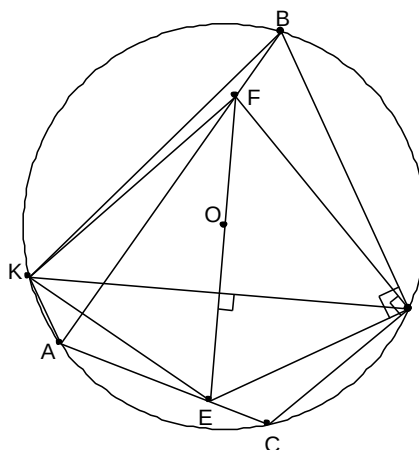
Vậy khi M di chuyển trên nửa đường tròn đường kính AB thì đường thẳng đi qua E và song song với MB luôn đi qua điểm cố định F.

Bài 5: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, một điểm I chuyển động trên cung BC không chứa điểm A (I không trùng với B và C). Đường thẳng vuông góc với IB tại I cắt đường thẳng AC tại E, đường thẳng vuông góc với IC tại I cắt đường thẳng AB tại F. Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải

$$+ \text{ Khi } \angle BAC = 90^\circ \Rightarrow \angle BIC = 90^\circ.$$

$$\Rightarrow F \text{ trùng với B, E trùng với C lúc đó EF là đường kính.}$$



$$\Rightarrow EF \text{ đi qua điểm O cố định.}$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

+ Khi $BAC < 90^0 \Rightarrow BIC > 90^0$.

Gọi K là điểm đối xứng của I qua EF. $\Rightarrow EIF = EAF$ (cùng bù BIC)

$$EKF = EIF \text{ (Do I và K đối xứng qua EF)}$$

$$\Rightarrow EKF = EAF$$

$$\Rightarrow AKFE \text{ nội tiếp} \Rightarrow KAB = KEF \text{ (cùng chắn } KF \text{)} \quad (1)$$

$$IEF = KEF \text{ (Do K và I đối xứng qua EF)} \quad (2)$$

$$IEF = BIK \text{ (cùng phụ } KIE \text{)} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3)} \Rightarrow KAB = BIK$$

$$\Rightarrow AKBI \text{ là tứ giác nội tiếp}$$

$$\Rightarrow K \in (O) \text{ Mà EF là đường trung trực của KI} \Rightarrow E, O, F \text{ thẳng hàng.}$$

+ Khi $BAC > 90^0 \Rightarrow BIC < 90^0$ chứng minh tương tự.

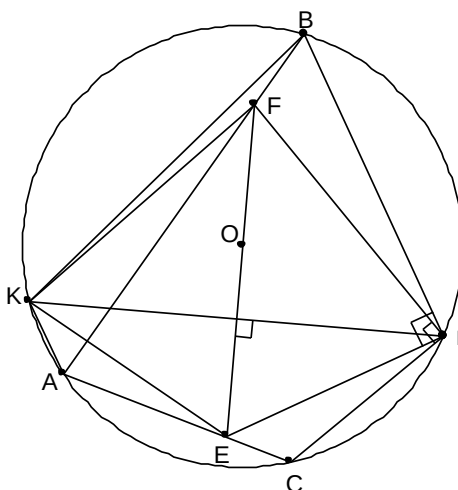
Vậy đường thẳng EF luôn đi qua điểm O cố định.

Bài 6: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, một điểm I chuyển động trên cung BC không chứa điểm A (I không trùng với B và C). Đường thẳng vuông góc với IB tại I cắt đường thẳng AC tại E, đường thẳng vuông góc với IC tại I cắt đường thẳng AB tại F. Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải

+ Khi $BAC = 90^0 \Rightarrow BIC = 90^0$.

$\Rightarrow F$ trùng với B, E trùng với C lúc đó EF là đường kính.



$\Rightarrow EF$ đi qua điểm O cố định.

+ Khi $BAC < 90^\circ \Rightarrow BIC > 90^\circ$.

Gọi K là điểm đối xứng của I qua EF . $\Rightarrow EIF = EAF$ (cùng bù BIC)

$$EKF = EIF \text{ (Do } I \text{ và } K \text{ đối xứng qua } EF) \Rightarrow EKF = EAF$$

$$\Rightarrow AKFE \text{ nội tiếp} \Rightarrow KAB = KEF \text{ (cung chắn } KF) \text{ (1)}$$

$$IEF = KEF \text{ (Do } K \text{ và } I \text{ đối xứng qua } EF) \text{ (2)}$$

$$IEF = BIK \text{ (cùng phụ } KIE) \text{ (3)}$$

$$\text{Từ (1), (2), (3)} \Rightarrow KAB = BIK$$

$\Rightarrow AKBI$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow K \in (O)$ Mà EF là đường trung trực của $KI \Rightarrow E, O, F$ thẳng hàng.

+ Khi $BAC > 90^\circ \Rightarrow BIC < 90^\circ$ chứng minh tương tự.

Vậy đường thẳng EF luôn đi qua điểm O cố định.

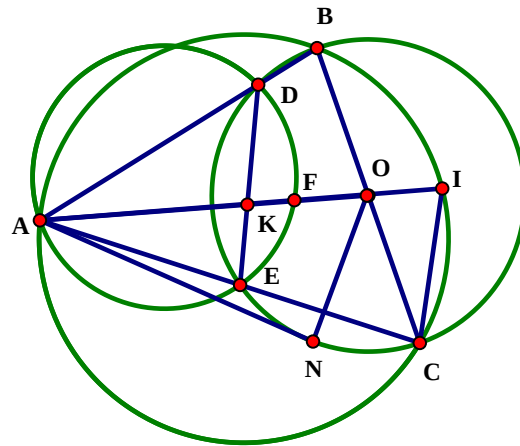
Bài 7: Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A cố định với $OA = 2R$, đường kính BC quay quanh O sao cho tam giác ABC là tam giác nhọn. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt đường thẳng OA tại điểm thứ hai là I . Các đường thẳng AB, AC cắt đường tròn (O) lần lượt tại điểm thứ hai là D và E . Gọi K là giao điểm của DE và AO

a) Chứng minh rằng $AK \cdot AI = AE \cdot AC$.

b) Tính độ dài của đoạn AK theo R .

c) Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ADE$ luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Lời giải



a) Ta có tứ giác $BCED$ nội tiếp $\Rightarrow \angle ABC + \angle DEC = 180^\circ \Rightarrow \angle AEK = \angle ABC$ (cùng bù $\angle DEC$).

Mặt khác $\angle ABC = \angle AIC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC); suy ra $\angle AEK = \angle AIC$ (bắc cầu)

Xét $\triangle AEK$ và $\triangle AIC$ có : $\angle AEK = \angle AIC$ và $\angle EAK$ chung nên $\triangle AEK \sim \triangle AIC$ (g.g)

$$\frac{AE}{AI} = \frac{AK}{AC} \Rightarrow AE \cdot AC = AK \cdot AI$$

b) Xét $\triangle AOB$ và $\triangle COI$ có : $\angle AOB = \angle COI$ (đối đỉnh) và $\angle BAO = \angle ICO$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BI) nên $\triangle AOB \sim \triangle COI$ (g.g) $\Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OI} \Rightarrow OI = \frac{OB \cdot OB}{OA} = \frac{R}{2} \Rightarrow AI = \frac{5}{2}R$

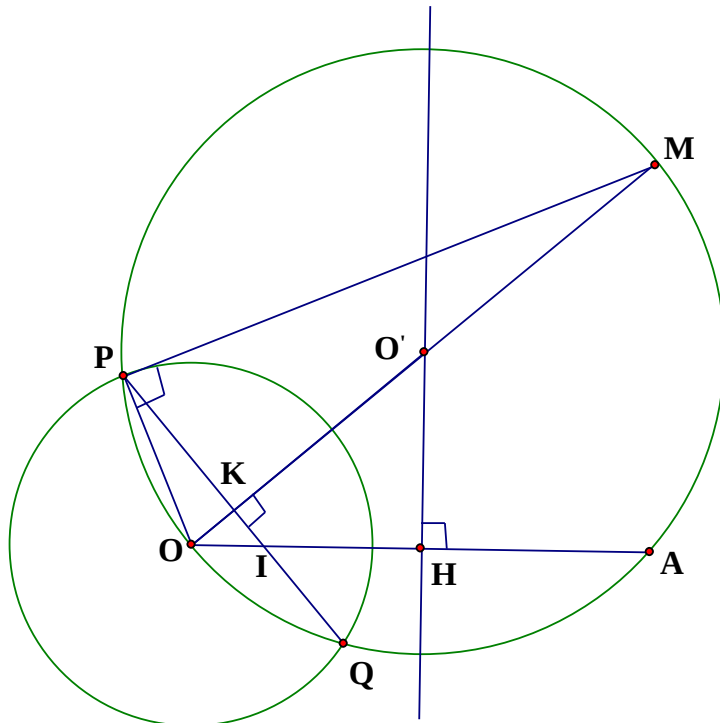
Kẻ tiếp tuyến AN với đường tròn (O) , dễ dàng chứng minh được $\triangle ANE \sim \triangle ACN$ (g.g)

$$\Rightarrow AE \cdot AC = AN^2 = AO^2 - ON^2 = 3R^2.$$

$$\text{Mà theo câu (a) : } AE \cdot AC = AK \cdot AI \Rightarrow AK \cdot \frac{5}{2}R = 3R^2 \Rightarrow AK = \frac{6}{5}R.$$

c) Gọi F là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ADE$ với OA , ta có $\angle AFD = \angle AED$ mà $\angle AEK = \angle ABC$ (câu a) nên $\angle AFD = \angle ABC$ nên tứ giác $BDFO$ nội tiếp đường tròn. Dễ dàng chứng minh được $\triangle ADF \sim \triangle AOB$ (g.g) $\Rightarrow AD \cdot AB = AF \cdot AO$; và ta cũng chứng minh được $AD \cdot AB = AN^2 \Rightarrow AF \cdot AO = AN^2 \Rightarrow AF = \frac{3}{2}R$ không đổi, mà A cố định nên F cố định suy ra AF cố định. Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ADE$ thuộc đường trung trực của đoạn AF cố định.

Bài 8: Cho đường tròn (O), bán kính R, A là 1 điểm cố định nằm ngoài đường tròn. Một đường tròn thay đổi đi qua 2 điểm O, A cắt đường tròn (O) tại hai điểm P, Q. Chứng minh rằng đường thẳng PQ luôn đi qua 1 điểm cố định. (trước khi chứng minh hãy nêu dự đoán điểm cố định mà P, Q đi qua, giải thích cách nghĩ).



Giải

*) Dự đoán điểm cố định là giao điểm I của OA và PQ.

*) Chứng minh: G/s (O') đi qua O và A $\Rightarrow O'$ nằm trên đường trung trực của AO, gọi giao điểm của đường trung trực đó với AO là H, giao điểm của OA với PQ là I, giao của OO' với PQ là K, OO' cắt đường tròn (O') ở M.

Ta có OO' là đường trung trực của PQ $\Rightarrow OO' \perp PQ$

ΔOKI đồng dạng với $\Delta OHO'$ (g.g)

(Do $OO' = \frac{1}{2} OM$ và $AO = 2.OH$)

Ta có $OPM = 90^\circ$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \Delta OPM$ vuông tại P, lại có $PQ \perp OO' \Rightarrow OP^2 = OK.OM$ (Hệ thức lượng trong tam giác vuông)

$\Rightarrow OI = \frac{OP^2}{OA} = \frac{R^2}{OA}$ không đổi.

Do O cố định, OI không đổi nên I cố định

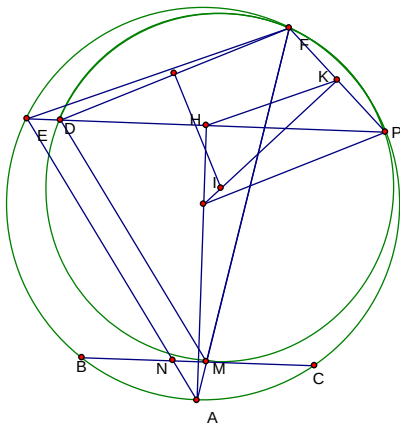
Vậy đường thẳng PQ đi qua 1 điểm cố định.

Bài 9: Cho đường tròn (O;R) và dây cung BC không đi qua tâm. Gọi A là chính giữa cung nhỏ BC. Góc nội tiếp EAF quay quanh điểm A và có số đo bằng α không đổi sao cho E và F khác phía với điểm A qua BC; AE và AF cắt BC lần lượt tại M và N. Lấy điểm D sao cho tứ giác MNED là hình bình hành.

a) Chứng minh tứ giác MNEF nội tiếp.

b) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MDF. Chứng minh rằng khi góc nội tiếp EAF quay quanh A thì I chuyển động trên đường thẳng cố định.

c) Khi $\alpha = 60^\circ$ và $BC=R$, tính theo R độ dài nhỏ nhất của đoạn OI.

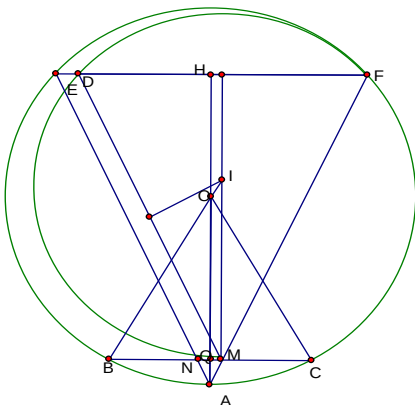


Giải:

a) $\angle ENB = \angle EFM$ suy ra $\angle ENM + \angle EFM = 180^\circ$

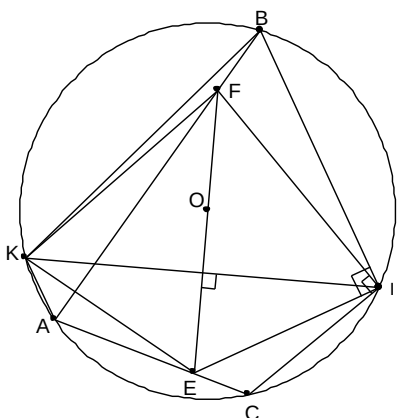
b) gọi giao (O) và (I) tiếp tam giác MDF tại P ta có $\angle DPF = \angle DMF = \angle EAF = \alpha$

mặt khác $\angle EAF = \angle EPF$ nên $\angle EPF = \angle DPF$ nên E;D;P thẳng hàng suy ra $EP \parallel BC$ mà $AO \perp BC \Rightarrow AO \perp EP$ gọi AO cắt EP tại H ;OI cắt PF tại K thì K là trung điểm FP và OI vuông góc FP nên tứ giác OHKP nội tiếp suy ra $\angle HOI = \angle HPF = \alpha$ (không đổi) suy ra I thuộc tia Ox tạo với tia AO một góc bằng α



c) khi $BC=R$; $\angle EAF=60^\circ$ thì tam giác OBC đều suy ra IO đi qua B ta chứng minh được OI min khi F trùng P khi đó $EF \parallel BC$ tam giác AMN; MDF đều khi đó $IM \parallel AO$ ta tính BQ;QM được áp dụng Talet tam giác BIM có $AO \parallel IM$ tính được OI

Bài 10: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, một điểm I chuyển động trên cung BC không chứa điểm A (I không trùng với B và C). Đường thẳng vuông góc với IB tại I cắt đường thẳng AC tại E, đường thẳng vuông góc với IC tại I cắt đường thẳng AB tại F. Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định.

Giải:

+ Khi $\angle BAC < 90^\circ \Rightarrow \angle BIC > 90^\circ$.

Gọi K là điểm đối xứng của I qua EF.

$$\Rightarrow \angle EIF = \angle EAF \text{ (cùng bù } \angle BIC \text{)}$$

$$\angle EKF = \angle EIF \text{ (Do I và K đối xứng qua EF)}$$

$$\Rightarrow \angle EKF = \angle EAF$$

$$\Rightarrow AKFE \text{ nội tiếp}$$

$$\Rightarrow \angle KAB = \angle KEF \text{ (cung chắn } KF \text{)} \quad (1)$$

$$\angle IEF = \angle KEF \text{ (Do K và I đối xứng qua EF)} \quad (2)$$

$$\angle IEF = \angle BIK \text{ (cùng phụ } \angle KIE \text{)} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3)} \Rightarrow \angle KAB = \angle BIK$$

$$\Rightarrow AKBI \text{ là tứ giác nội tiếp}$$

$$\Rightarrow K \in (O)$$

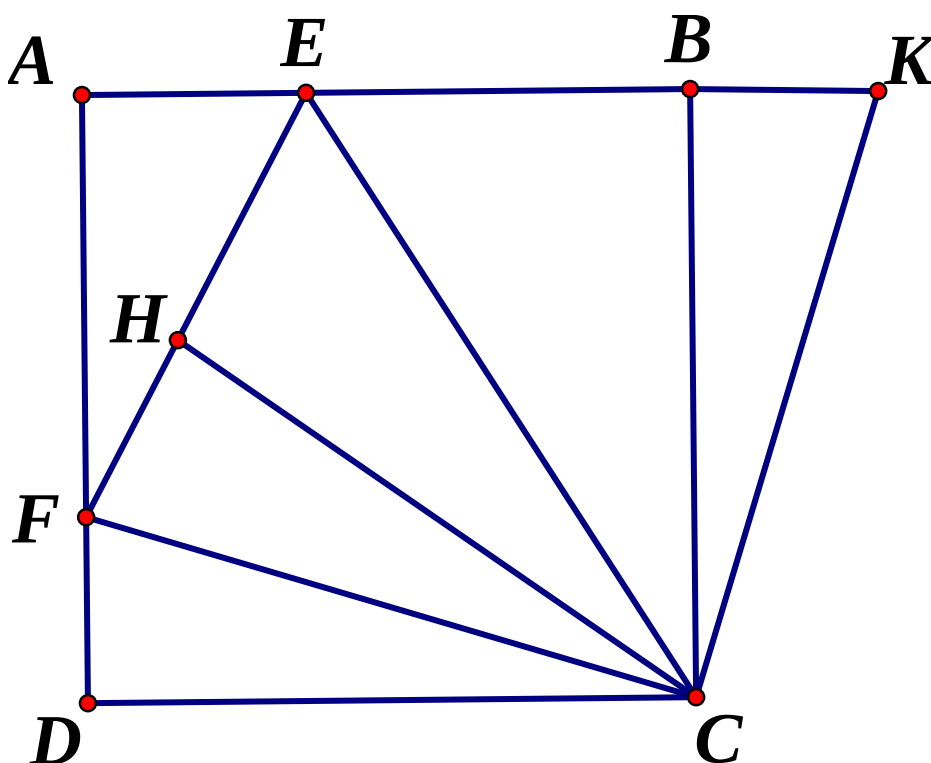
Mà EF là đường trung trực của KI $\Rightarrow E, O, F$ thẳng hàng.

+ Khi $\angle BAC > 90^\circ \Rightarrow \angle BIC < 90^\circ$ chứng minh tương tự.

Vậy đường thẳng EF luôn đi qua điểm O cố định.

Bài 11: Cho hình vuông ABCD cạnh bằng 4. Trên hai cạnh AB và AD lần lượt lấy hai điểm E, F sao cho EC là phân giác góc BEF. Trên tia AB lấy K sao cho BK=DF. Chứng minh rằng EF=EK và EF luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Lời giải



Ta có: $CD=CB$, $DF=BK$, $\angle FDC = \angle CBK = 90^\circ$ nên $\triangle DFC = \triangle BKC \Rightarrow CK = CF$

Gọi H là chân đường cao kẻ từ C của tam giác CEF.

$$\triangle HEC = \triangle BEC \Rightarrow HE = EB$$

$$\triangle HFC = \triangle BKC \text{ nên } FH = BK$$

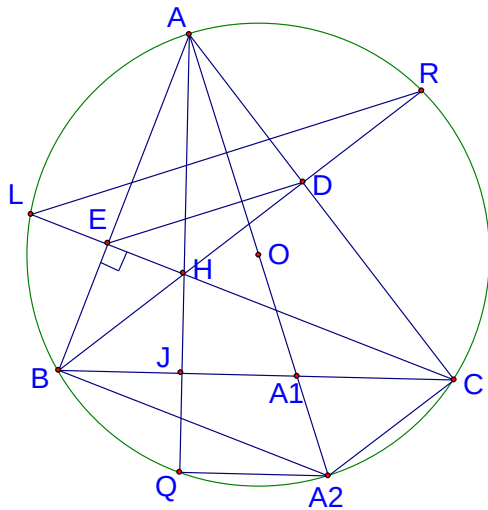
Cộng vế theo vế suy ra $EF = EK$

Do $\triangle HEC = \triangle BEC \Rightarrow CB = CH$ và $EF \perp CH$

Vậy tam giác EFC luôn tiếp xúc đường tròn cố định tâm C bán kính $CH = 4$.

Bài 12: Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn nội tiếp (O). Gọi BD và CE là hai đường cao của tam giác ABC. Tia AO cắt BC tại A_1 và cắt cung nhỏ BC tại A_2 . Tia BO cắt AC tại B_1 và cắt cung nhỏ AC tại B_2 . Tia CO cắt BA tại C_1 và cắt cung nhỏ AB tại C_2 . Từ A vẽ tia Ax vuông góc với DE. Cho cạnh BC cố định, đỉnh A di động trên cung lớn BC sao cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn. Chứng minh tia Ax luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



* Tia BD cắt cung AC tại R, tia CE cắt cung AB tại L.

Chứng minh được $DE \parallel RL$ suy ra $LR \perp Ax$.

$\Rightarrow$ cung $AL =$ cung AR chứng minh Ax đi qua tâm O khi A di động trên cung lớn BC.

Bài 13: Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B. Từ một điểm C thay đổi trên tia đối của tia AB. Vẽ các tiếp tuyến CD; CE với đường tròn tâm O (D; E là các tiếp điểm và E nằm trong đường tròn tâm O'). Hai đường thẳng AD và AE cắt đường tròn tâm O' lần lượt tại M và N (M và N khác với điểm B). Khi điểm C thay đổi thì đường thẳng DE luôn đi qua một điểm cố định.

Giải:

Gọi Q là giao điểm của CO và DE $\Rightarrow$

$OC \perp DE$ tại Q

$\Rightarrow \Delta OCD$ vuông tại D có DQ là đường cao

$\Rightarrow OQ \cdot OC = OD^2 = R^2$ (1)

Gọi K giao điểm của hai đường thẳng

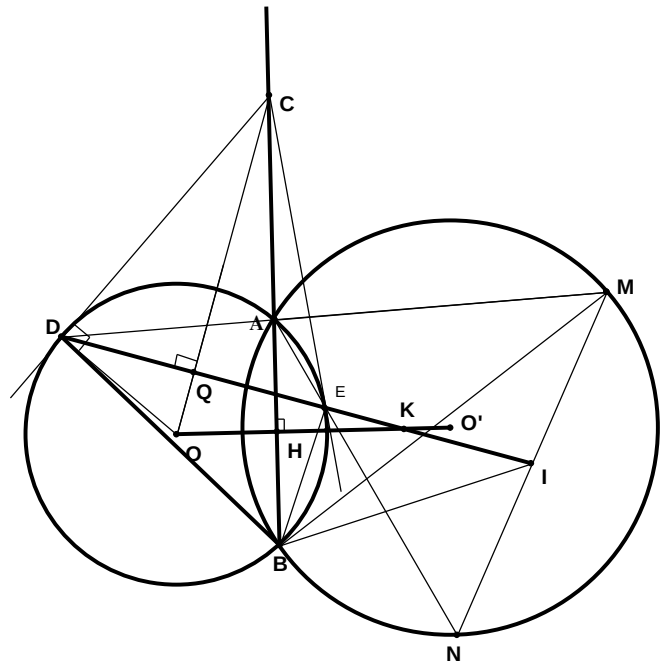
OO' và DE; H là giao điểm của AB và

$OO' \Rightarrow OO' \perp AB$ tại H.

Xét ΔKQO và ΔCHO có

$\angle Q = \angle H = 90^\circ$; O chung

$\Rightarrow \Delta KQO \sim \Delta CHO$ (g.g)



$$\Rightarrow \frac{KO}{CO} = \frac{OQ}{OH} \Rightarrow OC.OQ = KO.OH \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow KO.OH = R^2 \Rightarrow OK = \frac{R^2}{OH} \quad \text{Vì OH cố định và R không đổi}$$

$$\Rightarrow OK \text{ không đổi} \Rightarrow K \text{ cố định}$$

Bài 14: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$, M là điểm chính giữa của cung BC không chứa điểm A . Vẽ đường tròn (I) đi qua M và tiếp xúc với AB tại B , vẽ đường tròn (K) đi qua M và tiếp xúc với AC tại C . Gọi N là giao điểm thứ hai của đường tròn (I) và (K) . Lấy D là điểm bất kỳ thuộc cạnh AB (D khác A và B) điểm E thuộc tia đối của tia CA sao cho $BD = CE$. chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE luôn đi qua một điểm cố định khác A

Giải:

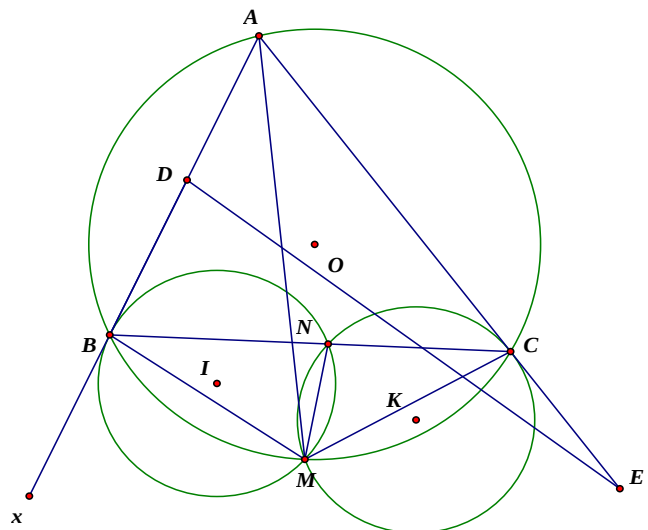
Xét $\triangle BDM$ và $\triangle CEM$ có

$$\begin{cases} BD = CE (gt) \\ \angle DBM = \angle ECM (ABMC \text{ nt}) \\ BM = MC (gt) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle BDM = \triangle CEM (c.g.c)$$

$$\Rightarrow \angle BDM = \angle CEM \Rightarrow \text{tứ giác } ADME \text{ nội tiếp}$$

Do M cố định nên đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE luôn đi qua điểm cố định là M



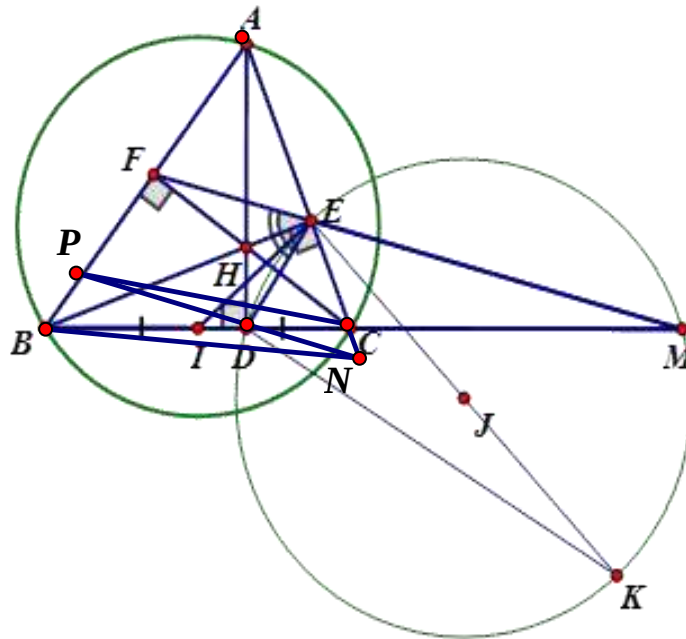
Bài 15: Cho đường tròn tâm (O) và dây BC khác đường kính. Lấy A thuộc cung BC lớn sao cho $AB > AC$

(A khác C). Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H . Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại M .

Qua D kẻ đường thẳng song song với EF cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt ở P và N .

Chứng minh rằng khi A di động trên cung BC lớn (nhưng vẫn thỏa mãn giả thiết ban đầu) thì đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP luôn đi qua một điểm cố định.

Giải:



+) Ta có: $FE \parallel PN \Rightarrow CPE = FEA$ (2 góc đồng vị)

Mà $ABC = FEA$ (vì tứ giác BFEC nội tiếp)

$\Rightarrow CPF = CBN$

+) C/m : Tứ giác CPBN nội tiếp

+) C/m : $DP.DN = DB.DC$

+) Ta Có : IE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle MED$ (cmt)

$\Rightarrow$ C/m : $IE^2 = IM.ID$

Mà $IE = IB$

$\Rightarrow IB^2 = IM.ID$

$\Rightarrow IB^2 - ID^2 = IM.ID - ID^2$

$\Rightarrow (IB - ID)(IB + ID) = ID(IM - ID)$

$\Rightarrow BD.DC = ID.DM$

+) C/m : $DP.DN = ID.DM$

+) C/m : Tứ giác MNIP nội tiếp

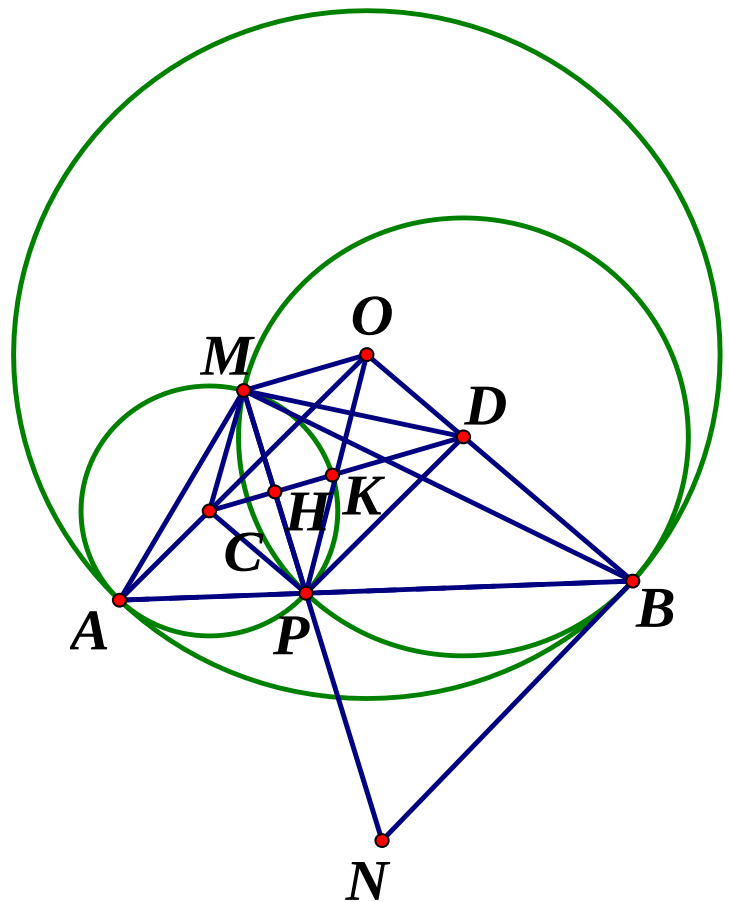
$\Rightarrow$ Khi A di động trên cung BC lớn (nhưng vẫn thỏa mãn giả thiết ban đầu) thì đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP luôn đi qua một điểm cố định

Bài 16: Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung AB cố định, $AB = R\sqrt{2}$. Điểm P di động trên dây AB (P khác A và B). Gọi $(C;R_1)$ là đường tròn đi qua P và tiếp xúc với đường tròn $(O;R)$ tại A, $(D;R_2)$ là đường tròn đi qua P và tiếp xúc với đường tròn $(O;R)$ tại B. hai đường tròn $(C;R_1)$ và $(D;R_2)$ cắt nhau tại điểm thứ hai là M.

Chứng minh khi P di động trên dây AB thì điểm M di động trên đường tròn cố định và đường thẳng MP luôn đi qua một điểm cố định N

Giải:

Xét tam giác AOB có
 $OA^2 + OB^2 = 2R^2 = AB^2$ nên tam giác
 OAB vuông cân tại O. Vì 4 điểm C,
 D, O, M cùng thuộc một đường tròn
 (kể cả $M \equiv O$) nên $\angle COB = \angle CMD$ (1)
 Xét $\triangle MAB$ và $\triangle MCD$ có:
 $\angle MAB = \angle MCD$ (cùng bằng $\frac{1}{2}$ số đo MP
 của (C))
 $\angle MBD = \angle MDC$ (cùng bằng $\frac{1}{2}$ số đo MP
 của (D))
 Nên $\triangle MAB$ đồng dạng $\triangle MCD$ (g.g)
 Vì $\triangle MAB$ đồng dạng với $\triangle MCD$
 suy ra $\angle AMB = \angle COD$ hay
 $\angle AMB = \angle AOB = 90^\circ$



Do AB cố định nên điểm M thuộc đường tròn tâm I đường kính AB
 Ta có $\angle ACP = \angle BDP = \angle AOB = 90^\circ$ nên $\angle AMP = \frac{1}{2} \angle ACP = 45^\circ$ (Góc nội tiếp và góc ở tâm của (C))
 $\angle BMP = \frac{1}{2} \angle BDP = 45^\circ$ (góc nội tiếp và góc ở tâm của (D))

Do đó MP là phân giác $\angle AMB$

Mà $\angle AMB = \angle AOB = 90^\circ$ nên M thuộc đường tròn (I) ngoại tiếp tam giác AOB

Giả sử MP cắt đường tròn (I) tại N thì N là trung điểm cung AB không chứa điểm O nên N cố định

Bài 17: Cho ba điểm A, B, C cố định nằm trên một đường thẳng d (điểm B nằm giữa điểm A và điểm C). Vẽ đường tròn tâm O thay đổi nhưng luôn đi qua điểm B và điểm C (điểm O không thuộc đường thẳng d). Kẻ AM và AN là các tiếp tuyến với đường tròn tâm O (với M và N là các tiếp điểm). Đường thẳng BC cắt MN tại điểm K.

Chứng minh điểm K cố định khi đường tròn tâm O thay đổi.

Giải:

Gọi I là trung điểm của BC suy ra
 $IO \perp BC$ và đường thẳng AO cắt
 MN tại điểm H

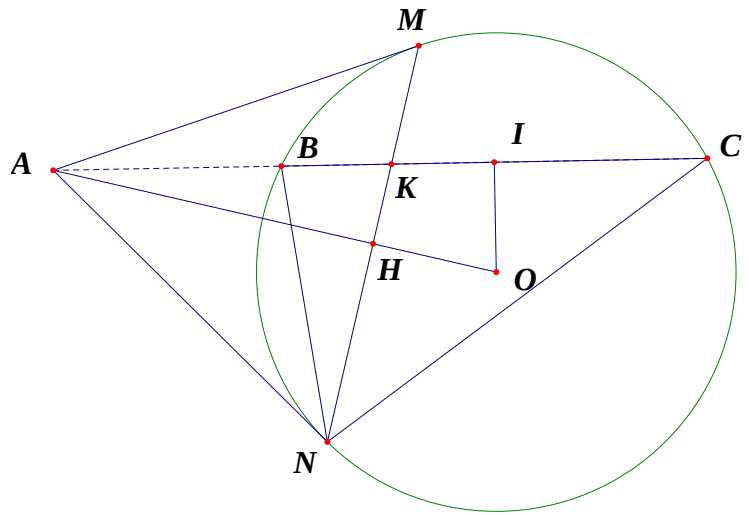
$\triangle ABN$ đồng dạng với $\triangle ANC$ (Vì $\angle ANB = \angle ACN$, $\angle BAN$ chung)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AN} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow AB \cdot AC = AN^2.$$

ΔANO vuông tại N, đường cao
NH nên $AH.AO = AN^2$

$$\Rightarrow AB.AC = AH.AO \quad (1)$$

ΔHK đồng dạng với ΔAIO (g.g)
Nên



$$\frac{AH}{AI} = \frac{AK}{AO} \Rightarrow AI \cdot AK = AH \cdot AO \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AI.AK = AB.AC \Rightarrow AK = \frac{AB \cdot AC}{AI}$

Ta có A, B, C cố định nên I cố định $\Rightarrow$ AK không đổi.

Mà A cố định, K là giao điểm của BC và MN nên K thuộc tia AB
 $\Rightarrow$ K cố định (đpcm)

7.1. Dạng tổng hợp.

Bài 1: Cho đường tròn $(O; R)$ có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Gọi M là điểm di động trên đoạn thẳng OB (M khác O và P). Tia CM cắt đường tròn (O) tại N ; DB cắt CN tại P ; AN cắt CD tại Q

- a) Chứng minh $PQ // AB$
- b) Chứng minh $\triangle CAQ$ đồng dạng với $\triangle AMC$, từ đó suy ra diện tích tứ giác $ACMQ$ không đổi khi M di động trên đoạn thẳng OB
- c) Chứng minh hệ thức $\frac{CQ}{AM} = \left(\frac{CN}{AN}\right)^2$
- d) Xác định vị trí của điểm M trên đoạn thẳng OB để NQ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CPQ . Tính OM theo R trong trường hợp đó.

Bài 2: Từ một điểm I nằm ngoài đường tròn tâm O kẻ hai tiếp tuyến IA và IB đến đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Tia Ix nằm giữa hai tia IA và IB, Ix không đi qua O và cắt đường tròn (O) tại C và E (E nằm giữa C và I), đoạn IO cắt AB tại M. Chứng minh:

- c) $\left(\frac{MB}{MC}\right)^2 = \frac{IE}{IC}$.

Bài 3: Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) ($AB < AC$). Kẻ đường cao AH ($H \in BC$) của tam giác ABC và kẻ đường kính AD của đường tròn (O) .

- Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng DH . Chứng minh OM là đường trung trực của đoạn thẳng BC .
- Gọi S, T là các giao điểm của đường tròn (O) với đường tròn tâm A bán kính AH ; F là giao điểm của ST và BC . Từ A kẻ đường thẳng vuông góc với DH tại E . Chứng minh $FB \cdot FC = FH^2$ và 3 điểm F, E, A thẳng hàng.
- Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác BCM tiếp xúc với đường tròn tâm A bán kính AH .

Bài 4: Cho tam giác nhọn ABC không cân có $AB < AC$, trực tâm H và đường trung tuyến AM . Gọi K là hình chiếu vuông góc của H lên AM , D là điểm đối xứng của A qua M và L là điểm đối xứng của K qua BC .

- Chứng minh các tứ giác $BCKH$ và $ABLC$ nội tiếp.
- Chứng minh $\angle LAB = \angle MAC$.
- Gọi I là hình chiếu vuông góc của H lên AL , X là giao điểm của AL và BC . Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác IXM và đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC tiếp xúc với nhau.

Bài 5: Cho $\triangle ABC$ không cân, biết $\triangle ABC$ ngoại tiếp đường tròn (I) . Gọi D, E, F lần lượt là các tiếp điểm của BC, CA, AB với đường tròn (I) . Gọi M là giao điểm của đường thẳng EF và đường thẳng BC , biết AD cắt đường tròn (I) tại điểm N ($N \neq D$), gọi K là giao điểm của AI và EF .

- Chứng minh rằng $AK \cdot AI = AN \cdot AD$ và các điểm I, D, N, K cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh MN là tiếp tuyến của đường tròn (I) .

Bài 6: Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Gọi E là điểm nằm chính giữa của cung nhỏ BC . Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $EM = EC$, đường thẳng BM cắt đường tròn (O) tại N (N khác B). Các đường thẳng EA và EN cắt cạnh BC lần lượt tại D và F .

- Chứng minh tam giác AEN đồng dạng với tam giác FED .
- Chứng minh M là trực tâm của tam giác AEN .
- Gọi I là trung điểm của AN , tia IM cắt đường tròn (O) tại K . Chứng minh đường thẳng CM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMK .

Bài 7: Cho đường tròn (O) cố định và điểm A cố định ở ngoài đường tròn (O) . Từ A kẻ đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (O) tại B . Một tia Ax thay đổi, nằm trong miền OAB , cắt đường tròn (O) tại hai điểm C, D (C ở giữa A và D). Từ B kẻ BH vuông góc với AO tại H . Chứng minh rằng:

- Tích $AC \cdot AD$ không đổi; b) $CHOD$ là tứ giác nội tiếp;
- Phân giác của $\angle CHD$ cố định.

Bài 8: Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của BC , AM cắt (O) tại D khác A . Đường tròn ngoại tiếp tam giác MDC cắt đường thẳng AC tại E khác C . Đường tròn ngoại tiếp tam giác MDB cắt đường thẳng AB tại F khác B .

- Chứng minh hai tam giác BDF, CDE đồng dạng.

2, Chứng minh rằng ba điểm E, M, F thẳng hàng và $OA \perp EF$.

3/ Đường phân giác của góc BAC cắt EF tại điểm N. Đường phân giác của góc CEN cắt CN tại P, đường phân giác của góc BFN cắt BN tại Q. Chứng minh rằng $PQ \parallel BC$.

Bài 9: Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$ và trực tâm là T. Gọi H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC và D là điểm đối xứng với T qua đường thẳng BC; I và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của D trên AB và AC; E và F lần lượt là trung điểm của AC và IH.

a) Chứng minh ABDC là tứ giác nội tiếp và hai tam giác ACD và IHD đồng dạng.

b) Chứng minh ba điểm I, H, K thẳng hàng và DEF là tam giác vuông.

c) Chứng minh $\frac{BC}{DH} = \frac{AB}{DI} + \frac{AC}{DK}$.

Bài 10: Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) với $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của BC, AM cắt (O) tại điểm D khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MDC cắt đường thẳng AC tại E khác C. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MDB cắt đường thẳng AB tại F khác B.

1. Chứng minh rằng hai tam giác BDF, CDE đồng dạng.

2. Chứng minh rằng ba điểm E, M, F thẳng hàng và $OA \perp EF$.

3. Đường phân giác của BAC cắt EF tại điểm N. Đường phân giác của CEN cắt CN tại P, đường phân giác của BFN cắt BN tại Q. Chứng minh rằng PQ song song với BC.

Bài 11: Cho điểm M thuộc nửa đường tròn (O) đường

kính AB ($M \neq A, M \neq B, MA < MB$). Tia phân giác của góc AMB cắt AB tại C. Qua C vẽ đường thẳng vuông góc với AB cắt các đường thẳng AM, BM theo thứ tự tại D, H.

a) Chứng minh rằng: $CA = CH$.

b) Gọi E là hình chiếu vuông góc của H trên tiếp tuyến tại A của (O), F là hình chiếu vuông góc của D trên tiếp tuyến tại B của (O). Chứng minh rằng: E, M, F thẳng hàng.

c) Gọi S_1, S_2 theo thứ tự là diện tích của các tứ giác ACHE và BCDF. Chứng minh rằng: $CM^2 < \sqrt{S_1 \cdot S_2}$.

Bài 12: Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB = 2R. Vẽ đường thẳng d là tiếp tuyến của (O) tại

B. Trên cung AB lấy điểm M tùy ý (M khác A và B), tia AM cắt d tại N. Gọi C là trung điểm của AM, tia CO cắt d tại D.

a) Chứng minh rằng: OBNC nội tiếp.

b) Chứng minh rằng: $NO \perp AD$

c) Chứng minh rằng: $CA \cdot CN = CO \cdot CD$.

d) Xác định vị trí điểm M để (AM.AN) đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 13: Cho đường tròn (O) đường kính AB. Gọi M là điểm thuộc cung AB ($AB \neq A, M \neq B$) và I

là điểm thuộc đoạn OA ($I \neq O, I \neq A$). Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm M, kẻ các tia tiếp tuyến Ax, By với đường tròn (O). Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với IM, đường

thẳng này cắt Ax , By lần lượt tại C và D . Gọi E là giao điểm của AM với IC , F là giao điểm của BM với ID . Chứng minh rằng:

- Tứ giác $MEIF$ là tứ giác nội tiếp
- $EF \parallel AB$
- OM là tiếp tuyến chung của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác CEM và DFM .

Bài 14: Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Hai đường tròn $(B; BA)$ và $(C; CA)$ cắt nhau tại điểm thứ hai là D . Vẽ đường thẳng a bất kì qua D cắt đường tròn (B) tại M và cắt đường tròn (C) tại N (D nằm giữa M và N). Tiếp tuyến tại M của đường tròn (B) và tiếp tuyến tại N của đường tròn (C) cắt nhau tại E .

- Chứng minh BC là tia phân giác của $\angle ABD$
- Gọi I là giao điểm của AD và BC . Chứng minh: $AD^2 = 4BI \cdot CI$
- Chứng minh bốn điểm A, M, E, N cùng thuộc một đường tròn.
- Chứng minh rằng số đo $\angle MEN$ không phụ thuộc vị trí của đường thẳng a .

Bài 15: Cho hình vuông $ABCD$, đường tròn (O) nội tiếp hình vuông tiếp xúc với các cạnh AB, AD tại hai điểm E, F . Gọi G là giao điểm các đường thẳng CE và BF .

- Chứng minh rằng năm điểm A, F, O, G, E cùng nằm trên một đường tròn
- Gọi giao điểm của đường thẳng FB và đường tròn là M ($M \neq F$). CMR M là trung điểm của đoạn thẳng BG .
- CMR trực tâm của tam giác GAF nằm trên đường tròn (O)

Bài 16: Cho tam giác ABC cân tại A , có đường tròn nội tiếp (I) . Các điểm E, F theo thứ tự thuộc các cạnh CA, AB (E khác C và A ; F khác B và A) sao cho EF tiếp xúc với đường tròn (I) tại điểm P . Gọi K, L lần lượt là hình chiếu vuông góc của E, F trên BC . Giả sử FK cắt EL tại điểm J . Gọi H là hình chiếu vuông góc của J trên BC .

- Chứng minh rằng HJ là phân giác của góc $\angle EHF$.
- Kí hiệu S_1, S_2 lần lượt là diện tích của các tứ giác $BFJL$ và $CEJK$. Chứng minh rằng
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{BF^2}{CE^2}.$$
- Gọi D là trung điểm của cạnh BC . Chứng minh rằng ba điểm P, J, D thẳng hàng.

Bài 17: Cho đường tròn O đường kính BC và một điểm A nằm bất kì trên đường tròn (A khác B và C). Gọi AH là đường cao của $\triangle ABC$, đường tròn tâm I đường kính AH cắt các dây cung AB, AC tương ứng tại D, E .

- Chứng minh rằng: $\angle DHE = 90^\circ$ và $AB \cdot AD = AC \cdot AE$

- b) Các tiếp tuyến của đường tròn (I) tại D và E cắt BC tương ứng tại G và F. Tính số đo $\widehat{GIF}$.
- c) Xác định vị trí điểm A trên đường tròn (O) để tứ giác DEFG có diện tích lớn nhất.

Bài 18: Cho tam giác ABC vuông tại A và (C) là đường tròn tâm C bán kính CA. Lấy điểm D thuộc đường tròn (C) và nằm trong tam giác ABC. Gọi M là điểm trên cạnh AB sao cho

$$BDM = \frac{1}{2}ACD; N \text{ là giao điểm của đường thẳng MD với đường cao AH của tam giác}$$

ABC; E là giao điểm thứ hai của đường thẳng BD với đường tròn (C). Chứng minh rằng:

- a) MN song song với AE.
- b) $BD \cdot BE = BA^2$ và tứ giác DHCE nội tiếp.
- c) HA là đường phân giác của góc DHE và D là trung điểm của đoạn thẳng MN.

Bài 19: Cho đường tròn (O) và một điểm P ở ngoài đường tròn. Kẻ hai tiếp tuyến PA, PB với đường tròn (O) (A, B là hai tiếp điểm). PO cắt đường tròn tại hai điểm K và I (K nằm giữa P và O) và cắt AB tại H. Gọi D là điểm đối xứng của B qua O, C là giao điểm của PD và đường tròn (O).

- a) Chứng minh tứ giác BHCP nội tiếp.
- b) Chứng minh $AC \perp CH$.
- c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác ACH cắt IC tại M. Tia AM cắt IB tại Q. Chứng minh M là trung điểm của AQ.

Bài 20: Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) ngoại tiếp đường tròn tâm O. Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của (O) với các cạnh AB, AC, BC. Đường thẳng BO cắt các đường thẳng EF và DF lần lượt tại I và K. Giả sử M là điểm di chuyển trên đoạn CE.

- a. Khi $AM = AB$, gọi H là giao điểm của BM và EF. Chứng minh rằng ba điểm A, O, H thẳng hàng, từ đó suy ra tứ giác ABHI nội tiếp.
- b. Gọi N là giao điểm của đường thẳng BM với cung nhỏ EF của (O), P, Q lần lượt là hình chiếu của N trên các đường thẳng DE và DF. Xác định vị trí điểm M để độ dài đoạn thẳng PQ max.

Bài 21: Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O). Kẻ đường cao AH của tam giác ABC. Gọi P, Q lần lượt là chân của đường vuông góc kẻ từ H đến các cạnh AB, AC.

- a) Chứng minh rằng BCQP là tứ giác nội tiếp.
- b) Hai đường thẳng PQ và BC cắt nhau tại M. Chứng minh rằng $MH^2 = MB \cdot MC$.
- c) Đường thẳng MA cắt đường tròn (O) tại K (K khác A). Gọi I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác BCQP. Chứng minh rằng ba điểm I, H, K thẳng hàng.

Bài 22: Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AM, BN, CP của tam giác ABC cắt nhau tại H. Dựng hình bình hành BHCD.

- 1) Chứng minh: Các tứ giác APHN, ABDC là các tứ giác nội tiếp.

- 2) Gọi E là giao điểm của AD và BN. Chứng minh: $AB.AH = AE.AC$
- 3) Giả sử các điểm B và C cố định, A thay đổi sao cho tam giác ABC nhọn và $\angle BAC$ không đổi. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tứ giác APHN có diện tích không đổi

Bài 23: Cho đường tròn $(O; R)$ và dây BC cố định không đi qua tâm. Trên tia đối của tia BC lấy điểm A (A khác B). Từ A kẻ hai tiếp tuyến AM và AN với đường tròn (O) (M và N là các tiếp điểm). Gọi I là trung điểm của BC.

- 1) Chứng minh A, O, M, N, I cùng thuộc một đường tròn và IA là tia phân giác của góc MIN
- 2) Gọi K là giao điểm của MN và BC. Chứng minh $\frac{2}{AK} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$.
- 3) Đường thẳng qua M và vuông góc với đường thẳng ON cắt (O) tại điểm thứ hai là P. Xác định vị trí của điểm A trên tia đối của tia BC để AMPN là hình bình hành.

Bài 24: Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung $BC = R\sqrt{3}$ cố định. Điểm A di động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn. Gọi E là điểm đối xứng với B qua AC và F và điểm đối xứng với C qua AB. Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABE và ACF cắt nhau tại K (K không trùng A). Gọi H là giao điểm của BE và CF.

- a) Chứng minh KA là phân giác trong góc BKC và tứ giác BHCK nội tiếp.
- b) Xác định vị trí điểm A để diện tích tứ giác BHCK lớn nhất, tính diện tích lớn nhất của tứ giác đó theo R.
- c) Chứng minh AK luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 25: Cho tam giác ABC vuông tại B, đường cao BH ($H \in AC$). Gọi (ω) là đường tròn tâm C bán kính CB. Gọi F là một điểm bất kì trên đoạn thẳng BH (F khác B và H). AF cắt (ω) tại hai điểm D, E (D nằm giữa A và E). Gọi K là trung điểm DE.

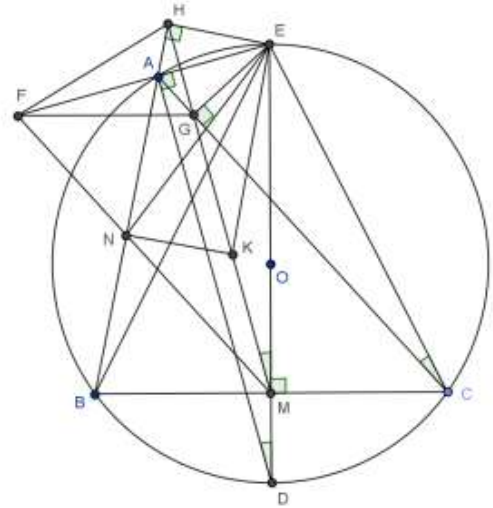
- a) Chứng minh rằng FKCH là tứ giác nội tiếp.
- b) Chứng minh rằng $AD.AE = AH.AC = AF.AK$;
- c) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác BFK tiếp xúc với (ω) tại B.

Bài 26: Cho tam giác nhọn ABC (Với $AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O. Đường phân giác và đường phân giác ngoài của $\angle BAC$ cắt đường tròn (O) lần lượt tại D và E (cùng khác A). Gọi G là hình chiếu vuông góc của E lên cạnh AC, gọi M và N tương ứng là trung điểm của các đoạn thẳng BC và BA. Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng GM, H là giao điểm của đường thẳng AB và đường thẳng MG, F là giao điểm của đường thẳng MN và đường thẳng AE.

- a) Chứng minh rằng hai đường thẳng AD và GM song song.
- b) Chứng minh $FH = MC$.
- c) Chứng minh $KE + KN \leq \sqrt{2}.EN$.

Lời giải

Hình vẽ:



a) (1,0 điểm)

+ Có AD, AE là các phân giác trong và ngoài của góc BAC nên chúng vuông góc, suy ra ED là đường kính của (O) .

+ Lại có D là điểm chính giữa của cung nhỏ BC của (O) nên có OD vuông góc với BC tại trung điểm M. Vậy D, M, O, E thẳng hàng và $DE \perp BC$.

+ Xét tứ giác EGMC có

$EGC = EMC = 90^\circ$ nên EGMC là tứ giác nội tiếp.

+ Suy ra $EMG = ECG$, lại có

$ECG = EDA$ nên $EMG = EDA$, suy ra $GM \parallel AD$.

b) (1,0 điểm)

+ $AE \perp AD$ và $MG \parallel AD$ nên $MG \perp FE$. Lại có $EG \perp AC$ và $MF \parallel AC$ nên $EG \perp MF$. Từ đó suy ra G là trực tâm tam giác MFE, do đó $FG \perp ME$ hay $FG \perp DE$.

+ Có $FG \parallel MC$ (vì cùng vuông góc với DE), $FM \parallel GC$ nên FMCG là hình bình hành, suy ra $FG = MC$.

+ Từ AE là phân giác của HAG và $HG \perp AE$ suy ra đường thẳng AE là đường trung trực của đoạn HG.

Suy ra $FH = FG$. Vậy $FH = MC$.

c) (1,0 điểm)

+ Từ $EAB = EGM$ (vì cùng cộng với ECB ra 180°), $ABE = GME$ (vì cùng bằng ECA), suy ra $\triangle EAB \sim \triangle EGM$ (g.g)

+ Có N và K là các trung điểm của hai cạnh tương ứng là AB và GM nên $EKG = ENA$, suy ra tứ giác EKNH là tứ giác nội tiếp.

+ Lại có $AHE = AGE = 90^\circ$ (Do H, G đối xứng nhau qua AE) nên dẫn đến $NKE = 90^\circ$.

Có $NE^2 = EK^2 + KN^2$. Từ $2(EK^2 + KN^2) \geq (EK + KN)^2$ có

$2NE^2 \geq (EK + KN)^2$ hay $KE + KN \leq NE\sqrt{2}$, vậy có đpcm.

B. Lời giải

Bài 1: Cho đường tròn $(O; R)$ có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Gọi M là điểm di động trên đoạn thẳng OB (M khác O và P). Tia CM cắt đường tròn (O) tại N ; DB cắt CN tại P ; AN cắt CD tại Q

e) Chứng minh $PQ \parallel AB$

f) Chứng minh $\triangle CAQ$ đồng dạng với $\triangle AMC$, từ đó suy ra diện tích tứ giác ACMQ không đổi khi M di động trên đoạn thẳng OB

g) Chứng minh hệ thức $\frac{CQ}{AM} = \left(\frac{CN}{AN}\right)^2$

h) Xác định vị trí của điểm M trên đoạn thẳng OB để NQ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CPQ . Tính OM theo R trong trường hợp đó.

Lời giải

a) Vì $AB \perp CD$ nên $CA = CB \Rightarrow D_1 = N_1$ nên tứ giác $PQDN$ nội tiếp
 $\Rightarrow PND + PQD = 180^\circ$ mà $PND = 90^\circ \Rightarrow PQD = 90^\circ \Rightarrow PQ \perp CD \Rightarrow PQ \parallel AB$.

b) Xét hai tam giác CAQ và AMC

$$ACQ = MAC = 45^\circ$$

$$CAQ = AMC \text{ (do } sd AC + sd BN = sd BC + sd BN)$$

Vậy $\triangle CAQ \sim \triangle MAC (g - g)$

$$\Rightarrow \frac{CA}{AM} = \frac{CQ}{AC} \Rightarrow AM \cdot CQ = AC^2 = 2R^2$$

$$\text{Tứ giác } ACMQ \text{ có } AM \perp CQ \Rightarrow S_{ACMQ} = \frac{AM \cdot CQ}{2} = \frac{AC^2}{2} = \frac{2R^2}{2} = R^2$$

$$\text{c) Ta có } \triangle CAQ \sim \triangle MAC (g - g) \Rightarrow \frac{CA}{AM} = \frac{CQ}{AC} = \frac{AQ}{MC} \Rightarrow \frac{CQ}{AM} = \left(\frac{AQ}{MC} \right)^2 \quad (1)$$

$$\triangle COM \sim \triangle CND (g - g) \text{ (vì } DCN \text{ chung, } COM = CND = 90^\circ)$$

$$\text{Suy ra } \frac{CM}{CD} = \frac{CO}{CN} \Rightarrow CM \cdot CN = 2R \cdot R = 2R^2$$

$$\text{Tương tự : } AQ \cdot AN = 2R^2$$

$$\text{Vậy } CM \cdot CN = AQ \cdot AN \Rightarrow \frac{AQ}{MC} = \frac{CN}{AN} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{CQ}{AM} = \left(\frac{CN}{AN} \right)^2$$

d) Ta có tứ giác $PQDN$ nội tiếp $\Rightarrow PQN = PDN$

$$\text{Mà } PDN = BCN \text{ nên } PQN = BCN$$

NQ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle CPQ$ khi $PQN = PCQ$

$$\text{Do đó } BCN = PCQ \text{ hay } BN = ND$$

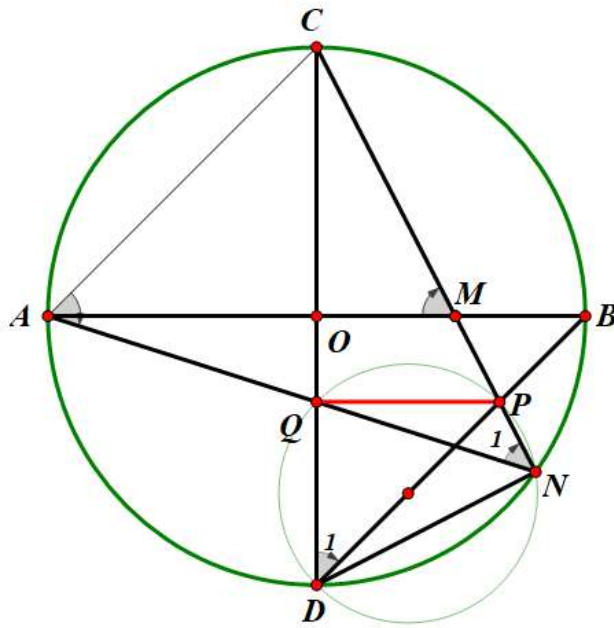
Suy ra CN là phân giác của góc OCB

$$\text{Tan góc } BOC \text{ vuông cân tại } O \Rightarrow BC = OB\sqrt{2} = R\sqrt{2}$$

$$\text{Vì } CM \text{ là phân giác của tam giác } BOC \text{ nên } \frac{OM}{MB} = \frac{OC}{CB} = \frac{R}{R\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Ta có } OM + MB = R \Rightarrow OM = R(\sqrt{2} - 1)$$

Vậy khi $OM = R(\sqrt{2} - 1)$ thì NQ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle CPQ$



Bài 2: Từ một điểm I nằm ngoài đường tròn tâm O kẻ hai tiếp tuyến IA và IB đến đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Tia Ix nằm giữa hai tia IA và IB, Ix không đi qua O và cắt đường tròn (O) tại C và E (E nằm giữa C và I), đoạn IO cắt AB tại M. Chứng minh:

a) Tứ giác OMEC nội tiếp

b) $AMC = AME$

c) $\left(\frac{MB}{MC}\right)^2 = \frac{IE}{IC}$.

Lời giải

a) $\triangle IAE$ và $\triangle ICA$ có $IAE = ICA$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung AE)

và góc I chung

$\Rightarrow \triangle IAE \sim \triangle ICA$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{IA}{IC} = \frac{IE}{IA} \Rightarrow IA^2 = IE \cdot IC$ (1)

Lại có $\triangle IAO$ vuông tại A có $AM \perp IO$ (do IO là trung trực của AB)

$\Rightarrow IA^2 = IM \cdot IO$ (2)

Từ (1) và (2) ta có

$IE \cdot IC = IM \cdot IO$

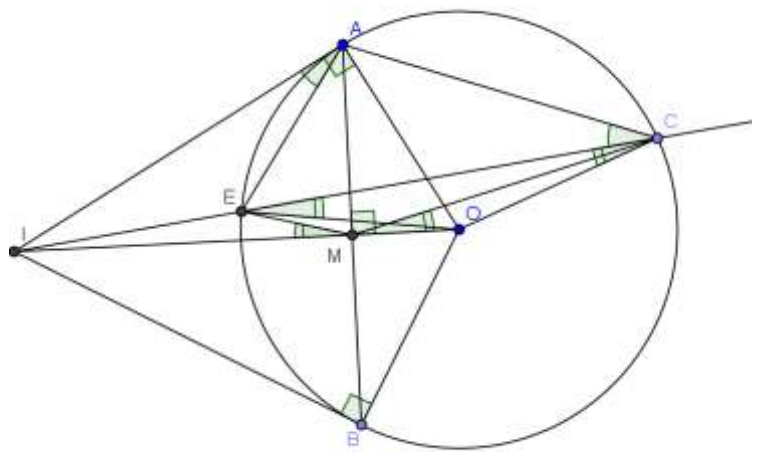
$\Leftrightarrow \frac{IE}{IM} = \frac{IO}{IC}$

$\triangle IEM$ và $\triangle IOC$ góc I chung và $\frac{IE}{IM} = \frac{IO}{IC}$

$\Rightarrow \triangle IEM \sim \triangle IOC$ (c.g.c)

$\Rightarrow \angle IEM = \angle IOC$

$\Rightarrow$ Tứ giác OMEC nội tiếp (góc trong của tứ giác bằng góc ngoài ở đỉnh đối diện)



b) Do tứ giác OMEC nội tiếp (câu a)

$\Rightarrow OEC = OMC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung OC)

Mà $OEC = OCE$ (do tam giác OCE cân tại O)

Và $OCE = IME$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow IME = OMC$

Mà $IME + EMA = 90^\circ$ và $OMC + CMA = 90^\circ$ (do $AB \perp IO$)

$\Rightarrow AMC = AME$

c) $\triangle CMO$ và $\triangle ICO$ có

$CMO = ICO (= OEC)$

IOC chung

$\Rightarrow \triangle CMO \sim \triangle ICO$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{CM}{MO} = \frac{IC}{CO}$$

$$\Rightarrow CM.CO = MO.IC$$

$$\Rightarrow CM^2.CO = CM.MO.IC$$

$$\Rightarrow \frac{CM^2}{MO.IC} = \frac{CM}{CO} \quad (1)$$

Lại có $\triangle IEM \sim \triangle COM$ (g.g) (do $IEM = MOC (= IOC)$ theo câu a và $EMI = OMC$ (câu b))

$$\Rightarrow \frac{IM}{IE} = \frac{CM}{CO} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có

$$\frac{IM}{IE} = \frac{CM^2}{MO.IC} \Rightarrow \frac{IM.MO}{MC^2} = \frac{IE}{IC}$$

Mà $MA^2 = MI.MO$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông IAO)

$$\Rightarrow \frac{MA^2}{MC^2} = \frac{IE}{IC} \text{ mà } MA = MB$$

$$\Rightarrow \frac{MB^2}{MC^2} = \frac{IE}{IC} \text{ hay } \left(\frac{MB}{MC} \right)^2 = \frac{IE}{IC}.$$

Bài 3: Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) ($AB < AC$). Kẻ đường cao AH ($H \in BC$) của tam giác ABC và kẻ đường kính AD của đường tròn (O).

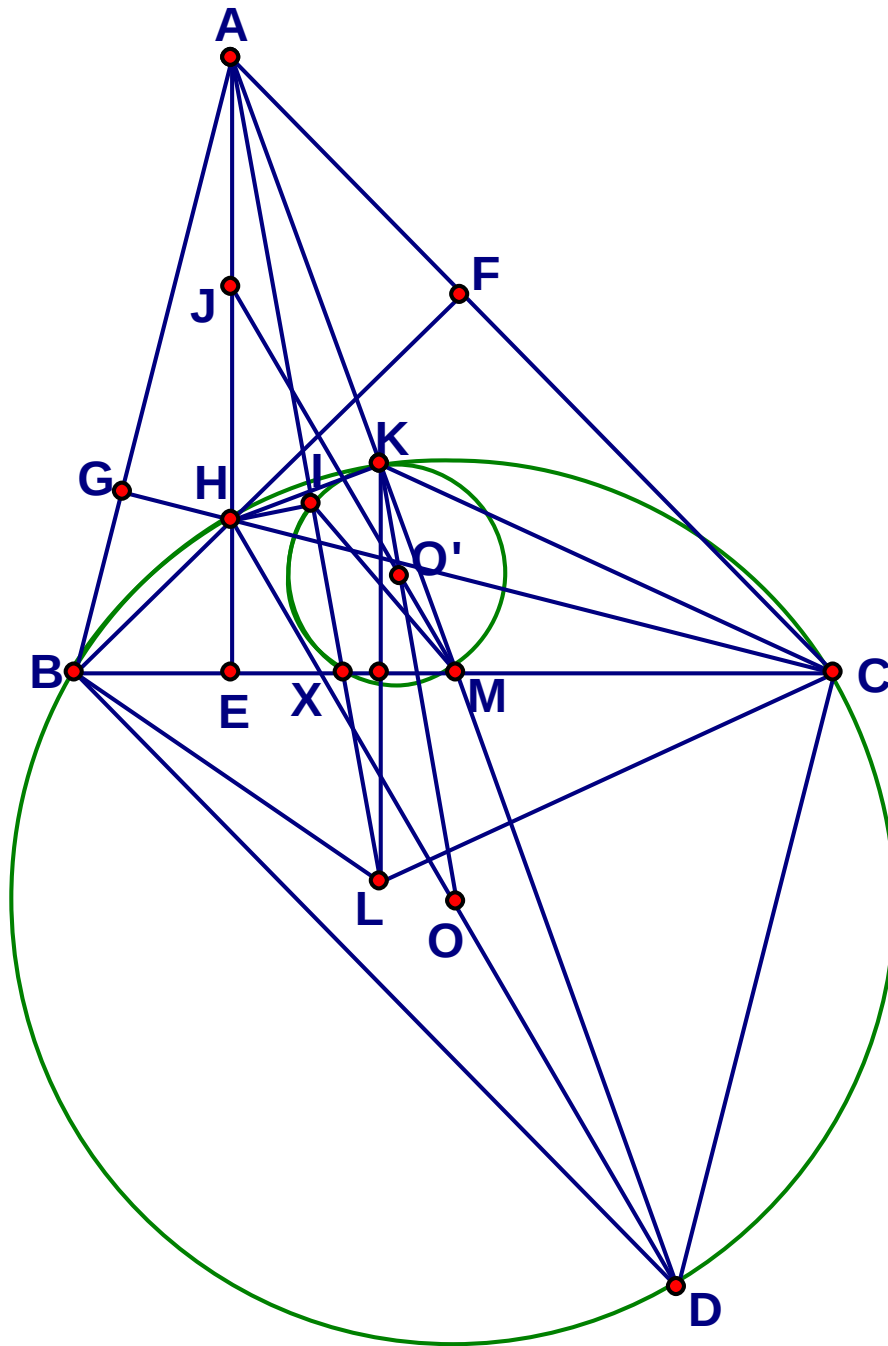
a. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng DH. Chứng minh OM là đường trung trực của đoạn thẳng BC.

b. Gọi S, T là các giao điểm của đường tròn (O) với đường tròn tâm A bán kính AH; F là giao điểm của ST và BC. Từ A kẻ đường thẳng vuông góc với DH tại E. Chứng minh $FB.FC = FH^2$ và 3 điểm F, E, A thẳng hàng.

c. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác BCM tiếp xúc với đường tròn tâm A bán kính AH.

Lời giải

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038



a) Gọi E, F, G theo thứ tự là chân các đường cao AE, BF, CG của tam giác ABC.

$$\triangle AHK \sim \triangle AME (g.g) \Rightarrow \frac{AK}{AE} = \frac{AH}{AM} \Rightarrow AK \cdot AM = AH \cdot AE$$

$$\triangle AHF \sim \triangle ACE (g.g) \Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{AF}{AE} \Rightarrow AC \cdot AF = AH \cdot AE$$

$$\text{Từ đó suy ra: } AK \cdot AM = AF \cdot AC \text{ suy ra: } \frac{AK}{AC} = \frac{AF}{AM}$$

$$\Rightarrow \triangle AFK \sim \triangle AMC \Rightarrow \angle AKF = \angle ACM$$

$$\triangle FBC \text{ vuông tại } F \text{ có } FM \text{ là đường trung tuyến} \Rightarrow FM = MC = \frac{1}{2} BC$$

$$\Rightarrow \triangle MFC \text{ cân tại } M \Rightarrow \angle MFC = \angle MCF = \angle ACB$$

Xét tứ giác BHKC có:

$$\begin{aligned}
 HKC + HBC &= HKM + MKC + HBC \\
 &= 90^\circ + MFC + HBC \\
 &= 90^\circ + ACB + HBC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ
 \end{aligned}$$

Suy ra: tứ giác BHKC nội tiếp.

Ta có: AGHF nội tiếp $\Rightarrow BAC + GHF = 180^\circ$

Mà $GHF = BHC$ (đối đỉnh)

Lại có: BHKC nội tiếp $\Rightarrow BHC = BKC$

Mà $BKC = BLC$ (K, L đối xứng qua BC)

Từ đó: $BAC + BLC = 180^\circ$. Suy ra: tứ giác ABLC nội tiếp.

b) Ta có: $LAB = LCB$ (ABLC nội tiếp, cùng chắn cung BL)

Mà $LCB = KCM$ (K đối xứng L qua BC)

$$\Rightarrow LAB = KCM \quad (1)$$

$\triangle AMC$ và $\triangle CMK$ có KMC chung và $MKC = ACB$

$$\Rightarrow \triangle AMC \cong \triangle CMK (g.g) \Rightarrow KCM = MAC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $LAB = MAC$

c) Ta có: ABDC là hình bình hành vì $MA = MD, MB = MC$

Suy ra: $BDC = BAC$

Mà $BHC + BAC = 180^\circ \Rightarrow BHC + BDC = 180^\circ \Rightarrow BHCD$ nội tiếp

$\Rightarrow B, H, K, C, D$ cùng thuộc một đường tròn

$AB \parallel CD$ mà $CH \perp AB \Rightarrow CH \perp CD \Rightarrow HD$ là đường kính của đường tròn ngoại tiếp $\triangle BHC$

Gọi O là trung điểm HD thì O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle BHC$

Ta có: $AI \cdot AX = AH \cdot AE$ và $AH \cdot AE = AK \cdot AM$ suy ra: $AI \cdot AX = AK \cdot AM$

$$\Rightarrow \frac{AI}{AM} = \frac{AK}{AX} \Rightarrow \triangle AKI \cong \triangle AXM \Rightarrow AKI = AXM \Rightarrow IXMK \text{ nội tiếp}$$

Suy ra: K thuộc đường tròn ngoại tiếp $\triangle IXM$

Suy ra: đường tròn ngoại tiếp $\triangle BHC$ và đường tròn ngoại tiếp $\triangle IXM$ có điểm chung K.

$OD = OK$ (bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle BHC$) $\Rightarrow \triangle OKD$ cân $\Rightarrow OKD = ODK$

Gọi J là trung điểm AH, IM là đường trung bình của tam giác AHD, JM cắt OK tại O'

$$\Rightarrow JM \parallel HD \Rightarrow O'MK = ODK \text{ (đồng vị)} \quad O'MK = OKD \Rightarrow \triangle O'KM \text{ cân tại } O'$$

Suy ra: O' thuộc đường trung trực của KM (*)

Mặt khác: AHK nội tiếp đường tròn tâm J, đường kính AH

$$\Rightarrow HKI = HAI \text{ (cùng chắn cung HI)} \text{ và } JK = JI$$

$$AH \parallel KL \text{ (cùng vuông góc với BC)} \Rightarrow HAI = ILK \Rightarrow HKI = ILK$$

$\Rightarrow HK$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle KIL$

Mà $HK \perp AM$ suy ra tâm đường tròn này thuộc AM

Lại có BC là đường trung trực của KL và M thuộc BC

Suy ra: M là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle KIL$

Suy ra: $MK = MI$

Mà $JI = JK$ suy ra: JM là trung trực của IK (**)

Từ (*) và (**) suy ra: O' là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle IXM$

Mà ta có: $OO' = OK - O'K$

Suy ra: đường tròn ngoại tiếp $\triangle BHC$ và đường tròn ngoại tiếp $\triangle XHM$ tiếp xúc trong với nhau tại K.

Bài 5: Cho $\triangle ABC$ không cân, biết $\triangle ABC$ ngoại tiếp đường tròn (I) . Gọi D, E, F lần lượt là các tiếp điểm của BC, CA, AB với đường tròn (I) . Gọi M là giao điểm của đường thẳng EF và đường thẳng BC, biết AD cắt đường tròn (I) tại điểm N ($N \neq D$), gọi K là giao điểm của AI và EF.

a) Chứng minh rằng $AK.AI = AN.AD$ và các điểm I, D, N, K cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh MN là tiếp tuyến của đường tròn (I) .

Lời giải

a) Ta có: AE, AF là hai tiếp tuyến của đường tròn (I) , suy ra: $AE = AF$, AI là phân giác của góc EAF.

$\triangle AEF$ cân tại A, AI là đường phân giác do đó AI là đường cao của tam giác AEF

$\triangle EAI$ vuông tại E, EK là đường cao suy ra $AE^2 = AK.AI$

Xét $\triangle AEN$ và $\triangle ADE$ có $\angle EAN$ chung.

$\angle AEN = \angle ADE$. (Hệ quả góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

Do đó: $\triangle AEN \sim \triangle ADE$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{AN}{AE} \Rightarrow AE^2 = AN.AD$$

Ta có: $AK.AI = AN.AD$ (cùng bằng AE^2)

Xét $\triangle ANK$ và $\triangle AID$ có:

$\angle KAN$ chung.

$$\frac{AN}{AI} = \frac{AK}{AD} \quad (\text{Do } AK.AI = AN.AD)$$

Do đó: $\triangle ANK \sim \triangle AID$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \angle AKN = \angle ADI$$

Do đó: DNKI nội tiếp

Vậy bốn điểm I, D, N, K cùng thuộc một đường tròn.

b) Do MD là tiếp tuyến của (I) nên $MD \perp ID$.

Tứ giác MKID có $\angle MKI + \angle MDI = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Do đó: MIKD nội tiếp, suy ra M, N, K, I, D cùng thuộc một đường tròn.

Suy ra: $\angle MNI = \angle MKI = 90^\circ$

Ta có: $MN \perp IN$ ($N \in (I)$)

Vậy MN là tiếp tuyến của đường tròn (I)

Bài 6: Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Gọi E là điểm nằm chính giữa của cung nhỏ BC. Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $EM = EC$, đường thẳng BM cắt đường tròn (O) tại N (N khác B). Các đường thẳng EA và EN cắt cạnh BC lần lượt tại D và F.

d) Chứng minh tam giác AEN đồng dạng với tam giác FED.

e) Chứng minh M là trực tâm của tam giác AEN.

- f) Gọi I là trung điểm của AN , tia IM cắt đường tròn (O) tại K . Chứng minh đường thẳng CM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMK .

Lời giải

a)

Có $\widehat{EDF} = 180^\circ - \widehat{BDE}$ (hai góc kề bù)
 $\Rightarrow \widehat{EDF} = 180^\circ - \widehat{DEC} - \widehat{DCE} = \widehat{ANC} - \widehat{DCE} = \widehat{ANC} - \widehat{ENC} = \widehat{ANE}$ (Do cung $DE = EC$)

Suy ra $\triangle DEF$ đồng dạng với $\triangle NEA$

b) Ta có $EB = EC = EM$ do E là điểm chính giữa cung BC và theo giả thiết $EM = EC$. Mặt khác AE là tia phân giác $\widehat{BAM}$ suy ra AE là trung trực đoạn thẳng BM hay vuông góc với tia NM .
 Chứng minh tương tự thì NE là tia phân giác của $\widehat{BNC}$, suy ra NE là đường trung trực của đoạn thẳng MC hay NE vuông góc với AM .

Từ hai điều trên ta có M là trực tâm của $\triangle AEN$

c)

Gọi giao điểm của AM với EN là X , của BN với AE là Y

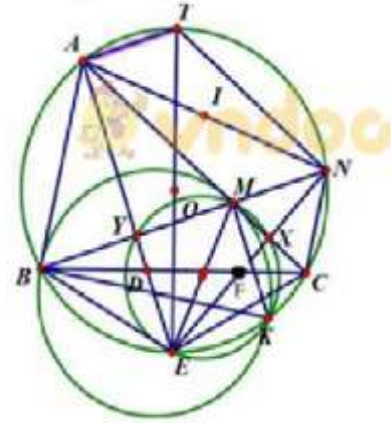
Gọi giao điểm của IM với đường tròn (O) là T . Dễ thấy rằng $ATNM$ là hình

biên hành nên TN vuông góc với EN suy ra ET là đường kính đường tròn (O)

$\Rightarrow \widehat{EKT} = 90^\circ$ hay $\widehat{MKE} = 90^\circ$ hay K thuộc đường tròn đường kính EM , suy ra năm điểm X, Y, M, K, E cùng thuộc một đường tròn

Ta có $\widehat{KMC} = \widehat{KM\bar{X}} = \widehat{XEK} = \widehat{NEK} = \widehat{NBK}$ (do tứ giác $MEKX$ nội tiếp)

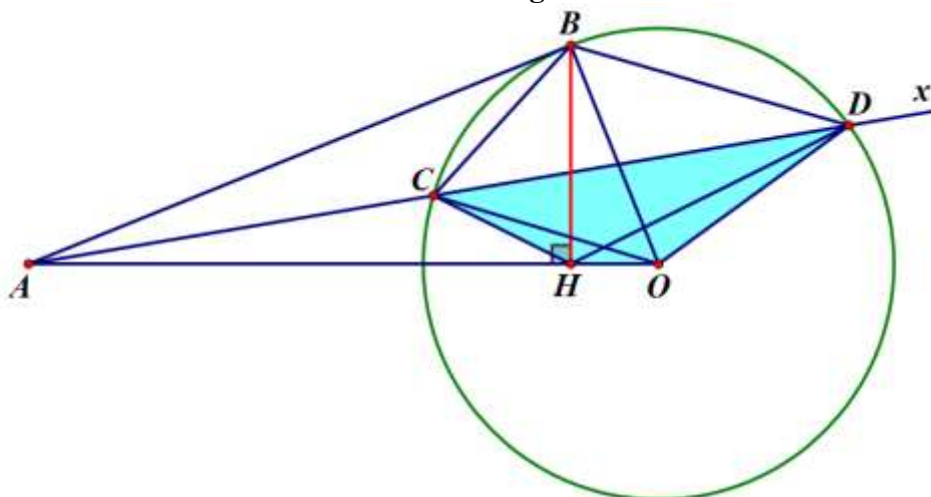
Suy ra CM là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp tam giác BMK



Bài 7: Cho đường tròn (O) cố định và điểm A cố định ở ngoài đường tròn (O) . Từ A kẻ đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (O) tại B . Một tia Ax thay đổi, nằm trong miền OAB , cắt đường tròn (O) tại hai điểm C, D (C ở giữa A và D). Từ B kẻ BH vuông góc với AO tại H . Chứng minh rằng:

- a) Tích $AC \cdot AD$ không đổi; b) $CHOD$ là tứ giác nội tiếp;
 c) Phân giác của $\angle CHD$ cố định.

Lời giải



Học sinh vẽ hình đúng; ghi giả thiết, kết luận

a) Xét $\triangle ABC$ và $\triangle ADB$ có: $\angle BAD$ chung; $\angle ABC = \angle ADB = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{BC}$

$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADB$ (góc-góc)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AC \cdot AD = AB^2 \quad (3)$$

Do đường tròn (O) , A cố định $\Rightarrow AB$ không đổi $\Rightarrow AC \cdot AD$ không đổi

b) $\triangle ABO$ vuông tại B , đường cao $BH \Rightarrow AB^2 = AH \cdot AO \quad (4)$

$$\text{Từ (3) và (4)} \Rightarrow AC \cdot AD = AH \cdot AO \Rightarrow \frac{AC}{AH} = \frac{AO}{AD}, \text{ mà } \angle OAD \text{ chung}$$

$\Rightarrow \triangle AHC \sim \triangle ADO$ (cạnh-góc-cạnh)

$\Rightarrow \angle AHC = \angle ADO \quad (5) \Rightarrow$ Tứ giác $CHOD$ nội tiếp

c) Tứ giác $CHOD$ nội tiếp $\Rightarrow \angle OHD = \angle OCD \quad (6)$

$\triangle COD$ cân tại $O \Rightarrow \angle OCD = \angle ODC$ hay $\angle OCD = \angle ADO \quad (7)$

Từ (5); (6) và (7) $\Rightarrow \angle AHC = \angle OHD$

Mà $\angle AHC + \angle BHC = \angle OHD + \angle BHD = 90^\circ \Rightarrow \angle BHC = \angle BHD$

$\Rightarrow BH$ là phân giác của $\angle CHD$, BH cố định $\Rightarrow \text{ĐPCM}$

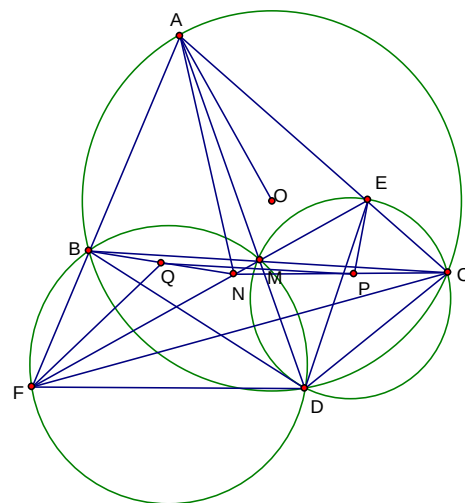
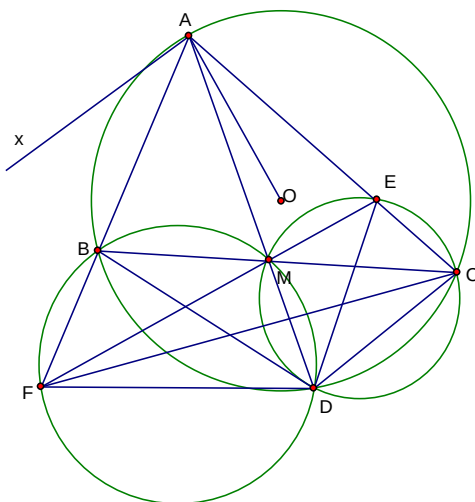
Bài 8: Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của BC , AM cắt (O) tại D khác A . Đường tròn ngoại tiếp tam giác MDC cắt đường thẳng AC tại E khác C . Đường tròn ngoại tiếp tam giác MDB cắt đường thẳng AB tại F khác B .

1/ Chứng minh hai tam giác BDF , CDE đồng dạng.

2, Chứng minh rằng ba điểm E , M , F thẳng hàng và $OA \perp EF$.

3/ Đường phân giác của góc BAC cắt EF tại điểm N . Đường phân giác của góc CEN cắt CN tại P , đường phân giác của góc BFN cắt BN tại Q . Chứng minh rằng $PQ \parallel BC$.

Lời giải:



1/ Do các tứ giác $MECD$, $MBFD$ nội tiếp nên $\angle DEC = \angle DMC = \angle DFB \quad (1)$

Tứ giác ABDC nội tiếp nên $DCE = DCA = DBF$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle BDF \sim \triangle CDE$ (g - g) đpcm

2/ Ta có $\overline{BMF} = BDF, EMC = EDC$ và $BDF = CDE$ (do $\triangle BDF \sim \triangle CDE$), suy ra

$BMF = EMC$. Vậy E, M, F thẳng hàng.

Từ hai tứ giác MECD, MBFD nội tiếp suy ra $AB, AF = AM \cdot AD = AE \cdot AC$, suy ra tứ giác

BECD nội tiếp. Do đó $AFE = ACB$. Vẽ tiếp tuyến Ax của (O) thì

$ACB = BAx$, suy ra $Ax \parallel EF$. Vậy $OA \perp EF$.

3/ theo tính chất phân giác ta có $\frac{PN}{PC} = \frac{EN}{EC}, \frac{QN}{QB} = \frac{FN}{FB}$ và $\frac{NE}{NF} = \frac{AE}{AF}$ suy ra

$$\frac{PN}{PC} \cdot \frac{QN}{QB} = \frac{EN}{EC} \cdot \frac{FN}{FB} = \frac{EN}{FN} \cdot \frac{FB}{EC} = \frac{AE}{AF} \cdot \frac{FB}{EC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{FB}{EC} \quad (3)$$

$$\text{Ta có } 1 = \frac{MB}{MC} = \frac{S_{DAB}}{S_{DAC}} = \frac{S_{DAB}}{S_{BDF}} \cdot \frac{S_{BDF}}{S_{CDE}} \cdot \frac{S_{CDE}}{S_{DAC}} = \frac{AB}{BF} \cdot \frac{BF^2}{CE^2} \cdot \frac{CE}{AC} = \frac{AB \cdot BF}{CE \cdot AC} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{PN}{PC} = \frac{QN}{QB}$, hay $PQ \parallel BC$.

Bài 9: Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$ và trực tâm là T. Gọi H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC và D là điểm đối xứng với T qua đường thẳng BC; I và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của D trên AB và AC; E và F lần lượt là trung điểm của AC và IH.

a) Chứng minh ABDC là tứ giác nội tiếp và hai tam giác ACD và IHD đồng dạng.

b) Chứng minh ba điểm I, H, K thẳng hàng và DEF là tam giác vuông.

c) Chứng minh $\frac{BC}{DH} = \frac{AB}{DI} + \frac{AC}{DK}$.

Lời giải

a) Tia CT cắt cạnh AB tại P.

Ta có $\angle DAB = \angle TCB$ (cùng phụ với $\angle ABC$), $\angle TCB = \angle DCB$ (T và D đối xứng qua BC).

Do đó $\angle DAB = \angle DCB \Rightarrow ABDC$ là tứ giác nội tiếp.

Suy ra $\angle DIH = \angle DBH = \angle DAC$ và $\angle IHD = \angle IBD = \angle ACD$.

Do đó hai tam giác ACD và IHD đồng dạng.

b) Tứ giác IBHD nội tiếp nên $\angle BHI = \angle BDI$.

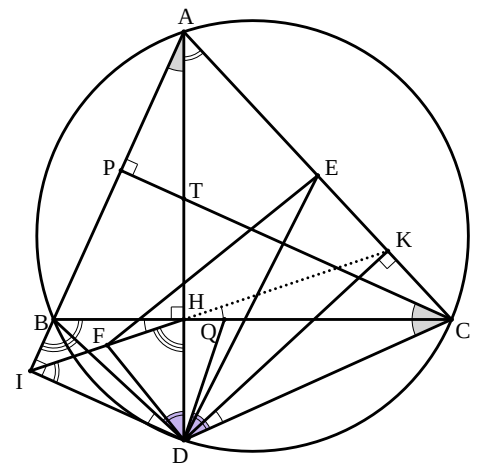
Tứ giác DHKC có hai đỉnh H và K cùng nhìn đoạn DC dưới một góc vuông nên nội tiếp. Suy ra $\angle KHC = \angle KDC$.

Các tứ giác ABDC và AIDK nội tiếp nên $\angle IDK = \angle BDC$ (cùng bù với $\angle BAC$).

Suy ra $\angle BDI = \angle KDC$. Do đó $\angle BHI = \angle KHC$. Vì I và K nằm khác phía đối với đường thẳng BC nên ba điểm I, H, K thẳng hàng.

Hai tam giác ACD và IHD đồng dạng với nhau có DE và DF lần lượt là các đường

trung tuyến nên $\frac{DC}{DH} = \frac{DE}{DF}$.



Hai tam giác DCE và DHF đồng dạng nên $EDC = FDH$. Suy ra $HDC = FDE$.

Do đó hai tam giác HDC và FDE đồng dạng suy ra $DFE = DHC = 90^\circ$.

Vậy tam giác DEF vuông tại F.

c) Trên cạnh BC lấy điểm Q sao cho $QDC = BDA$. Lại có $BAD = BCD$ nên hai

tam giác DBA và DQC đồng dạng. Suy ra $\frac{AB}{CQ} = \frac{AD}{CD}$.

Hai tam giác AID và CHD đồng dạng nên $\frac{AD}{CD} = \frac{DI}{DH}$.

Suy ra $\frac{AB}{CQ} = \frac{DI}{DH}$ hay $\frac{AB}{DI} = \frac{CQ}{DH}$ (1).

Vì $QDC = BDA$ nên $HDC = BDQ$.

Suy ra hai tam giác BDQ và ADC đồng dạng do đó $\frac{BQ}{AC} = \frac{DB}{DA}$ (2).

Ta có $BAD = BCD = HKD$. Mặt khác $ABD = 180^\circ - IBD$, $KHD = 180^\circ - IHD$. Vì $IBD = IHD$ nên $ABD = KHD$.

Suy ra hai tam giác ABD và KHD đồng dạng. Do đó $\frac{DB}{DA} = \frac{DH}{DK}$ (3).

Từ (2) và (3) suy ra $\frac{BQ}{AC} = \frac{DH}{DK}$ hay $\frac{AC}{DK} = \frac{BQ}{DH}$ (4).

Từ (1) và (4) suy ra $\frac{AB}{DI} + \frac{AC}{DK} = \frac{CQ}{DH} + \frac{BQ}{DH} = \frac{BC}{DH}$.

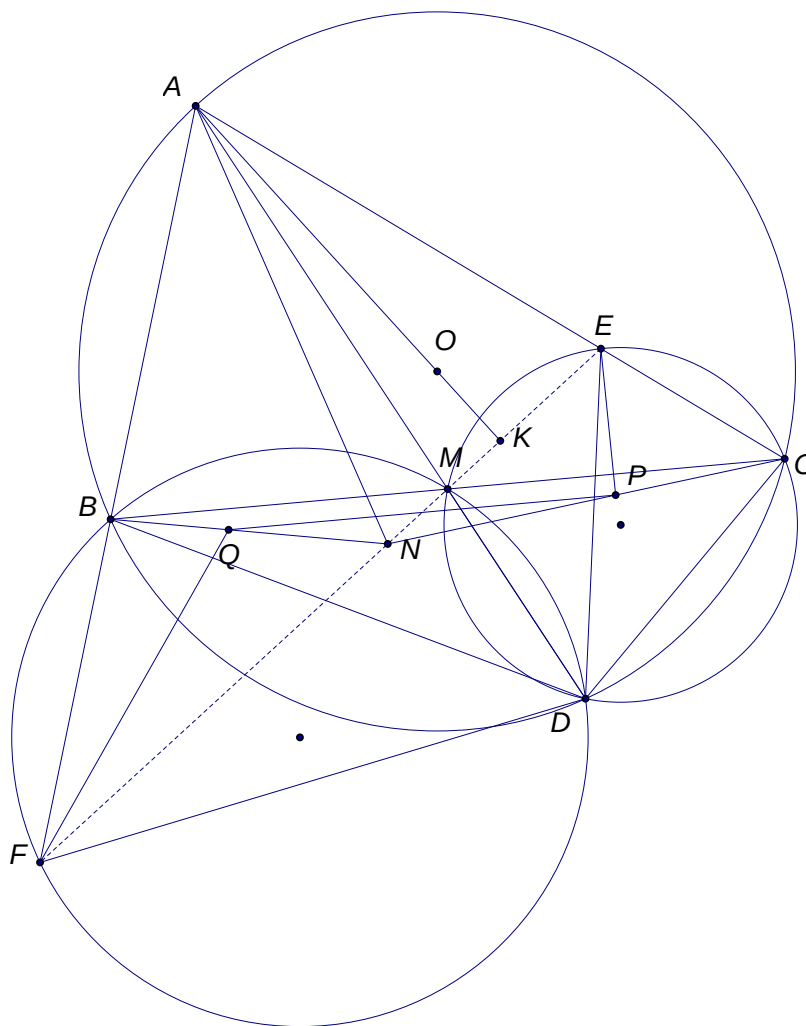
Bài 10: Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) với $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của BC , AM cắt (O) tại điểm D khác A . Đường tròn ngoại tiếp tam giác MDC cắt đường thẳng AC tại E khác C . Đường tròn ngoại tiếp tam giác MDB cắt đường thẳng AB tại F khác B .

1. Chứng minh rằng hai tam giác BDF, CDE đồng dạng.

2. Chứng minh rằng ba điểm E, M, F thẳng hàng và $OA \perp EF$.

3. Đường phân giác của BAC cắt EF tại điểm N . Đường phân giác của CEN cắt CN tại P , đường phân giác của BFN cắt BN tại Q . Chứng minh rằng PQ song song với BC .

Lời giải



- *) Kẻ AO cắt EF tại K;

$$\Rightarrow \angle KAE = 90^\circ - \angle ADC = 90^\circ - \angle AEK \Rightarrow \angle AEK + \angle KAE = 90^\circ \Rightarrow AK \perp KE \Rightarrow AO \perp EF$$

dụng tính chất tia phân giác kết hợp với ta lét đảo)

Bài 11: Cho điểm M thuộc nửa đường tròn (O) đường kính AB ($M \neq A, M \neq B, MA < MB$). Tia phân giác của góc AMB cắt AB tại C . Qua C vẽ đường thẳng vuông góc với AB cắt các đường thẳng AM, BM theo thứ tự tại D, H .

d) Chứng minh rằng: $CA = CH$.

e) Gọi E là hình chiếu vuông góc của H trên tiếp tuyến tại A của (O) , F là hình chiếu vuông góc của D trên tiếp tuyến tại B của. Chứng minh rằng: E, M, F thẳng hàng.

f) Gọi S_1, S_2 theo thứ tự là diện tích của các tứ giác $ACHE$ và $BCDF$. Chứng minh rằng: $CM^2 < \sqrt{S_1 \cdot S_2}$.

Lời giải

a) Tứ giác $AMHC$ nội tiếp đường tròn (Vì $\angle AMH = \angle ACH = 90^\circ$)

$\Rightarrow \angle HAC = \angle CMH = 45^\circ$ (Hai góc cùng chắn cung HC)

$\Rightarrow \triangle ACH$ vuông cân.

$\Rightarrow AC = CH$

b) Tứ giác $MHCA$ thuộc đường tròn đường kính AH , mà $EAHC$ là hình vuông.

$\Rightarrow EAHC$ thuộc đường tròn đường kính AH

$\Rightarrow EAHC$ nội tiếp đường tròn

Vì $EAHC$ là hình vuông nên

$CE = AH$

$\Rightarrow EC$ cũng là đường kính.

$\Rightarrow EM \perp MC$ (1)

Ta lại có: $\angle HMI = \angle HDI = \angle HAC = \angle CMH$ (do các tứ giác $MHID, MACH$ nội tiếp)

$\Rightarrow \angle CMH = \angle HMI = 45^\circ$

$\Rightarrow MC \perp MI$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow M, I, E$ thẳng hàng.

Chứng minh tương tự, ta được M, I, F thẳng hàng.

Vậy M, I, E, F thẳng hàng.

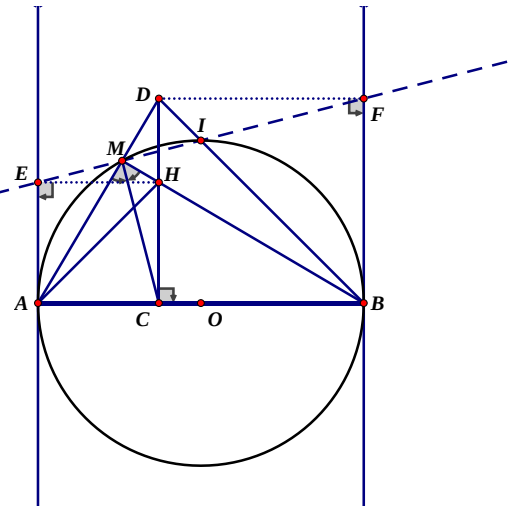
c) Các tứ giác $EAHC, FDCB$ là hình vuông.

$\Rightarrow S_1 \cdot S_2 = AC^2 \cdot CB^2 \Rightarrow \sqrt{S_1 \cdot S_2} = AC \cdot CB$

$\Rightarrow AC \cdot CB = (AO - OC)(OB + OC) = (R - OC)(R + OC) = R^2 - OC^2 = OM^2 - OC^2$

$\Rightarrow CM^2 < OM^2 - OC^2$ (đúng vì $\triangle MCO$ tù tại C)

Vậy $CM^2 < \sqrt{S_1 \cdot S_2}$.

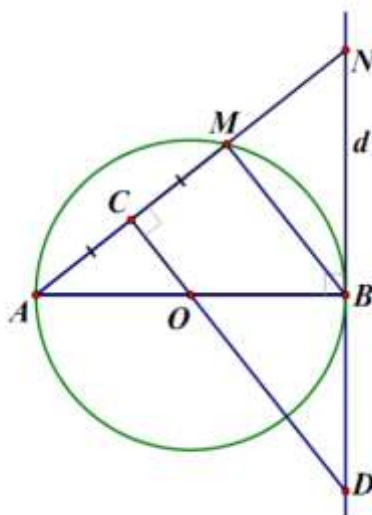


Bài 12: Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Vẽ đường thẳng d là tiếp tuyến của (O) tại

B. Trên cung AB lấy điểm M tùy ý (M khác A và B), tia AM cắt d tại N. Gọi C là trung điểm của AM, tia CO cắt d tại D.

- Chứng minh rằng: OBNC nội tiếp.
- Chứng minh rằng: $NO \perp AD$
- Chứng minh rằng: $CA.CN = CO.CD$.
- Xác định vị trí điểm M để $(AM.AN)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải



- a) **Chứng minh rằng: OBNC nội tiếp**

Ta có $OC \perp AM$

$$\Rightarrow \angle OCN = 90^\circ$$

Đường thẳng d là tiếp tuyến của (O) tại B nên $\angle OBN = 90^\circ$

$$\Rightarrow \angle OCN + \angle OBN = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ Tứ giác OBNC nội tiếp

- b) **Chứng minh rằng: $NO \perp AD$**

Trong $\triangle AND$ có hai đường cao là AB và GC cắt nhau tại O.

Suy ra NO là đường cao thứ ba hay: $NO \perp AD$.

- c) **Chứng minh rằng $CA \cdot CN = CO \cdot CD$**

Ta có: $\angle CAO + \angle AOC = 90^\circ$; $\angle BOD + \angle BDO = 90^\circ$

Mà $\angle CAO = \angle BOD$ (2 góc đối đỉnh)

$$\Rightarrow \angle CAO = \angle BDO$$

$\triangle CAO \sim \triangle CDN$ (g - g)

$$\Rightarrow \frac{CA}{CD} = \frac{CO}{CN} \Rightarrow CA.CN = CO.CD$$

- d) **Xác định vị trí điểm M để $(AM.AN)$ đạt giá trị nhỏ nhất.**

Ta có: $2AM + AN \geq 2\sqrt{AM \cdot AN}$ (cauchy – cosi)

Ta chứng minh: $AM \cdot AN = AB^2 = 4R^2$ (1)

$$\Rightarrow 2AM + AN \geq 2\sqrt{2 \cdot 4R^2} = 4\sqrt{2}R$$

Đẳng thức xảy ra khi: $2AM = AN \Rightarrow AM = \frac{AN}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $AM = R\sqrt{2}$

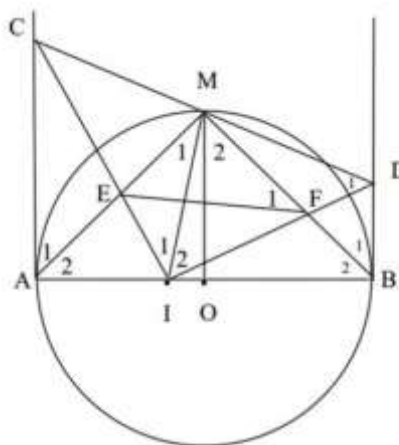
$\Rightarrow \Delta AOM$ vuông tại O

$\Rightarrow M$ là điểm chính giữa cung AB.

Bài 13: Cho đường tròn (O) đường kính AB. Gọi M là điểm thuộc cung AB ($AB \neq A, M \neq B$) và I là điểm thuộc đoạn OA ($I \neq O, I \neq A$). Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm M, kẻ các tia tiếp tuyến Ax, By với đường tròn (O). Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với IM, đường thẳng này cắt Ax, By lần lượt tại C và D. Gọi E là giao điểm của AM với IC, F là giao điểm của BM với ID. Chứng minh rằng:

- Tứ giác MEIF là tứ giác nội tiếp
- $EF \parallel AB$
- OM là tiếp tuyến chung của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác CEM và DFM.

Lời giải



- CM: Tứ giác MEIF là tứ giác nội tiếp
Ta có: các tứ giác ACMI, BDMI nội tiếp

$$\Rightarrow \begin{cases} I_1 = A_1 \\ I_2 = B_1 \end{cases} \Rightarrow I_1 + I_2 = A_1 + B_1$$

$$\text{Mà } A_2 + B_2 = 90^\circ \text{ và } A_1 + A_2 + B_1 + B_2 = 180^\circ$$

$$\Rightarrow I_1 + I_2 = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle EIF = \angle EMF = 90^\circ$$

$\Rightarrow$ Tứ giác MEIF nội tiếp

- CM: $EF \parallel AB$

$$\text{Tứ giác MEIF nội tiếp} \Rightarrow I_1 = F_1$$

$$\text{Tứ giác ACMI nội tiếp} \Rightarrow I_1 = A_1$$

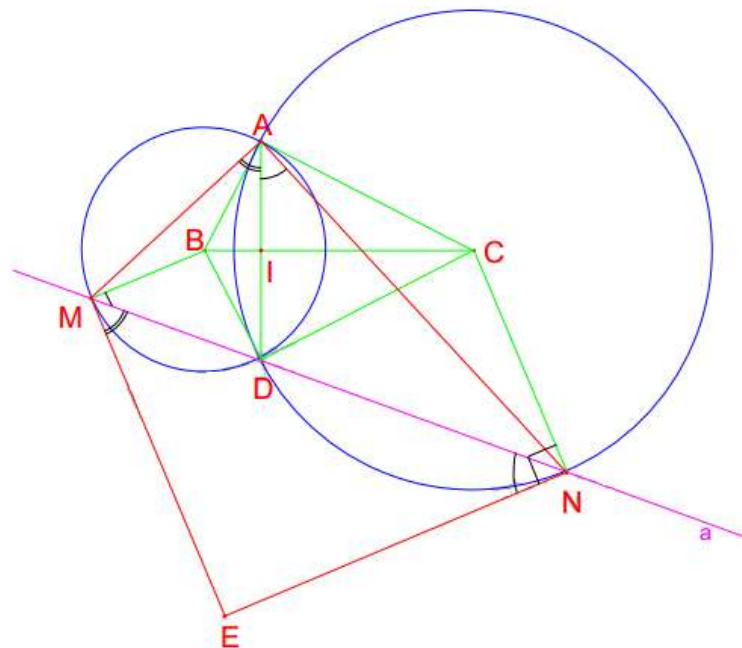
$$\text{Mà } B_2 = A_1 \text{ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung AM)}$$

- $\Rightarrow B_2 = F_1$
 $\Rightarrow EF \parallel AB$ (vì có cặp góc đồng vị bằng nhau)
 c) CM: OM là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn ngoại tiếp các tam giác: CEM, DFM
 Ta có: $OA = OM$
 $\Rightarrow M_1 = A_2$
 Mà $C_1 = A_2$ (cùng chắn cung IM)
 $\Rightarrow C_1 = M_1$
 $\Rightarrow OM$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CME (1)
 Lại có: $OM = OB$
 $\Rightarrow M_2 = B_2$
 mà $D_1 = B_2$ (cùng chắn cung IM)
 $\Rightarrow D_1 = M_2$
 $\Rightarrow OM$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác DMF (2)
 Từ (1) và (2) $\Rightarrow \text{ĐPCM}$

Bài 14: Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Hai đường tròn (B; BA) và (C; CA) cắt nhau tại điểm thứ hai là D. Vẽ đường thẳng a bất kì qua D cắt đường tròn (B) tại M và cắt đường tròn (C) tại N (D nằm giữa M và N). Tiếp tuyến tại M của đường tròn (B) và tiếp tuyến tại N của đường tròn (C) cắt nhau tại E.

- 1) Chứng minh BC là tia phân giác của $\angle ABD$
- 2) Gọi I là giao điểm của AD và BC. Chứng minh: $AD^2 = 4BI \cdot CI$
- 3) Chứng minh bốn điểm A, M, E, N cùng thuộc một đường tròn.
- 4) Chứng minh rằng số đo $\angle MEN$ không phụ thuộc vị trí của đường thẳng a.

Lời giải



1) C/m: $\triangle ABC = \triangle DBC$ (ccc) $\Rightarrow \angle ABC = \angle DBC$ hay: BC là phân giác của $\angle ABD$

2) Ta có: $AB = BD$; $CA = CD$

Suy ra: BC là trung trực của AD hay $BC \perp AD$

$\Rightarrow AI \perp BC$

Ta lại có: $BC \perp AD$ tại I $\Rightarrow IA = ID$

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A (gt) có: $AI \perp BC$,

suy ra: $AI^2 = BI \cdot CI$ hay: $\frac{AD^2}{4} = BI \cdot CI \Rightarrow AD^2 = 4BI \cdot CI$

3) Ta có: $\angle DME = \angle DAM$ (hệ quả t/c góc tạo bởi tia tuyến và dây cung)

$\angle DNE = \angle DAN$ (hệ quả t/c góc tạo bởi tia tuyến và dây cung)

Suy ra: $\angle DME + \angle DNE = \angle DAM + \angle DAN$

Lại có: $\angle MEN + \angle EMN + \angle ENM = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle MEN + \angle DAM + \angle DAN = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle MEN + \angle MAN = 180^\circ$

$\Rightarrow$ tứ giác AMEN nội tiếp

4) Ta có: $\angle MAN + \angle AMN + \angle ANM = 180^\circ$

Mà $\angle MEN + \angle MAN = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle MEN = \angle AMN + \angle ANM$

Lại có: $\angle AND = \angle ACB = \frac{1}{2} \angle ACD$; $\angle AMD = \angle ABC = \frac{1}{2} \angle ABD$ (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn một cung)

Mà: $\triangle ABC$ vuông tại A nên: $\angle MEN = 90^\circ$ (không đổi)

Vậy $\angle MEN$ không phụ thuộc vào đường thẳng a.

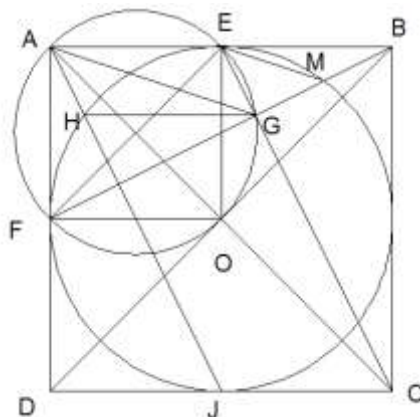
Bài 15: Cho hình vuông ABCD, đường tròn (O) nội tiếp hình vuông tiếp xúc với các cạnh AB, AD tại hai điểm E, F. Gọi G là giao điểm các đường thẳng CE và BF.

a) Chứng minh rằng năm điểm A, F, O, G, E cùng nằm trên một đường tròn

b) Gọi giao điểm của đường thẳng FB và đường tròn là M ($M \neq F$). CMR M là trung điểm của đoạn thẳng BG.

c) CMR trực tâm của tam giác GAF nằm trên đường tròn (O)

Lời giải

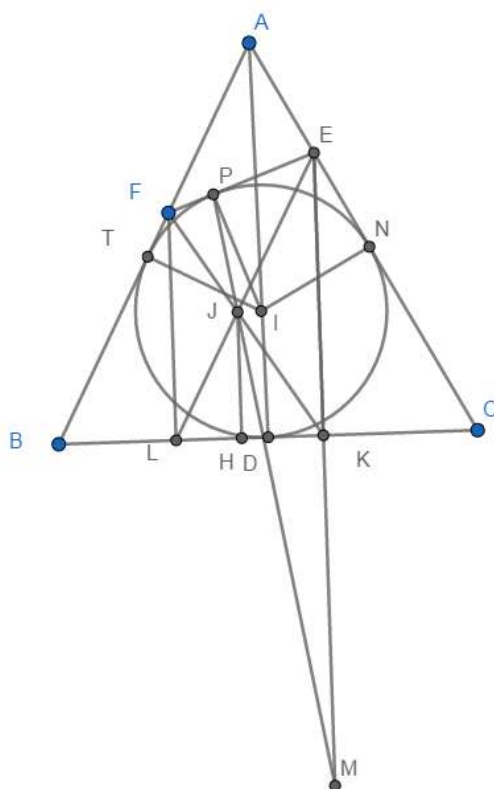


- a) Do đường tròn (O) nội tiếp hình vuông ABCD nên E và F là trung điểm các cạnh AB và AD
- $$\Rightarrow \triangle ABF = \triangle BCE$$
- $$\Rightarrow \angle EBG = \angle BCG$$
- $$\Rightarrow \angle BGC = 90^\circ$$
- $$\Rightarrow A, E, G, F \text{ cùng nằm trên một đường tròn}$$
- Mà A, E, O, F cũng nằm trên một đường tròn
- $$\Rightarrow A, E, G, O, F \text{ cùng nằm trên một đường tròn}$$
- b) Ta có AB là tiếp tuyến của đường tròn (O)
- $$\Rightarrow \angle BEM = \angle EFM$$
- Lại có: $\angle EAG = \angle EFG$ (cùng chắn EG)
- $$\Rightarrow EM \parallel AG$$
- Mà E là trung điểm của AB
- $$\Rightarrow M \text{ cũng là trung điểm của BG}$$

Bài 16: Cho tam giác ABC cân tại A, có đường tròn nội tiếp (I). Các điểm E, F theo thứ tự thuộc các cạnh CA, AB (E khác C và A; F khác B và A) sao cho EF tiếp xúc với đường tròn (I) tại điểm P. Gọi K, L lần lượt là hình chiếu vuông góc của E, F trên BC. Giả sử FK cắt EL tại điểm J. Gọi H là hình chiếu vuông góc của J trên BC.

- a) Chứng minh rằng HJ là phân giác của góc EHF.
- b) Kí hiệu S_1, S_2 lần lượt là diện tích của các tứ giác BFJL và CEJK. Chứng minh rằng
- $$\frac{S_1}{S_2} = \frac{BF^2}{CE^2}.$$
- c) Gọi D là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng ba điểm P, J, D thẳng hàng.

Lời giải


$$\frac{LH}{HK} = \frac{LJ}{JE}.$$
$$\frac{FL}{EK} = \frac{LJ}{JE}.$$

Do đó: $\frac{FL}{EK} = \frac{LH}{HK}$.

Hai tam giác FLH và EKH có $FLH = EKH = 90^\circ$ và $\frac{FL}{EK} = \frac{LH}{HK}$

$$\text{nên } \Delta FLH \simeq \Delta EKH \Rightarrow LFH = KEH.$$

Mặt khác, ta lại có $LFH = FHJ$ (so le trong) và $KEH = EHJ$ (so le trong).

Do đó HJ là phân giác của góc EHF .

b) Go $HJ // FL$ nên $S_{FJL} = S_{FLH}$.

$$\text{Suy ra } S_{BEJL} = S_{BFL} + S_{ELH} = S_{BEH}. \quad (1)$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có $S_{CEJK} = S_{CEH}$ (2)

Theo chứng minh câu a, hai tam giác FTL và EKH đồng dạng nên
Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$FHB = FHL = EHK = EHC.$$

Hai tam giác FHB và EHC có $FBH = ECH$ và $FHB = ECH$ nên đồng dạng với nhau.

$$\text{Suy ra } \frac{S_{FBH}}{S_{ECH}} = \frac{BF^2}{CE^2}.$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{S_{FBH}}{S_{ECH}} = \frac{BF^2}{CE^2}.$$

c) Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử P nằm cùng phía với B so với AD như hình vẽ ở trên. Gọi M là giao điểm của PJ và EK .

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác KFE với cát tuyến MJP , ta có

$$\frac{MK}{ME} \cdot \frac{PE}{PF} \cdot \frac{JF}{JK} = 1.$$

Mà hai tam giác BFH và CEH đồng dạng với nhau có FL và EK là hai đường cao tương

$$\text{ứng nên } \frac{JF}{JK} = \frac{FL}{EK} = \frac{BF}{CE}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{MK}{ME} \cdot \frac{PE}{PF} \cdot \frac{BF}{CE} = 1. \quad (3)$$

Để chứng minh ba điểm P, J, D thẳng hàng, ta chỉ cần chứng minh M, D, J thẳng hàng. Theo định lý Menelaus đảo áp dụng cho tam giác LKE , điều này tương đương với ta phải chứng minh

$$\frac{MK}{ME} \cdot \frac{JE}{JL} \cdot \frac{DL}{DK} = 1.$$

$$\text{Lại có } \frac{JE}{JL} = \frac{EK}{FL} = \frac{CE}{BF} \text{ và } \frac{DL}{DK} = \frac{DL}{DB} \cdot \frac{DC}{DK} \cdot \frac{DB}{DC} = \frac{AF}{AB} \cdot \frac{AC}{AE} \cdot 1 = \frac{AF}{AE}.$$

$$\text{Do đó, chỉ cần chứng minh } \frac{MK}{ME} \cdot \frac{CE}{BF} \cdot \frac{AF}{AE} = 1 \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4)} \Rightarrow \frac{CE}{BF} \cdot \frac{AF}{AE} = \frac{PE}{PF} \cdot \frac{BF}{CE} \text{ hay } \frac{AF}{AE} \cdot \frac{PF}{PE} = \frac{BF^2}{CE^2} \quad (5)$$

Gọi T, N lần lượt là tiếp điểm của đường tròn (I) với AB, AC .

$$\text{Đặt } a = AB = AC, x = BD = CD, y = PF = TF, z = PE = EN.$$

$$\text{Ta sẽ chứng minh: } a = \frac{x(x+y)(x+z)}{x^2 - yz} \quad (6)$$

Thật vậy, sử dụng định lý cosin trong các tam giác ABC và AEF , ta có

$$2 \cos A = \frac{AE^2 + AF^2 - EF^2}{AE \cdot AF} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{AB \cdot AC}.$$

$$\text{Suy ra: } \frac{(a-x-y)^2 + (a-x-z)^2 - (y+z)^2}{(a-x-y)(a-x-z)} = \frac{2a^2 - 4x^2}{a^2}$$

$$\text{Hay } 2 - \frac{(a-x-y)^2 + (a-x-z)^2 - (y+z)^2}{(a-x-y)(a-x-z)} = 2 - \frac{2a^2 - 4x^2}{a^2}$$

$$\text{Từ đây, ta có: } \frac{yz}{a^2 - (2x+y+z)a + (x+y)(x+z)} = \frac{x^2}{a^2}$$

$$\text{Hay } (x^2 - yz)a^2 - x^2(2x+y+z)a + x^2(x+y)(x+z) = 0$$

$$\text{Như thế, ta có } (a-x) \left[(x^2 - yz)a - x(x+y)(x+z) \right] = 0$$

Do $a > x$ nên (6) được chứng minh, Sử dụng (6) vừa chứng minh ta có

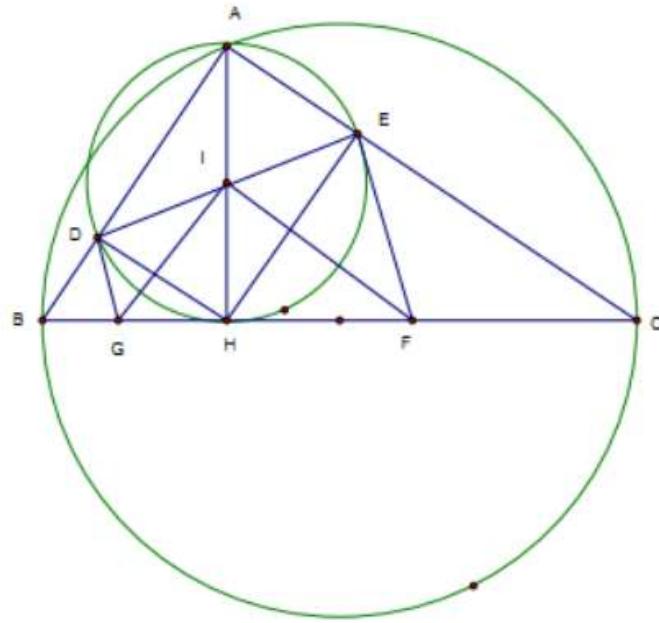
$$\frac{AF}{AE} \cdot \frac{PF}{PE} = \frac{a-x-y}{a-x-z} \cdot \frac{y}{z} = \frac{\frac{x(x+y)(x+z)}{x^2 - yz} - x - y}{\frac{x(x+y)(x-z)}{x^2 - yz} - x - z} \cdot \frac{y}{z} = \frac{(x+y)^2}{(x+z)^2} = \frac{BF^2}{CE^2}.$$

Đẳng thức (5) được chứng minh. Ta có điều phải chứng minh.

Bài 17: Cho đường tròn O đường kính BC và một điểm A nằm bất kì trên đường tròn (A khác B và C). Gọi AH là đường cao của $DABC$, đường tròn tâm I đường kính AH cắt các dây cung AB, AC tương ứng tại D, E .

- Chứng minh rằng: $DHE = 90^\circ$ và $AB \cdot AD = AC \cdot AE$
- Các tiếp tuyến của đường tròn (I) tại D và E cắt BC tương ứng tại G và F . Tính số đo GIF .
- Xác định vị trí điểm A trên đường tròn (O) để tứ giác $DEFG$ có diện tích lớn nhất.

Lời giải



- a) Tứ giác ADHE có: $A = D = E$
 $\Rightarrow ADHE$ là hình chữ nhật
 $\Rightarrow DHE = 90^\circ$
 Lại có: $AB \cdot AD = AH^2$; $AC \cdot AE = AH^2$
 $\Rightarrow AB \cdot AD = AC \cdot AE$
- b) Ta có: $DHE = 90^\circ \Rightarrow DE$ là đường kính $\Rightarrow I$ thuộc DE
 $GIF = \frac{1}{2}DIH + \frac{1}{2}HIE = \frac{1}{2}DIE = 90^\circ$
- c) Tứ giác DEFG là hình thang vuông có đường cao $DE = AH$

Hai đáy $DG = GH = GB = \frac{1}{2}BH$ và $EF = FC = FH = \frac{1}{2}HC$

Diện tích tứ giác DEFG là:

$$S = \frac{\frac{1}{2}(HB + HC) \cdot AH}{2} = \frac{BC \cdot AH}{4}$$

S lớn nhất khi AH lớn nhất vì $BC = 2R$ không đổi

Ta có: AH lớn nhất $\Leftrightarrow AH$ là đường kính $\Leftrightarrow A$ là điểm chính giữa cung AB

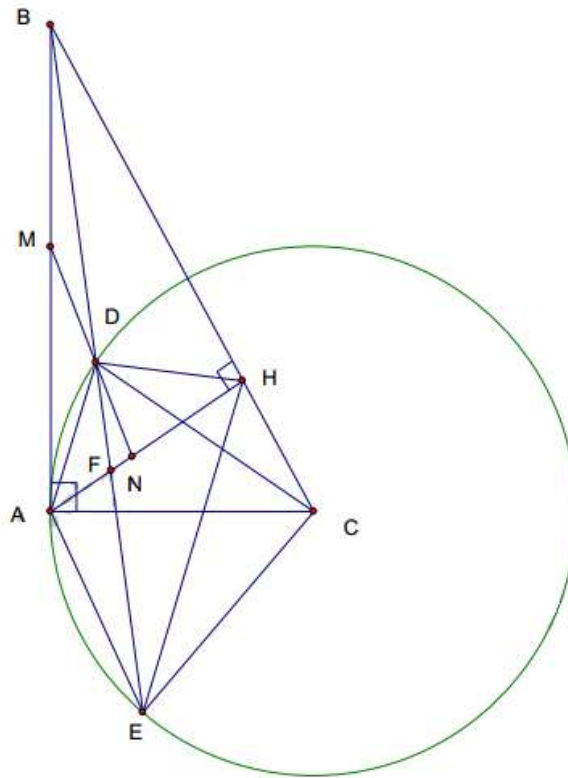
Bài 18: Cho tam giác ABC vuông tại A và (C) là đường tròn tâm C bán kính CA . Lấy điểm D thuộc đường tròn (C) và nằm trong tam giác ABC . Gọi M là điểm trên cạnh AB sao cho

$$BDM = \frac{1}{2}ACD; N \text{ là giao điểm của đường thẳng } MD \text{ với đường cao } AH \text{ của tam giác}$$

ABC ; E là giao điểm thứ hai của đường thẳng BD với đường tròn (C) . Chứng minh rằng:

- a) MN song song với AE .
 b) $BD \cdot BE = BA^2$ và tứ giác $DHCE$ nội tiếp.
 c) HA là đường phân giác của góc DHE và D là trung điểm của đoạn thẳng MN .

Lời giải



a) Xét đường tròn (C) ta có :

$$\angle AED = \frac{1}{2} \angle ACD \text{ (góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm cùng chắn cung AD)}$$

$$\angle BDM = \frac{1}{2} \angle ACD \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \angle AED = \angle BDM$$

$$\Rightarrow MN \parallel AE \text{ (Vì có 2 góc đồng vị bằng nhau)}$$

b) Xét $\triangle BAD$ và $\triangle BEA$ có

$\angle ABE$ chung

$$\angle BAD = \angle BEA \text{ (cùng chắn } \overset{\frown}{DA} \text{)}$$

$$\Rightarrow \triangle BAD \sim \triangle BEA \text{ (g - g)}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{BA} = \frac{BA}{BE} \Rightarrow BD \cdot BE = BA^2$$

Xét $\triangle BAC$ vuông tại A có AH là đường cao

$$\Rightarrow BA^2 = BH \cdot BC$$

$$\Rightarrow BD \cdot BE = BH \cdot BC$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{BH}{BE}$$

Mà $\angle CBE$ chung

$$\Rightarrow \triangle BDH \# \triangle BCE \text{ (c - g - c)}$$

$$\Rightarrow BHD = BEC$$

$$\text{Mà } BHD + DHC = 180^\circ$$

$$\Rightarrow DHC + BEC = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ Tứ giác DHCE nội tiếp

c) Xét $\triangle BAC$ vuông tại A có AH là đường cao, ta có:

$$CA^2 = CH.CB$$

$$\Rightarrow CE^2 = CH.CB \text{ (do } CE = CA = R)$$

$$\Rightarrow \frac{CE}{CB} = \frac{CH}{CE}$$

Lại có: HCE chung

$$\Rightarrow \triangle CHE \# \triangle CEB \text{ (c - g - c)}$$

$$\Rightarrow CHE = CEB$$

$$\text{Mà } BHD = BEC \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow CHE = BHD$$

$$\Rightarrow AHE = AHD$$

$\Rightarrow$ HA là đường phân giác của DHE

$$\text{Ta có : } \triangle HDB \# \triangle HCE \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{DH}{HC} = \frac{BD}{CE} \Rightarrow DH.CE = CH.BD$$

$$\text{Ta có : } \triangle CHE \# \triangle CEB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{HC}{CE} = \frac{HE}{BE} \Rightarrow HC.BE = HE.CE$$

$$\Rightarrow \frac{DH.CE}{HE.CE} = \frac{HC.BD}{HC.BE} \Rightarrow \frac{HD}{HE} = \frac{BD}{BE}$$

$$\text{Ta có: } MD \parallel AE \text{ (cmt)} \Rightarrow \frac{DM}{EA} = \frac{BD}{BE}$$

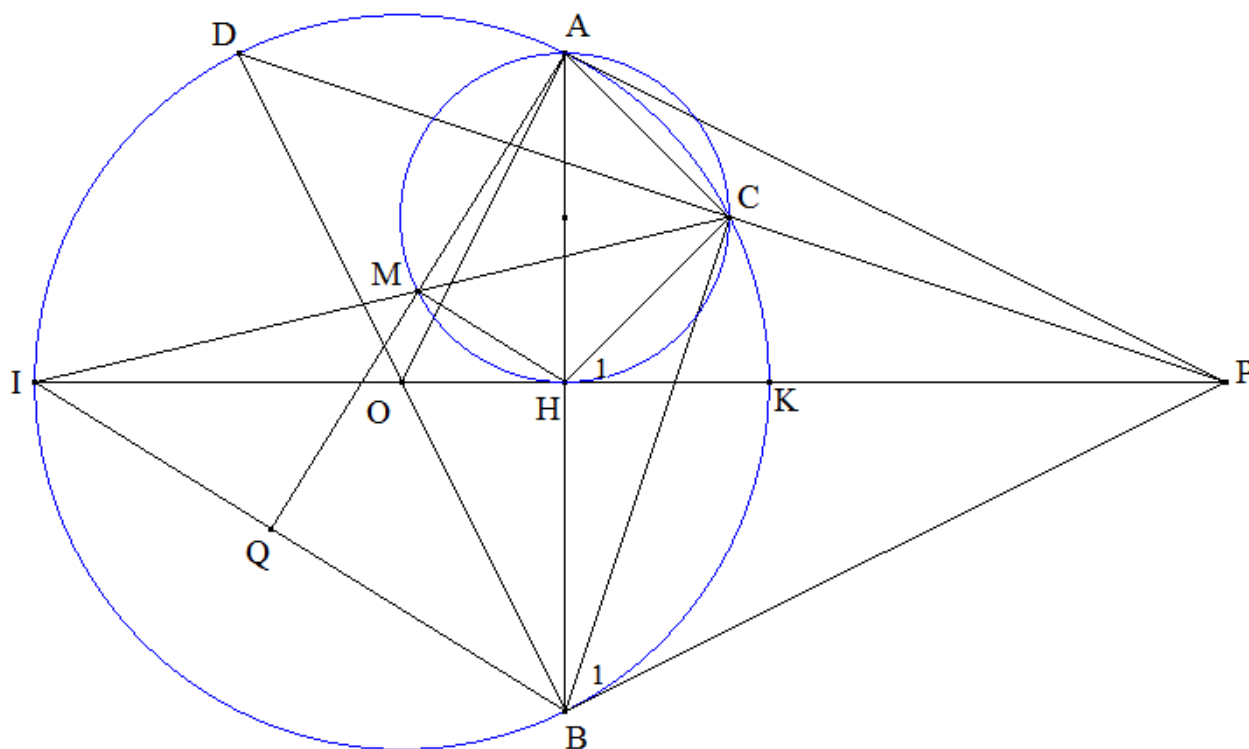
$$\text{Lại có: } \frac{DN}{EA} = \frac{FD}{FE} = \frac{HD}{HE}$$

$$\Rightarrow \frac{DM}{EA} = \frac{DN}{EA} \Rightarrow DM = DN$$

$\Rightarrow$ D là trung điểm của MN

Bài 19: Cho đường tròn (O) và một điểm P ở ngoài đường tròn. Kẻ hai tiếp tuyến PA, PB với đường tròn (O) (A, B là hai tiếp điểm). PO cắt đường tròn tại hai điểm K và I (K nằm giữa P và O) và cắt AB tại H. Gọi D là điểm đối xứng của B qua O, C là giao điểm của PD và đường tròn (O).

- a) Chứng minh tứ giác BHCP nội tiếp.
 b) Chứng minh $AC \perp CH$.
 c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác ACH cắt IC tại M. Tia AM cắt IB tại Q. Chứng minh M là trung điểm của AQ

Lời giải

- a) Xét $\triangle ABP$ có: $PA = PB$ và $\angle APO = \angle OPB$
 $\Rightarrow \triangle ABP$ cân tại P có PO là phân giác
 $\Rightarrow PO$ cũng là đường cao, trung tuyến $\triangle ABP$

Xét tứ giác BHCP ta có:

$$\angle BHP = 90^\circ \text{ (Vì } PO \perp AB \text{)}$$

$$\angle BCP = 90^\circ \text{ (Vì kẻ bù } \angle BCD = 90^\circ \text{, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))}$$

$$\Rightarrow \angle BHP = \angle BCP$$

$\Rightarrow$ Tứ giác BHCP nội tiếp

- b) Xét $\triangle ACH$ ta có:

$$\angle HAC = \angle B_1 \text{ (cùng chắn } \angle BKC \text{ của đường tròn (O))}$$

$$\text{Mà } \angle B_1 = \angle H_1 \text{ (do BHCP nội tiếp)}$$

$$\Rightarrow \angle HAC = \angle H_1$$

$$\text{Mà } \angle H_1 + \angle AHC = 90^\circ \text{ (Vì: } PO \perp AB \text{)}$$

$$\Rightarrow HAC + AHC = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \Delta AHC \text{ vuông tại } C \text{ Hay } AC \perp CH.$$

c) Xét tứ giác ACHM ta có: M nằm trên đường tròn ngoại tiếp ΔACH

$$\Rightarrow \text{tứ giác ACHM nội tiếp}$$

$$\text{Mà } HAC = BIC \text{ (cùng chắn cung BC của đường tròn (O))}$$

$$\Rightarrow CMH = BIC$$

$$\Rightarrow CMH = HAC$$

$$\Rightarrow MH \parallel BI \text{ (vì cặp góc đồng vị bằng nhau)}$$

Xét ΔABQ có $AH = BH$ (do PH là trung tuyến APB (C/m trên)) và: $MH \parallel BI$

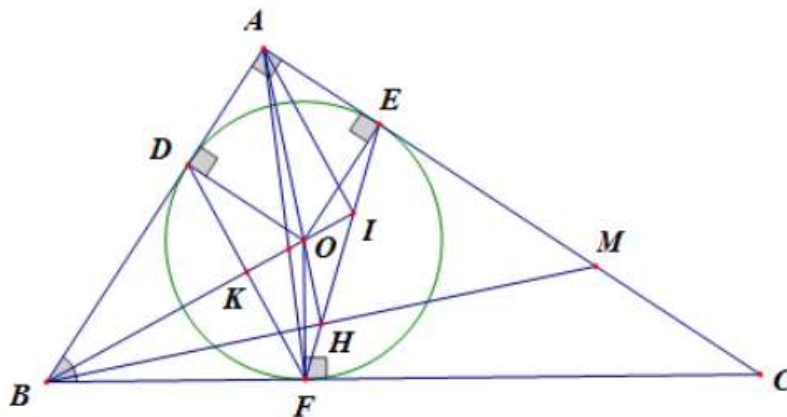
$$\Rightarrow MH \text{ là đường trung bình } \Delta ABQ$$

$$\Rightarrow M \text{ là trung điểm của } AQ$$

Bài 20: Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) ngoại tiếp đường tròn tâm O. Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của (O) với các cạnh AB, AC, BC. Đường thẳng BO cắt các đường thẳng EF và DF lần lượt tại I và K. Giả sử M là điểm di chuyển trên đoạn CE.

- Khi $AM = AB$, gọi H là giao điểm của BM và EF. Chứng minh rằng ba điểm A, O, H thẳng hàng, từ đó suy ra tứ giác ABHI nội tiếp.
- Gọi N là giao điểm của đường thẳng BM với cung nhỏ EF của (O), P, Q lần lượt là hình chiếu của N trên các đường thẳng DE và DF. Xác định vị trí điểm M để độ dài đoạn thẳng PQ max.

Lời giải



- Hình chữ nhật ADOE có $OD = OE = r$ nên nó là hình vuông
 $\Rightarrow AO$ là trung trực DE (1)

Vì $AB = AM$ nên tam giác ABM vuông cân tại A, suy ra $\angle ABM = 45^\circ$

$$\angle DBH = \angle DFH = 45^\circ$$

$$\Rightarrow BDHF \text{ là tứ giác nội tiếp (2)}$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Vì $BDO + BFO = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên BDOF là tứ giác nội tiếp (3)

Từ (2) và (3) $\Rightarrow$ 5 điểm B, D, O, H, F nằm trên một đường tròn.

$$\Rightarrow BHO = BFO = 90^\circ$$

$$\Rightarrow OH \perp BM.$$

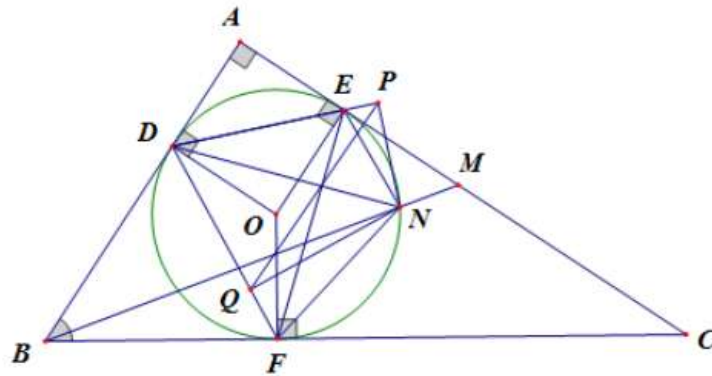
$$\text{Mặt khác } ADE = ABM = 45^\circ \Rightarrow DE \parallel BM$$

$$\Rightarrow OH \perp DE$$

Mà $OD = OE$ nên OH là trung trực của đoạn OE (4)

Từ (1) và (4) $\Rightarrow$ A, O, H thẳng hàng.

b.



Vì $DPN + DQN = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên DPNQ là tứ giác nội tiếp

$$\Rightarrow QPN = QDN \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung QN) (5)}$$

Mặt khác DENF là tứ giác nội tiếp nên $QDN = FEN$ (6)

$$\text{Từ (5) và (6)} \Rightarrow FEN = QPN \text{ (7)}$$

$$\text{Tương tự ta có: } EFN = PQN \text{ (8)}$$

$$\text{Từ (7) và (8) suy ra } \triangle NPQ \sim \triangle NEF \text{ (g - g)} \Rightarrow \frac{PQ}{EF} = \frac{NQ}{NF}$$

Theo quan hệ đường vuông góc – đường xiên, ta có

$$NQ \leq NF \Rightarrow \frac{PQ}{EF} = \frac{NQ}{NF} \leq 1 \Rightarrow PQ \leq EF$$

Dấu bằng xảy ra khi $Q \equiv F \Leftrightarrow NF \perp DF \Leftrightarrow D, O, N$ thẳng hàng.

Do đó PQ max khi M là giao điểm của AC và BN, với N là điểm đối xứng với D qua O.

Bài 21: Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O). Kẻ đường cao AH của tam giác ABC. Gọi P, Q lần lượt là chân của đường vuông góc kẻ từ H đến các cạnh AB, AC.

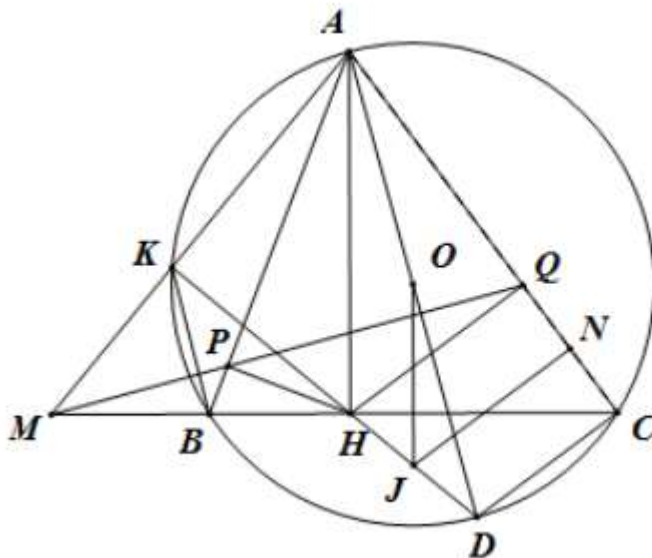
a) Chứng minh rằng BCQP là tứ giác nội tiếp.

b) Hai đường thẳng PQ và BC cắt nhau tại M. Chứng minh rằng $MH^2 = MB \cdot MC$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

- c) Đường thẳng MA cắt đường tròn (O) tại K (K khác A). Gọi I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác BCQP. Chứng minh rằng ba điểm I, H, K thẳng hàng.

Lời giải



- a) Tứ giác APHQ có $\angle APH + \angle AQH = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên là tứ giác nội tiếp
 $\Rightarrow \angle APQ = \angle AHQ$

Ta có: $\angle AHQ = \angle BCQ$ (cùng phụ với $\angle CHQ$)

Do đó: $\angle APQ = \angle BCQ$

Suy ra BPQC là tứ giác nội tiếp.

- b) Vì BPQC là tứ giác nội tiếp nên $\angle MBP = \angle MQC$

$$\Rightarrow \triangle MBP \sim \triangle MQC (g.g) \Rightarrow \frac{MB}{MQ} = \frac{MP}{MC} \Rightarrow MB \cdot MC = MP \cdot MQ \quad (1)$$

Vì APHQ là tứ giác nội tiếp nên: $\angle MHQ = \angle BAH$

Mà $\angle MHP = \angle BAH$ (cùng phụ với $\angle PBH$)

nên $\angle MQH = \angle MHP$

$$\Rightarrow \triangle MQH \sim \triangle MHP (g.g) \Rightarrow \frac{MQ}{MH} = \frac{MH}{MP} \Rightarrow MH^2 = MP \cdot MQ \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MH^2 = MB \cdot MC$

- c) Vì AKBC là tứ giác nội tiếp nên

$$\angle MKB = \angle MCA \Rightarrow \triangle MKB \sim \triangle MCA$$

$$\Rightarrow \frac{MK}{MC} = \frac{MB}{MA} \Rightarrow MK \cdot MA = MB \cdot MC \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3)} \Rightarrow MH^2 = MK \cdot MA$$

$\Rightarrow HK$ là đường cao của tam giác vuông AHM.

$\Rightarrow AK \perp KH$

Do đó KH cắt (O) tại D (D khác K) thì AD là đường kính của (O).

Gọi J là trung điểm HD, N là trung điểm QC.

Khi đó OJ là đường trung bình của $\triangle AHD$

$\Rightarrow OJ \parallel AH \Rightarrow OJ \perp BC$.

Mà $OB = OC$ nên OJ là trung trực BC (4)

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Vì $HQ \parallel DC$ (cùng vuông góc AC) nên $HQCD$ là hình thang.

$\Rightarrow JN$ là đường trung bình của hình thang $HQCD$

$\Rightarrow JN \parallel HQ \Rightarrow JN \perp QC$

$\Rightarrow JN$ là trung trực của QC (5)

Từ (4) và (5) $\Rightarrow J$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BPQC$ (do $BPQC$ là tứ giác nội tiếp)

$\Rightarrow J \equiv I$

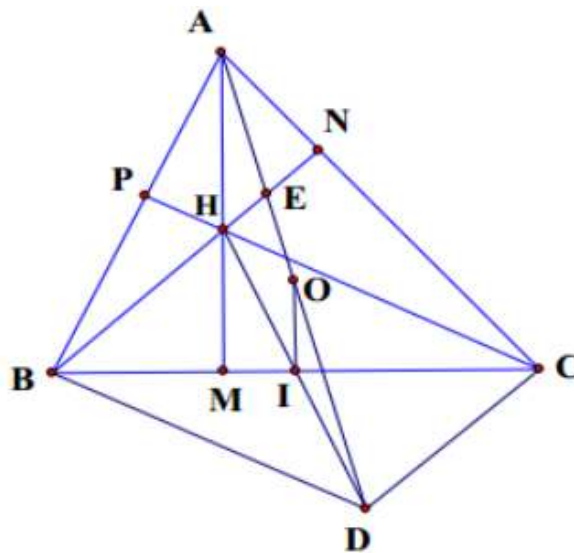
Mà K, H, J thẳng hàng nên I, K, H thẳng hàng.

Bài 22: Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AM, BN, CP của tam giác ABC cắt nhau tại H .

Dựng hình bình hành $BHCD$.

- 1) Chứng minh: Các tứ giác $APHN, ABDC$ là các tứ giác nội tiếp.
- 2) Gọi E là giao điểm của AD và BN . Chứng minh: $AB \cdot AH = AE \cdot AC$
- 3) Giả sử các điểm B và C cố định, A thay đổi sao cho tam giác ABC nhọn và $\angle BAC$ không đổi. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tứ giác $APHN$ có diện tích không đổi

Lời giải



- 1) ta có: $\angle APH = 90^\circ$; $\angle ANH = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $APHN$ nội tiếp đường tròn đường kính AH

Ta có: $BD \parallel CH$ ($BDCH$ là hình bình hành) và $CH \perp AB$

$\Rightarrow BD \perp AB \Rightarrow \angle ABD = 90^\circ$

Tương tự ta có: $\angle ACD = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $ABDC$ nội tiếp đường tròn đường kính AD

- 2) Xét $\triangle ABE$ và $\triangle ACH$ có:

$\angle ABE = \angle ACH$ (cùng phụ với $\angle BAC$) (1)

Lại có: $\angle BAE + \angle BDA = 90^\circ$; $\angle CAH + \angle BCA = 90^\circ$; $\angle BDA = \angle BCA$ (cùng chắn cung AB)

$\Rightarrow \angle BAE = \angle CAH$ (2)

$\Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle ACH$ (g - g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AH} \Rightarrow AB.AH = AC.AE$$

3) Gọi I là trung điểm của BC $\Rightarrow$ I cố định (do B, C cố định)

Gọi O là trung điểm AD $\Rightarrow$ O cố định (do $\angle BAC$ không đổi, B, C cố định, O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$)

$\Rightarrow$ Độ dài OI không đổi

Tứ giác ABDC là hình bình hành $\Rightarrow$ I là trung điểm của HD

$\Rightarrow$ (OI là đường trung bình của tam giác ADH)

$\Rightarrow$ Độ dài AH không đổi

Vì AH là đường kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác APHN, độ dài AH không đổi

$\Rightarrow$ độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác APHN không đổi

$\Rightarrow$ đường tròn ngoại tiếp tứ giác APHN có diện tích không đổi.

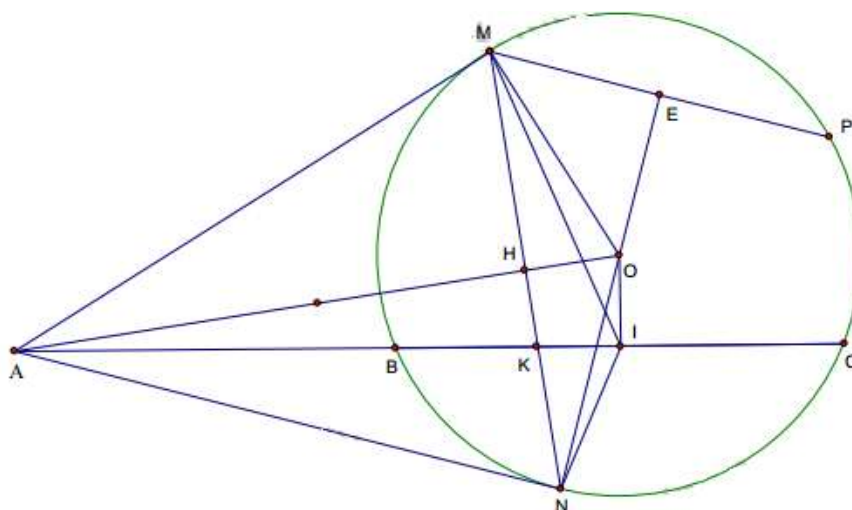
Bài 23: Cho đường tròn (O; R) và dây BC cố định không đi qua tâm. Trên tia đối của tia BC lấy điểm A (A khác B). Từ A kẻ hai tiếp tuyến AM và AN với đường tròn (O) (M và N là các tiếp điểm). Gọi I là trung điểm của BC.

1) Chứng minh A, O, M, N, I cùng thuộc một đường tròn và IA là tia phân giác của góc MIN

2) Gọi K là giao điểm của MN và BC. Chứng minh $\frac{2}{AK} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$.

3) Đường thẳng qua M và vuông góc với đường thẳng ON cắt (O) tại điểm thứ hai là P. Xác định vị trí của điểm A trên tia đối của tia BC để AMPN là hình bình hành.

Lời giải



1) Ta có: $\angle AMO = \angle ANO = \angle AIO = 90^\circ$

$\Rightarrow$ 5 điểm A, O, M, N, I thuộc đường tròn đường kính AO

$\Rightarrow \angle AIN = \angle AMN$; $\angle AIM = \angle ANM$ (góc nội tiếp cùng chắn một cung)

Lại có: $AM = AN$

$\Rightarrow \triangle AMN$ cân tại A $\Rightarrow \angle ANM = \angle AMN$

$\Rightarrow \angle AIN = \angle AIM \Rightarrow \text{đpcm}$

$$2) \frac{2}{AK} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} \Leftrightarrow 2AB.AC = AK(AB + AC) \Leftrightarrow AB.AC = AK.AI \text{ (Do } AB + AC = 2AI)$$

$$\Delta ABN \# \Delta ANC \Rightarrow \frac{AB}{AN} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow AB.AC = AN^2$$

$$\Delta AHK \# \Delta AIO \Rightarrow \frac{AH}{AI} = \frac{AK}{AO} \Rightarrow AH.AO = AI.AK$$

$$\Delta AMO \text{ vuông tại } M \text{ có đường cao } MH \Rightarrow AH.AO = AM^2 \\ \Rightarrow AK.AI = AM^2$$

$$\text{Do } AN = AM \Rightarrow AB.AC = AK.AI$$

$$3) \text{ Ta có } AN \perp NO, MP \perp NO, M \notin AN \Rightarrow AN \parallel MP$$

$$\text{Do đó } AMPN \text{ là hình bình hành } \Rightarrow AN = MP = 2x$$

$$\Delta ANO \# \Delta NEM \Rightarrow \frac{AN}{NE} = \frac{NO}{EM} \Rightarrow NE = \frac{2x^2}{R}$$

$$\text{TH 1: } NE = NO - OE \Rightarrow \frac{2x^2}{R} = R - \sqrt{R^2 - x^2} \Leftrightarrow 2x^2 = R^2 - R\sqrt{R^2 - x^2}$$

$$\text{Đặt } \sqrt{R^2 - x^2} = t, t \geq 0 \Rightarrow x^2 = R^2 - t^2.$$

$$\text{PTTT: } 2(R^2 - t^2) = R^2 - Rt \Leftrightarrow 2t^2 - Rt - R^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = -R \\ t = R \end{cases}$$

$$\text{Do } t \geq 0 \Rightarrow t = R \Leftrightarrow \sqrt{R^2 - x^2} = R \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow A \equiv B \text{ (loại)}$$

$$\text{TH 2: } NE = NO + OE \Rightarrow \frac{2x^2}{R} = R + \sqrt{R^2 - x^2} \Leftrightarrow 2x^2 = R^2 + R\sqrt{R^2 - x^2}$$

$$\text{Đặt } \sqrt{R^2 - x^2} = t, t \geq 0 \Rightarrow x^2 = R^2 - t^2.$$

$$\text{PTTT } 2(R^2 - t^2) = R^2 + Rt \Leftrightarrow 2t^2 + Rt - R^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = R \\ t = -R \end{cases}$$

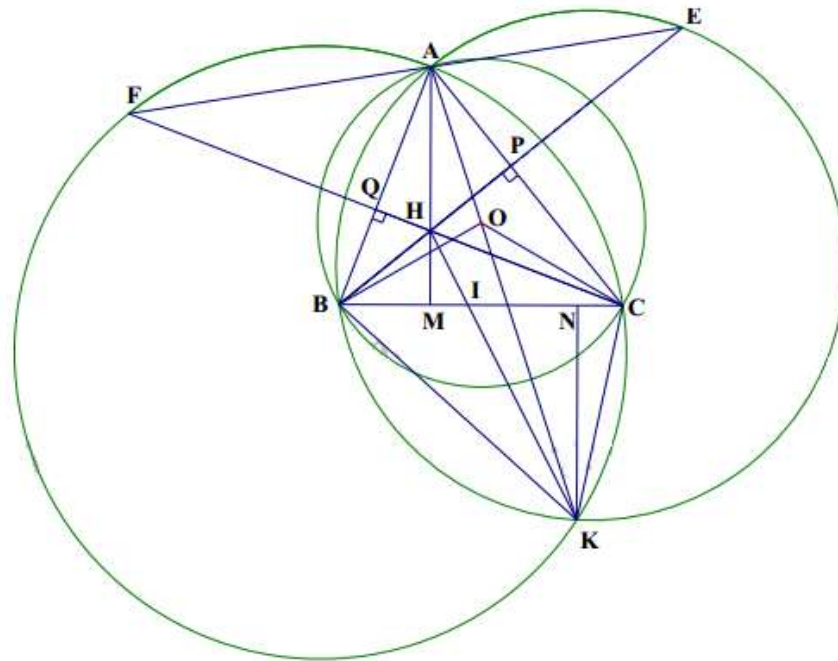
$$\text{Do } t \geq 0 \Rightarrow 2t = R \Leftrightarrow 2\sqrt{R^2 - x^2} = R \Leftrightarrow x = \frac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AO = 2R \text{ (loại)}$$

Vậy A thuộc BC, cách O một đoạn bằng 2R thì AMPN là hbh

Bài 24: Cho đường tròn (O; R) và dây cung $BC = R\sqrt{3}$ cố định. Điểm A di động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn. Gọi E là điểm đối xứng với B qua AC và F và điểm đối xứng với C qua AB. Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABE và ACF cắt nhau tại K (K không trùng A). Gọi H là giao điểm của BE và CF.

- Chứng minh KA là phân giác trong góc BKC và tứ giác BHCK nội tiếp.
- Xác định vị trí điểm A để diện tích tứ giác BHCK lớn nhất, tính diện tích lớn nhất của tứ giác đó theo R.
- Chứng minh AK luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



a) Ta có $AKB = AEB$ (vì cùng chắn cung AB của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEB)

Mà $ABE = AEB$ (tính chất đối ứng)

şu y ra $AKB = ABE$ (1)

$AKC = AFC$ (vì cùng chắn cung AC của đường tròn ngoại tiếp tam giác AFC)

$$ACF = AFC \text{ (tính chất đối xứng)}$$

suu ra $AKC = ACF$ (2)

Mặt khác $ABE = ACF$ (cùng phụ với BAC) (3)

Từ (1), (2) , (3) suy ra $AKB = AKC$

$\Rightarrow$ KA là phân giác trong của BKC

Gọi P, Q lần lượt là các giao điểm của BE với AC và CF với AB.

Ta có $BC = R\sqrt{3}$ nên $BOC = 120^0$; $BAC = \frac{1}{2}BOC = 60^0$

Trong tam giác vuông ABP có: $APB = 90^0$; $BAC = 60^0$

$$\Rightarrow APB = 30^0 \text{ hay } ABE = ACF = 30^0$$

Tứ giác APHQ có: $AQH + APH = 180^0$

$$\Rightarrow PAQ + PHQ = 180^0 \Rightarrow PHQ = 120^0 \Rightarrow BHC = 120^0 \text{ (đối đỉnh).}$$

Ta có: $AKC = ABE = 30^0$; $AKB = ACF = ABE = 30^0$

Mà $BKC = AKC + AKB = AFC + AEB = ACF + ABE = 60^0$

suy ra: $BHC + BKC = 180^\circ$

nên tứ giác BHCK nội tiếp

- b) Gọi (O') là đường tròn đi qua bốn điểm B, H, C, K.

Ta có dây cung $BC = R\sqrt{3}$; $BKC = BAC = 60^\circ$

nên bán kính đường tròn (O') bằng bán kính R của đường tròn (O)

Gọi M là giao điểm của AH và BC thì MH vuông góc với BC

kẻ KN vuông góc với BC (N thuộc BC), gọi I là giao điểm của HK và BC

Ta có: $S_{BHCK} = S_{BHC} + S_{BCK} = \frac{1}{2}BC.HM + \frac{1}{2}BC.KN = \frac{1}{2}BC.(HM + KN)$

$S_{BHCK} \leq \frac{1}{2}BC(HI + KI) = \frac{1}{2}BC.KH$ (Do $HM \leq HI$; $KN \leq KI$)

Ta có KH là dây cung của đường tròn (O') ; R) suy ra $KH \leq 2R$ (không đổi)

Nên S_{BHCK} lớn nhất khi $KH = 2R$ và $HM + KN = HK = 2R$

Giá trị lớn nhất $S_{BHCK} = \frac{1}{2}R\sqrt{3}.2.R = R^2\sqrt{3}$

Khi HK là đường kính của đường tròn (O') thì M, I, N trùng nhau

suy ra I là trung điểm của BC nên $\triangle ABC$ cân tại A

Khi đó A là điểm chính giữa cung lớn BC

- c) Ta có: $BOC + BKC = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$

nên tứ giác BOCK nội tiếp đường tròn.

Ta có: $OB = OC = R \Rightarrow BKO = CKO$

hay KO là phân giác góc BKC theo phần (a) KA là phân giác góc BKC

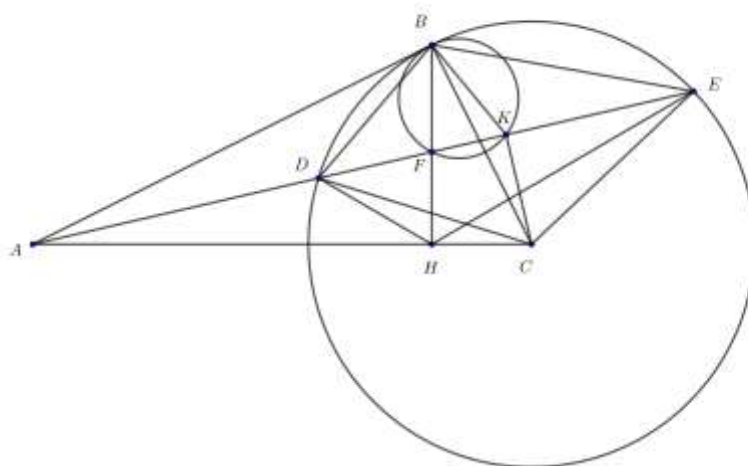
nên K, O, A thẳng hàng hay AK đi qua O cố định

Bài 25: Cho tam giác ABC vuông tại B, đường cao BH ($H \in AC$). Gọi (ω) là đường tròn tâm

C bán kính CB. Gọi F là một điểm bất kì trên đoạn thẳng BH (F khác B và H). AF cắt (ω) tại hai điểm D, E (D nằm giữa A và E). Gọi K là trung điểm DE.

- Chứng minh rằng FKCH là tứ giác nội tiếp.
- Chứng minh rằng $AD.AE = AH.AC = AF.AK$;
- Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác BFK tiếp xúc với (ω) tại B.

Lời giải



- b) Xét $\triangle ADB$ và $\triangle ABE$ có:

$$\Rightarrow \triangle ADB \cong \triangle ABE \text{ (g.g.)}$$

Suy ra $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AE}$ hay $AD.AE = AB^2$

Do đó $AD.AE = AH.AC$

suý ra $AF.AK = AH.AC$

$$\Rightarrow AD.AE = AH.AC = AF.AK$$

- Ta có $\Delta AFB \# \Delta ABK$ (c.g.c)

$\Rightarrow AB$ là tiếp tuyến chung

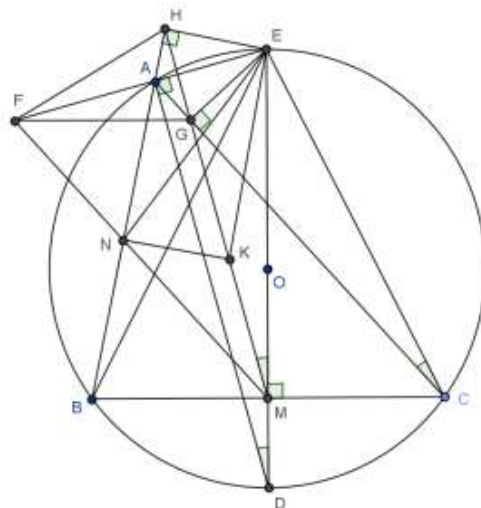
$\Rightarrow$ Đường tròn ngoại tiếp ΔBFK

hình chiếu vuông góc của E lên cạnh AC, gọi M và N tương ứng là trung điểm của các đoạn thẳng BC và BA. Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng GM, H là giao điểm của đường thẳng AB và đường thẳng MG, F là giao điểm của đường thẳng MN và đường thẳng AE.

- b) Chứng minh $FH = MC$.

- c) Chứng minh $KE + KN \leq \sqrt{2}.EN$.

Hình vẽ:



- + Có AD, AE là các phân giác trong và ngoài của góc BAC nên chúng vuông góc, suy ra ED là đường kính của (O) .

+ Lại có D là điểm chính giữa của cung nhỏ BC của (O) nên có OD vuông góc với BC tại trung điểm M. Vậy D, M, O, E thẳng hàng và $DE \perp BC$.

+ Xét tứ giác EGMC có $EGC = EMC = 90^\circ$ nên EGMC là tứ giác nội tiếp.

+ Suy ra $EMG = ECG$, lại có $ECG = EDA$ nên $EMG = EDA$, suy ra $GM \parallel AD$.
b) (1,0 điểm)

+ $AE \perp AD$ và $MG \parallel AD$ nên $MG \perp FE$. Lại có $EG \perp AC$ và $MF \parallel AC$ nên $EG \perp MF$. Từ đó suy ra G là trực tâm tam giác MFE, do đó $FG \perp ME$ hay $FG \perp DE$.

+ Có $FG \parallel MC$ (vì cùng vuông góc với DE), $FM \parallel GC$ nên FMCG là hình bình hành, suy ra $FG = MC$.

+ Từ AE là phân giác của HAG và $HG \perp AE$ suy ra đường thẳng AE là đường trung trực của đoạn HG.

Suy ra $FH = FG$. Vậy $FH = MC$.

c) (1,0 điểm)

+ Từ $EAB = EGM$ (vì cùng cộng với ECB ra 180°), $ABE = GME$ (vì cùng bằng ECA), suy ra $\triangle EAB \sim \triangle EGM$ (g.g)

+ Có N và K là các trung điểm của hai cạnh tương ứng là AB và GM nên $EKG = ENA$, suy ra tứ giác EKNH là tứ giác nội tiếp.

+ Lại có $AHE = AGE = 90^\circ$ (Do H, G đối xứng nhau qua AE) nên dẫn đến $NKE = 90^\circ$.

Có $NE^2 = EK^2 + KN^2$. Từ $2(EK^2 + KN^2) \geq (EK + KN)^2$ có

$2NE^2 \geq (EK + KN)^2$ hay $EK + KN \leq NE\sqrt{2}$, vậy có đpcm.

Bài 2: (Kèm đề bài : chữ đen)

Lời giải (chữ đen)

8. Quỹ tích

A. Bài toán

Bài 1: Cho đường tròn (O) và dây BC cố định không qua tâm O, điểm A di chuyển trên cung lớn BC. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AD = AC$. Gọi M là trung điểm của CD. Hỏi M di chuyển trên đường nào? Nêu cách dựng đường này và giới hạn của nó.

B. Lời giải

Bài 1: Cho đường tròn (O) và dây BC cố định không qua tâm O, điểm A di chuyển trên cung lớn BC. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AD = AC$. Gọi M là trung điểm của CD. Hỏi M di chuyển trên đường nào? Nêu cách dựng đường này và giới hạn của nó.

Lời giải

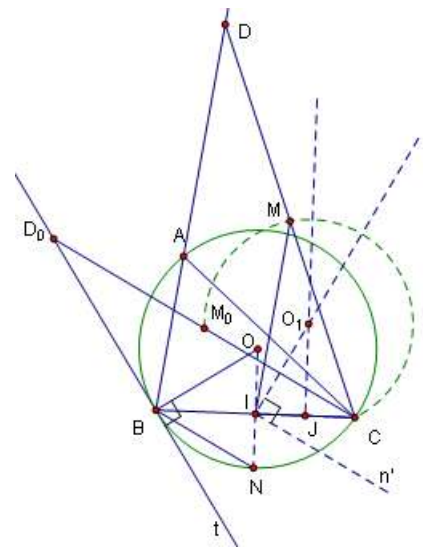
- Ta có: Tam giác ACD cân tại A (GT)

nên $BAC = 2ADC$ (Góc BAC là góc ngoài của tam giác ACD)

- Gọi I là trung điểm của BC, ta có $MI \parallel BD$ (đường trung bình của tam giác BCD), nên:

$$\angle IMC = \angle BDC = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{4} \angle BOC = \frac{\alpha}{4} \quad (\alpha = \angle BOC \text{ không đổi}).$$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038



Do đó: M chạy trên cung tròn nhìn đoạn IC dưới góc $\frac{\alpha}{4}$ không đổi.

- Dựng tia OI cắt đường tròn (O) tại N, ta có: $NBC = \frac{1}{2} BAC = BDC = IMC$.

- Dựng tia $In' // BN$, dựng đường thẳng qua I và vuông góc với In' cắt trung trực đoạn IC tại O_1 . Đường tròn tâm O_1 và đi qua C là đường cần dựng.

- Khi A chạy trên cung lớn BC tới trùng với A thì D trùng với D_0 trên tiếp tuyến Bt của (O) và $BD_0 = BC$, khi đó M trùng với M_0 là trung điểm của CD_0 .

Vậy M chỉ di chuyển trên cung lớn CM_0 của đường tròn (O_1).

9. Cực trị hình học

A. Bài toán

Bài 1: Trong các tam giác có cạnh đáy bằng a, chiều cao tương ứng là h (a, h cho trước, không đổi). Hãy tìm tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất.

Bài 2: Cho đường tròn ($O; R$) và hai điểm B, C cố định sao cho góc $BOC = 120^\circ$. Điểm A di động trên cung lớn BC sao cho $\triangle ABC$ nhọn. Gọi E là điểm đối xứng với B qua AC và F là điểm đối xứng với C qua AB. Các đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE, $\triangle ACF$ cắt nhau tại K ($K \neq A$). Gọi H là giao điểm của BE và CF.

a) Chứng minh KA là phân giác trong góc BKC và tứ giác BHCK nội tiếp.

b) Xác định vị trí điểm A để diện tích tứ giác BHCK lớn nhất, tính diện tích lớn nhất của tứ giác BHCK theo R.

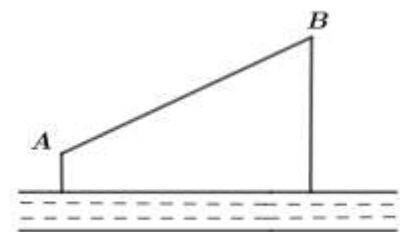
Bài 3: Cho ABCD là hình bình hành. Đường thẳng d đi qua A không cắt hình bình hành, ba điểm H, I, K lần lượt là hình chiếu của B, C, D trên đường thẳng d. Xác định vị trí đường thẳng d để tổng: $BH + CI + DK$ có giá trị lớn nhất.

Bài 4: Cho hình vuông ABCD và MNPQ có bốn đỉnh M, N, P, Q lần lượt thuộc các cạnh

AB, BC, CD, DA của hình vuông. CMR: $S_{ABCD} \leq AC \frac{MN + NP + PQ + QM}{4}$

Bài 5:

Hai vị trí A và B cách nhau 615 m và cùng nằm về một phía bờ sông. Khoảng cách từ A, B đến bờ sông lần lượt là 118 m và 487 m (tham khảo hình vẽ bên). Một người đi từ A đến bờ sông để lấy nước mang về B. Đoạn đường ngắn nhất mà người đó có thể đi được bằng bao nhiêu mét (làm tròn đến đơn vị mét).



Bài 6: Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O, R). H là một điểm di động trên đoạn OA (H khác A). Đường thẳng đi qua H và vuông góc với OA cắt cung nhỏ AB tại M. Gọi K là hình chiếu của M trên OB.

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

a) Chứng minh $HKM = 2AMH$.

b) Các tiếp tuyến của (O, R) tại A và B cắt tiếp tuyến tại M của (O, R) lần lượt tại D và E. OD, OE cắt AB lần lượt tại F và G. Chứng minh $OD \cdot GF = OG \cdot DE$

c) Tìm giá trị lớn nhất của chu vi tam giác MAB theo R.

Bài 7: Cho điểm M nằm trên nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$ (M không trùng với A và B). Trong nửa mặt phẳng chứa nửa đường tròn có bờ là đường thẳng AB, kẻ tiếp tuyến Ax. Đường thẳng BM cắt Ax tại I; tia phân giác của $\angle IAM$ cắt nửa đường tròn O tại E, cắt IB tại F; đường thẳng BE cắt AI tại H, cắt AM tại K.

a) Chứng minh 4 điểm F, E, K, M cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh $HF \perp BI$.

c) Xác định vị trí của M trên nửa đường tròn O để chu vi $\triangle AMB$ đạt giá trị lớn nhất và tìm giá trị đó theo R?

Bài 8: Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O; R). Một điểm P chạy trên cung nhỏ AB (P khác A và B). Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ P đến A và từ P đến B không lớn hơn đường kính của đường tròn (O).

Bài 9: Cho đường tròn (C) đường kính $PQ = 2R$ cố định và một đường kính MN của đường tròn thay đổi (MN khác PQ). Qua P vẽ đường thẳng (d) là tiếp tuyến của đường tròn, (d) cắt QM và QN lần lượt ở E và F.

1) Chứng minh tam giác QMN đồng dạng với tam giác QFE.

2) Tìm vị trí của đường kính MN để EF có độ dài nhỏ nhất và tính giá trị nhỏ nhất đó theo R.

1. Chứng minh tam giác QMN đồng dạng với tam giác QFE.
2. Tìm vị trí của đường kính MN để EF có độ dài nhỏ nhất và tính giá trị nhỏ nhất đó theo R.

Bài 10: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi C là một điểm nằm trên nửa đường tròn (O) (C khác A, C khác B). Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB, D là điểm đối xứng với A qua C, I là trung điểm của CH, J là trung điểm của DH.

- a) Chứng minh $CIJ = CBH$
- b) Chứng minh $\triangle CJH$ đồng dạng với $\triangle HIB$
- c) Gọi E là giao điểm của HD và BI. Chứng minh $HE \cdot HD = HC^2$
- d) Xác định vị trí của điểm C trên nửa đường tròn (O) để $AH + CH$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 11: Cho điểm M thuộc nửa đường tròn (O) đường kính AB ($M \neq A, M \neq B, MA < MB$). Tia phân giác của $\angle AMB$ cắt AB tại C. Qua C vẽ đường vuông góc với AB cắt đường thẳng AM, BM theo thứ tự ở D, H. Gọi E là hình chiếu vuông góc của H trên tiếp tuyến tại A của (O), F là hình chiếu vuông góc của D trên tiếp tuyến tại B của (O). Gọi S_1, S_2 thứ tự là diện tích tứ giác ACHE và BCDF. Chứng minh $CM^2 < \sqrt{S_1 \cdot S_2}$

Bài 12: Cho hình vuông ABCD cạnh bằng 4. Trên hai cạnh AB và AD lần lượt lấy hai điểm E, F sao cho EC là phân giác góc BEF. Trên tia AB lấy K sao cho $BK = DF$. Tìm vị trí của E, F sao cho diện tích tam giác CEF lớn nhất.

Bài 13: Chứng minh rằng: Nếu ba điểm A, B, C không có điểm nào nằm bên ngoài đường tròn (O) sao cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn thì chu vi của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ không lớn hơn chu vi (O).

Bài 14: Cho điểm M nằm trên nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$ (M không trùng với A và B). Trong nửa mặt phẳng chứa nửa đường tròn có bờ là đường thẳng AB, kẻ tiếp tuyến Ax.

Đường thẳng BM cắt Ax tại I; tia phân giác của $\angle IAM$ cắt nửa đường tròn O tại E, cắt IB tại F; đường thẳng BE cắt AI tại H, cắt AM tại K. Xác định vị trí của M trên nửa đường tròn O để chu vi $\triangle AMB$ đạt giá trị lớn nhất và tìm giá trị đó theo R?

Bài 15: Cho $\triangle ABC$ có diện tích là S. Một đường thẳng xy chuyển động và luôn đi qua điểm A. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của B và C trên xy. Đường thẳng xy phải ở vị trí nào để tổng $BE + CF$ có giá trị nhỏ nhất và xác định giá trị đó.

Bài 16: Cho (O; R) và hai điểm A, B cố định nằm ngoài đường tròn sao cho $OA = R\sqrt{2}$. Tìm vị trí điểm M trên đường tròn sao cho tổng $MA + \sqrt{2} MB$ đạt giá trị nhỏ nhất?

Bài 17: Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ đường thẳng d đi qua A sao cho d không cắt đoạn BC. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của B và C trên d. Tìm giá trị lớn nhất của chu vi tứ giác BHKC.

Bài 17: Cho tam giác ABC vuông cân tại A, trung tuyến AD. Điểm M di động trên đoạn AD. Gọi N và P lần lượt là hình chiếu của điểm M trên AB và AC. Vẽ $NH \perp PD$ tại H. Xác định vị trí của điểm M để tam giác AHB có diện tích lớn nhất.

Bài 18: Qua điểm O nằm trong tam giác ABC ta vẽ 3 đường thẳng song song với 3 cạnh tam giác. Đường thẳng song song với cạnh AB cắt cạnh AC, BC lần lượt tại E và D; đường thẳng song song với cạnh BC cắt cạnh AB và AC lần lượt tại M và N; đường thẳng song song với cạnh AC cắt cạnh AB và BC lần lượt tại F và H. Biết diện tích các tam giác ODH, ONE, OMF lần lượt là a^2, b^2, c^2 .

- a) Tính diện tích S của tam giác ABC theo a, b, c

b) Chứng minh $S \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$

Bài 19: Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Gọi M là điểm nằm trên nửa đường tròn khác A và B . xác định vị trí điểm M sao cho tam giác MAB có chu vi lớn nhất

Bài 20: Cho tam giác ABC cân tại A ($BAC > 90^\circ$) nội tiếp đường tròn (O) bán kính R . M là điểm nằm trên cạnh BC ($BM > CM$). Gọi D là giao điểm của AM và đường tròn (O) (D khác A), điểm H là trung điểm đoạn thẳng BC . Gọi E là điểm chính giữa cung lớn BC , ED cắt BC tại N . Khi $2AB = R$, xác định vị trí của M để $2MA + AD$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 21: Cho đường tròn tâm O , đường kính BC cố định và một điểm A chuyển động trên nửa đường tròn (A khác B và C). Hạ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa A dựng hai nửa đường tròn tâm P đường kính HB và tâm Q đường kính HC , chúng lần lượt cắt AB và AC tại E và F .

Xác định vị trí điểm A để diện tích tứ giác $PEFQ$ đạt giá trị lớn nhất, tìm giá trị đó.

Bài 22: Cho tam giác ABC vuông tại A có phân giác AD . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của B, C lên đường thẳng AD .

Chứng minh rằng: $2AD \leq BM + CN$

Bài 23: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Gọi C là một điểm nằm trên nửa đường tròn (O) (C khác A, C khác B). Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB , D là điểm đối xứng với A qua C , I là trung điểm của CH , J là trung điểm của DH . Xác định vị trí của điểm C trên nửa đường tròn (O) để $AH + CH$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 24: Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung AB cố định, $AB = R\sqrt{2}$. Điểm P di động trên dây AB (P khác A và B). Gọi $(C; R_1)$ là đường tròn đi qua P và tiếp xúc với đường tròn $(O; R)$ tại A , $(D; R_2)$ là đường tròn đi qua P và tiếp xúc với đường tròn $(O; R)$ tại B . hai đường tròn $(C; R_1)$ và $(D; R_2)$ cắt nhau tại điểm thứ hai là M .

Tìm vị trí của P để tích $PM \cdot PN$ lớn nhất? diện tích tam giác AMB lớn nhất?

B. Lời giải

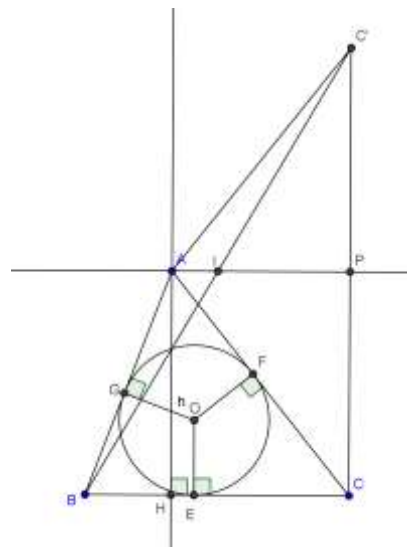
Bài 1: Trong các tam giác có cạnh đáy bằng a , chiều cao tương ứng là h (a, h cho trước, không đổi). Hãy tìm tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất.

Lời giải

Tam giác ABC có B, C cố định, $AH = h$

Vậy A thuộc đường thẳng d cố định song song với BC và cách BC một đoạn h

Gọi $(O; r)$ là đường tròn nội tiếp tam giác ABC , tiếp xúc với BC, AC, AB lần lượt tại E, F, G Ta có



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC \text{ (không đổi)} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle COA} = \frac{1}{2} r(AB + BC + CA) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có r lớn nhất khi $AB + AC$ nhỏ nhất

Lấy C' đối xứng với C qua $d \Rightarrow C'$ cố định và $AC = AC'$

$$\Rightarrow AB + AC = AB + AC' \geq BC'$$

$\Rightarrow AB + AC$ nhỏ nhất khi $A \equiv I$ (I là giao của BC' và d)

Gọi P là trung điểm của CC' vì $d \parallel BC$ nên I là trung điểm của BC'

$$\Rightarrow IB = IC' = IC \Rightarrow AB = AC$$

Vậy r lớn nhất khi tam giác ABC cân tại A

Bài 2: Cho đường tròn $(O; R)$ và hai điểm B, C cố định sao cho góc $BOC = 120^\circ$. Điểm A di động trên cung lớn BC sao cho $\triangle ABC$ nhọn. Gọi E là điểm đối xứng với B qua AC và F là điểm đối xứng với C qua AB . Các đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABE, \triangle ACF$ cắt nhau tại K ($K \neq A$). Gọi H là giao điểm của BE và CF .

a) Chứng minh KA là phân giác trong góc BKC và tứ giác $BHCK$ nội tiếp.

b) Xác định vị trí điểm A để diện tích tứ giác $BHCK$ lớn nhất, tính diện tích lớn nhất của tứ giác $BHCK$ theo R .

Lời giải

a) Ta có: $AKB = AEB$ (cùng chắn AB của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEB

Mà $ABE = AEB$ (tính chất đối xứng) suy ra $AKB = ABE$ (1)

Ta có: $AKC = AFC$ (Cùng chắn cung AC của đường tròn ngoại tiếp $\triangle AFC$)

Mà $ACF = AFC$ (tính chất đối xứng) suy ra $AKC = ACF$ (2)

Mặt khác $ABE = ACF$ (Cùng phụ BAC) (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $AKB = AKC$ hay KA là phân giác trong của BKC

Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của BE với AC và CF với AB

$$\text{Ta có: } BOC = 120^\circ \text{ nên } BC = R\sqrt{3}, BAC = \frac{1}{2} BOC = 60^\circ.$$

Trong tam giác vuông ABP có: $APB = 90^\circ, BAC = 60^\circ$, suy ra $ABP = 30^\circ$. Hay

$$ABE = ACF = 30^\circ.$$

Tứ giác $APHQ$ có: $AQH + APH = 180^\circ$

$$\text{Suy ra } PAQ + PHQ = 180^\circ \Rightarrow PHQ = 120^\circ \Rightarrow BHC = 120^\circ \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\text{Ta có: } AKC = ABE = 30^\circ, AKB = ACF = ABE = 30^\circ.$$

$$\text{Mà } BKC = AKC + AKB = AFC + AEB = ACF + ABE = 60^\circ$$

$$\text{Suy ra: } BHC + BKC = 180^\circ.$$

Do đó tứ giác $BHCK$ nội tiếp.

b) Gọi (O') là đường tròn đi qua bốn điểm B,H,C,K. Ta có dây $BC = R\sqrt{3}$

$BKC = 60^\circ = BAC$ nên bán kính đường tròn (O') bằng bán kính R của đường tròn (O) .

Gọi M là giao điểm AH và BC suy ra $MH \perp BC$; Kẻ KN vuông góc BC $(N \in BC)$, gọi I là giao điểm HK và BC.

$$\text{Ta có: } S_{BHCK} = S_{BHC} + S_{BCK} = \frac{1}{2}BC.HM + \frac{1}{2}.BC.KN = \frac{1}{2}BC(HM + KN)$$

$$S_{BHCK} \leq \frac{1}{2}BC(HI + KI) = \frac{1}{2}BC.KH \quad (\text{Do } HM \leq HI, KN \leq KI)$$

Ta có: KH là dây cung của đường tròn $(O'; R)$.

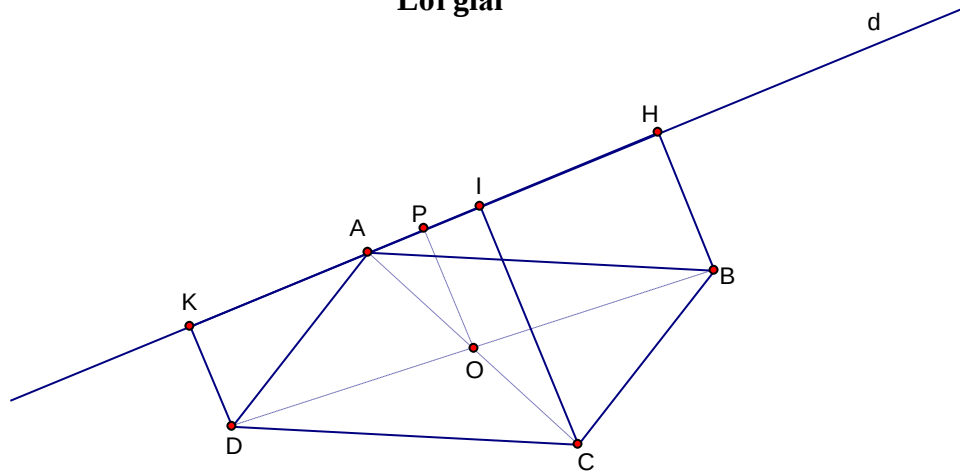
Suy ra $KH \leq 2R$ (không đổi), nên S_{BHCK} lớn nhất khi $KH = 2R$ và $HM + KN = HK = 2R$.

$$\text{Giá trị lớn nhất } S_{BHCK} = \frac{1}{2}R\sqrt{3}2R = \sqrt{3}R^2$$

Khi HK là đường kính của đường tròn (O') thì M,N,I trùng nhau; suy ra I là trung điểm của BC nên $\triangle ABC$ cân tại A; Khi đó A là điểm chính giữa của cung lớn BC.

Bài 3: Cho ABCD là hình bình hành. Đường thẳng d đi qua A không cắt hình bình hành, ba điểm H, I, K lần lượt là hình chiếu của B, C, D trên đường thẳng d. Xác định vị trí đường thẳng d để tổng: $BH + CI + DK$ có giá trị lớn nhất.

Lời giải



Gọi O giao điểm 2 đường chéo hình bình hành, kẻ OP vuông góc d tại P

HS lập luận được $BH + CI + DK = 4OP$

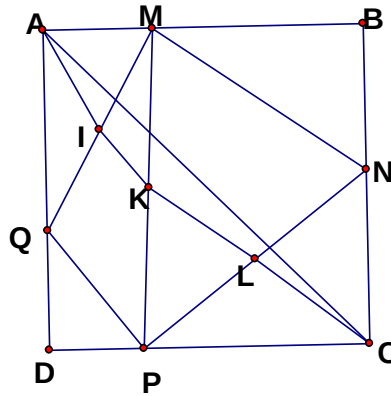
Mà $OP \leq AO$ nên $BH + CI + DK \leq 4AO$. Vậy $\text{Max}(BH + CI + DK) = 4AO$

Đạt được khi $P \equiv A$ hay d vuông góc AC

Bài 4: Cho hình vuông ABCD và MNPQ có bốn đỉnh M,N,P,Q lần lượt thuộc các cạnh

AB,BC,CD,DA của hình vuông. CMR: $S_{ABCD} \leq AC \frac{MN + NP + PQ + QM}{4}$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Lời giải

Cách 1 Gọi T, K, L là trung điểm MQ, MP, NP theo t/c đường trung bình và trung tuyến tam giác vuông ta có $MN + NP + PQ + QM = 2(KL + CL + IK + AI) \geq 2AC$ từ đó suy ra đpcm

Cách 2 Ta có theo Pitago

$$MN^2 = BN^2 + BM^2 \geq \frac{(BM + BN)^2}{2} \Leftrightarrow MN \geq \frac{BM + BN}{\sqrt{2}} \quad (\text{áp dụng BĐT Bunhiacopsky})$$

$$\text{Tương Tự } NP \geq \frac{CN + NP}{\sqrt{2}}; PQ \geq \frac{DP + DQ}{\sqrt{2}}; MQ \geq \frac{AQ + AM}{\sqrt{2}}$$

Nên

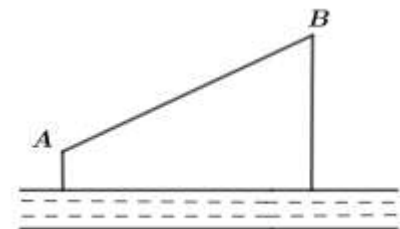
$$MN + NP + PQ + QM \geq \frac{BM + NB + NC + CP + PD + DQ + QA + AM}{\sqrt{2}} = \frac{4a}{\sqrt{2}} = 2a\sqrt{2}$$

$$\frac{a\sqrt{2}}{4} (MN + NP + PQ + QM) = a^2 \Leftrightarrow \text{đpcm}$$

Dấu “=” xảy ra khi MNPQ là hình chữ nhật

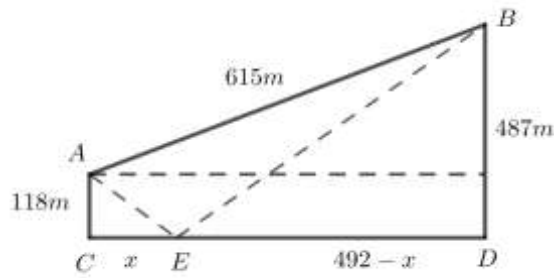
Bài 5:

Hai vị trí A và B cách nhau 615 m và cùng nằm về một phía bờ sông. Khoảng cách từ A, B đến bờ sông lần lượt là 118 m và 487 m (tham khảo hình vẽ bên). Một người đi từ A đến bờ sông để lấy nước mang về B. Đoạn đường ngắn nhất mà người đó có thể đi được bằng bao nhiêu mét (làm tròn đến đơn vị mét).

**Lời giải**

Gọi C, D lần lượt là hình chiếu của A, B lên bờ sông. Đặt $CE = x$ ($0 < x < 492$)

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038



Ta có $CD = \sqrt{615^2 - (487 - 118)^2} = 492$.

Quãng đường di chuyển của người đó bằng $AE + EB = \sqrt{x^2 + 118^2} + \sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}$

Ta có với mọi a, b, c, d thì $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2}$ (1).

Thật vậy (1) $\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \geq (a + c)^2 + (b + d)^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \geq ac + bd$ (2)

Nếu $ac + bd < 0$ thì (2) luôn đúng. Nếu $ac + bd \geq 0$ bình phương hai vế ta được (2) trở thành $(ad - bc)^2 \geq 0$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $ad = bc$.

Áp dụng (1) thì $AE + EB \geq \sqrt{(x + 492 - x)^2 + (487 + 118)^2} = \sqrt{608089} \approx 779,8m$

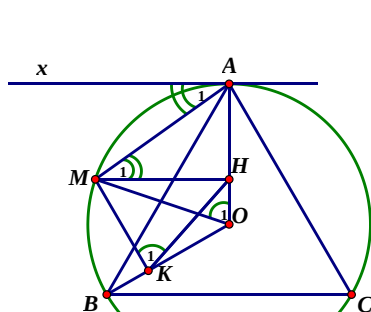
Dấu đẳng thức xảy ra khi $487x = 118(492 - x) \Leftrightarrow x \approx 96m$

Bài 6: Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O, R). H là một điểm di động trên đoạn OA (H khác A). Đường thẳng đi qua H và vuông góc với OA cắt cung nhỏ AB tại M. Gọi K là hình chiếu của M trên OB.

a) Chứng minh $HKM = 2AMH$.

b) Các tiếp tuyến của (O, R) tại A và B cắt tiếp tuyến tại M của (O, R) lần lượt tại D và E. OD, OE cắt AB lần lượt tại F và G. Chứng minh $OD \cdot GF = OG \cdot DE$

c) Tìm giá trị lớn nhất của chu vi tam giác MAB theo R.



a)

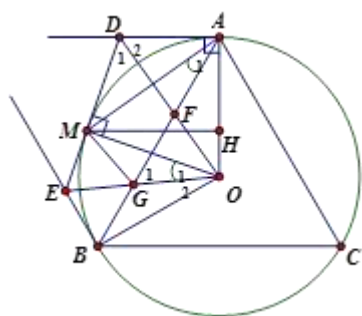
Qua A kẻ tia tiếp tuyến Ax của (O). Ta có

$$A_1 = \frac{1}{2}O_1 = \frac{1}{2}\text{sđ } AM \quad (1)$$

Có $Ax \parallel MH$ (cùng vuông góc với OA) $\Rightarrow A_1 = M_1$

Tứ giác MHOK nội tiếp $\Rightarrow O_1 = K_1$ (cùng chắn MH) (3)

Từ (1), (2), (3) ta có $M_1 = \frac{1}{2}K_1$ hay $HKM = 2AMH$.



b)

Có tứ giác AOMD nội tiếp (4)

$$A_1 = \frac{1}{2} \text{sđ } BM; O_1 = O_2 = \frac{1}{2} \text{sđ } BM$$

$\Rightarrow A_1 = O_1 \Rightarrow$ tứ giác AMGO nội tiếp (5)

Từ (4), (5) ta có 5 điểm A, D, M, G, O cùng nằm trên một đường tròn

$$\Rightarrow G_1 = D_2 = D_1$$

$\Rightarrow \triangle OGF$ và $\triangle ODE$ đồng dạng

$$\Rightarrow \frac{OG}{OD} = \frac{GF}{DE} \text{ hay } OD \cdot GF = OG \cdot DE.$$

$$\Rightarrow \triangle MAB = \triangle A'AC \Rightarrow MB = A'C$$
$$MA + MB + AB = MC + AB \leq 2R + AB$$

Giá trị lớn nhất của chu vi tam giác MAB là $2R + AB = (2 + \sqrt{3})R$

f) Xác định vị trí của M trên nửa đường tròn O để chu vi ΔAMB đạt giá trị lớn nhất và tìm giá trị đó theo R ?

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

b) Ta có $\triangle HAK$ cân tại A nên $AH = AK$ (1)

K là trực tâm của $\triangle AFB$ nên ta có $FK \perp AB$ suy ra $FK \parallel AH$ (2)

Do đó $FAH = AFK$ mà $FAH = FAK$ (gt) cho nên $AFK = FAK$

Suy ra $AK = KF$, kết hợp với (1) ta được $AH = KF$ (3)

Từ (2) và (3) ta có $AKFH$ là hình bình hành nên $HF \parallel AK$. Mà $AK \perp IB$ suy ra $HF \perp IB$.

c) Chu vi của $\triangle AMB = C_{\triangle AMB} = MA + MB + AB$ lớn nhất khi chỉ khi $MA + MB$ lớn nhất (vì AB không đổi).

Áp dụng bất đẳng thức $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$, ta có

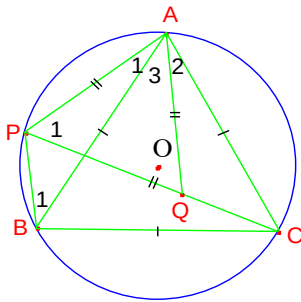
$$(MA + MB)^2 \leq 2(MA^2 + MB^2) = 2AB^2$$

Nên $MA + MB$ đạt giá trị lớn nhất bằng $AB\sqrt{2}$ khi và chỉ khi $MA = MB$ hay M nằm chính giữa cung AB.

Bài 8: Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O; R). Một điểm P chạy trên cung nhỏ

AB (P khác A và B). Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ P đến A và từ P đến B không lớn hơn đường kính của đường tròn (O).

Giải:



Vì $\triangle ABC$ đều, $P \in AB$ nên $AP < PC$. Lấy điểm Q trên PC sao cho $PQ = PA$

$\triangle APQ$ cân có $\angle APQ = \angle P_1 = 60^\circ$ (chấn cung 120°) nên $\triangle APQ$ đều

$$\Rightarrow AP = AQ = PQ$$

- Chứng minh được $\triangle APB = \triangle AQC$ (c.g.c) $\Rightarrow PB = QC$

Từ đó $\Rightarrow PA + PB = PQ + QC = PC$. Mà PC là 1 dây của (O)

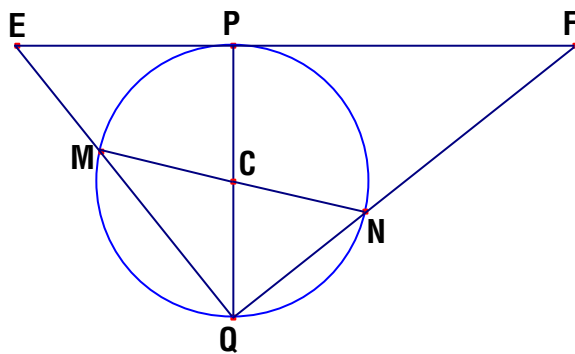
nên $PC \leq 2R$ (đường kính)

Chứng tỏ tổng các khoảng cách từ P đến A và từ P đến B không lớn hơn đường kính của đường tròn (O). (đpcm)

Bài 9: Cho đường tròn (C) đường kính $PQ = 2R$ cố định và một đường kính MN của đường tròn thay đổi (MN khác PQ). Qua P vẽ đường thẳng (d) là tiếp tuyến của đường tròn, (d) cắt QM và QN lần lượt ở E và F .

- 1) Chứng minh tam giác QMN đồng dạng với tam giác QFE .
- 2) Tìm vị trí của đường kính MN để EF có độ dài nhỏ nhất và tính giá trị nhỏ nhất đó theo R .

Giải:



a) Chứng minh được: $QM.QE = QN.QF (=PQ^2) \Rightarrow \frac{QM}{QF} = \frac{QN}{QE}$

Chỉ ra được: $\triangle QMN$ đồng dạng $\triangle QFE$ (c.g.c)

b) $\triangle QFE$ vuông tại Q có $PQ \perp EF$ (gt) (1) $\Rightarrow PQ^2 = PE.PF$ (hệ thức 2)

$\Rightarrow PE.PF = (2R)^2 = 4R^2$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 2 số $EP, PF > 0$ ta có

$EF = EP + PF \geq 2\sqrt{EP.PF} = 2.\sqrt{4R^2} = 4R$

$\Rightarrow EF$ nhỏ nhất bằng $4R$ khi $EP = PF$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \triangle QEF$ cân tại Q có PQ là đường cao đồng thời là phân giác.

Chỉ ra được $PMQN$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow PMQN$ là hình vuông $\Rightarrow MN \perp PQ$

Vậy Khi $MN \perp PQ$ thì EF có độ dài nhỏ nhất bằng $4R$

Bài 10: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Gọi C là một điểm nằm trên nửa đường tròn (O) (C khác A , C khác B). Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB , D là điểm đối xứng với A qua C , I là trung điểm của CH , J là trung điểm của DH .

a) Chứng minh $CIJ = CBH$

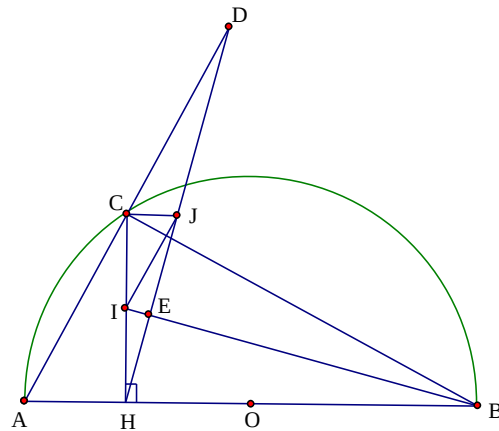
b) Chứng minh $\triangle CJH$ đồng dạng với $\triangle HIB$

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

c) Gọi E là giao điểm của HD và BI. Chứng minh $HE \cdot HD = HC^2$

d) Xác định vị trí của điểm C trên nửa đường tròn (O) để $AH + CH$ đạt giá trị lớn nhất.

Giải:



a) + Vì $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn đường kính AB nên $AC \perp BC$

Suy ra $BC \perp CD$ (1)

+ Lập luận để chỉ ra $IJ \parallel CD$ (2)

+ Từ (1) và (2) suy ra $IJ \perp BC$

+ Suy ra $\angle CIJ = \angle CBH$ (cùng phụ với $\angle HCB$) (3)

b) +) Trong $\triangle$ vuông CBH ta có: $\tan \angle CBH = \frac{CH}{BH}$ (4)

+ Lập luận chứng minh được $CJ \parallel AB$

+ Mà $CH \perp AB$ (gt)

+ Suy ra $CJ \perp CH$ +) Trong tam giác vuông CIJ ta có $\tan \angle CIJ = \frac{CJ}{CI} = \frac{CJ}{HI}$ $CI = HI$ (5)

+ Từ (3), (4), (5) $\Rightarrow \frac{CH}{HB} = \frac{CJ}{HI}$

+ Xét $\triangle CJH$ và $\triangle HIB$ có $\angle H CJ = \angle BHI = 90^\circ$ và $\frac{CH}{HB} = \frac{CJ}{HI}$ (cmt)

+ Nên $\triangle CJH$ đồng dạng với $\triangle HIB$

c)

+ Lập luận để chứng minh được $\angle HEI = 90^\circ$

+ Chứng minh được $\triangle HEI$ đồng dạng với $\triangle HCJ$

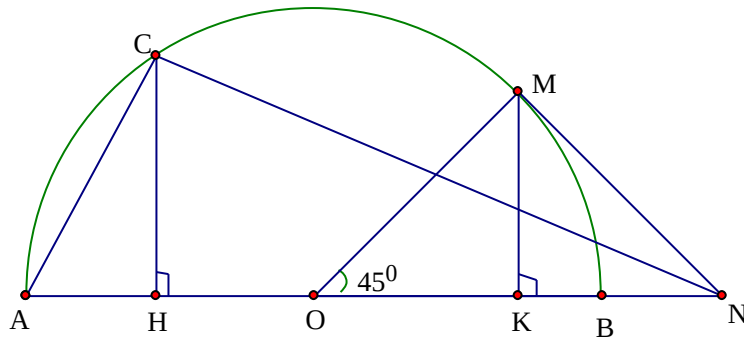
+ Suy ra $\frac{HE}{HC} = \frac{HI}{HJ}$

+ Suy ra $HE \cdot HJ = HI \cdot HC$

+ Mà $HJ = \frac{1}{2}HD$; $HI = \frac{1}{2}HC$

+ Suy ra $HE \cdot HD = HC^2$

d)

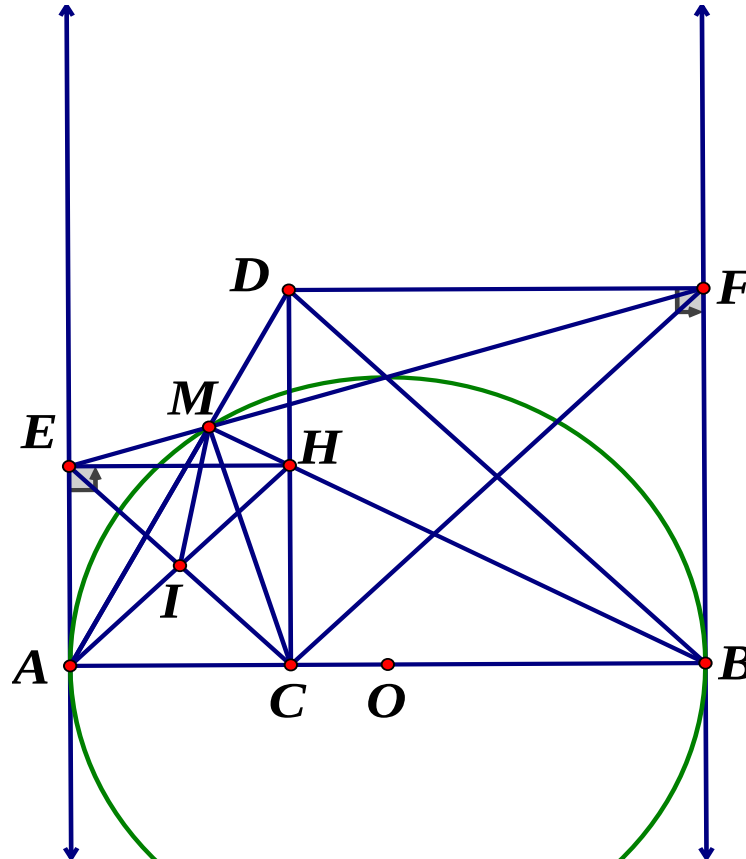


- + Lấy điểm M trên nửa đường tròn (O) sao cho $BOM = 45^\circ$
- + Tiếp tuyến của nửa đường tròn (O) tại M cắt AB tại N. Ta có M và N cố định.
- + Kẻ $MK \perp AB$ tại K
- + Chứng minh được $\triangle MON$ vuông cân tại M và $KM = KN$
 Suy ra $ANC = 45^\circ$
 Xét $C \equiv M$
 Ta có $C \equiv M$ nên $H \equiv K$
 Do đó $AH + CH = AK + KM = AK + KN = AN$ (không đổi)
- + Xét C khác M.
 Tia NC nằm giữa hai tia NA và NM
 Do đó $ANC < ANM = 45^\circ$
- + $\triangle HNC$ có $NHC = 90^\circ$
 nên $HNC + HCN = 90^\circ$
 Mà $HNC < 45^\circ$ nên $HCN > 45^\circ$
 Suy ra $HNC < HCN$
 Suy ra $HC < HN$
- + Do đó $AH + CH < AH + HN = AN$

+ Vậy Khi C ở trên nửa đường tròn (O) sao cho $BOC = 45^\circ$ thì $AH + CH$ đạt giá trị lớn nhất

Bài 11: Cho điểm M thuộc nửa đường tròn (O) đường kính AB ($M \neq A, M \neq B, MA < MB$). Tia phân giác của $\angle AMB$ cắt AB tại C. Qua C vẽ đường vuông góc với AB cắt đường thẳng AM, BM theo thứ tự ở D, H. Gọi E là hình chiếu vuông góc của H trên tiếp tuyến tại A của (O), F là hình chiếu vuông góc của D trên tiếp tuyến tại B của (O). Gọi S_1, S_2 thứ tự là diện tích tứ giác ACHE và BCDF. Chứng minh $CM^2 < \sqrt{S_1 \cdot S_2}$

Lời giải



Xét $\triangle BHC$ và $\triangle BAM$ có $\angle BCH = \angle BMA = 90^\circ$, góc $\angle ABM$ là góc chung

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AC = HC$

Gọi AH cắt EC tại I

Chúng mình tương tự ta có $\text{CMF} = 90^\circ$

Vậy $EMF = 90^0 + 90^0 = 180^0$ suy ra E, M, F thẳng hàng.

Tương tự $2S_7 = CF^2$

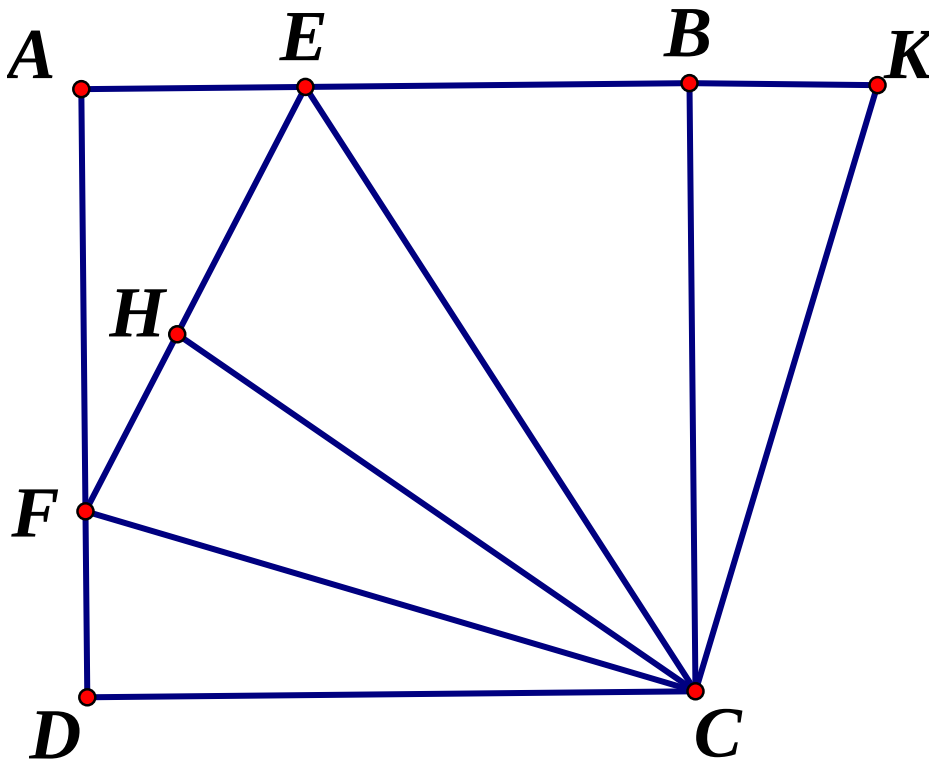
Xét $\triangle FCE$ vuông tại C, đường cao CM, theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có,

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow S_1 = S_2 \Leftrightarrow AM = BM$ (vô lý vì $AM < BM$)

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Bài 12: Cho hình vuông ABCD cạnh bằng 4. Trên hai cạnh AB và AD lần lượt lấy hai điểm E, F sao cho EC là phân giác góc BEF. Trên tia AB lấy K sao cho BK=DF. Tìm vị trí của E, F sao cho diện tích tam giác CEF lớn nhất.

Lời giải



Ta có: $CD=CB$, $DF=BK$, $\angle FDC = \angle CBK = 90^\circ$ nên $\triangle DFC = \triangle BKC \Rightarrow CK = CF$

Gọi H là chân đường cao kẻ từ C của tam giác CEF.

$\triangle DFC = \triangle HFC$, $\triangle HEC = \triangle BEC$

$$S_{DFC} = S_{HFC}; S_{HEC} = S_{BEC}$$

$$S_{CEF} = \frac{1}{2} S_{CDFEB} = \frac{1}{2} (S_{ABCD} - S_{AEF}) = \frac{1}{2} (16 - S_{AEF}) \Rightarrow S_{CEF} \leq 8$$

S_{CEF} lớn nhất bằng 8. Khi đó $E \equiv A, F \equiv D$.

Bài 13: Chứng minh rằng: Nếu ba điểm A, B, C không có điểm nào nằm bên ngoài đường tròn (O) sao cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn thì chu vi của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ không lớn hơn chu vi (O).

Lời giải

* Gọi đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là (I), I nằm trong $\triangle ABC$.

Nếu A, B, C nằm trên (O) thì (I) và (O) trùng nhau.

* Nếu (O) đựng (I) hoặc (O) và (I) tiếp xúc trong với nhau thì đường kính của (I) nằm trong (O) suy ra chu vi của (I) nhỏ hơn chu vi của (O).

* Nếu (O) và (I) cắt nhau tại M, N. Vì $\triangle ABC$ có ba góc nhọn nên số đo cung nhỏ $MN < 180^\circ$. Suy ra cung lớn $MN > 180^\circ$, ắt tồn tại đường kính của (I) nằm trong (O). Vậy chu vi của (I) nhỏ hơn chu vi của (O).

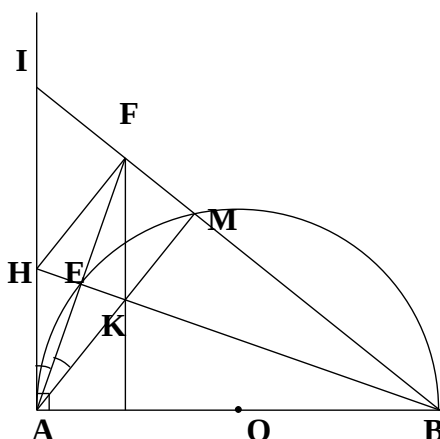
Bài 14: Cho điểm M nằm trên nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$ (M không trùng với A và B). Trong nửa mặt phẳng chứa nửa đường tròn có bờ là đường thẳng AB, kẻ tiếp tuyến Ax.

Đường thẳng BM cắt Ax tại I; tia phân giác của $\angle IAM$ cắt nửa đường tròn O tại E, cắt IB tại F;

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

đường thẳng BE cắt AI tại H, cắt AM tại K. Xác định vị trí của M trên nửa đường tròn O để chu vi ΔAMB đạt giá trị lớn nhất và tìm giá trị đó theo R?

Lời giải



Ta có M, E nằm trên nửa đường tròn đường kính AB nên $FMK = 90^\circ$ và $FEK = 90^\circ$.

Chu vi của $\Delta AMB = C_{\Delta AMB} = MA + MB + AB$ lớn nhất khi chỉ khi $MA + MB$ lớn nhất (vì AB không đổi).

Áp dụng bất đẳng thức $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b$, ta có $(MA+MB)^2 \leq 2(MA^2 + MB^2) = 2AB^2$

Nên $MA + MB$ đạt giá trị lớn nhất bằng $AB\sqrt{2}$ khi và chỉ khi $MA = MB$ hay M nằm chính giữa cung AB.

Vậy khi M nằm chính giữa cung AB thì $C_{\Delta AMB}$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó $C_{\Delta AMB} = MA + MB + AB = AB\sqrt{2} + AB = (1+\sqrt{2})AB = 2R(1+\sqrt{2})$

Bài 15: Cho ΔABC có diện tích là S. Một đường thẳng xy chuyển động và luôn đi qua điểm A. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của B và C trên xy. Đường thẳng xy phải ở vị trí nào để tổng $BE + CF$ có giá trị nhỏ nhất và xác định giá trị đó.

Lời giải

Nếu xy cắt cạnh BC tại điểm G. Ta có:

$$2S = AG(BE+CF) \Rightarrow BE + CF = \frac{2S}{AG}$$

Bởi vì 2S không thay đổi nên $(BE + CF)$ nhỏ nhất khi AG đạt giá trị Max.

Vậy AG lớn nhất nếu AG là độ dài lớn nhất của một trong hai cạnh.

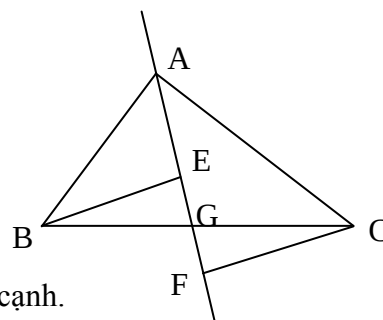
Nếu $AC \geq AB$ thì $AG = AC$ thì $\max AG = AC$ và $\min(BE+CF) = h_b$.

Nếu $AC \leq AB$ thì $\max AG = AB$ và $\min(BE+CF) = h_c$.

Khi đó xy đi qua cạnh lớn trong hai cạnh AB; AC.

Bài 16: Cho (O; R) và hai điểm A, B cố định nằm ngoài đường tròn sao cho $OA = R\sqrt{2}$. Tìm vị trí điểm M trên đường tròn sao cho tổng $MA + \sqrt{2} MB$ đạt giá trị nhỏ nhất?

Lời giải



Gọi C là giao điểm của đoạn thẳng OA với $(O; R)$. Trên đoạn OC

lấy điểm N sao cho $\frac{OC}{ON} = \sqrt{2}$

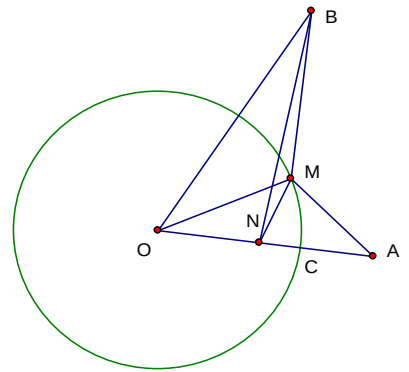
$$\text{Suy ra } \frac{OC}{ON} = \frac{OM}{ON} = \frac{OA}{OM} = \sqrt{2} \text{ suy ra } \Delta MOA \sim \Delta NOM (c.g.c)$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MN} = \sqrt{2} \Rightarrow MA = \sqrt{2}MN$$

$$\Rightarrow MA + \sqrt{2}MB = \sqrt{2}MN + \sqrt{2}MB = \sqrt{2}(MN + MB) \geq \sqrt{2}NB \text{ (không đổi)}$$

Dấu “=” xảy ra khi M thuộc đoạn NB. Vậy M là giao điểm của đoạn NB với đường tròn (O; R)

Bài 17: Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ đường thẳng d đi qua A sao cho d không cắt đoạn BC. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của B và C trên d. Tìm giá trị lớn nhất của chu vi tứ giác BHKC.



Lời giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có } BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ &= BH^2 + AH^2 + AK^2 + CK^2\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh bất đẳng thức:

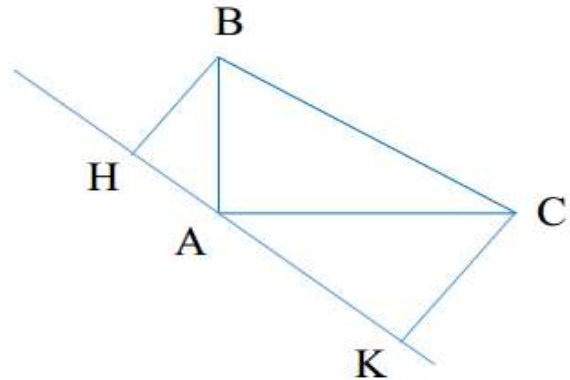
$$(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } (*) &\Leftrightarrow a^2c^2 + 2acbd + b^2d^2 \\ &\leq a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (ad - bc)^2 \geq 0 \text{ (đúng với mọi } a, b, c, d)$$

Dấu bằng xảy ra khi $ad = bc$ hay $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$



Áp dụng (*) ta được:

$$2(\text{BH}^2 + \text{AH}^2) \geq (\text{BH} + \text{AH})^2 \quad (1)$$

Tương tự ta có:

$$2(AK^2 + CK^2) \geq (AK + CK)^2 \quad (2)$$

$$\text{Suy ra: } 2BC^2 \geq (BH + AH)^2 + (AK + CK)^2 \quad (3)$$

Đặt $BH + AH = m$; đặt $AK + CK = n$

Vì $\text{CAK} + \text{BAH} = 90^\circ$ mà $\text{BAH} + \text{ABH} = 90^\circ$ nên $\text{CAK} = \text{ABH}$

$$\Rightarrow \Delta ABH \sim \Delta CAK$$

$$\Rightarrow \frac{AH}{CK} = \frac{BH}{AK} = \frac{AB}{CA} = \frac{AH + BH}{CK + AK} = \frac{m}{n}$$

$$\text{Nên } \frac{AB^2}{m^2} = \frac{AC^2}{n^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{m^2 + n^2} \geq \frac{BC^2}{2BC^2} = \frac{1}{2}$$

Hay $m \leq AB\sqrt{2}$ và $n \leq AC\sqrt{2}$

Chu vi tứ giác BHKC là $BC + BH + AH + AK + KC = BC + m + n \leq BC + (AB + AC)\sqrt{2}$

Vậy chu vi BHKC lớn nhất là $BC + (AB + AC)\sqrt{2}$

Bài 18: Cho tam giác ABC vuông cân tại A, trung tuyến AD. Điểm M di động trên đoạn AD. Gọi N và P lần lượt là hình chiếu của điểm M trên AB và AC. Vẽ $NH \perp PD$ tại H. Xác định vị trí của điểm M để tam giác AHB có diện tích lớn nhất.

Giải:

$\triangle ABC$ vuông cân tại $A \Rightarrow AD$ là phân giác góc A và $AD \perp BC$

$\Rightarrow D \in (O; AB/2)$

Ta có $ANMP$ là hình vuông (hình chữ nhật có AM là phân giác)

$\Rightarrow$ tứ giác $ANMP$ nội tiếp đường tròn đường kính NP

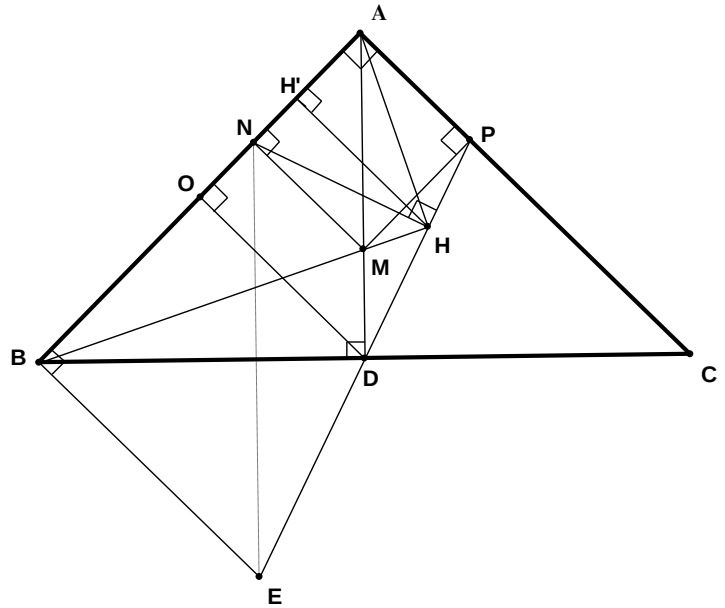
mà $NHP = 90^\circ \Rightarrow H$ thuộc đường tròn đường kính NP

$\Rightarrow \angle AHN = \angle AMN = 45^\circ$ (1)

Kẻ $Bx \perp AB$ cắt đường thẳng PD tại E

$\Rightarrow$ tứ giác $BNHE$ nội tiếp đường tròn đường kính NE

Mặt khác $\triangle BED = \triangle CDP$ (g.c.g) $\Rightarrow BE = PC$



Từ (1) và (2) suy ra $\angle AHB = 90^\circ \Rightarrow H \in (O; AB/2)$

gọi H' là hình chiếu của H trên AB

$\Rightarrow S_{AHB} = \frac{HH' \cdot AB}{2} \Rightarrow S_{AHB}$ lớn nhất $\Leftrightarrow HH'$ lớn nhất

mà $HH' \leq OD = AB/2$ (do H, D cùng thuộc đường tròn đường kính AB và $OD \perp AB$)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow H \equiv D \Leftrightarrow M \equiv D$

Bài 19: Qua điểm O nằm trong tam giác ABC ta vẽ 3 đường thẳng song song với 3 cạnh tam giác. Đường thẳng song song với cạnh AB cắt cạnh AC, BC lần lượt tại E và D ; đường thẳng song song với cạnh BC cắt cạnh AB và AC lần lượt tại M và N ; đường thẳng song song với cạnh AC cắt cạnh AB và BC lần lượt tại F và H . Biết diện tích các tam giác ODH, ONE, OMF lần lượt là a^2, b^2, c^2 .

a) Tính diện tích S của tam giác ABC theo a, b, c

b) Chứng minh $S \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$

Giải:

a. Ta có các tam giác ODH, EON, FMO đồng dạng với tam giác ABC

Đặt $S_{ABC} = d^2$.

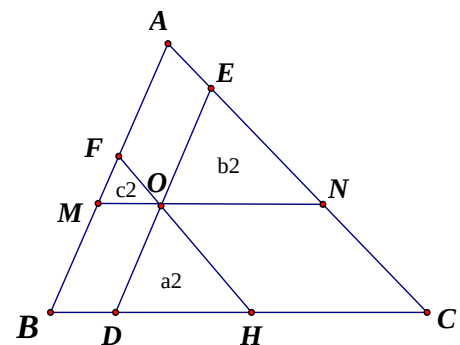
Ta có: $\frac{S_{ODH}}{S_{ABC}} = \frac{a^2}{d^2} = \left(\frac{DH}{BC}\right)^2 \Rightarrow \frac{a}{d} = \frac{DH}{BC}$;

$\frac{S_{EON}}{S_{ABC}} = \frac{b^2}{d^2} = \left(\frac{ON}{BC}\right)^2 = \left(\frac{HC}{BC}\right)^2 \Rightarrow \frac{b}{d} = \frac{HC}{BC}$; Tương tự

$\frac{c}{d} = \frac{BD}{BC}$

Suy ra: $\frac{a+b+c}{d} = \frac{DH+HC+DB}{BC} = 1 \Rightarrow d = a+b+c$

Vậy $S = d^2 = (a+b+c)^2$



b. Áp dụng BĐT Cosy, ta có: $a^2 + b^2 \geq 2ab$; $b^2 + c^2 \geq 2bc$; $a^2 + c^2 \geq 2ac$

$$S = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$S \leq a^2 + b^2 + c^2 + (a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) + (c^2 + a^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c$, hay O là trọng tâm của tam giác ABC

Bài 20: Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB. Gọi M là điểm nằm trên nửa đường tròn khác A và B. xác định vị trí điểm M sao cho tam giác MAB có chu vi lớn nhất

Giải:

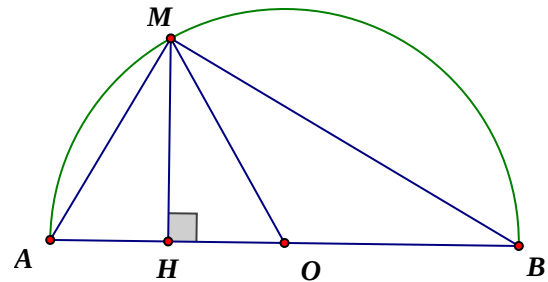
Ta có : $\angle AMB = 90^\circ$ Suy ra tam giác AMB vuông tại M

$$MA^2 + MB^2 = AB^2 = 4R^2 \quad (1)$$

Chu vi tam giác MAB :

$$MA + MB + AB = MA + MB + 2R$$

Chu vi lớn nhất khi : $MA + MB$ lớn nhất



Lại có

$$(MA + MB)^2 = MA^2 + 2MA \cdot MB + MB^2 = 4R^2 + 2MA \cdot MB$$

$$MA + MB \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow (MA + MB)^2 \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow MA \cdot MB \text{ lớn nhất}$$

Gọi H là chân đường cao hạ từ M đến AB khi đó

$$MA \cdot MB = MH \cdot AB = MH \cdot 2R \text{ do đó } MA \cdot MB \text{ lớn nhất khi } MH \text{ lớn nhất}$$

$$MH = R \Leftrightarrow H \equiv O \Leftrightarrow M \text{ là điểm chính giữa của cung } AB$$

Bài 21: Cho tam giác ABC cân tại A ($\angle BAC > 90^\circ$) nội tiếp đường tròn (O) bán kính R. M là điểm nằm trên cạnh BC ($BM > CM$). Gọi D là giao điểm của AM và đường tròn (O) (D khác A), điểm H là trung điểm đoạn thẳng BC. Gọi E là điểm chính giữa cung lớn BC, ED cắt BC tại N. Khi $2AB = R$, xác định vị trí của M để $2MA + AD$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải:

$$\triangle HAM \sim \triangle DAE \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{AE} = \frac{AH}{AD} \Rightarrow AM \cdot AD = AH \cdot AE$$

$$\text{Với } AE = 2R; AH = \frac{AB^2}{AE} = \frac{R}{8}$$

$$\Rightarrow AM \cdot AD = \frac{R^2}{4}$$

Theo BĐT Cô-si:

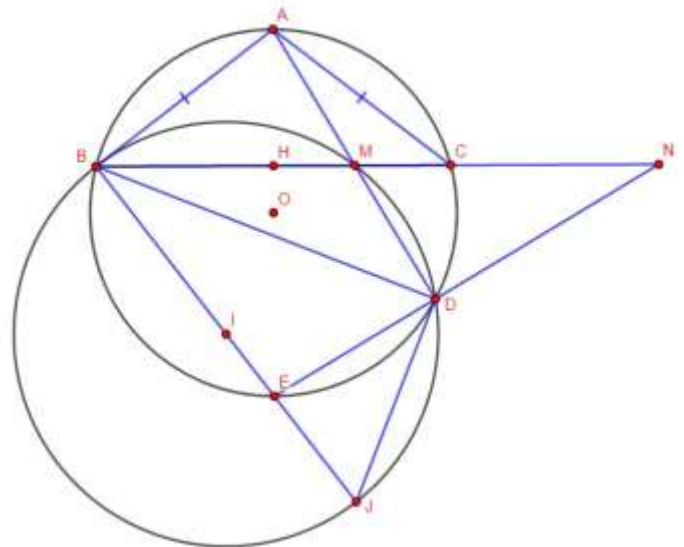
$$2AM + AD \geq 2\sqrt{2AM \cdot AD}$$

$$= 2\sqrt{2 \cdot \frac{R^2}{4}} = R\sqrt{2}$$

GTNN đạt được khi: $2AM = AD$

$$\Rightarrow M \text{ là trung điểm của } AD$$

$$\Rightarrow OM \perp AD \Rightarrow M \text{ là giao điểm của đường tròn đường kính OA với } BC$$



Bài 22: Cho đường tròn tâm O, đường kính BC cố định và một điểm A chuyển động trên nửa đường tròn (A khác B và C). Hạ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa A dựng hai nửa đường tròn tâm P đường kính HB và tâm Q đường kính HC, chúng lần lượt cắt AB và AC tại E và F.

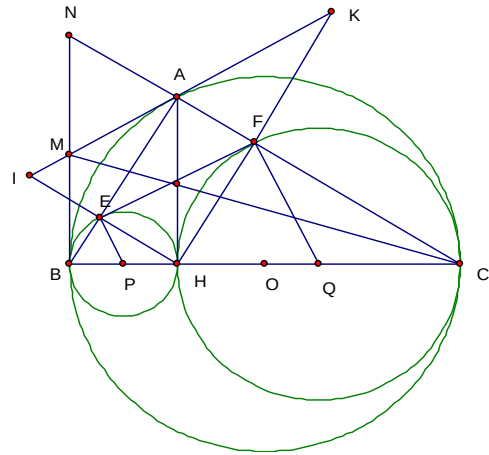
Xác định vị trí điểm A để diện tích tứ giác PEFQ đạt giá trị lớn nhất, tìm giá trị đó.

Giải:

$$S_{PQFE} = \frac{1}{2}(PE + FQ).FE = \frac{1}{4}BC.FE. \text{ Mà}$$

$$FE \leq PQ \text{ hay } FE \leq \frac{BC}{2} \Rightarrow S_{PQFE} \leq \frac{BC^2}{8}$$

đẳng thức xảy ra khi A là điểm chính giữa của nửa đường tròn tâm O, đường kính BC.



Bài 23: Cho tam giác ABC vuông tại A có phân giác AD. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của B, C lên đường thẳng AD.

Chứng minh rằng: $2AD \leq BM + CN$

Giải:

Ta có $\triangle AMB$ và $\triangle ANC$ vuông cân nên $MA = MB$ và $NA = NC$

Nên $BM + CN = AM + AN$

Giả sử: $AB \geq AC$

Theo tính chất phân giác ta có $\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB} \leq 1$

$\triangle CDN$ và $\triangle BDM$ nên $\frac{DN}{DM} = \frac{DC}{DB} \leq 1 \Rightarrow DN \leq DM$

Nếu I là trung điểm của MN thì $AD \leq AI$ và

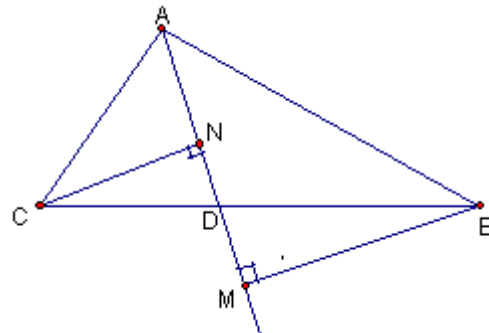
$AM + AN = 2AI$

Khi đó $2AD \leq 2AI - AM + AN = BM + CN$

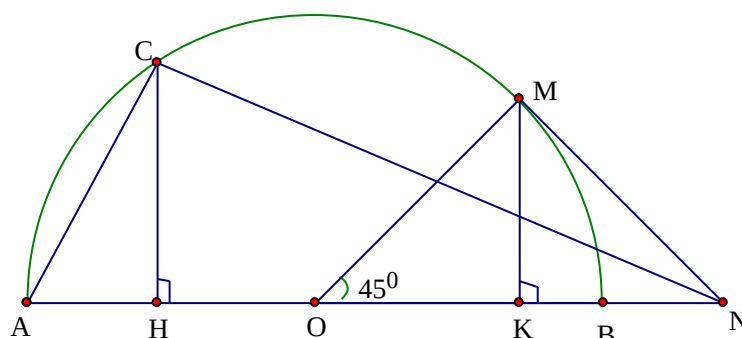
(đpcm)

Bài 24: Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi C là một điểm nằm trên nửa đường tròn (O) (C khác A, C khác B). Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB, D là điểm đối xứng với A qua C, I là trung điểm của CH, J là trung điểm của DH. Xác định vị trí của điểm C trên nửa đường tròn (O) để $AH + CH$ đạt giá trị lớn nhất.

Giải:



- + Lấy điểm M trên nửa đường tròn (O) sao cho $BOM = 45^\circ$
 - + Tiếp tuyến của nửa đường tròn (O) tại M cắt AB tại N. Ta có M và N cố định.
 - + Kẻ $MK \perp AB$ tại K
 - + Chứng minh được $\triangle MON$ vuông cân tại M và $KM = KN$
- Suy ra $ANC = 45^\circ$



Xét $C \equiv M$

Ta có $C \equiv M$ nên $H \equiv K$

Do đó $AH + CH = AK + KM = AK + KN = AN$ (không đổi)

- + Xét C khác M.
Tia NC nằm giữa hai tia NA và NM
Do đó $ANC < ANM = 45^\circ$
- + $\triangle HNC$ có $NHC = 90^\circ$
nên $HNC + HCN = 90^\circ$
Mà $HNC < 45^\circ$ nên $HCN > 45^\circ$
Suy ra $HNC < HCN$
Suy ra $HC < HN$

+ Do đó $AH + CH < AH + HN = AN$

+ Vậy Khi C ở trên nửa đường tròn (O) sao cho $BOC = 45^\circ$ thì $AH + CH$ đạt giá trị lớn nhất

10. Một số vấn đề mở rộng: Đường thẳng Simson, đường tròn và đường thẳng Ole, bài toán con bướm, định lý Ptolemy và đặc trưng của tứ giác nội tiếp,....

A. Bài toán (giữ nguyên màu)

Bài 1: Cho tam giác ABC có góc A tù, nội tiếp đường tròn (O;R). Gọi x, y, z lần lượt là khoảng cách từ tâm O đến các cạnh BC, CA, AB và r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng: $y + z - x = R + r$.

B. Lời giải

Bài 1: Cho tam giác ABC có góc A tù, nội tiếp đường tròn (O;R). Gọi x, y, z lần lượt là khoảng cách từ tâm O đến các cạnh BC, CA, AB và r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng: $y + z - x = R + r$.

Giải:

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB $\Rightarrow OM = x$, $ON = y$, $OP = z$. Đặt $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$.

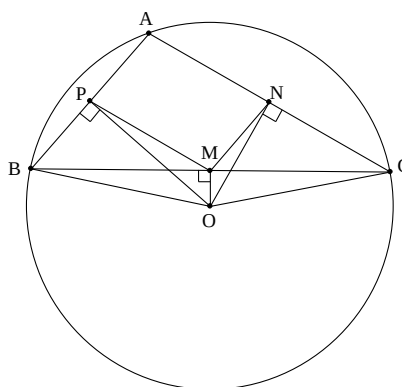
Ta có tứ giác OMNC nội tiếp nên theo định lý Ptolemy suy ra:

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$MN \cdot OC + OM \cdot CN = ON \cdot MC$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{2} \cdot R + x \cdot \frac{b}{2} = y \cdot \frac{a}{2}$$

$$\Leftrightarrow c \cdot R + x \cdot b = y \cdot a \quad (1)$$



Tương tự, từ hai tứ giác nội tiếp OMPB và ONAP ta có:

$$b \cdot R + x \cdot c = z \cdot a \quad (2)$$

$$y \cdot c + z \cdot b = R \cdot a \quad (3)$$

Mặt khác: $S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OAC} - S_{OBC} \Leftrightarrow r(a + b + c) = c \cdot z + b \cdot y - a \cdot x \quad (4)$

Cộng v.v.v của (1) và (2) rồi trừ v.v.v cho (3) ta được

$$c \cdot R + b \cdot x + c \cdot x + b \cdot R - c \cdot y - b \cdot z = a \cdot y + a \cdot z - a \cdot R$$

$$\Leftrightarrow R(a + b + c) = a(y + z) + b(z - x) + c(y - x) \quad (5)$$

Cộng v.v.v của (4) và (5) được

$$(R + r)(a + b + c) = (a + b + c)(y + z - x)$$

$$\Leftrightarrow R + r = y + z - x \quad (\text{đpcm})$$

CÁC DẠNG BÀI TẬP THI HSG TOÁN 9 QUA CÁC ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI

Dạng 10: Các bài toán suy luận rời rạc, bài toán bất biến:

1. Nguyên lý Dirichlet

A. Bài toán

Bài 1: Cho hình vuông $ABCD$ và 2018 đường thẳng thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

- 1) Mỗi đường thẳng đều cắt hai cạnh đối của hình vuông.
- 2) Mỗi đường thẳng đều chia hình vuông thành hai phần có tỉ lệ diện tích bằng $\frac{1}{3}$.

Chứng minh rằng trong 2018 đường thẳng đó có ít nhất 505 đường thẳng đồng quy.

Bài 2: Trước ngày thi vào lớp 10 chuyên, thầy giáo dùng không quá 49 cây bút đem tặng cho tất cả 32 bạn học sinh lớp 9A sao cho ai cũng nhận được bút của thầy. Chứng minh rằng có một số bạn lớp 9A nhận được bút tổng cộng là 25.

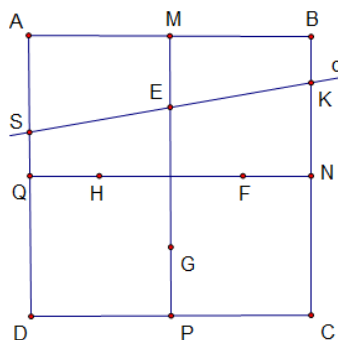
B. Lời giải

Bài 1: Cho hình vuông $ABCD$ và 2018 đường thẳng thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

- 1) Mỗi đường thẳng đều cắt hai cạnh đối của hình vuông.
- 2) Mỗi đường thẳng đều chia hình vuông thành hai phần có tỉ lệ diện tích bằng $\frac{1}{3}$.

Chứng minh rằng trong 2018 đường thẳng đó có ít nhất 505 đường thẳng đồng quy.

Lời giải



Giả sử hình vuông $ABCD$ có cạnh là a ($a > 0$). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Gọi d là một đường thẳng bất kỳ trong 2018 đường thẳng đã cho thỏa mãn yêu cầu bài toán. Không mất tính tổng quát, giả sử d cắt các đoạn thẳng AD, MP, BC lần lượt tại S, E, K sao cho $S_{CDSK} = 3S_{ABKS}$

Từ $S_{CDSK} = 3S_{ABKS}$ ta suy ra được: $DS + CK = 3(AS + BK)$

$$\Leftrightarrow a - AS + a - BK = 3(AS + BK) \Leftrightarrow AS + BK = \frac{1}{2}a$$

$$\Leftrightarrow EM = \frac{1}{4}a \text{ suy ra } E \text{ cố định và } d \text{ đi qua } E.$$

Lấy F, H trên đoạn NQ và G trên đoạn MP sao cho $FN = GP = HQ = \frac{a}{4}$.

Lập luận tương tự như trên ta có các đường thẳng thỏa mãn điều kiện của đề bài phải đi qua một trong bốn điểm cố định E, F, G, H.

Theo nguyên lý Dirichlet từ 2018 đường thẳng thỏa mãn điều kiện của đề bài phải có ít nhất $\left\lceil \frac{2018}{4} \right\rceil + 1 = 505$ đường thẳng đi qua một trong bốn điểm E, F, G, H cố định, nghĩa là 505 đường thẳng đó đồng quy.

Bài 2: Trước ngày thi vào lớp 10 chuyên, thầy giáo dùng không quá 49 cây bút đem tặng cho tất cả 32 bạn học sinh lớp 9A sao cho ai cũng nhận được bút của thầy. Chứng minh rằng có một số bạn lớp 9A nhận được bút tổng cộng là 25.

Lời giải

Gọi a_i là số bút mà học sinh thứ i (trong 32 học sinh) nhận được ($i = 1, 2, \dots, 32$). Như vậy $a_i \in \mathbb{N}^*$ và $a_1 + a_2 + \dots + a_{32} \leq 49$. Ta kí hiệu:

$$S_1 = a_1,$$

$$S_2 = a_1 + a_2,$$

.....

$$S_{32} = a_1 + a_2 + \dots + a_{32}$$

Với mỗi $i \in \{1; 2; \dots; 32\}$ ta có : $1 \leq S_i \leq 49$, $S_i + 25 \leq 74$; $S_i + 50 \leq 99$, $S_i + 75 \leq 124$.

Xét 128 số gồm: 32 số nhóm (1) là $S_1, S_2, \dots, S_{32}$,

32 số nhóm (2) là $S_1 + 25, S_2 + 25, \dots, S_{32} + 25$,

32 số nhóm (3) là $S_1 + 50, S_2 + 50, \dots, S_{32} + 50$,

32 số nhóm (4) là $S_1 + 75, S_2 + 75, \dots, S_{32} + 75$,

Thấy 128 số này lấy giá trị nguyên dương trong phạm vi từ 1 đến 124, theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai số nào đó trong chúng bằng nhau. Vì $S_1 < S_2 < \dots < S_{32}$ nên dãy 32 giá trị trong mỗi nhóm ở trên tăng dần kể từ trái qua phải. Suy ra tồn tại $j > i > 1$ mà $S_j + k_1 \cdot 25 = S_i + k_2 \cdot 25$ với $k_1, k_2 \in \{0, 1, 2, 3\}$ và $k_1 \neq k_2$ (do hai số bằng nhau thì không cùng nhóm).

Vì $S_j > S_i$ nên $0 < S_j - S_i = 25(k_1 - k_2)$, suy ra $k_1 - k_2 \in \{1, 2, 3\}$. Lại có

$S_j - S_i < S_j \leq 49$ nên $25(k_1 - k_2) < 49$, suy ra $k_1 - k_2 = 1$. Vậy $S_j - S_i = 25$ hay

$a_{i+1} + a_{i+2} + \dots + a_j = 25$, nghĩa là nhóm gồm các học sinh từ học sinh thứ $i + 1$ đến học sinh thứ j nhận được tổng cộng 25 cây bút.

2. Toán rời rạc

A. Bài toán

Bài 1: Trên một bảng ô vuông, ở mỗi ô người ta điền toàn bộ dấu +. Sau đó thực hiện quá trình đổi dấu (dấu + sang dấu -, dấu - sang dấu +) lần lượt theo các bước sau:

Bước 1: Các ô ở dòng thứ i đều được đổi dấu i lần, $i = 1, 2, \dots, 2019$.

Bước 2: Các ô ở cột thứ j đều được đổi dấu $3j + 1$ lần, $j = 1, 2, \dots, 2019$.

Tính số dấu còn lại trên bảng ô vuông sau khi thực hiện xong quá trình đổi dấu trên.

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Bài 2: Viết lên bảng 2019 số: $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots; \frac{1}{2018}; \frac{1}{2019}$. Từ các số đã viết xóa đi 2 số bất kì x, y rồi

viết lên bảng số $\frac{xy}{x+y+1}$ (các số còn lại trên bảng giữ nguyên). Tiếp tục thực hiện thao tác trên cho

đến khi bảng chỉ còn lại đúng một số. Hỏi số đó bằng bao nhiêu?

Bài 3: Ba bạn A,B,C cùng chơi một trò chơi: Sau khi A chọn hai số tự nhiên từ 1 đến 9 (có thể giống nhau), A nói cho B chỉ mỗi tổng và nói cho C chỉ mỗi tích của hai số đó. Sau đây là các câu đối thoại giữa B và C.

B nói: Tôi không biết hai số A chọn nhưng chắc chắn C cũng không biết.

C nói: Mới đầu thì tôi không biết nhưng giờ thì biết hai số A chọn rồi. Hơn nữa, số mà A đọc cho tôi lớn hơn số của bạn.

B nói: À, vậy thì tôi cũng biết hai số A chọn rồi.

Xem B và C là các nhà suy luận logic hoàn hảo, hãy cho biết hai số A chọn là hai số nào?

Bài 4: Cho 12 điểm trên mặt phẳng sao cho 3 điểm nào cũng là đỉnh của một tam giác mà mỗi tam giác đó luôn tồn tại ít nhất một cạnh có độ dài nhỏ hơn 673. Chứng minh rằng có ít nhất hai tam giác mà chu vi của mỗi tam giác nhỏ hơn 2019.

Bài 5: Trong mặt phẳng, kẻ 2022 đường thẳng sao cho không có hai đường thẳng nào song song và không có ba đường thẳng nào đồng quy. Tam giác tạo bởi ba đường thẳng trong số các đường thẳng đã cho gọi là tam giác đẹp nếu nó không bị đường thẳng nào trong số các đường thẳng còn lại cắt.

Chứng minh rằng số tam giác đẹp không ít hơn 674.

Bài 6: Cho M là tập tất cả 4039 số nguyên liên tiếp từ -2019 đến 2019 . Chứng minh rằng trong 2021 số đôi một phân biệt được chọn bất kì từ M luôn tồn tại ba số phân biệt có tổng bằng 0.

Bài 7: Có 15 bạn học sinh nam và 15 bạn học sinh nữ ngồi quanh một bàn tròn. Chứng minh rằng luôn tồn tại một học sinh mà 2 bạn ngồi cạnh bạn đó đều là nữ.

Bài 8: Chia 18 vật có khối lượng $2016^2; 2015^2; 2014^2; \dots; 1999^2$ gam thành ba nhóm có khối lượng bằng nhau. (không được chia nhỏ các vật đó).

Bài 9: Mỗi điểm của mặt phẳng được tô bởi một trong ba màu Đỏ, Xanh, Vàng. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm A, B được tô bởi cùng một màu mà $AB=1$.

Bài 10: Cho tập hợp A gồm 21 phân tử là các số nguyên khác nhau thỏa mãn tổng của 11 phân tử bất kỳ lớn hơn tổng của 10 phân tử còn lại. Biết các số 101 và 102 thuộc tập hợp A . Tìm tất cả các phân tử của tập hợp A .

Bài 11: (1.0 điểm) Cho đa giác đều $2n$ đỉnh nội tiếp đường tròn (O) . Chia $2n$ đỉnh này thành n cặp điểm, mỗi cặp điểm này thành một đoạn thẳng (hai đoạn thẳng bất kì trong số n đoạn thẳng được tạo ra không có đầu mút chung).

- Khi $n=4$, hãy chỉ ra một cách chia sao cho trong bốn đoạn thẳng được tạo ra không có hai đoạn nào có độ dài bằng nhau.
- Khi $n=10$, chứng minh rằng trong mười đoạn thẳng được tạo ra luôn tồn tại hai đoạn thẳng có độ dài bằng nhau.

Bài 12: Xét một thanh gỗ có hai đầu. Một con kiến đi từ đầu này đến đầu kia của thanh gỗ thì mất 5 phút. Khi đi đến một trong hai đầu thì kiến sẽ rơi xuống đất, Bây giờ giả sử trên thanh gỗ đó có 5 con kiến và đi cùng với tốc độ như vậy nhưng về các hướng khác nhau. Nếu có hai con kiến nào đi ngược hướng và đụng đầu nhau thì chúng lập tức quay ngược lại và đi tiếp.

(Giả sử rằng kích thước và thời gian quay đầu của các con kiến là không đáng kể)

1. Hãy lý luận để chứng tỏ rằng tất cả các con kiến thể nào cũng sẽ rơi hết xuống đất.

2. Cần tối thiểu bao nhiêu phút để chắc chắn rằng cả 5 con kiến đều rơi hết xuống đất?

Bài 13: Trong mặt phẳng cho 8073 điểm mà diện tích của mọi tam giác với các đỉnh là các điểm đã cho không lớn hơn 1. Chứng minh rằng trong số các điểm đã cho có thể tìm được 2019 điểm nằm trong hoặc nằm trên cạnh của một tam giác có diện tích không lớn hơn 1.

Bài 14: Xét bảng ô vuông cỡ 10×10 gồm 100 hình vuông có cạnh 1 đơn vị. Người ta điền vào mỗi ô vuông của bảng một số nguyên tùy ý sao cho hiệu hai số được điền ở hai ô chung cạnh bất kỳ đều có giá trị tuyệt đối không vượt quá 1. Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên xuất hiện trong bảng ít nhất 6 lần

Bài 15: Trong hình vuông cạnh bằng 1 có 2019 điểm phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn bán kính bằng $\frac{1}{91}$ nằm trong hình vuông đó mà không chứa điểm nào trong 2019 điểm đã cho

Bài 16: Cho dãy gồm 2015 số: $\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots; \frac{1}{2014}; \frac{1}{2015}$.

Người ta biến đổi dãy nói trên bằng cách xóa đi hai số u, v bất kỳ trong dãy và viết thêm vào dãy một số có giá trị bằng $u + v + uv$ vào vị trí của u hoặc v . Cứ làm như thế đối với dãy mới thu được và sau 2014 lần biến đổi, dãy cuối cùng chỉ còn lại một số. Chứng minh rằng giá trị của số cuối cùng đó không phụ thuộc vào việc chọn các số u, v để xóa trong mỗi lần thực hiện việc biến đổi dãy, hãy tìm số cuối cùng đó.

Bài 17: Trường trung học phổ thông A tổ chức giải bóng đá cho học sinh nhân ngày thành lập đoàn 26 – 3. Biết rằng có n đội tham gia thi đấu vòng tròn một lượt (hai đội bất kỳ đấu với nhau đúng một trận). Đội thắng được 3 điểm, đội hòa được 1 điểm và đội thua không được điểm nào. Kết thúc giải, ban tổ chức nhận thấy số trận thắng thua gấp bốn lần số trận hòa và tổng số điểm của các đội là 336. Hỏi có tất cả bao nhiêu đội bóng tham gia?

Bài 18: Cho một lớp học có 35 học sinh, các học sinh này tổ chức một số câu lạc bộ môn học. Mỗi học sinh tham gia đúng một câu lạc bộ. Nếu chọn ra 10 học sinh bất kỳ thì luôn có ít nhất 3 học sinh tham gia cùng một câu lạc bộ. Chứng minh có một câu lạc bộ gồm ít nhất 9 học sinh.

B. Lời giải

Bài 1: Trên một bảng ô vuông, ở mỗi ô người ta điền toàn bộ dấu +. Sau đó thực hiện quá trình đổi dấu (dấu + sang dấu -, dấu - sang dấu +) lần lượt theo các bước sau:

Bước 1: Các ô ở dòng thứ i đều được đổi dấu i lần, $i = 1, 2, \dots, 2019$.

Bước 2: Các ô ở cột thứ j đều được đổi dấu $3j + 1$ lần, $j = 1, 2, \dots, 2019$.

Tính số dấu còn lại trên bảng ô vuông sau khi thực hiện xong quá trình đổi dấu trên.

Lời giải

Theo quá trình đổi dấu trên thì ô vuông ở dòng i cột j được đổi dấu $i + 3j + 1$ lần

Mà $i+3j+1$ và $i+j$ hai số không cùng tính chẵn lẻ (vì $(i+3j+1)-(i+j)=2j+1$ là số lẻ)

Do đó những ô vuông ở dòng i cột j mà $i+j$ là số lẻ sẽ đổi dấu một số chẵn lần và dấu ở ô vuông đó vẫn là dấu $+$, còn những ô vuông ở dòng i cột j mà $i+j$ là số chẵn sẽ đổi dấu một số lẻ lần và dấu ở ô vuông đó là dấu $-$

Mà từ 1 đến 2019 có 1009 số chẵn và 1010 số lẻ nên số cặp $(i; j)$ mà $i+j$ bằng

$$1009.1010+1010.1009=2038180$$

Vậy số các ô vuông còn lại mang dấu $+$ bằng 2038180.

Bài 2: Viết lên bảng 2019 số: $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots; \frac{1}{2018}; \frac{1}{2019}$. Từ các số đã viết xoá đi 2 số bất kì x, y rồi

viết lên bảng số $\frac{xy}{x+y+1}$ (các số còn lại trên bảng giữ nguyên). Tiếp tục thực hiện thao tác

trên cho đến khi bảng chỉ còn lại đúng một số. Hỏi số đó bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$\text{Đặt } z = \frac{xy}{x+y+1} \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} \Rightarrow \frac{1}{z} + 1 = \left(\frac{1}{x} + 1\right) \left(\frac{1}{y} + 1\right) \quad (1).$$

Với mỗi tập các số dương $\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ tùy ý, xét biểu thức:

$$P(x_1; x_2; \dots; x_n) = \left(\frac{1}{x_1} + 1\right) \left(\frac{1}{x_2} + 1\right) \dots \left(\frac{1}{x_n} + 1\right).$$

Từ (1) suy ra mỗi lần xóa đi 2 số bất kì $x; y$ rồi viết lên bảng số $\frac{xy}{x+y+1}$ các số còn

lại trên bảng giữ nguyên thì giá trị biểu thức P của các số trên bảng không đổi.

$$\text{Gọi số cuối cùng là } a \Rightarrow P(a) = P\left(\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots; \frac{1}{2018}; \frac{1}{2019}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + 1 = \left(\frac{1}{1} + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{2}} + 1\right) \dots \left(\frac{1}{\frac{1}{2018}} + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{2019}} + 1\right) = 2020! \Rightarrow a = \frac{1}{2020! - 1}.$$

Bài 3: Ba bạn A, B, C cùng chơi một trò chơi: Sau khi A chọn hai số tự nhiên từ 1 đến 9 (có thể giống nhau), A nói cho B chỉ mỗi tổng và nói cho C chỉ mỗi tích của hai số đó. Sau đây là các câu đối thoại giữa B và C.

B nói: Tôi không biết hai số A chọn nhưng chắc chắn C cũng không biết.

C nói: Mới đầu thì tôi không biết nhưng giờ thì biết hai số A chọn rồi. Hơn nữa, số mà A đọc cho tôi lớn hơn số của bạn.

B nói: À, vậy thì tôi cũng biết hai số A chọn rồi.

Xem B và C là các nhà suy luận logic hoàn hảo, hãy cho biết hai số A chọn là hai số nào?

Lời giải

Khi biết tổng nhưng B nói: *Tôi không biết 2 số A chọn nhưng chắc chắn C cũng không biết.* Do đó ta loại các cặp có tổng bằng 2; 3; 17; 18 là $(1;1), (1;2), (8;9), (9;9)$ vì nếu biết tổng này thì B phải đoán được hai số đó ngay.

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

Ngoài ra, dựa vào việc khẳng định C cũng không biết nên có các trường hợp của tổng sau:

TH1: $4 = 1 + 3 = 2 + 2$ thì tích có thể bằng $3 = 1.3$, C đoán được ngay, Mà B KHẲNG

ĐỊNH C CŨNG KHÔNG BIẾT nên trường hợp này loại.

TH2: $6 = 1 + 5 = \dots$ thì tích có thể bằng $5 = 1.5$, C đoán được ngay! Mà B KHẲNG ĐỊNH C CŨNG KHÔNG BIẾT nên trường hợp này loại.

Tương tự đối với các trường hợp tổng là $7 = 2 + 5$, $8 = 3 + 5$, $9 = 4 + 5$, $10 = 5 + 5$, $11 = 5 + 6$, $12 = 3 + 9$, $13 = 6 + 7$, $14 = 7 + 7$, $15 = 7 + 8$, $16 = 8 + 8$ cũng loại

Do đó, sau khi B phát biểu thì C đoán được tổng của 2 số là 5 ($= 1 + 4 = 2 + 3$).

Khi đó tích có thể là $4 = 1.4 = 2.2$ hoặc $6 = 1.6 = 2.3$.

Vì C biết tổng bằng 5 và tích 2 số (bằng 4 hay 6) nên suy ra được ngay.

C nói : *Mới đầu thì tôi không biết nhưng giờ thì biết hai số A chọn rồi. Hơn nữa số mà A đọc cho tôi lớn hơn số của bạn.* Như vậy C biết tích bằng $6 > 5$.

Sau đó B cũng biết vì hai số ban đầu có tổng bằng 5 và tích bằng 6.

Vậy 2 số A chọn là 2 và 3.

Bài 4: Cho 12 điểm trên mặt phẳng sao cho 3 điểm nào cũng là đỉnh của một tam giác mà mỗi tam giác đó luôn tồn tại ít nhất một cạnh có độ dài nhỏ hơn 673. Chứng minh rằng có ít nhất hai tam giác mà chu vi của mỗi tam giác nhỏ hơn 2019.

Lời giải

Ta tô màu các đoạn thẳng có đầu mút là 2 trong 12 điểm đã cho:

- Tô đỏ các đoạn thẳng có độ dài nhỏ hơn 673

- Tô xanh các đoạn thẳng còn lại

thì mỗi tam giác có ít nhất một cạnh màu đỏ. Ta sẽ chứng minh có ít nhất 2 tam giác có 3 cạnh đều là màu đỏ.

+ Xét 6 điểm trong 12 điểm đã cho. Từ một điểm A nối đến các đoạn thẳng còn lại tạo thành 5 đoạn thẳng, được tô tới hai màu xanh, nên tồn tại 3 cạnh cùng màu. Giả sử đó là AB, AC, AD

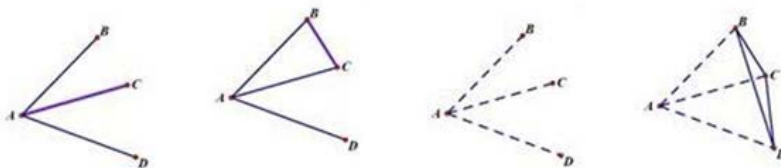
Nếu AB, AC, AD tô đỏ (nét liền, h1) thì tam giác BCD phải có 1 cạnh tô đỏ(h1)., chắn hạn BC thì tam giác ABC có 3 cạnh tô đỏ(h2). Nếu AB, AC, AD tô xanh (nét đứt, h3). Do mỗi tam giác phải có ít nhất một cạnh đỏ nên BC, CD, BD và tam giác BCD có 3 cạnh đỏ(h1).

Suy ra trong 6 điểm này luôn tồn tại ít nhất một tam giác có 3 cạnh màu đỏ

+ Xét 6 điểm còn lại, chứng minh tương tự

Vậy trong 12 điểm luôn tồn tại ít nhất 2 tam giác có hai cạnh đều màu đỏ. Suy ra tồn tại ít nhất hai tam giác mà chu vi mỗi tam giác bé hơn 2019

(Từ trái qua phải lần lượt là h1,h2,h3,h4)



Bài 5: Trong mặt phẳng, kẻ 2022 đường thẳng sao cho không có hai đường thẳng nào song song và không có ba đường thẳng nào đồng quy. Tam giác tạo bởi ba đường thẳng trong số các đường thẳng đã cho gọi là tam giác đẹp nếu nó không bị đường thẳng nào trong số các đường thẳng còn lại cắt. Chứng minh rằng số tam giác đẹp không ít hơn 674.

Lời giải:

Gọi các đường thẳng đã cho là $d_1, d_2, \dots, d_{2022}$. A_{ij} là giao điểm của đường thẳng d_i và d_j ($i, j = \overline{1; 2022}, i \neq j; A_j = A_n$).

Xét đường thẳng d_n bất kỳ trong số 2022 đường thẳng đã cho. Do không có 3 đường thẳng nào đồng quy nên các giao điểm A_{ij} (n khác i, j) của các cặp đường thẳng d_i và d_j không

nằm trên d_n . Do số giao điểm là hữu hạn nên tồn tại một giao điểm gần d_n nhất, giả sử là A_{ij} (nếu có nhiều giao điểm như vậy thì ta chọn 1 giao điểm nào đó).

Ta sẽ chứng minh tam giác $A_{ij}A_{mi}A_{nj}$ là tam giác đẹp.

Nếu tam giác này bị đường thẳng d_m nào đó trong số 2019 đường thẳng còn lại cắt thì d_m phải cắt ít nhất một trong hai đoạn $A_{ij}A_{mi}, A_{ij}A_{nj}$. Giả sử d_m cắt đoạn $A_{ij}A_{mi}$ tại điểm A_{mi} thì A_{mi} gần d_n trái giả thiết A_{ij} gần d_n nhất.

Suy ra, với mỗi đường thẳng d_n luôn tồn tại một tam giác đẹp có cạnh nằm trên d_n . Trên mỗi đường thẳng d_n , ta chọn một cạnh của tam giác đẹp thì ta thu được 2022 cạnh của tam giác đẹp.

Vậy số tam giác đẹp không ít hơn $2022:3=674$.

Bài 6: Cho M là tập tất cả 4039 số nguyên liên tiếp từ -2019 đến 2019 . Chứng minh rằng trong 2021 số đôi một phân biệt được chọn bất kì từ M luôn tồn tại ba số phân biệt có tổng bằng 0.

Lời giải

Đặt $M_n = \{x | x \in \mathbb{Z}, |x| \leq 2n-1\}$. Ta chứng minh mệnh đề tổng quát: Trong $2n+1$ số phân biệt từ tập hợp M_n , luôn tồn tại ba số phân biệt có tổng bằng 0. Ta chứng minh bằng phương pháp phân chứng. Giả sử tồn tại số nguyên dương n sao cho thể chọn ra $2n+1$ số phân biệt từ tập hợp M_n mà trong đó không có ba số phân biệt nào có tổng bằng 0. Gọi n là số nhỏ nhất có tính chất như vậy. Khi đó $n > 1$ (vì với $n=1$ thì mệnh đề đúng). Vì n là số nhỏ nhất làm cho mệnh đề không đúng nên mệnh đề đúng với $n-1$. Nếu trong các số được chọn có ít nhất $2n-1$ số thuộc M_{n-1} thì do mệnh đề đúng với $n-1$, sẽ tồn tại ba số phân biệt trong các số được chọn có tổng bằng 0. Mâu thuẫn. Vậy có tối đa $2n-2$ số được chọn thuộc M_{n-1} . Suy ra trong bốn số $-2n+2, -2n+1, 2n-2, 2n-1$, có ít nhất ba số được chọn. Suy ra 0 không được chọn.

- Nếu cả hai số của cặp $(-2n+1, 2n-1)$ được chọn. Chia tập $M_n \setminus \{-2n+1, 2n-1, 0\}$ thành $2n-2$ cặp $(1; 2n-2), (2; 2n-3), \dots, (-1; -2n+2), \dots, (-n+1, -n)$ ta thấy từ mỗi cặp ta chỉ chọn được tối đa một số. Suy ra chỉ lấy được tối đa $2+2n-2=2n$ số. Mâu thuẫn.
- Nếu chỉ có một số của cặp $(-2n+1, 2n-1)$ được chọn thì theo lí luận ở trên, cặp $(-2n+2, 2n-2)$ được chọn. Không mất tính tổng quát ta giả sử $2n-1$ được chọn còn $1-2n$ không được chọn. Lúc này chia các phần tử còn lại thành $2n-5$ cặp $(1; 2n-3), (2; 2n-4), \dots, (n-2; n), (-2; -2n+3), \dots, (-n+3; -n-1)$, một bộ ba số $(-n+2, -n+1, -n)$ và một phần tử lẻ cặp là $n-1$. Từ mỗi cặp ta lấy được tối đa một số, từ bộ ba số ta cũng lấy được tối đa một số. Từ đó ta lấy được tối đa $3+2n-5+1+1=2n$ số. Mâu thuẫn.

Vậy trong mọi trường hợp đều dẫn đến mâu thuẫn, tức điều giả sử sai. Mệnh đề được chứng minh. Áp dụng mệnh đề cho $n = 1010$ ta có điều phải chứng minh.

Bài 7: Có 15 bạn học sinh nam và 15 bạn học sinh nữ ngồi quanh một bàn tròn. Chứng minh rằng luôn tồn tại một học sinh mà 2 bạn ngồi cạnh bạn đó đều là nữ.

Lời giải

Giả sử tồn tại một cách xếp 30 bạn lên bàn tròn sao cho không có bạn nào ngồi giữa hai bạn nữ. Gọi các bạn theo thứ tự là $A_1; A_2; \dots; A_{30}$. Chúng ta chia 30 bạn sang hai bàn tròn gồm $(A_1; A_3; \dots; A_{29})$ và $(A_2; A_4; \dots; A_{30})$ và giữ nguyên thứ tự.

Khi đó ở cả hai bàn mới, không có hai bạn nữ nào ngồi cạnh nhau.

$\Rightarrow$ Số bạn nữ ở mỗi bàn sẽ không vượt quá $\frac{15}{2}$

Suy ra tổng số bạn nữ ở cả hai bàn nhỏ hơn 15 (trái giả thiết).

Vậy luôn tồn tại một học sinh mà 2 bạn ngồi cạnh bạn đó đều là nữ.

Bài 8: Chia 18 vật có khối lượng $2016^2; 2015^2; 2014^2; \dots; 1999^2$ gam thành ba nhóm có khối lượng bằng nhau. (không được chia nhỏ các vật đó).

Giải:

- Nhận xét:

$$n^2 + (n + 5)^2 = 2n^2 + 10n + 25 = x + 25$$

$$(n + 1)^2 + (n + 4)^2 = 2n^2 + 10n + 17 = x + 17$$

$$(n + 2)^2 + (n + 3)^2 = 2n^2 + 10n + 13 = x + 13$$

Lần thứ nhất, chia 6 vật có khối lượng $1999^2, \dots, 2004^2$ thành ba phần: $A + 25, A + 17, A + 13$

Lần thứ hai, chia 6 vật có khối lượng $2005^2, \dots, 2010^2$ thành ba phần: $B + 25, B + 17, B + 13$

Lần thứ ba, chia 6 vật có khối lượng $2011^2, \dots, 2016^2$ thành ba phần: $C + 25, C + 17, C + 13$

Lúc này ta chia thành các nhóm như sau: Nhóm thứ nhất $A + 25, B + 17, C + 13$; nhóm thứ hai $B + 25, C + 17, A + 13$; nhóm thứ ba $C + 25, A + 17, B + 13$. Khối lượng của mỗi nhóm đều bằng $A + B + C + 55$ gam

Bài 9: Mỗi điểm của mặt phẳng được tô bởi một trong ba màu Đỏ, Xanh, Vàng. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm A, B được tô bởi cùng một màu mà $AB = 1$.

Giải:

Giả sử không có 2 điểm nào trong mặt phẳng được tô cùng màu mà khoảng cách giữa chúng là 1 đơn vị độ dài.

Xét một điểm O bất kỳ có màu vàng trên mặt phẳng.

Vẽ đường tròn $(O, \sqrt{3})$. Lấy một điểm P bất kỳ trên (O) .

Dựng hình thoi $OAPB$ có cạnh bằng 1 và có đường chéo là OP .

Dễ thấy $OA = OB = AB = AC = BC = 1$.

Theo giả thiết, A, B phải tô khác màu vàng và khác màu nhau.

Do đó P phải tô vàng. Từ đây suy ra tất cả các điểm trên (O) phải tô vàng. Điều này trái với giả thiết vì dễ thấy tồn tại hai điểm trên (O) có khoảng cách 1 đơn vị độ dài.

P/s: Số 1 có thể được thay bởi bất kỳ số thực dương nào.

Bài 10: Cho tập hợp A gồm 21 phần tử là các số nguyên khác nhau thỏa mãn tổng của 11 phần tử bất kỳ lớn hơn tổng của 10 phần tử còn lại. Biết các số 101 và 102 thuộc tập hợp A . Tìm tất cả các phần tử của tập hợp A .

Giải:

Giả sử $A = \{a_1; a_2; a_3; \dots; a_{21}\}$ với $a_1; a_2; a_3; \dots; a_{21} \in \mathbb{Z}$ và

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{21}.$$

Theo giả thiết ta có $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{11} > a_{12} + a_{13} + \dots + a_{21}$

$$\Leftrightarrow a_1 > a_{12} - a_2 + a_{13} - a_3 + \dots + a_{21} - a_{11} \quad (1)$$

Mặt khác với $x, y \in \mathbb{Z}$ và nếu $y > x$ thì $y \geq x + 1$

$$\Rightarrow a_{12} - a_2 \geq 10, a_{13} - a_3 \geq 10, \dots, a_{21} - a_{11} \geq 10 \quad (2)$$

Nên từ (1) suy ra $a_1 > 10 + 10 + \dots + 10 = 100$

mà a_1 nhỏ nhất và $101 \in A \Rightarrow a_1 = 101$

Ta có $101 > a_{12} - a_2 + a_{13} - a_3 + \dots + a_{21} - a_{11} \geq 100 \Rightarrow a_{12} - a_2 + a_{13} - a_3 + \dots + a_{21} - a_{11} = 100$.

Kết hợp với (2)

$$\Rightarrow a_{12} - a_2 = a_{13} - a_3 = \dots = a_{21} - a_{11} = 10 \quad (3)$$

$$\Rightarrow 10 = a_{12} - a_2 = (a_{12} - a_{11}) + (a_{11} - a_{10}) + \dots + (a_3 - a_2) \geq 10$$

$$\Rightarrow a_{12} - a_{11} = a_{11} - a_{10} = \dots = a_3 - a_2 = 1 \quad (4)$$

Ta có $a_1 = 101$ mà $102 \in A \Rightarrow a_2 = 102$

Kết hợp với (3) và (4) suy ra $A = \{101; 102; 103; \dots; 121\}$.

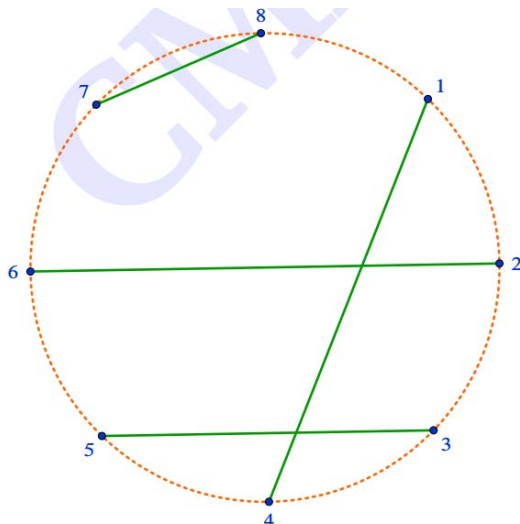
Bài 11: (1.0 điểm) Cho đa giác đều $2n$ đỉnh nội tiếp đường tròn (O) . Chia $2n$ đỉnh này thành n cặp điểm, mỗi cặp điểm này thành một đoạn thẳng (hai đoạn thẳng bất kì trong số n đoạn thẳng được tạo ra không có đầu mút chung).

- Khi $n = 4$, hãy chỉ ra một cách chia sao cho trong bốn đoạn thẳng được tạo ra không có hai đoạn nào có độ dài bằng nhau.
- Khi $n = 10$, chứng minh rằng trong mười đoạn thẳng được tạo ra luôn tồn tại hai đoạn thẳng có độ dài bằng nhau.

Giải:

Bài 11 Ta đánh số $2n$ đỉnh của đa giác từ 1 đến $2n$. Khi đó, độ dài của đoạn thẳng nối hai đỉnh có thể coi tương ứng với số lượng cung nhỏ nằm giữa hai đỉnh đó, cũng chính là chênh lệch giữa hai số thứ tự theo mod n rồi cộng thêm 1. Sự tồn tại hai cặp đoạn thẳng có độ dài bằng nhau trong đề bài tương ứng với việc tồn tại hai cặp đỉnh có sự chênh lệch giữa các số thứ tự bằng nhau theo mod n .

- Ta cần chỉ ra cách chia cặp 8 số từ 1 đến 8 sao cho không có hai cặp nào có chênh lệch giống nhau theo mod 4. Cụ thể là, $(1, 4)$, $(2, 6)$, $(3, 5)$ và $(7, 8)$ với các chênh lệch là 3, 4, 2, 1, thỏa mãn đề bài.



- b) Giả sử tồn tại cách ghép cặp $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_{10}, b_{10})$ cho các số từ 1 đến 20 sao cho không có hai số nào có cùng số dư khi chia cho 10. Suy ra

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \dots + |a_{10} - b_{10}| \equiv 0 + 1 + \dots + 9 \pmod{10}$$

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \dots + |a_{10} - b_{10}| \equiv 5 \pmod{10}$$

Do đó tổng $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \dots + |a_{10} - b_{10}|$ là số lẻ. Chú ý rằng với mọi x, y nguyên thì

$|x - y|$ có cùng tính chẵn lẻ với $x + y$. Kết hợp với kết quả trên, ta suy ra tổng

$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) + \dots + (a_{10}, b_{10})$, cũng lẻ. Mặt khác, ta lại có

$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) + \dots + (a_{10}, b_{10}) = 1 + 2 + \dots + 20 = 210$ là số chẵn. Mâu thuẫn nhận được

cho ta kết quả cần chứng minh.

Bài 12: Xét một thanh gỗ có hai đầu. Một con kiến đi từ đầu này đến đầu kia của thanh gỗ thì mất 5 phút. Khi đi đến một trong hai đầu thì kiến sẽ rơi xuống đất. Bây giờ giả sử trên thanh gỗ đó có 5 con kiến và đi cùng với tốc độ như vậy nhưng về các hướng khác nhau. Nếu có hai con kiến nào đi ngược hướng và đụng đầu nhau thì chúng lập tức quay ngược lại và đi tiếp.

(Giả sử rằng kích thước và thời gian quay đầu của các con kiến là không đáng kể)

1. Hãy lý luận để chứng tỏ rằng tất cả các con kiến thể nào cũng sẽ rơi hết xuống đất.

2. Cần tối thiểu bao nhiêu phút để chắc chắn rằng cả 5 con kiến đều rơi hết xuống đất?

Giải:

1. Đội cho mỗi con kiến một cái mũ và đánh số 5 chiếc mũ đó (chẳng hạn từ 1 đến 5).

Với hai con kiến đi ngược chiều và gặp nhau thay vì chúng đều quay ngược lại thì chúng chỉ đổi mũ cho nhau và tiếp tục đi theo hướng cũ (Thời gian đổi mũ ko đáng kể do thời gian quay đầu ko đáng kể)

2. Theo cách này thì không có con kiến nào phải quay đầu...

Vậy tất cả đều đi theo một chiều không đổi nên tất cả đều rơi hết xuống đất

Từ đó suy ra quãng đường mà con kiến phải đi xa nhất đúng bằng độ dài thanh gỗ

Thời gian ít nhất để đảm bảo chắc chắn tất cả các con kiến đều rơi xuống đất là 5 phút

Bài 13: Trong mặt phẳng cho 8073 điểm mà diện tích của mọi tam giác với các đỉnh là các điểm đã cho không lớn hơn 1. Chứng minh rằng trong số các điểm đã cho có thể tìm được 2019 điểm nằm trong hoặc nằm trên cạnh của một tam giác có diện tích không lớn hơn 1.

Lời giải

13. Gọi $A_i A_j$ là hai điểm xa nhau nhất trong các điểm thuộc tập hợp 8073 điểm đã cho.

Giả sử A_k là điểm cách xa đoạn thẳng $A_i A_j$ nhất. Khi đó

Tam giác $A_i A_j A_k$ là tam giác lớn nhất và có diện tích không lớn hơn 1

Vẽ các đường thẳng đi qua các điểm A_i, A_j, A_k lần lượt song song với các cạnh của $\Delta A_i A_j A_k$

Ta được 4 tam giác nhỏ bằng nhau và một tam giác lớn chứa cả 4 tam giác nhỏ

Tam giác lớn có diện tích không quá 4 đơn vị. Do đó, tam giác lớn chứa tất cả 8073 điểm đã cho

Ta có 8073 chia cho 4 được 2018 và dư là 1 nên theo nguyên lý Dirichlet suy ra có ít nhất 1 trong 4 tam giác có 1 tam giác chứa 2019 trong 8073 điểm đã cho.

Bài 14: Xét bảng ô vuông cỡ 10×10 gồm 100 hình vuông có cạnh 1 đơn vị. Người ta điền vào mỗi ô vuông của bảng một số nguyên tùy ý sao cho hiệu hai số được điền ở hai ô chung cạnh bất kỳ đều có giá trị tuyệt đối không vượt quá 1. Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên xuất hiện trong bảng ít nhất 6 lần

Lời giải

Gọi số nhỏ nhất được điền vào bảng là x . Khi đó với một số nguyên y được điền vào bảng, ta xét bảng ô vuông $n \times m$ (n dòng, m cột, $0 \leq n \leq 10, 0 \leq m \leq 10$) nối ô vuông điền x và ô vuông điền y như hình vẽ bên dưới, trong đó $a_{11} = x, a_{nm} = y$ (các trường hợp a_{11} ở các góc khác được xét tương tự).

a_{11}	a_{12}	...	a_{1m}
			a_{2m}
			...
			a_{nm}

Ta có:

$$a_{12} \leq a_{11} + 1, a_{13} \leq a_{12} + 1 \leq a_{11} + 2, \dots, a_{1m} \leq a_{11} + m - 1$$

$$\text{Và } a_{2m} \leq a_{1m} + 1 \leq a_{11} + m, a_{3m} \leq a_{2m} + 1 \leq a_{11} + m + 1, \dots, a_{nm} \leq a_{11} + n + m - 2.$$

Như vậy, ta có: $x \leq y \leq x + n + m - 2 \leq x + 18$

Suy ra $y \in \{x, x+1, \dots, x+18\}$. Suy ra có không quá 19 số khác nhau được điền vào bảng ô vuông đã cho. Do bảng đã cho có 100 ô vuông nên theo nguyên lý Dirichlet, có một số xuất hiện không ít hơn $\left\lceil \frac{100}{19} \right\rceil + 1 = 6$ lần.

Bài 15: Trong hình vuông cạnh bằng 1 có 2019 điểm phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn bán kính bằng $\frac{1}{91}$ nằm trong hình vuông đó mà không chứa điểm nào trong 2019 điểm đã cho.

Lời giải

Chia hình vuông đã cho thành 2025 hình vuông nhỏ có cạnh bằng nhau và bằng $\frac{1}{45}$.

Gọi $(C_1), (C_2), \dots, (C_{2025})$ là các hình tròn nội tiếp các hình vuông nhỏ ở trên, chúng có bán kính bằng nhau và bằng $\frac{1}{90}$.

Gọi $(C_1'), (C_2'), \dots, (C_{2025}')$ lần lượt là các hình tròn đồng tâm với các hình tròn ở trên có bán kính là: $\frac{1}{91}$. Khi đó các hình tròn này nằm trong hình vuông và đôi một không có điểm chung (rời nhau).

Trong hình vuông đã cho có các hình tròn rời nhau $(C_1'), (C_2'), \dots, (C_{2025}')$ và có 2019 điểm nên tồn tại một hình tròn trong các hình tròn này không chứa điểm nào trong 2019 điểm đã cho.

Bài 16: Cho dãy gồm 2015 số: $\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots; \frac{1}{2014}; \frac{1}{2015}$.

Người ta biến đổi dãy nói trên bằng cách xóa đi hai số u, v bất kỳ trong dãy và viết thêm vào dãy một số có giá trị bằng $u + v + uv$ vào vị trí của u hoặc v . Cứ làm như thế đối với dãy mới thu được và sau 2014 lần biến đổi, dãy cuối cùng chỉ còn lại một số. Chứng minh rằng giá trị của số cuối cùng đó không phụ thuộc vào việc chọn các số u, v để xóa trong mỗi lần thực hiện việc biến đổi dãy, hãy tìm số cuối cùng đó.

Lời giải

Với hai số thực u, v bất kỳ ta luôn có:

$$(u+1)(v+1) = u + v + uv + 1 = (u + v + uv) + 1 \quad (*)$$

Với dãy số thực bất kỳ $a_1; a_2; \dots; a_{2015}$, ta xét “**Tích thêm T**”:

$$T = (a_1 + 1)(a_2 + 1)(a_3 + 1) \dots (a_{2015} + 1)$$

Áp dụng cách biến đổi dãy như trong đề bài kết hợp với nhận xét (*), ta nhận thấy “**Tích thêm T**” không thay đổi với mọi dãy thu được.

Với dãy đã cho ban đầu của bài toán, “**Tích thêm T**”:

$$T = \left(\frac{1}{1} + 1\right) \left(\frac{1}{2} + 1\right) \left(\frac{1}{3} + 1\right) \left(\frac{1}{4} + 1\right) \dots \left(\frac{1}{2015} + 1\right) = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \dots \frac{2015}{2014} \cdot \frac{2016}{2015} = 2016$$

Giả sử sau 2014 lần biến đổi tùy ý theo yêu cầu, dãy còn lại chỉ còn một số là x thì “**Tích thêm T**” đối với dãy cuối là: $T = x + 1$

Vậy ta có: $x + 1 = 2016 \Rightarrow x = 2015$

Bài toán được giải quyết; và sau 2014 lần biến đổi dãy theo đúng yêu cầu của bài toán ta thu được số 2015.

Bài 17: Trường trung học phổ thông A tổ chức giải bóng đá cho học sinh nhân ngày thành lập đoàn 26 – 3. Biết rằng có n đội tham gia thi đấu vòng tròn một lượt (hai đội bất kỳ đấu với nhau đúng một trận). Đội thắng được 3 điểm, đội hòa được 1 điểm và đội thua không được điểm nào. Kết thúc giải, ban tổ chức nhận thấy số trận thắng thua gấp bốn lần số trận hòa và tổng số điểm của các đội là 336. Hỏi có tất cả bao nhiêu đội bóng tham gia?

Lời giải

Gọi số trận hòa là x ($x \in \mathbb{N}^*$) $\Rightarrow$ tổng số điểm của các trận hòa là $2x$, (1 trận hòa có 2 đội, mỗi đội được 1 điểm)

Theo giả thiết số trận thắng là $4x \Rightarrow$ tổng số điểm của các trận thắng là $12x$

Tổng số điểm các đội là $336 \Rightarrow 2x + 12x = 336 \Rightarrow x = 24$

Vậy ta có tất cả $24 + 4.24 = 120$ trận đấu diễn ra

Từ giả thiết có n đội, mỗi đội đấu với $n - 1$ đội còn lại nên số trận đấu diễn ra là $n(n - 1)$, nhưng đây là tính cả trận lượt đi và lượt về, giả thiết mỗi đội đấu với nhau đúng 1 lần nên tổng số trận

giảm đi một nửa, do đó có tất cả $\frac{n(n - 1)}{2}$ trận đấu

Vậy $\frac{n(n - 1)}{2} = 120 \Rightarrow n(n - 1) = 240 \Rightarrow n = 16, (n = -15 \text{ loại})$

KL : có tất cả 16 đội bóng tham gia.

Bài 18: Cho một lớp học có 35 học sinh, các học sinh này tổ chức một số câu lạc bộ môn học. Mỗi học sinh tham gia đúng một câu lạc bộ. Nếu chọn ra 10 học sinh bất kì thì luôn có ít nhất 3 học sinh tham gia cùng một câu lạc bộ. Chứng minh có một câu lạc bộ gồm ít nhất 9 học sinh.

Lời giải

Giả sử tất cả các câu lạc bộ đều có không quá 8 học sinh.

Gọi N là số câu lạc bộ có hơn 1 học sinh.

Nếu $N > 4$, từ 5 trong số các câu lạc bộ này, chọn mỗi câu lạc bộ 2 học sinh, khi đó 10 học sinh này không thỏa mãn điều kiện bài toán.

Nếu $N < 4$, khi đó số học sinh tham gia các câu lạc bộ này không quá $3.8 = 24$, nghĩa là còn ít nhất $35 - 24 = 11$ học sinh, mỗi học sinh tham gia 1 câu lạc bộ mà câu lạc bộ này chỉ có 1 học sinh. Chọn 10 học sinh trong số này, không thỏa mãn điều kiện bài toán.

Vậy $N = 4$.

Số học sinh tham gia 4 câu lạc bộ này không quá $4.8 = 32$, nghĩa là còn ít nhất 3 học sinh, mỗi học sinh tham gia 1 câu lạc bộ mà câu lạc bộ này chỉ có 1 học sinh.

Chọn 2 trong số học sinh này và mỗi câu lạc bộ trên chọn 2 học sinh, khi đó 10 học sinh không thỏa mãn điều kiện.

Vậy điều giả sử sai, nghĩa là tồn tại một câu lạc bộ có ít nhất 9 học sinh tham gia.

3. Nguyên lý cực hạn, phương pháp quy nạp

A. Bài toán

Bài 1: Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên dương n sao cho

$$\frac{n^{2019}}{2^n} < \frac{1}{2020}$$

B. Lời giải

Bài 1: Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên dương n sao cho

$$\frac{n^{2019}}{2^n} < \frac{1}{2020}$$

Lời giải

Ta chứng minh $n = 1000000000$ thỏa mãn

Thật vậy :

$$\frac{(10^9)^{2019}}{2^{1000000000}} = \frac{10^{9 \cdot 2019}}{2^{1000000000}} < \frac{(2^4)^{9 \cdot 2019}}{2^{1000000000}} = \frac{2^{4 \cdot 9 \cdot 2019}}{2^{1000000000}} = \frac{1}{2^{999927316}} < \frac{1}{2020}$$

Tiếp theo ta chứng minh nhận xét:

Nếu $n = a > 1000000000$ thỏa mãn, thì $n = 2a$ cũng thỏa mãn

Thật vậy

$$\frac{n^{2019}}{2^n} = \frac{(2a)^{2019}}{2^{2a}} = \frac{2^{2019}}{2^a} \cdot \frac{a^{2019}}{2^a} < \frac{2^{2019}}{2^{1000000000}} \cdot \frac{a^{2019}}{2^a} < \frac{a^{2019}}{2^a} < \frac{1}{2020}$$

Từ nhận xét trên kết hợp với quy nạp, ta thấy $n = 2^k \cdot 10^9$ thỏa mãn bài toán với mọi $k \in \mathbb{N}$

Vậy tồn tại vô số số nguyên dương n

CÁC DẠNG BÀI TẬP THI HSG TOÁN 9 QUA CÁC ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI

XI. Dạng 11: Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình, phương trình

A. Bài toán

Bài 1: Một thửa ruộng hình chữ nhật, nếu giảm chiều rộng đi 1m và tăng chiều dài thêm 2m thì diện tích không đổi; ngoài ra nếu giảm chiều dài đi 4m đồng thời tăng chiều rộng thêm 3m ta được hình vuông. Tính diện tích thửa ruộng ban đầu.

Bài 2: Một người mang trứng ra chợ bán. Tổng số trứng bán ra được tính như sau: Ngày thứ nhất bán được 8 trứng và $\frac{1}{8}$ số trứng còn lại. Ngày thứ hai bán được 16 trứng và $\frac{1}{8}$ số trứng còn lại.

Ngày thứ ba bán được 24 trứng và $\frac{1}{8}$ số trứng còn lại. Cứ như vậy cho đến ngày cuối cùng thì bán hết trứng. Biết số trứng bán được mỗi ngày đều bằng nhau. Hỏi tổng số trứng người đó bán được là bao nhiêu và bán hết trong mấy ngày ?

Bài 3: Một người đi từ A đến B với vận tốc và thời gian dự định trước. Nếu người đó đi nhanh hơn mỗi giờ 10km thì tới B sớm hơn dự định 36 phút; nếu người đó đi chậm hơn mỗi giờ 10km thì tới B muộn hơn dự định 54 phút. Hỏi quãng đường AB dài bao nhiêu km?

Bài 4: Tìm tất cả các tam giác vuông có số đo các cạnh là số nguyên và hai lần số đo diện tích bằng ba lần số đo chu vi.

Bài 5: An khởi hành từ Sài Gòn đi Biên Hòa. Sau đó 5 phút, Bình và Cường khởi hành từ Biên Hòa về Sài Gòn. Trên đường đi, An gặp Cường ở địa điểm C rồi gặp Bình ở địa điểm D. Tính vận tốc của mỗi người, biết rằng quãng đường Sài Gòn – Biên Hòa dài 39 km $CD = 6$ km ; Vận tốc của An bằng 1,5 lần vận tốc của Bình và bằng $\frac{3}{4}$ vận tốc của Cường

Bài 6: Quãng đường từ A đến B gồm đoạn lên dốc AC, đoạn nằm ngang CD, đoạn xuống dốc DB, tổng cộng dài 30 km. Một người đi từ A đến B rồi đi từ B về A hết tất cả 4 giờ 25 phút. Tính quãng đường nằm ngang, biết rằng vận tốc lên dốc (cả đi lẫn về) là 10 km/h; vận tốc xuống dốc (cả đi lẫn về) là 20 km/h; vận tốc trên đoạn đường nằm ngang 15 km/h.

Bài 7: An khởi hành từ Sài Gòn đi Biên Hòa. Sau đó 5 phút, Bình và Cường khởi hành từ Biên Hòa về Sài Gòn. Trên đường đi, An gặp Cường ở địa điểm C rồi gặp Bình ở địa điểm D. Tính vận tốc của mỗi người, biết rằng quãng đường Sài Gòn – Biên Hòa dài 39 km $CD = 6$ km ; Vận tốc của An bằng 1,5 lần vận tốc của Bình và bằng $\frac{3}{4}$ vận tốc của Cường

Bài 8: Điểm số trung bình của một vận động viên bắn súng sau 100 lần bắn là 8,35 điểm. Kết quả cụ thể được ghi trong bảng sau, trong đó có ba ô bị mờ ở chữ số hàng đơn vị không đọc được (tại vị trí đánh dấu *).

Điểm số của mỗi lần bắn	10	9	8	7	6	5
Số lần bắn	2*	40	1*	1*	9	7

Em hãy tìm lại các chữ số hàng đơn vị trong ba ô đó.

Bài 9: An khởi hành từ Sài Gòn đi Biên Hòa .Sau đó 5 phút , Bình và Cường khởi hành từ Biên Hòa về Sài Gòn .Trên đường đi , An gặp Cường ở địa điểm C rồi gặp bình ở địa điểm D .Tính vận tốc của mỗi người , biết rằng quãng đường Sài Gòn –Biên Hòa dài 39 km $CD = 6\text{ km}$; Vận tốc của An bằng 1,5 lần vận tốc của Bình và bằng $\frac{3}{4}$ vận tốc của Cường

Bài 10: Một ô tô dự định đi từ tỉnh A đến tỉnh B với vận tốc trung bình là 40 km/h . Lúc đầu ô tô đi với vận tốc đó, khi còn 60 km nữa thì mới được một nửa quãng đường AB, người lái xe tăng thêm vận tốc 10 km/h trên quãng đường còn lại. Do đó ô tô đến tỉnh B sớm hơn 1 giờ so với dự định. Tính quãng đường AB.

Bài 11: Cho tam giác vuông có độ dài các cạnh là những số nguyên và số đo chu vi bằng hai lần số đo diện tích. Tìm độ dài các cạnh của tam giác đó.

Bài 12: Trường trung học phổ thông A tổ chức giải bóng đá cho học sinh nhân ngày thành lập đoàn 26 – 3 . Biết rằng có n đội tham gia thi đấu vòng tròn một lượt (hai đội bất kỳ đấu với nhau đúng một trận). Đội thắng được 3 điểm, đội hòa được 1 điểm và đội thua không được điểm nào. Kết thúc giải, ban tổ chức nhận thấy số trận thắng thua gấp bốn lần số trận hòa và tổng số điểm của các đội là 336. Hỏi có tất cả bao nhiêu đội bóng tham gia?

B. Lời giải

Bài 1: Một thửa ruộng hình chữ nhật, nếu giảm chiều rộng đi 1 m và tăng chiều dài thêm 2 m thì diện tích không đổi; ngoài ra nếu giảm chiều dài đi 4 m đồng thời tăng chiều rộng thêm 3 m ta được hình vuông. Tính diện tích thửa ruộng ban đầu.

Lời giải

Gọi chiều rộng và chiều dài của thửa ruộng hình chữ nhật là x ; y với ($x > 1$; $y > 4$)

Nếu giảm chiều rộng đi 1 m và tăng chiều dài thêm 2 m thì diện tích không đổi nên ta có pt

$$(x-1).(y+2)=xy \quad (1)$$

Nếu giảm chiều dài đi 4 m đồng thời tăng chiều rộng thêm 3 m ta được hình vuông nên ta có pt

$$x+3=y-4 \Leftrightarrow x=y-7 \quad (2)$$

Thế (2) vào (1) ta có:

$$(y-8).(y+2)=y.(y-7)$$

$$\Leftrightarrow y=16 ; x=9$$

Vậy diện tích thửa ruộng ban đầu là: $16.9=144\text{ (m}^2\text{)}$

Bài 2: Một người mang trứng ra chợ bán. Tổng số trứng bán ra được tính như sau: Ngày thứ nhất bán được 8 trứng và $\frac{1}{8}$ số trứng còn lại. Ngày thứ hai bán được 16 trứng và $\frac{1}{8}$ số trứng còn lại.

Ngày thứ ba bán được 24 trứng và $\frac{1}{8}$ số trứng còn lại. Cứ như vậy cho đến ngày cuối cùng thì bán hết trứng. Biết số trứng bán được mỗi ngày đều bằng nhau. Hỏi tổng số trứng người đó bán được là bao nhiêu và bán hết trong mấy ngày ?

Lời giải

Gọi x là số trứng bán được ($x \in N, x > 8$), thì:

Số trứng bán được trong ngày thứ nhất là : $8 + \frac{x-8}{8}$

Số trứng bán được trong ngày thứ hai là : $16 + \frac{x - \left(16 + 8 + \frac{x-8}{8}\right)}{8}$

Theo bài ra ta có phương trình :

$$8 + \frac{x-8}{8} = 16 + \frac{x - \left(16 + 8 + \frac{x-8}{8}\right)}{8}$$

Giải phương trình ta được: $x = 392$.

Vậy tổng số trứng bán được là 392 trứng

Số trứng bán được mỗi ngày là $8 + \frac{392-8}{8} = 56$

Số ngày là $392 : 56 = 7$ ngày.

Bài 3: Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình

Một người đi từ A đến B với vận tốc và thời gian dự định trước. Nếu người đó đi nhanh hơn mỗi giờ 10km thì tới B sớm hơn dự định 36 phút; nếu người đó đi chậm hơn mỗi giờ 10km thì tới B muộn hơn dự định 54 phút. Hỏi quãng đường AB dài bao nhiêu km?

Lời giải

Đổi 36 phút = 0,6h; 54 phút = 0,9h

Gọi vận tốc dự định là: $v(km/h)$ ($v > 0$)

Gọi thời gian dự định là: $t(h)$ ($t > 0$)

Nếu người đó đi thêm đc 10km mỗi giờ thì vận tốc là: $(v+10)(km/h)$

Khi đó người đó đến B sớm hơn dự định 36 phút nên thời gian người đó đi là: $(t-0,6)(h)$

Vì quãng đường AB không đổi nên ta có phương trình là: $(v+10)(t-0,6) = v.t$ (1)

Nếu người đó đi chậm hơn 10km mỗi giờ thì vận tốc là: $(v-10)(km/h)$

Khi đó người đó đến B muộn hơn dự định 54 phút nên thời gian người đó đi là: $(t+0,9)(h)$

Vì quãng đường AB không đổi nên ta có phương trình là:

$$(v-10)(t+0,9) = v.t \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} (v+10)(t-0,6) = v.t \\ (v-10)(t+0,9) = v.t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} vt + 10t - 0,6v - 6 = v.t \\ vt - 10t + 0,9v - 9 = v.t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10t - 0,6v = 6 \\ -10t + 0,9v = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 3,6 \\ v = 50 \end{cases}$$

Vậy quãng đường AB là: $50.3,6 = 180(km)$

Bài 4: Tìm tất cả các tam giác vuông có số đo các cạnh là số nguyên và hai lần số đo diện tích bằng ba lần số đo chu vi.

Lời giải

Gọi a, b, c lần lượt là cạnh huyền và 2 cạnh góc vuông của Δ vuông.

Khi đó: $a, b, c \in \mathbb{N}$ và $a \geq 5; b, c \geq 3$

$$\text{Ta có hệ phương trình: } \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 & (1) \\ bc = 3(a + b + c) & (2) \end{cases}$$

$$(1): a^2 = b^2 + c^2 = (b + c)^2 - 2bc = (b + c)^2 - 6(a + b + c)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 6a + 9 = (b + c)^2 - 6(b + c) + 9$$

$$\Leftrightarrow (a + 3)^2 = (b + c - 3)^2$$

$$\Leftrightarrow a + 3 = b + c - 3$$

$$\Leftrightarrow a = b + c - 6$$

$$(2): bc = 3(b + c - 6 + b + c) = 3(2b + 2c - 6)$$

$$\Leftrightarrow (b - 6)(c - 6) = 18$$

Nên ta có các trường hợp sau:

$$1. b - 6 = 1 \text{ và } c - 6 = 18 \text{ thì } b = 7; c = 24 \text{ và } a = 25$$

$$2. b - 6 = 2 \text{ và } c - 6 = 9 \text{ thì } b = 8; c = 15 \text{ và } a = 17$$

$$3. b - 6 = 3 \text{ và } c - 6 = 6 \text{ thì } b = 9; c = 12 \text{ và } a = 15$$

Bài 5: An khởi hành từ Sài Gòn đi Biên Hòa. Sau đó 5 phút, Bình và Cường khởi hành từ Biên Hòa về Sài Gòn. Trên đường đi, An gặp Cường ở địa điểm C rồi gặp Bình ở địa điểm D . Tính vận tốc của mỗi người, biết rằng quãng đường Sài Gòn – Biên Hòa dài 39 km $CD = 6 \text{ km}$; Vận tốc của An bằng 1,5 lần vận tốc của Bình và bằng $\frac{3}{4}$ vận tốc của Cường

Lời giải

Gọi x, y, z là vận tốc của An, Bình, Cường

$$\text{Suy ra } y = \frac{2}{3}x \text{ và } z = \frac{4}{3}x$$

Gọi S là quãng đường mà An đi được cho tới khi gặp Cường. Kết hợp với $CD = 6 \text{ km}$ suy ra quãng đường mà An đã đi được cho tới khi gặp Bình là $39 - (S + 6) = 33 - S$. Theo đề bài ta có hệ phương trình

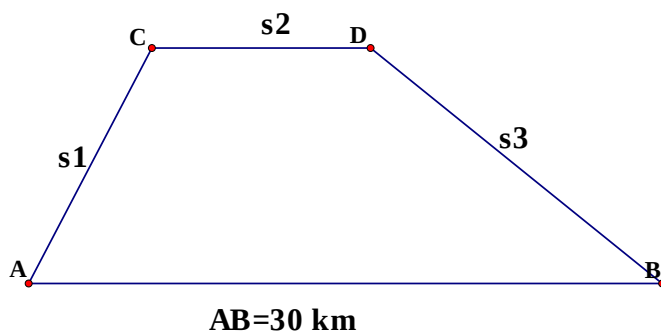
$$\begin{cases} \frac{S}{x} - \frac{39 - S}{\frac{4}{3}x} = \frac{1}{12} \\ \frac{S + 6}{x} - \frac{33 - S}{\frac{2}{3}x} = \frac{1}{12} \end{cases} \quad \text{Giải hệ này cho ta } x = 48 \text{ vậy vận tốc của An là } 48 \text{ km/h} \text{ vận tốc của Bình là}$$

32 km/h vận tốc của Cường là 64 km/h

Bài 6: Quãng đường từ A đến B gồm đoạn lên dốc AC , đoạn nằm ngang CD , đoạn xuống dốc DB , tổng cộng dài 30 km . Một người đi từ A đến B rồi đi từ B về A hết tất cả 4 giờ 25 phút.

Tính quãng đường nằm ngang, biết rằng vận tốc lên dốc (cả đi lẫn về) là 10 km/h ; vận tốc xuống dốc (cả đi lẫn về) là 20 km/h ; vận tốc trên đoạn đường nằm ngang 15 km/h .

Lời giải



Gọi $AC = s_1$; $CD = s_2$; $BD = s_3$ $s_1 > 0$; $s_2 > 0$; $s_3 > 0$

Ta có: $s_1 + s_2 + s_3 = 30(km)$.

Gọi vận tốc lên, vận tốc ngang, xuống lần lượt là $v_1; v_2; v_3$.

Thời gian đi và về là: $4h 25' = \frac{53}{12} h$.

Theo đề bài, ta có phương trình: $\frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} + \frac{s_3}{v_3} + \frac{s_1}{v_3} + \frac{s_2}{v_2} + \frac{s_3}{v_1} = \frac{53}{12}$

$$\Leftrightarrow s_1 \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_3} \right) + s_3 \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_3} \right) + \frac{2s_2}{v_2} = \frac{53}{12}$$

$$\Leftrightarrow s_1 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{20} \right) + s_3 \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{10} \right) + \frac{2s_2}{15} = \frac{53}{12}$$

$$\Leftrightarrow (s_1 + s_3) \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{20} \right) + \frac{2s_2}{15} = \frac{53}{12}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{20}(30 - s_2) \frac{2s_2}{15} = \frac{53}{12}$$

$$\Leftrightarrow s_2 = 5(km)$$

Vậy quãng đường ngang CD là $5(km)$.

Bài 7: An khởi hành từ Sài Gòn đi Biên Hòa .Sau đó 5 phút , Bình và Cường khởi hành từ Biên Hòa về Sài Gòn .Trên đường đi , An gặp Cường ở địa điểm C rồi gặp bình ở địa điểm D .Tính vận tốc của mỗi người , biết rằng quãng đường Sài Gòn –Biên Hòa dài $39 km$ $CD = 6 km$; Vận tốc của An bằng 1,5 lần vận tốc của Bình và bằng $\frac{3}{4}$ vận tốc của Cường

Lời giải

Gọi x, y, z là vận tốc của An , Bình , Cường

Suy ra $y = \frac{2}{3}x$ và $z = \frac{4}{3}x$

Gọi S là quãng đường mà An đi được cho tới khi gặp cường .Kết hợp với $CD = 6 km$ suy ra quãng đường mà An đã đi được cho tới khi gặp Bình là $39 - (S + 6) = 33 - S$ Theo đề bài ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{S}{x} - \frac{39-S}{\frac{4}{3}x} = \frac{1}{12} \\ \frac{S+6}{x} - \frac{33-S}{\frac{2}{3}x} = \frac{1}{12} \end{cases}$$

Giải hệ này cho ta $x = 48$ vậy vận tốc của An là 48 km/h vận tốc của Bình

là 32 km/h vận tốc của Cường là 64 km/h

Bài 8:

Điểm số trung bình của một vận động viên bắn súng sau 100 lần bắn là 8,35 điểm. Kết quả cụ thể được ghi trong bảng sau, trong đó có ba ô bị mờ ở chữ số hàng đơn vị không đọc được (tại vị trí đánh dấu *).

Điểm số của mỗi lần bắn	10	9	8	7	6	5
Số lần bắn	2*	40	1*	1*	9	7

Em hãy tìm lại các chữ số hàng đơn vị trong ba ô đó.

Lời giải

Tổng các số tại các ô bị mờ số là $100 - (40 + 9 + 7) = 44$

Tổng số điểm trong 100 lần bắn là $8,35 \cdot 100 = 835$

Tổng số điểm tại các vị trí ô không bị mất số là $9 \cdot 40 + 6 \cdot 9 + 5 \cdot 3 = 449$

Suy ra tổng số điểm bắn được tại vị trí các ô bị mất là $835 - 449 = 386$, đây là số chẵn

Suy ra tại ô 7 điểm số lần bắn chỉ có thể là số chẵn, vì vậy chỉ có 3 khả năng là 10, 12, 14.

Gọi x, y lần lượt là số lần bắn được 10 điểm và 8 điểm

Điều kiện: $x, y \in \mathbb{N}; 20 \leq x < 30; 10 \leq y < 20$

Trường hợp 1: Ô 7 điểm nhận giá trị 10, khi đó theo đề bài ta có hệ phương trình.

$$\begin{cases} x + y = 34 \\ 449 + 10x + 8y + 70 = 835 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 34 \\ 10x + 8y = 316 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 22 \\ y = 12 \end{cases} \text{ thỏa điều kiện}$$

Trường hợp 2: Ô 7 điểm nhận giá trị 12, khi đó theo đề bài ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 32 \\ 449 + 10x + 8y + 84 = 835 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 32 \\ 10x + 8y = 316 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 23 \\ y = 9 \end{cases} \text{ loại}$$

Trường hợp 3: Ô 7 điểm nhận giá trị 14, khi đó $x = 20$ và $y = 10$ suy ra

Tổng số điểm bắn được là:

$$20 \cdot 10 + 9 \cdot 40 + 8 \cdot 10 + 7 \cdot 14 + 6 \cdot 9 + 5 \cdot 7 = 827 \text{ không phù hợp}$$

Vậy chữ số hàng đơn vị tại các ô 10 điểm, 8 điểm, 7 điểm lần lượt là 2, 2, 0

Bài 9: An khởi hành từ Sài Gòn đi Biên Hòa. Sau đó 5 phút, Bình và Cường khởi hành từ Biên Hòa về Sài Gòn. Trên đường đi, An gặp Cường ở địa điểm C rồi gặp Bình ở địa điểm D. Tính vận tốc của mỗi người, biết rằng quãng đường Sài Gòn – Biên Hòa dài 39 km $CD = 6 \text{ km}$; Vận tốc của

An bằng 1,5 lần vận tốc của Bình và bằng $\frac{3}{4}$ vận tốc của Cường

Lời giải

Gọi x, y, z là vận tốc của An, Bình, Cường

$$\text{Suy ra } y = \frac{2}{3}x \text{ và } z = \frac{4}{3}x$$

Gọi S là quãng đường mà An đi được cho tới khi gặp Cường. Kết hợp với $CD = 6 \text{ km}$ suy ra quãng đường mà An đã đi được cho tới khi gặp Bình là $39 - (S + 6) = 33 - S$ Theo đề bài ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{S}{x} - \frac{39-S}{\frac{4}{3}x} = \frac{1}{12} \\ \frac{S+6}{x} - \frac{33-S}{\frac{2}{3}x} = \frac{1}{12} \end{cases}$$

Giải hệ này cho ta $x = 48$ vậy vận tốc của An là 48 km/h vận tốc của Bình

là 32 km/h vận tốc của Cường là 64 km/h

Bài 10: Một ô tô dự định đi từ tỉnh A đến tỉnh B với vận tốc trung bình là 40 km/h . Lúc đầu ô tô đi với vận tốc đó, khi còn 60 km nữa thì mới được một nửa quãng đường AB, người lái xe tăng thêm vận tốc 10 km/h trên quãng đường còn lại. Do đó ô tô đến tỉnh B sớm hơn 1 giờ so với dự định. Tính quãng đường AB

Lời giải

Gọi x là quãng đường AB ($x > 0$)

Quãng đường ô tô đi với vận tốc ban đầu là: $\frac{x}{2} - 60$

Quãng đường ô tô đi với vận tốc tăng lên là $\frac{x}{2} + 60$

Thời gian ô tô đi lúc ban đầu là: $\frac{x-120}{80}$

Thời gian ô tô đi lúc tăng vận tốc là: $\frac{x+120}{100}$

Theo đề bài ta có phương trình:

$$\frac{x-120}{80} + \frac{x+120}{100} = \frac{x}{40} - 1$$

Giải phương trình được $x = 280$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy quãng đường AB dài 280 km .

Bài 11: Cho tam giác vuông có độ dài các cạnh là những số nguyên và số đo chu vi bằng hai lần số đo diện tích. Tìm độ dài các cạnh của tam giác đó.

Lời giải

Gọi độ dài các cạnh của tam giác vuông là a, b, c (a là độ dài cạnh huyền).

Theo giả thiết và định lý Pitago, ta có:

$$\begin{cases} a + b + c = 2bc & (1) \\ b^2 + c^2 = a^2 & (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow b^2 + c^2 + 2bc = 2(a + b + c) + a^2$$

$$\Leftrightarrow (b + c - 1)^2 = (a + 1)^2 \Leftrightarrow (b + c - 1)^2 - (a + 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (b + c - 1 + a + 1)(b + c - 1 - a - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (b + c + a)(b + c - a - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b + c - 2 = a \\ a + b + c = 0 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Thế $a = b + c - 2$ vào (2) ta được:

Liên hệ tài liệu word toán zalo: 039.373.2038

$$2 + bc - 2b - 2c = 0 \Leftrightarrow (b-2)(c-2) = 2$$

Vì b, c là các số nguyên dương nên ta có các trường hợp sau:

Trường hợp	$b - 2$	$c - 2$	B	c	a	Kết luận
1	1	2	3	4	5	Nhận
2	2	1	4	3	5	Nhận
3	-1	-2	1	0	-1	Loại
4	-2	-1	0	1	-1	Loại

Vậy tam giác cần tìm có các cạnh là 3; 4; 5.

Bài 12: Trường trung học phổ thông A tổ chức giải bóng đá cho học sinh nhân ngày thành lập đoàn 26 – 3. Biết rằng có n đội tham gia thi đấu vòng tròn một lượt (hai đội bất kỳ đấu với nhau đúng một trận). Đội thắng được 3 điểm, đội hòa được 1 điểm và đội thua không được điểm nào. Kết thúc giải, ban tổ chức nhận thấy số trận thắng thua gấp bốn lần số trận hòa và tổng số điểm của các đội là 336. Hỏi có tất cả bao nhiêu đội bóng tham gia?

Lời giải

Gọi số trận hòa là x ($x \in \mathbb{N}^*$) $\Rightarrow$ tổng số điểm của các trận hòa là $2x$, (1 trận hòa có 2 đội, mỗi đội được 1 điểm)

Theo giả thiết số trận thắng là $4x \Rightarrow$ tổng số điểm của các trận thắng là $12x$

Tổng số điểm các đội là 336 $\Rightarrow 2x + 12x = 336 \Rightarrow x = 24$

Vậy ta có tất cả $24 + 4.24 = 120$ trận đấu diễn ra

Từ giả thiết có n đội, mỗi đội đấu với $n - 1$ đội còn lại nên số trận đấu diễn ra là $n(n - 1)$, nhưng đây là tính cả trận lượt đi và lượt về, giả thiết mỗi đội đấu với nhau đúng 1 lần nên tổng số trận

giảm đi một nửa, do đó có tất cả $\frac{n(n-1)}{2}$ trận đấu

Do đó: $\frac{n(n-1)}{2} = 120 \Rightarrow n(n-1) = 240 \Rightarrow n = 16, (n = -15 \text{ loại})$

Vậy có tất cả 16 đội bóng tham gia.